Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

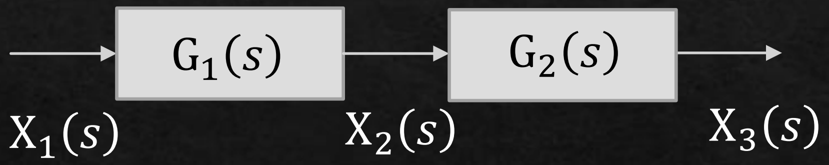
Εισαγωγή στον ελεγκτή PID

Περιεχόμενα

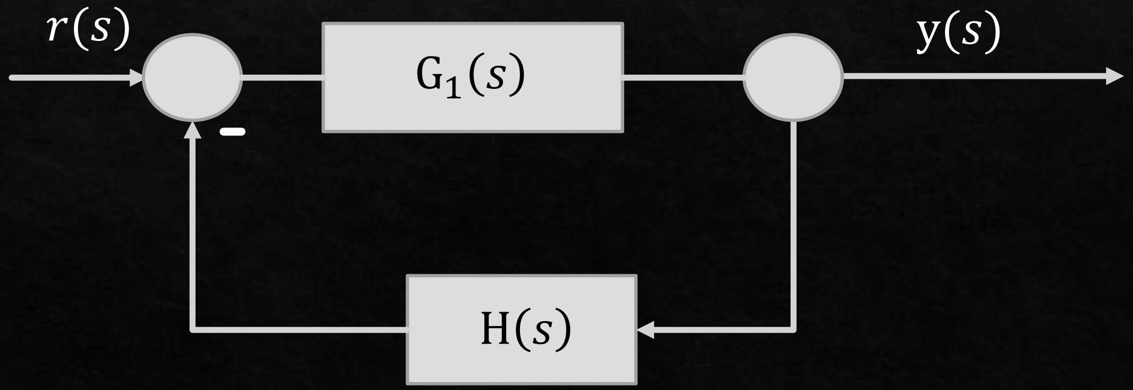
- Σύνδεση συστημάτων
- Προδιαγραφές απόκρισης γραμμικών συστημάτων
- Ελεγκτής PID
- Ρύθμιση κερδών PID
- Παράδειγμα με το μοντέλο του τρένου του εργαστηρίου 1
- Ασκήσεις

Σύνδεση συστημάτων

- Όταν συνδέουμε δύο απομονωμένα συστήματα σε σειρά, για τις συναρτήσεις μεταφοράς τους ισχύει: $G(s) \; = G_1(s)G_2(s)$ ($\gg$ G = series(G1, G2)) (Η σειρά των ορισμάτων έχει σημασία)



- Συστήματα κλειστού βρόχου

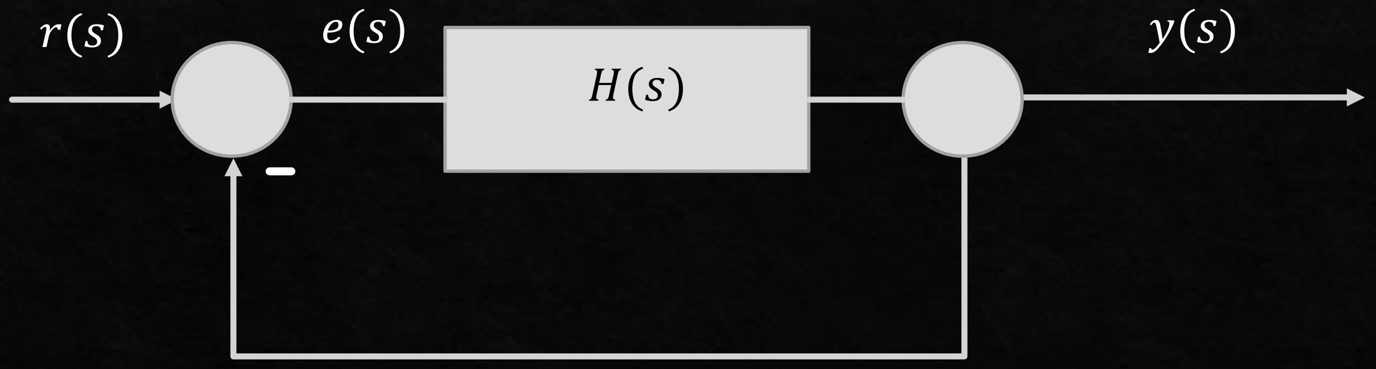


$$T(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$\gg T = feedback(G1, H)$
$\gg pole(T)$ (πόλοι ΣΚΒ)
$\gg zero(T)$ (μηδενικά ΣΚΒ)
$\gg dcgain(T)$ (dc gain ΣΚΒ)

Σφάλμα μόνιμης κατάστασης (ΣΜΚ)

- Σφάλμα παρακολούθησης: $e(s) = r(s) - y(s)$
- Για το ΣΚΒ: $e(s) = \frac{1}{1+H(s)} r(s)$
- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης: $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s e(s)$ (Σύμφωνα με το θεώρημα τελικής τιμής)



Έλεγχος ΣΜΚ

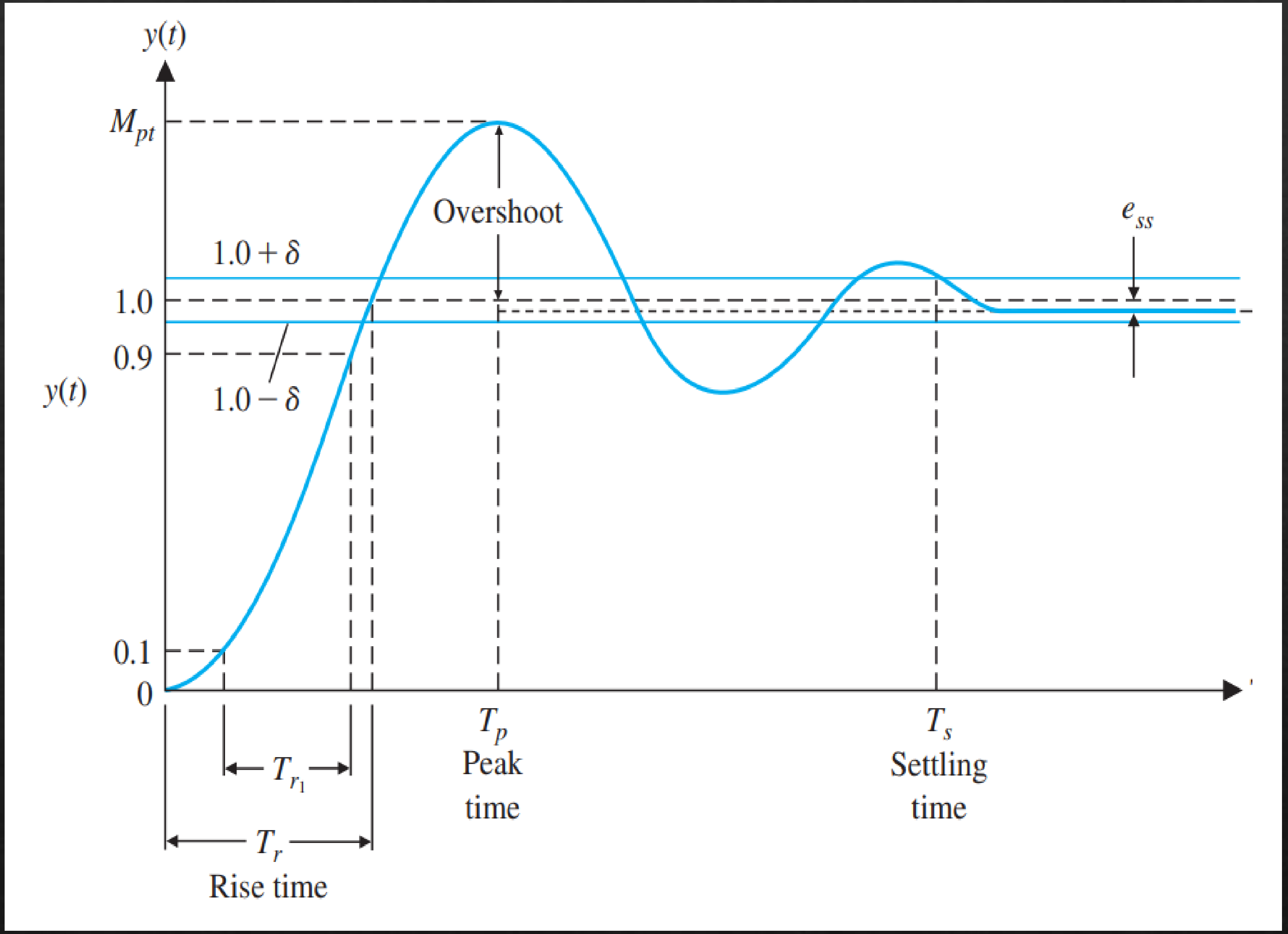
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν έχει πόλους <u>μόνο</u> στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
- Ένας πόλος στο 0 λειτουργεί σαν ολοκληρωτής, επειδή έχει την ιδιότητα να ολοκληρώνει το σήμα εισόδου.
- Ο ελεγκτής PI (Proportional & Integral) είναι ένας ολοκληρωτής που προσθέτει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού και της ολοκλήρωσης του σφάλματος στην είσοδό του. Ειδικότερα:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t)dt$$

$$u(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right)\mathrm{e(s)} = \frac{\left(s + \frac{K_I}{K_p}\right)}{s} e(s)$$

Ρυθμός σύγκλισης ΣΜΚ 2ου βαθμού

- $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$
- ω_n: φυσική συχνότητα
- ζ: συντελεστής απόσβεσης
  - $\zeta > 1$ (2 πραγματικοί πόλοι)
  - $\zeta = 1$ (1 διπλό πραγματικό πόλο)
  - $\zeta < 1$ (2 μιγαδικοί συζυγείς πόλοι)
- Χρόνος αποκατάστασης: $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (μόνο αν το σύστημα έχει μιγαδικούς συζυγείς πόλους)
- Ποσοστό υπερύψωσης: $P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- Χρόνος ανόδου: $T_r = \frac{2.16\zeta+0.6}{\omega_n}$ (ακριβές μόνο για $0.3 \le \zeta \le 0.8$)



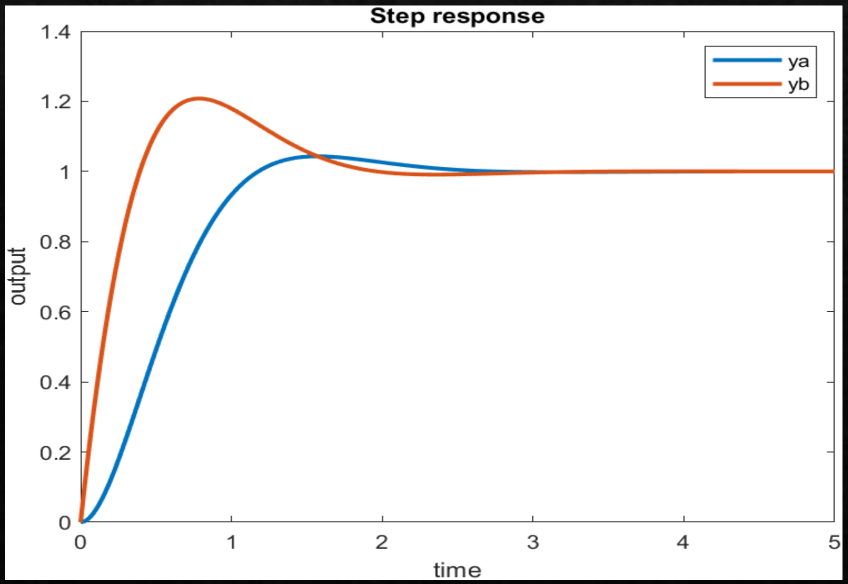
Επίδραση πόλων και μηδενικών στο ΣΚΒ

- Έστω μια συνάρτηση μεταφοράς που έχει μηδενικό στο –z. Ο τελεστής s εκφράζει την παραγώγιση μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου.
- Για την έξοδο του συστήματος ισχύει: $y_z(t) = y(t) + \frac{\dot{y}(t)}{z}$

Επίδραση μηδενικού στον ρυθμό σύγκλισης της εξόδου

- Παράδειγμα: Έστω τα συστήματα: $H_a(s) = \frac{8}{(s+2)^2+4}, H_b(s) = \frac{4(s+2)}{(s+2)^2+4}$
- Προσομοιώνοντας την βηματική απόκριση των H_a , H_b στο MATLAB προκύπτει:

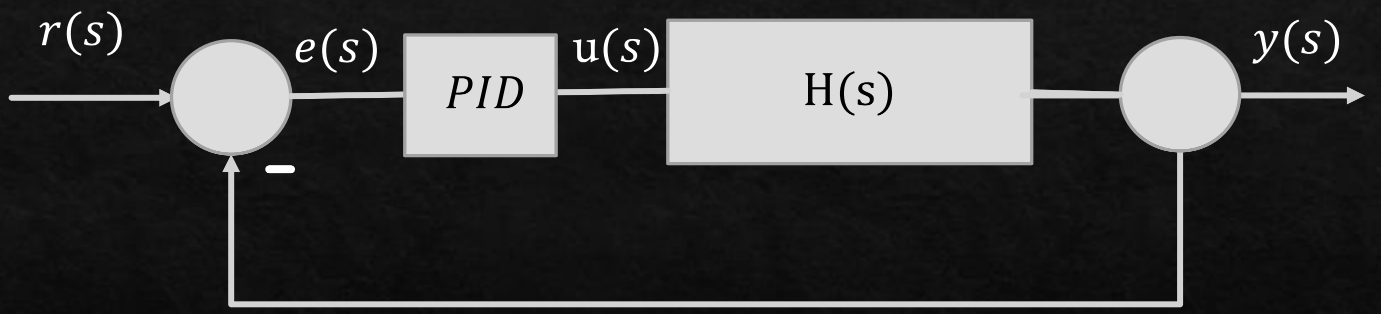
```
clc;close all;clear all;
Ha = tf([8],[1 4 8]);
Hb = tf([4 8],[1 4 8]);
t = 0:0.01:5;
ya = step(Ha,t);
yb = step(Hb,t);
figure(1)
plot(t,ya,t,yb,LineWidth=2)
xlabel("time")
ylabel("output")
title("Step response")
legend("ya","yb")
```



- Βλέπουμε ότι το σύστημα με το μηδενικό έχει πιο γρήγορη απόκριση, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και η υπερύψωση.
- Συνήθως το ζ ως προδιαγραφή είναι ανάμεσα στο 0.4 και 0.8, ενώ αν δεν θέλουμε καθόλου υπερύψωση, παίρνουμε $\zeta \geq 1$, που οδηγεί σε πραγματικές ρίζες.

Ελεγκτής PID

- Ο ελεγκτής PID δεν απαιτεί γνώση του συστήματος, αλλά σχεδιάζεται με τον συνεχή υπολογισμό του σφάλματος παρακολούθησης $e(t)$.
- Διόρθωση του σφάλματος με βάση τον αναλογικό, ολοκληρωτικό και διαφορικό όρο (συμβολίζονται αντίστοιχα ως P, I και D), δηλαδή, "ρύθμιση" των παραμέτρων του ενώ το σύστημα είναι σε λειτουργία.
- Αναπαράσταση ΣΚΒ:



- Συνάρτηση μεταφοράς του PID: $\mathrm{C(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$
- PID στο MATLAB:
  - $\gg \mathrm{C = pid(kp, ki, kd)}$ ή
  - $\gg \mathrm{C = tf([kd\ kp\ ki], [1\ 0])}$

ΣΚΒ στο MATLAB: $\gg \mathrm{G = feedback(series(C, H), 1)}$

Σημασία των κερδών του PID

Απόκριση	Χρόνος ανόδου	P.O.	Χρόνος αποκατάστασης	Σφάλμα μόνιμης κατάστασης
Kp	Μείωση	Αύξηση	Μικρή μεταβολή	Μείωση
Ki	Μείωση	Αύξηση	Αύξηση	Εξάλειψη
Kd	Μικρή μεταβολή	Μείωση	Μείωση	Μικρή μεταβολή

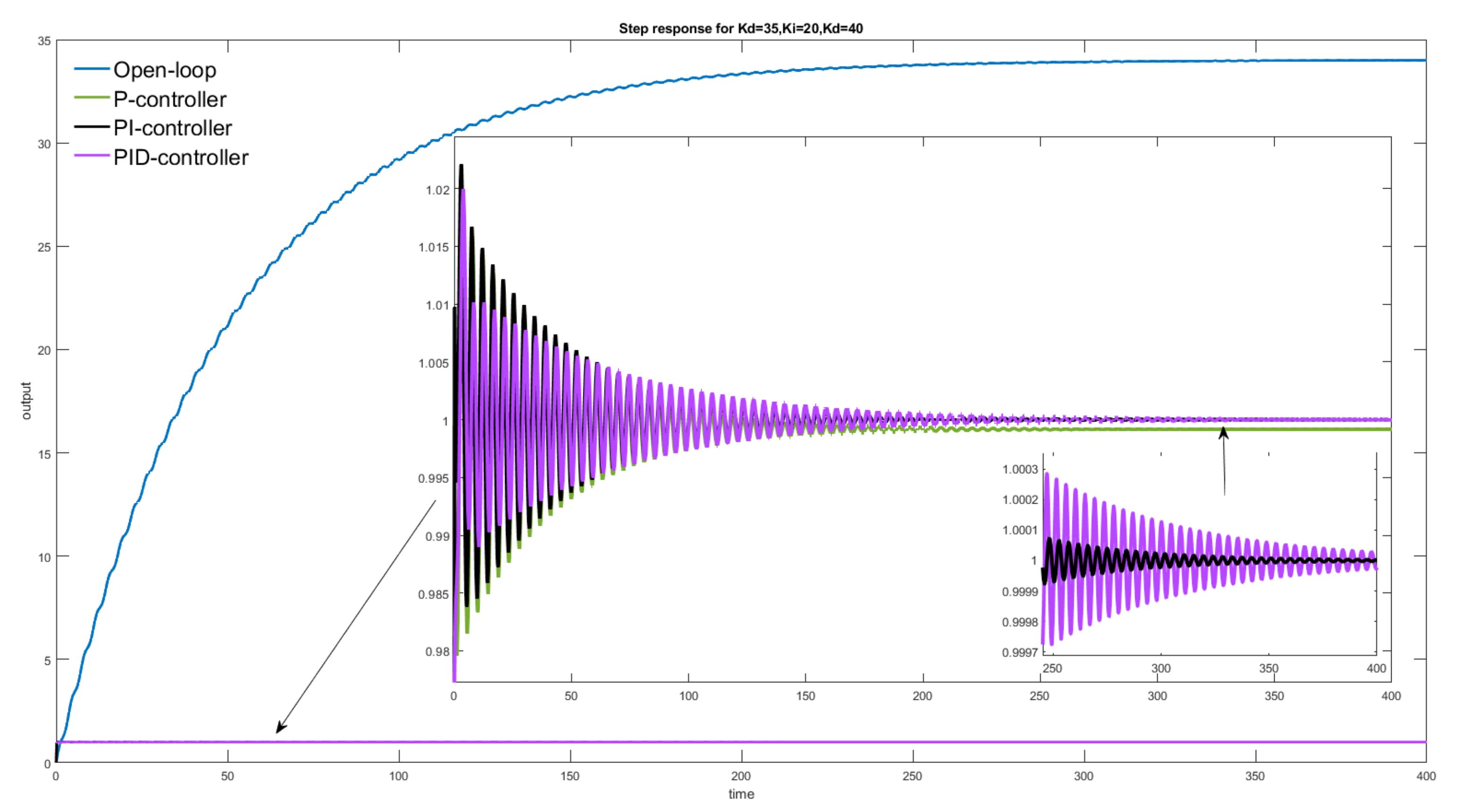
- Να σημειωθεί ότι αυτές οι συσχετίσεις μπορεί να μην είναι ακριβείς, καθώς υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των Kp, Ki και Kd.
- Στην πραγματικότητα, η αλλαγή μιας από αυτές τις μεταβλητές μπορεί να αλλάξει το αποτέλεσμα των άλλων δύο.
- Για αυτό το λόγο, ο πίνακας πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο ως αναφορά για τη ρύθμιση των Kp,Ki,Kd.

Ρύθμιση κερδών PID (trial & error)

1. Ορίστε τα Ki=Kd=0 και αυξήστε το Kp μέχρι η έξοδος του ελεγκτή να αρχίσει να ταλαντώνεται.
2. Μόλις φτάσετε στο σημείο των ταλαντώσεων, μειώστε το Kp κατά μια μικρή ποσότητα για να αποφύγετε την μεγάλη υπερύψωση.
3. Αυξήστε το Ki μέχρι να διορθωθεί σφάλμα μόνιμης κατάστασης εντός ενός λογικού χρονικού διαστήματος.
4. Προσθέστε το Kd για να βελτιώσετε το χρόνο απόκρισης και να μειώσετε την υπερύψωση, αλλά προσέξτε, καθώς αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια.
5. Επαναλάβετε τα βήματα 1-4 μέχρι να πετύχετε την επιθυμητή απόκριση του ΣΚΒ.

Παράδειγμα

- Θεωρούμε το δυναμικό μοντέλο του τρένου που περιγράψαμε στο 1ο εργαστήριο. Το αποτέλεσμα της υλοποίησης του παραπάνω αλγορίθμου ρύθμισης των κερδών για μοναδιαία βηματική απόκριση καθώς και η απόκριση χωρίς την επιβολή ελέγχου παρουσιάζεται στο ακόλουθο γράφημα:



Άσκηση 1

Ένα ΣΚΒ μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης περιγράφεται από τη ΣΜ:

$$\mathrm{T(s)} = \frac{s+7}{s^2(s+10)}$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης lsim να βρεθεί η απόκριση του ΣΚΒ για μοναδιαία συνάρτηση ράμπας u(t)=t για χρονικό διάστημα t = 25 seconds. Ποιο είναι το σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση και τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια του συστήματος;

Hint: Χρησιμοποιείστε την εντολή conv() για να δημιουργήσετε τον παρονομαστή της ΣΜ.

Άσκηση 2

Στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου θεωρείται πολύ σημαντική η γνώση της σχέσης της θέσης των πόλων του ΣΚΒ και της αντίστοιχης χρονικής απόκρισης. Έχοντας υπ’ όψην το παρακάτω σχήμα θεωρήστε τις ακόλουθες τέσσερεις περιπτώσεις:

a) $\omega_n = 2, \zeta = 0$

b) $\omega_n = 2, \zeta = 0.1$

c) $\omega_n = 1, \zeta = 0$

d) $\omega_n = 1, \zeta = 0.2$

$$\xrightarrow{r(s)} \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \xrightarrow{\mathrm{y}(s)}$$

Με τη βοήθεια των συναρτήσεων impulse και subplot να κατασκευαστούν τέσσερα διαφορετικά διαγράμματα, κάθε ένα από τα οποία θα αντιστοιχεί στην παράσταση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για κάθε μια ξεχωριστή περίπτωση από τις παραπάνω και για χρόνο t = 30s. Τι συμπεραίνετε για την επίδραση του ζ στο ΣΚΒ;

Άσκηση 3

Ένας DC κινητήρας περιγράφεται από το παρακάτω απλοποιημένο μοντέλο:

$$T(s) = \frac{K_t}{(Js+b)(Ls+R)+K_t^2}$$

Όπου η είσοδος του συστήματος είναι η τάση στα άκρα του κυκλώματος και έξοδος είναι η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ rad/s. Οι παράμετροι του συστήματος είναι: $J = 0.01$, $b = 0.1$, $K_t = 0.01$, $R = 1$, $L = 0.5$.

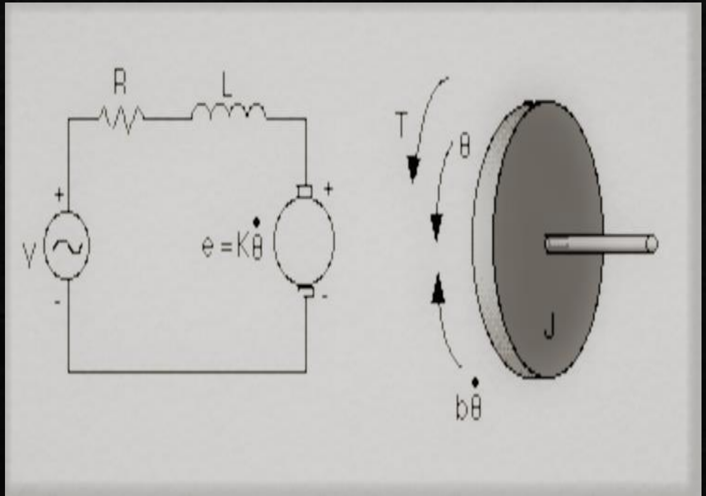
Να σχεδιαστεί ελεγκτής ώστε ο κινητήρας να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 1 rad/s για 3 δευτερόλεπτα και η απόκριση του συστήματος να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια σχεδίασης:

a) Χρόνος αποκατάστασης μικρότερος από 2 s.

b) Υπερύψωση λιγότερο από 5%.

c) Σφάλμα μόνιμης κατάστασης λιγότερο από 1%.

Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση stepinfo() για να επικυρώσετε την ικανοποίηση των παραπάνω προδιαγραφών από το ΣΚΒ



Άσκηση 4

Ένα σύστημα αυτομάτου πιλότου που χρησιμοποιείται για να διατηρεί σταθερή την πορεία ενός αεροσκάφους φαίνεται στο επόμενο λειτουργικό διάγραμμα.

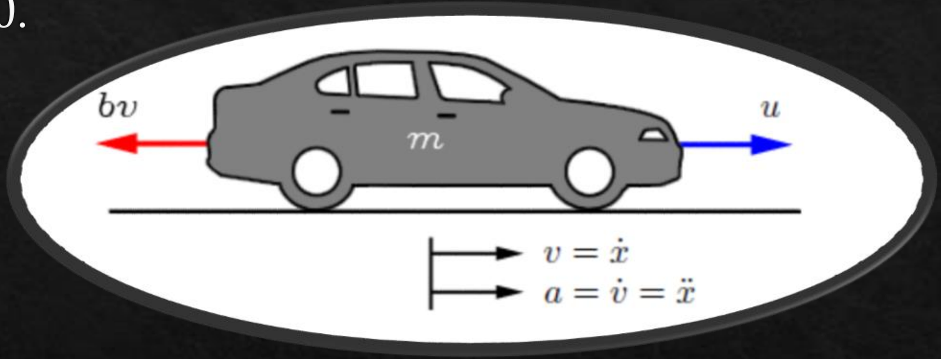
Όπου το δυναμικό μοντέλο του σερβοκινητήρα ανύψωσης περιγράφεται από την ΣΜ $\mathrm{M}(s) = \frac{-10}{s+10}$ και αντίστοιχα το μοντέλο του αεροσκάφους από τη: $\mathrm{G}(s) = \frac{-(s+5)}{s(s^2+3.5s+6)}$.

a) Έστω ότι ο ελεγκτής του συστήματος αντιστοιχεί σε μια απλή μονάδα σταθερού κέρδους, $C(s) = 2$. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση lsim, να υπολογιστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης τους συστήματος με μια είσοδο ράμπας $\theta_d(t) = at$, όπου $a = 0.5°/\mathrm{s}$. Να προσδιοριστεί το σφάλμα του ύψους μετά από διάστημα 10 δευτερολέπτων.

b) Να αντικατασταθεί ο απλός αναλογικός ελεγκτής $C(s)$, από ένα PID ελεγκτή του οποίου τα κέρδη θα ρυθμιστούν, και να επαναληφθεί η διαδικασία του ερωτήματος 1 ώστε να βελτιωθεί ο ρυθμός σύγκλισης και το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του ΣΚΒ.

Άσκηση 5

Το απλοποιημένο μοντέλο για το πρόβλημα του cruise control δίνεται παρακάτω για ένα αυτοκίνητο με μάζα m=1000 kg και συντελεστή τριβής b=50.



a) Υπολογίστε τη ΣΜ του συστήματος με δεδομένη είσοδο τη δύναμη u(t) και έξοδο την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

b) Σχεδιάστε και προσομοιώστε με τη βοήθεια του MATLAB έναν ελεγκτή ο οποίος θα επιβάλλει στο αυτοκίνητο σταθερή ταχύτητα v=10m/s για t=20s και θα ικανοποιεί τις παρακάτω προδιαγραφές

   a) Χρόνος ανόδου < 5sec

   b) P.O. < 10%

   c) Σφάλμα μόνιμης κατάστασης <2%