

Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Ανάλυση συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας

Περιεχόμενα

- ❖ Εισαγωγή στην αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας (ΠΣ)
- ❖ Διάγραμμα Bode
- ❖ Περιθώρια κέρδους και φάσης
- ❖ Εύρος ζώνης (BW)
- ❖ Ανάλυση στο ΠΣ με τη χρήση MATLAB
- ❖ Ασκήσεις

Εισαγωγή

- ❖ Η μέθοδος απόκρισης συχνότητας μπορεί να είναι λιγότερο διαισθητική από την ανάλυση στο πεδίο του χρόνου, ωστόσο έχει ορισμένα πλεονεκτήματα, ειδικά σε πραγματικές καταστάσεις όπως η μοντελοποίηση ΣΜ από φυσικά δεδομένα.
- ❖ Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος μπορεί να παρασταθεί μέσω των διαγραμμάτων
 - ❖ Bode
 - ❖ Nyquist
- ❖ Και οι δύο μέθοδοι εμφανίζουν τις ίδιες πληροφορίες, η διαφορά έγκειται στον τρόπο παρουσίασης των πληροφοριών. Στο παρόν εργαστήριο θα μελετήσουμε μόνο τη μέθοδο διαγραμμάτων Bode.

Απόκριση Συχνότητας

- ❖ Η απόκριση συχνότητας είναι μια αναπαράσταση της απόκρισης του συστήματος στη **μόνιμη κατάσταση**, για ημιτονοειδείς εισόδους σε ποικίλες συχνότητες.
- ❖ Η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος σε μια ημιτονοειδή είσοδο είναι ένα ημιτονοειδές της ίδιας συχνότητας αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση.
- ❖ Η απόκριση συχνότητας ορίζεται ως οι διαφορές πλάτους και φάσης μεταξύ των ημιτονοειδών εισόδου και εξόδου.
- ❖ Σε αυτό το εργαστήριο, θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόκριση συχνότητας ανοιχτού βρόχου ενός συστήματος για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του σε κλειστό βρόχο.
- ❖ Για να σχεδιάσουμε την απόκριση συχνότητας, δημιουργούμε ένα διάνυσμα συχνοτήτων (που κυμαίνονται μεταξύ μηδέν και άπειρο) και υπολογίζουμε την τιμή της ΣΜ σε αυτές τις συχνότητες. Αν $G(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου ενός συστήματος και w είναι το διάνυσμα συχνότητας, τότε σχεδιάζουμε το διάγραμμα $G(j^*w)$ versus w .
- ❖ Δεδομένου ότι το $G(j^*w)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, μπορούμε να σχεδιάσουμε τόσο το πλάτος όσο και τη φάση του (το διάγραμμα Bode).

Διάγραμμα Bode

- ❖ Όπως σημειώθηκε παραπάνω, το διάγραμμα Bode είναι η αναπαράσταση του πλάτους και της φάσης του $G(j^*w)$ (όπου το διάνυσμα συχνότητας w περιέχει μόνο θετικές συχνότητες).
- ❖ Για να τυπώσετε το διάγραμμα Bode μιας ΣΜ G_s στο MATLAB, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την εντολή `bode(G_s)`.

❖ Παράδειγμα: $G(s) = \frac{50}{s^3 + 9s^2 + 30s + 40}$

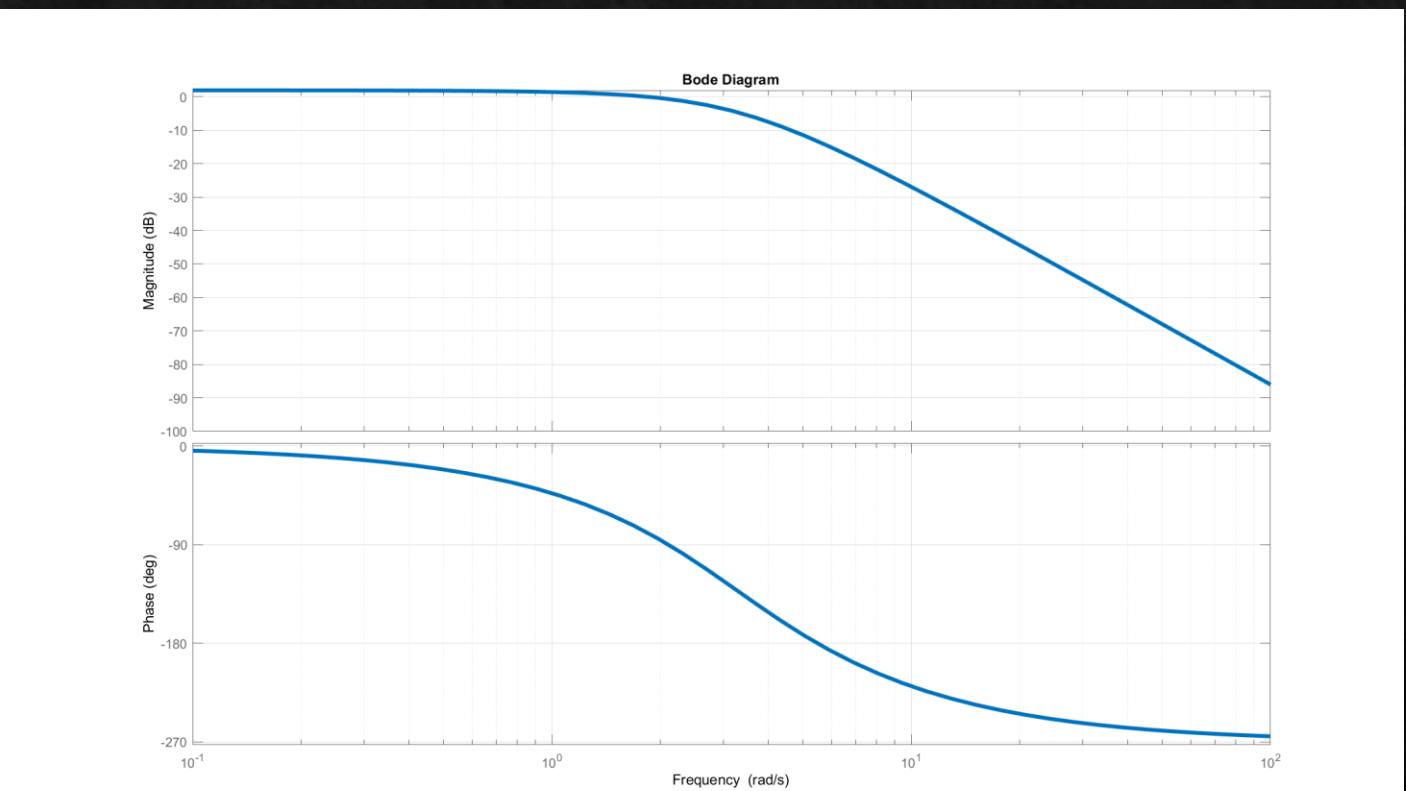
```
>>Gs = tf(50,[1 9 30 40]);
```

```
>>w = {0.1,100};
```

```
>>bode(Gs,w); % [mag,ph] = bode(Gs,w);
```

```
>>grid on
```

Η συχνότητα είναι σε λογαριθμική κλίμακα, η φάση δίνεται σε μοίρες και το πλάτος δίνεται ως κέρδος σε dB (**20*log10 (| $G(j^*w)|$)**). Για μετατροπή από dB χρησιμοποιήστε την εντολή `>> y = db2mag(ydb)`



Περιθώριο κέρδους και φάσης

- ❖ Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα:

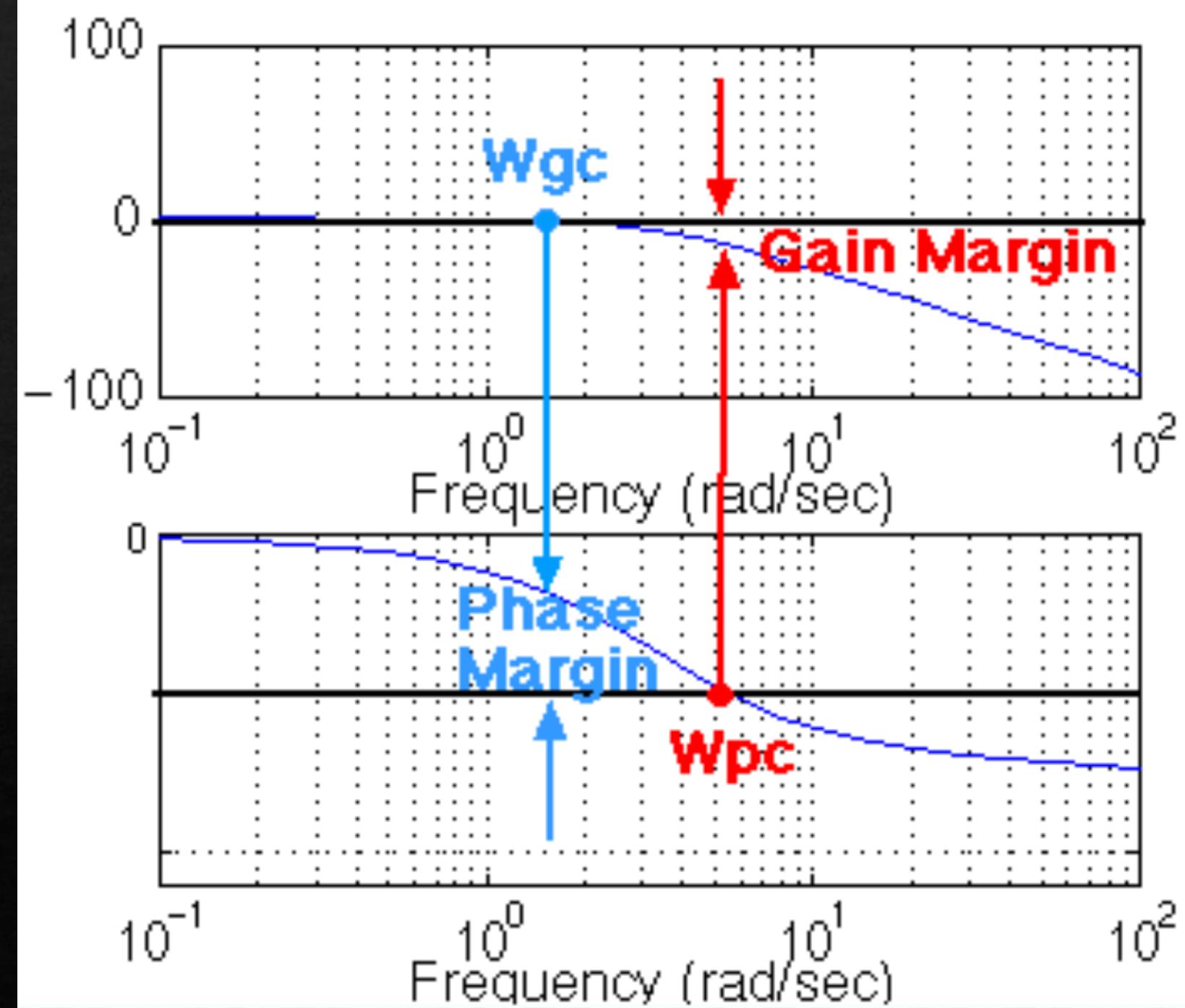


Όπου το K είναι ένα μεταβλητό κέρδος και $G(s)$ είναι η υπό εξέταση διεργασία.

- ❖ Το **περιθώριο κέρδους** ορίζεται ως η αλλαγή στο κέρδος ανοιχτού βρόχου που απαιτείται για να γίνει το σύστημα ασταθές.
- ❖ Συστήματα με μεγαλύτερα περιθώρια κέρδους μπορούν να αντέξουν μεγαλύτερες αλλαγές στις παραμέτρους του συστήματος πριν γίνουν ασταθή σε κλειστό βρόχο.
- ❖ **Λάβετε υπόψη ότι το μοναδιαίο κέρδος σε πλάτος είναι ίσο με μηδενικό κέρδος σε dB.**
- ❖ Το **περιθώριο φάσης** ορίζεται ως η αλλαγή στη μετατόπιση φάσης ανοιχτού βρόχου που απαιτείται για καταστεί ασταθές ένα σύστημα κλειστού βρόχου.
- ❖ Το περιθώριο φάσης μετρά επίσης την ανοχή του συστήματος στη χρονική καθυστέρηση.

Περιθώριο κέρδους και φάσης (1)

- ◆ Το περιθώριο φάσης είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της καμπύλης φάσης και των -180 μοιρών στο σημείο που αντιστοιχεί στη συχνότητα που μας δίνει κέρδος 0dB (gain crossover frequency- W_{gc}). Ομοίως, το περιθώριο κέρδους είναι η διαφορά μεταξύ της καμπύλης πλάτους και των 0dB στο σημείο που αντιστοιχεί στη συχνότητα που μας δίνει μια φάση -180 deg (phase crossover frequency, W_{pc}).



Περιθώριο κέρδους και φάσης στο MATLAB

- ❖ Μπορούμε να βρούμε τα περιθώρια κέρδους και φάσης για ένα σύστημα απευθείας, χρησιμοποιώντας το MATLAB.
- ❖ Απλώς εισάγετε την εντολή margin. Αυτή η εντολή επιστρέφει τα περιθώρια κέρδους και φάσης, τις gain and phase crossover frequencies και μια γραφική αναπαράσταση αυτών στο διάγραμμα Bode : >>margin(Gs)
- ❖ Εναλλακτικά:

```
>>[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G)
```

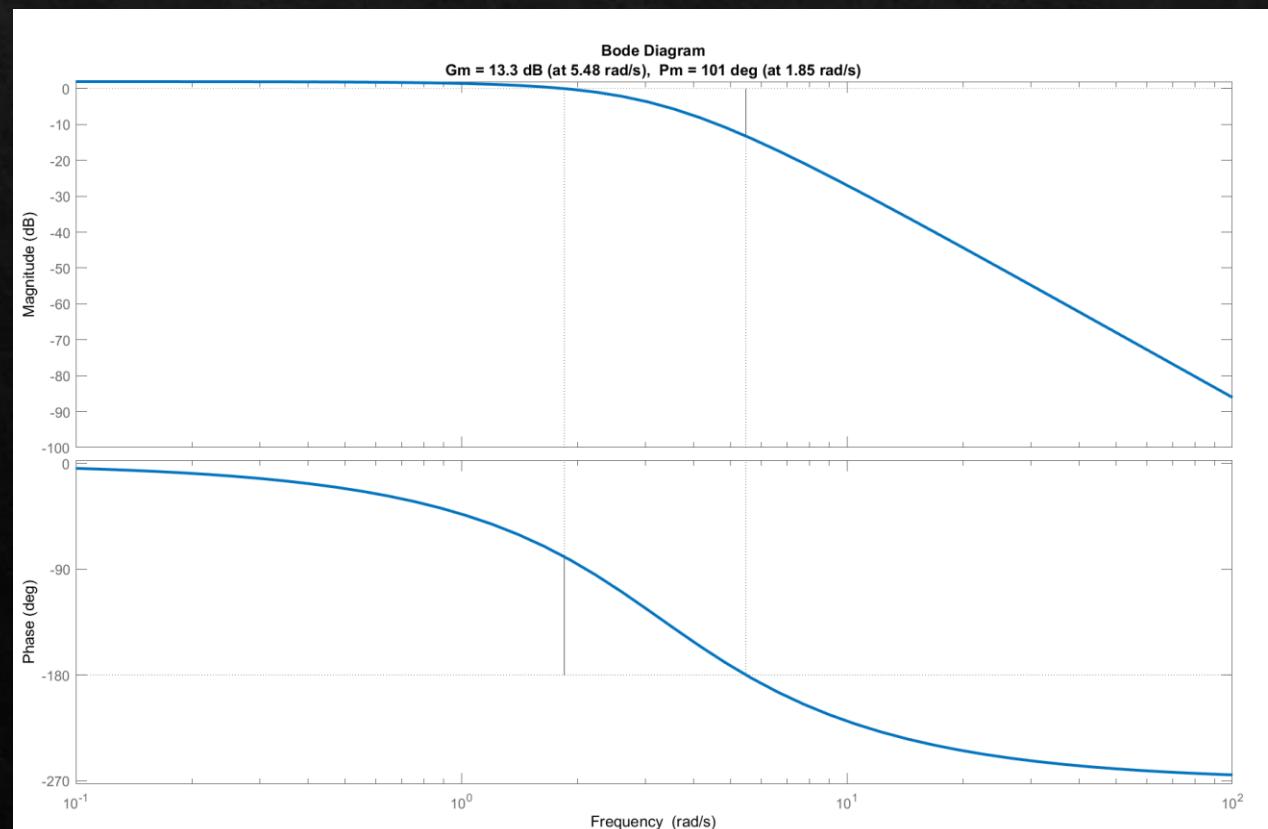
όπου:

Gm: περιθώριο κέρδους

Pm: περιθώριο φάσης

Wcg: συχνότητα που εμφανίζεται το Gm

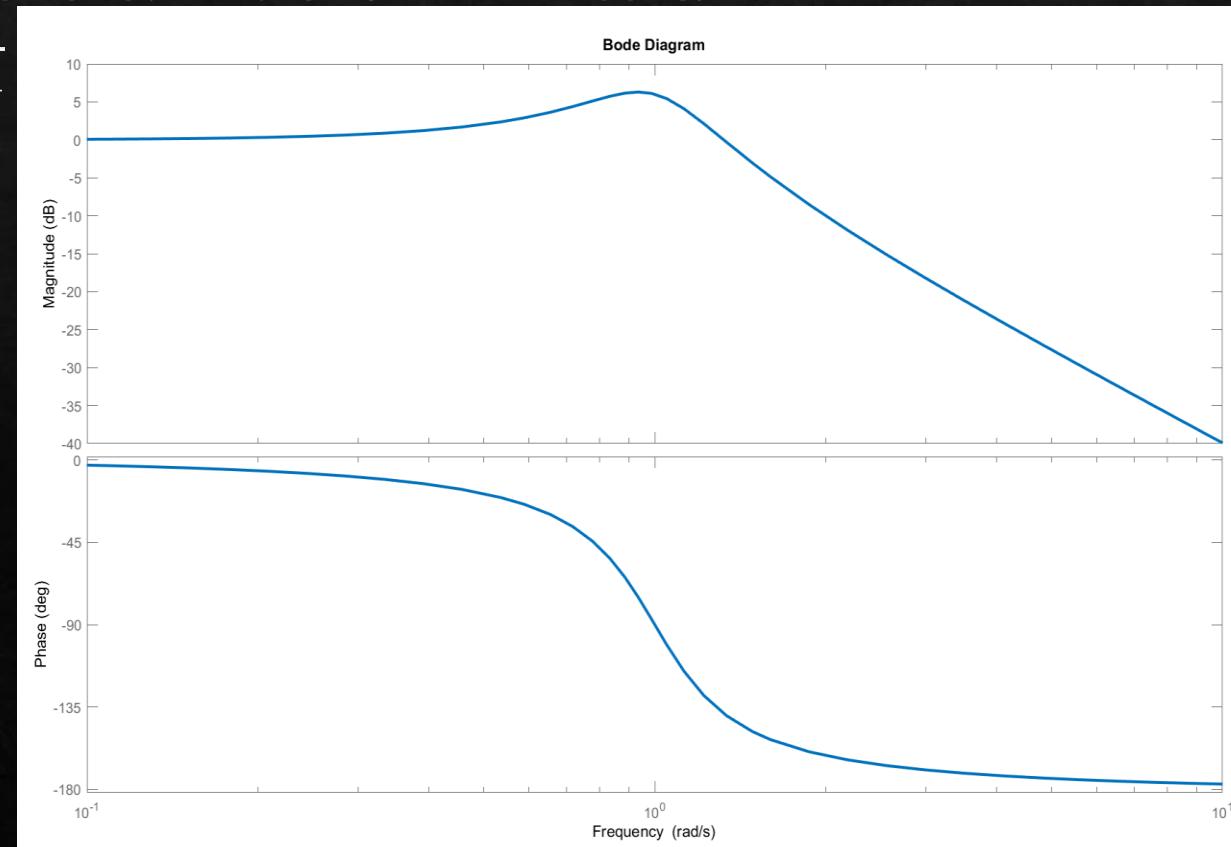
Wcp: συχνότητα που εμφανίζεται το Pm



Εύρος ζώνης

- ❖ Η συχνότητα εύρους ζώνης ορίζεται ως η συχνότητα στην οποία η απόκριση πλάτους **κλειστού βρόχου** είναι ίση με -3 dB. ($>> \text{BW} = \text{bandwidth}(G)$)
- ❖ Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου που αντιπροσωπεύει ένα σύστημα: $H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$

Δεδομένης της ΣΜ του ΣΚΒ, η συχνότητα εύρους ζώνης θα είναι η συχνότητα που αντιστοιχεί σε κέρδος -3 dB. Κοιτάζοντας το διάγραμμα, διαπιστώνουμε ότι είναι περίπου $\text{BW} = 1,4 \text{ rad/s}$. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι για μια συχνότητα εισόδου $0,3 \text{ rad/sec}$, το ημίτονο της εξόδου θα πρέπει να έχει πλάτος περίπου 1 και η φάση θα πρέπει να μετατοπιστεί ίσως μερικές μοίρες (πίσω από την είσοδο). Για συχνότητα εισόδου 3 rad/sec , το πλάτος εξόδου θα πρέπει να είναι περίπου -20dB (ή $1/10$ της εισόδου) και η φάση πρέπει να είναι σχεδόν -180°.

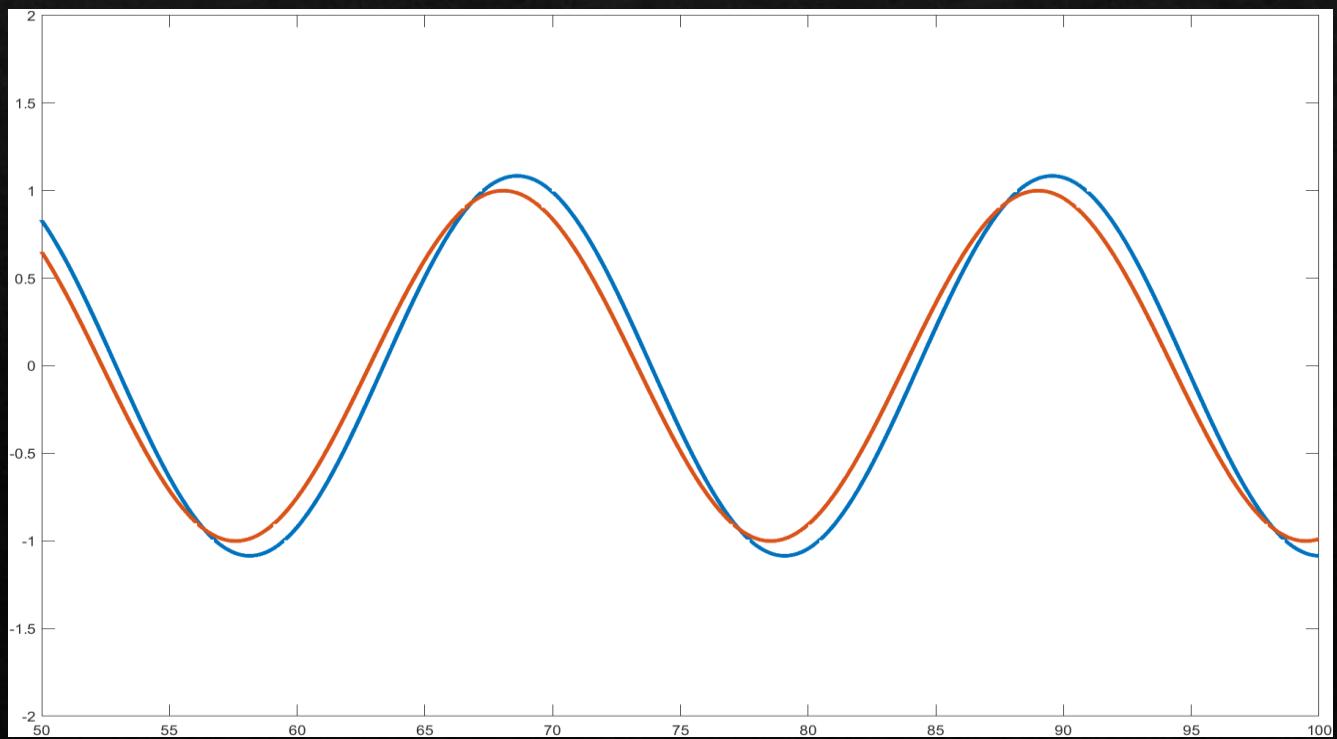


Προσομοίωση ΣΚΒ με ημιτονοειδή είσοδο

- ❖ Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή `lsim` για να προσομοιώσουμε την απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδείς εισόδους.
- ❖ Αρχικά, εξετάστε μια ημιτονοειδή είσοδο με **συχνότητα χαμηλότερη από τη συχνότητα εύρους ζώνης**. Πρέπει επίσης να έχουμε κατά νου ότι θέλουμε να δούμε τη μόνιμη κατάσταση, επομένως θα ζουμάρουμε για να δούμε καθαρά την απόκριση στη μόνιμη κατάσταση (αγνοώντας τη μεταβατική περίοδο).

```
>> w=0.3;  
>> G = tf(1,[1 0.5 1]);  
>> t = 0:0.01:100;  
>> u =sin(w*t);  
>> [y,x] = lsim(G,u,t);  
>> plot(t,y,t,u);  
>>axis([50,100,-2,2]);
```

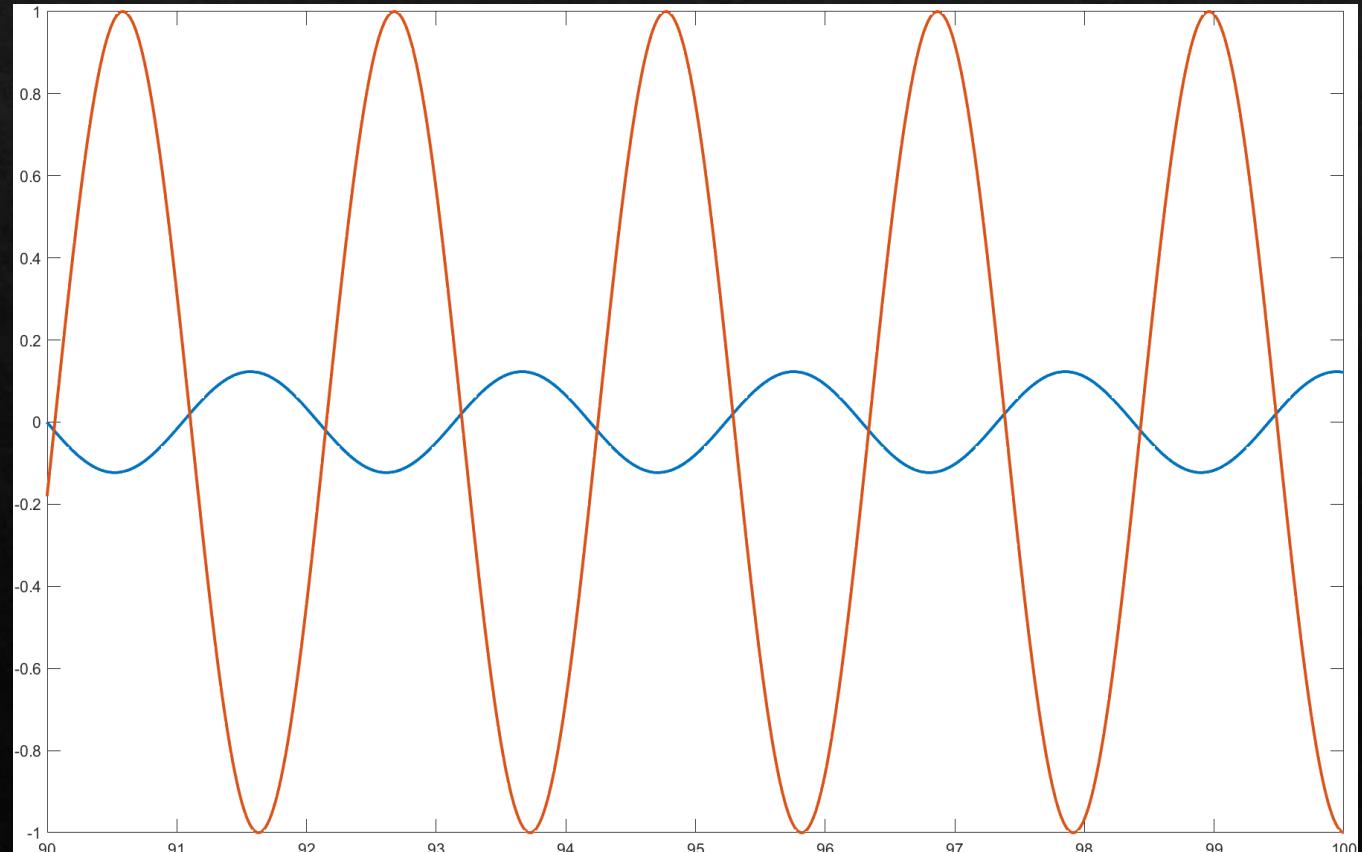
Παρατηρείστε ότι η έξοδος (μπλε) παρακολουθεί την είσοδο (πορτοκαλί) αρκετά καλά. Είναι μερικές μοίρες πίσω από την είσοδο όπως αναμενόταν.



Προσομοίωση ΣΚΒ με ημιτονοειδή είσοδο

- ❖ Αν θέσουμε τη συχνότητα της εισόδου υψηλότερη από τη συχνότητα εύρους ζώνης για το σύστημα, λαμβάνουμε μια πολύ παραμορφωμένη απόκριση (σε σχέση με την είσοδο).

```
>> w=3;  
>> G = tf(1,[1 0.5 1]);  
>> t = 0:0.01:100;  
>> u =sin(w*t);  
>> [y,x] = lsim(G,u,t);  
>> plot(t,y,t,u);  
>>axis([90,100,-1,1]);
```



Παρατηρείστε ότι το μέγεθος είναι περίπου το $1/10$ αυτού της εισόδου, όπως είχε προβλεφθεί, και ότι είναι σχεδόν ακριβώς εκτός φάσης (180 μοίρες πίσω) από την είσοδο.

Συχνότητα συντονισμού σε συστήματα 2^{ου} βαθμού

- ❖ Η συχνότητα συντονισμού ω_r , δηλαδή η συχνότητα κατά την οποία έχουμε υπερύψωση, είναι: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, $\zeta < 0.707$
- ❖ Το πλάτος της υπερύψωσης δίνεται ως: $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
- ❖ $\frac{BW}{\omega_n} \approx -1.19\zeta + 1.85$, για $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$
- ❖ $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$
- ❖ $T_r = \frac{2.16\zeta+0.6}{\omega_n}$
- ❖ dcgain = Το κέρδος στις χαμηλές συχνότητες (>>mag(1))

Άσκηση 1

Ένα σύστημα ανοιχτού βρόχου περιγράφεται από την παρακάτω ΣΜ:

$$H(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 30}$$

- a) Να σχεδιαστεί στο MATLAB το διάγραμμα Bode της παραπάνω συνάρτησης και να βρεθεί η συχνότητα συντονισμού ω_r (rad/sec) και το μέγιστο πλάτος M_p (db).
- b) Κάνοντας χρήση κατάλληλης εντολής του MATLAB, να βρεθεί το εύρος ζώνης (BW) της H.

Άσκηση 2

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x}_1 = -7x_1 - 4x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = x_1 + 4x_2 + u$$

- Υπολογίστε το DC-Gain και το κέρδος του συστήματος στις υψηλές συχνότητες από το bode διάγραμμα (db2mag).
- Σχεδιάστε την βηματική απόκριση του συστήματος αυτού μέχρι τα 12sec. Υπολογίστε το DC-Gain από το διάγραμμα της απόκρισης.

Άσκηση 3

Έστω ότι έχουμε το σύστημα ελέγχου του παρακάτω σχήματος:



$$\text{με } G(s) = \frac{10}{s+1}, G_c(s) = \frac{9}{s+1}$$

Με τη βοήθεια του MATLAB να δειχθεί ότι το περιθώριο φάσης ανοιχτού βρόχου είναι περίπου 12 μοίρες και το ποσοστό υπερύψωσης της βηματικής απόκρισης του ΣΚΒ είναι 70%

Άσκηση 4

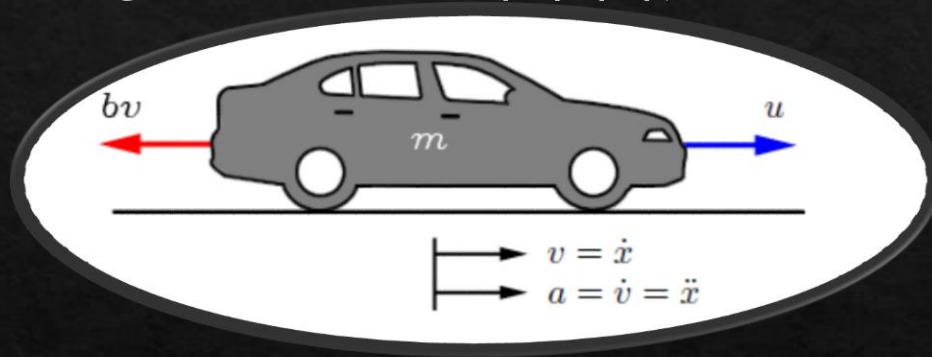
Ένα σύστημα ανοιχτού βρόχου περιγράφεται από την παρακάτω ΣΜ:

$$T(s) = \frac{100}{s(s+6)}$$

Προσδιορίστε την τιμή του μέγιστου μέτρου κατά τον συντονισμό M_{P_W} , τη συχνότητα συντονισμού ω_r , και το εύρος ζώνης BW του συστήματος από το διάγραμμα Bode κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση. Δημιουργήστε το διάγραμμα Bode για $w = 0.1$ έως $w = 1000$ rad/s χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση logspace.

Άσκηση 5

Το απλοποιημένο μοντέλο για το πρόβλημα του cruise control δίνεται παρακάτω για ένα αυτοκίνητο με μάζα $m=1000 \text{ kg}$ και συντελεστή τριβής $b=50$.



$$\text{Η ΣΜ του αυτοκινήτου είναι: } G(s) = \frac{1}{ms+b}.$$

Σχεδιάστε και προσομοιώστε με τη βοήθεια του MATLAB έναν P ελεγκτή, ο οποίος θα επιβάλλει στο αυτοκίνητο σταθερή ταχύτητα $v=4\cos(0.2t)$ m/s για $t=50$ seconds, με σφάλμα μόνιμης κατάστασης μικρότερο από 0.3. Η απόκριση του ΣΚΒ είναι λογική σύμφωνα με το αντίστοιχο διάγραμμα Bode; Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος αναφοράς που θα επιλέγατε ώστε η παρακολούθηση του από το ΣΚΒ να είναι ικανοποιητική;