Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

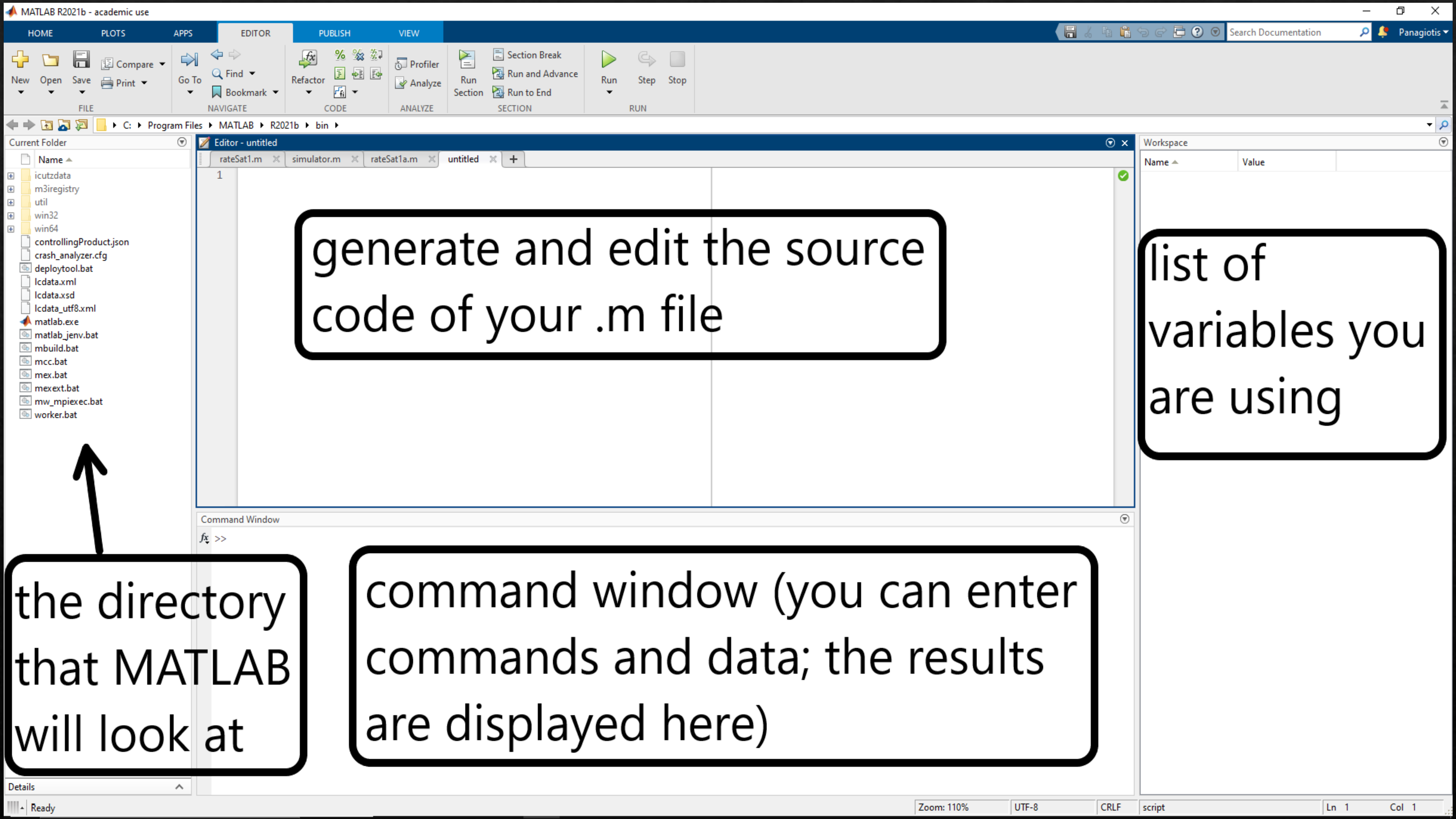
Μοντελοποίηση και Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων

Περιεχόμενα

- Εισαγωγή στο περιβάλλον MATLAB
- Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων
  - Συνάρτηση Μεταφοράς (ΣΜ)
  - Μοντέλο Καταστατικών Εξισώσεων
- Προσομοίωση δυναμικών συστημάτων (ανοιχτού βρόχου) με τη χρήση του MATLAB
- Ασκήσεις

Εισαγωγή

- Το MATLAB είναι ένα υπολογιστικό πρόγραμμα που συνδυάζει τη δύναμη του υπολογισμού και της οπτικοποίησης, αποτελώντας ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για μηχανικούς.
- Εκτελεστικό πρόγραμμα όπου μπορεί να δημιουργηθεί ένα script με μια λίστα από εντολές MATLAB όπως και σε άλλες γλώσσες προγραμματισμού.
- Σχεδιάστηκε για να διευκολύνει τις πράξεις μεταξύ πινάκων


MATLAB R2021b - academic use
HOME
PLOTS
APPS
EDITOR
PUBLISH
VIEW
Current Folder
Editor - untitled
Workspace
Command Window
generate and edit the source code of your .m file
list of variables you are using
the directory that MATLAB will look at
command window (you can enter commands and data; the results are displayed here)

Διανύσματα στο MATLAB

- >> x = [0 2 3 4 6 7] (διάνυσμα γραμμή)
- >> x = [0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7] (διάνυσμα στήλη)
- >> x(1) = 0 , x(2) = 2 , x(1:2:5) = 0 3 6 (Indexing από 1)
- >> x(end) = 7
- **>> t = 0:0.1:10 (διάνυσμα από 0 έως 10 με βήμα 0.1)**
- >> t = linspace(0,10,100) (διάνυσμα 100 στοιχείων με ίση απόσταση μεταξύ τους)

Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

- >> a = [1 4 55]; b = [2 3 2]
- >> a + 2 = [3 6 57]
- >> a + b = [3 7 57] (πρόσθεση στοιχείο προς στοιχείο)
- >> a.*b = [2 12 110] (πολ/μος στοιχείο προς στοιχείο)
- >>b.^2 = [4 9 4]
- >> a’ = tranaspose(a) (ανάστροφος του a)
- >>a*a’ = 3042 (πολ/μος πινάκων)

Πίνακες

- Ίδια φιλοσοφία με τα διανύσματα.
- >> A = [1 2 ; 3 4] (2 x 2 πίνακας, το ; δημιουργεί μια νέα γραμμή του πίνακα)
- >> inv(A) (ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα)
- >> eig(A) (επιστρέφει τις ιδιοτιμές του A)
- >> eye(n) (επιστρέφει έναν nxn μοναδιαίο πίνακα)
- >>zeros(n,m) (επιστρέφει έναν nxm πίνακα μηδενικών)

Μαθηματικές συναρτήσεις

- Το MATLAB περιλαμβάνει όλες τις τυπικές συναρτήσεις, όπως: sin, cos, log, exp, sqrt και πολλές άλλες.
- Διάφορες σταθερές που χρησιμοποιούνται συχνά, όπως το π (pi) είναι επίσης ενσωματωμένες.
- Παραδείγματα:
- >> sin(pi/2) = 1
- >> exp(1) = 2.7183
- >> log10(10) = 1
- >> log(exp(1)) = 1 (log(): Νεπέριος λογάριθμος)

Πολυώνυμα

- Στο MATΛAB, ένα πολυώνυμο αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα. Για να δημιουργήσετε ένα πολυώνυμο, απλά εισαγάγετε κάθε συντελεστή του πολυωνύμου στο διάνυσμα με φθίνουσα σειρά.
- <u>Παράδειγμα:</u>

$$s^4 + 3s^2 + s + 2$$

>> x = [1 0 3 1 2]

>> z = polyval(x,2) (επιστρέφει την τιμή του x για s=2)

>> r = roots(x) (επιστρέφει τις ρίζες του πολυωνύμου)

Διαγράμματα

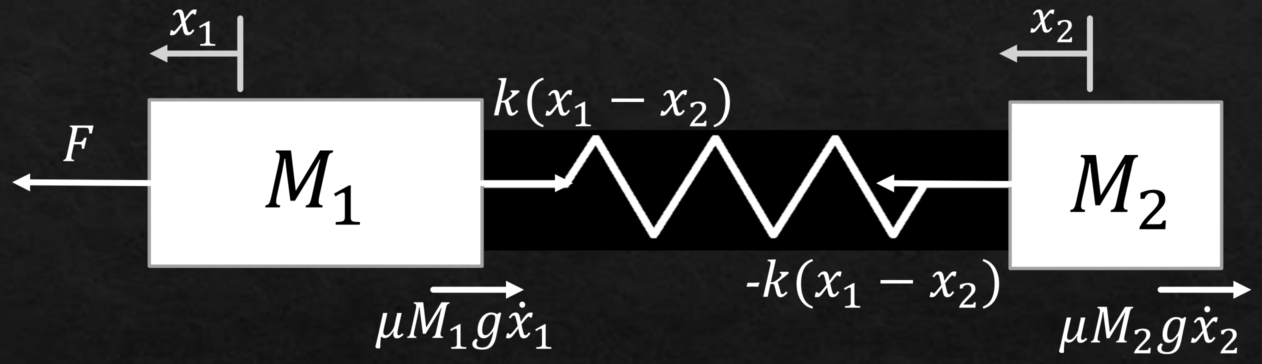
- Η εντολή figure ανοίγει ένα κενό παράθυρο διαγράμματος
- Μπορούμε να δώσουμε συγκεκριμένο index σε ένα figure ώστε να το καλούμε σε περίπτωση πολλαπλών διαγραμμάτων. Για παράδειγμα όταν δημιουργήσουμε το πρώτο διάγραμμα χρησιμοποιούμε την εντολή figure(1).
- Η εντολή plot(x,y) δημιουργεί ένα γράφημα στο οποίο οι τιμές του x (οριζόντιος άξονας) και του y (κατακόρυφος άξονας) απεικονίζονται ως γράφημα γραμμικής συνάρτησης.
- Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη συνάρτηση plot αλλά και για οποιαδήποτε συνάρτηση του MATLAB προτείνεται να χρησιμοποιήσετε την on-line βοήθεια όπου μπορείτε να δείτε αναλυτικά τα ορίσματα, τις παραμέτρους καθώς και το τι επιστέφει κάθε συνάρτηση πατώντας την εντολή help onomaTisSynartisis ή ψάχνοντας το documentation (πάνω δεξιά στο παράθυρο του MATLAB)

Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων

- Θα εξετάσουμε ένα τρένο παιχνίδι που αποτελείται από μία μηχανή έλξης και ένα βαγόνι.
- Υποθέτοντας ότι το τρένο ταξιδεύει μόνο προς μία κατεύθυνση, θέλουμε να ελέγξουμε στο τρένο, ώστε να έχει μια ομαλή εκκίνηση και παύση, μαζί με μια ομαλή κίνηση σταθερής ταχύτητας.

Αναπαράσταση συστήματος

- Το σύστημα αναπαρίσταται ως:



- Η μάζα του κινητήρα και του βαγονιού θα συμβολίζονται με M_1 και M_2, αντίστοιχα. Τα δύο αυτά στοιχεία συνδέονται με ένα ελατήριο, με σταθερά k. Το F αντιπροσωπεύει τη δύναμη που ασκείται από τον κινητήρα, και το μ αντιπροσωπεύει το συντελεστή τριβής κύλισης. Τέλος x_1 και x_2 συμβολίζουν την μετατόπιση του M_1 και M_2, αντίστοιχα.
- Το δυναμικό μοντέλο του συστήματος προκύπτει εφαρμόζοντας το νόμο του Newton ως:

$$M_1 \ddot{x}_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1$$
$$M_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_2 g \dot{x}_2$$

Εξισώσεις μεταβλητών κατάστασης

- Με βάση την παραπάνω ανάλυση και θεωρώντας $\dot{x}_1 = x_3$, $\dot{x}_2 = x_4$ και την είσοδο ελέγχου F$= u$ οδηγούμαστε στην παρακάτω αναπαράσταση του συστήματος:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{u}{M_1} - \frac{k}{M_1}(x_1 - x_2) - \mu g x_3$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k}{M_2}(x_1 - x_2) - \mu g x_4$$

- Θέλουμε να ελέγξουμε την ταχύτητα του τρένου, οπότε ως έξοδο του συστήματος θεωρούμε $y = x_3$

Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

- Για να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, πρώτα πάρτε μετασχηματισμούς Laplace των καταστατικών εξισώσεων και της εξόδου.
- Η ΣΜ είναι ο λόγος της εξόδου ως προς την είσοδο $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Ειδικότερα:

$$H(s) = \frac{M_2 s^2 + M_2 \mu g s + 1}{M_1 M_2 s^3 + (2M_1 M_2 \mu g) s^2 + (M_1 k + M_1 M_2 (\mu g)^2 + M_2 k) s + k \mu g (M_1 + M_2)}$$

Αναπαράσταση στον χώρο καταστάσεων

- Τέσσερις πίνακες A, B, C και D χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος και θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος.
- Η μορφή χώρου καταστάσεων που παράχθηκε από τις εξισώσεις κατάστασης και εξόδου είναι :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du$$

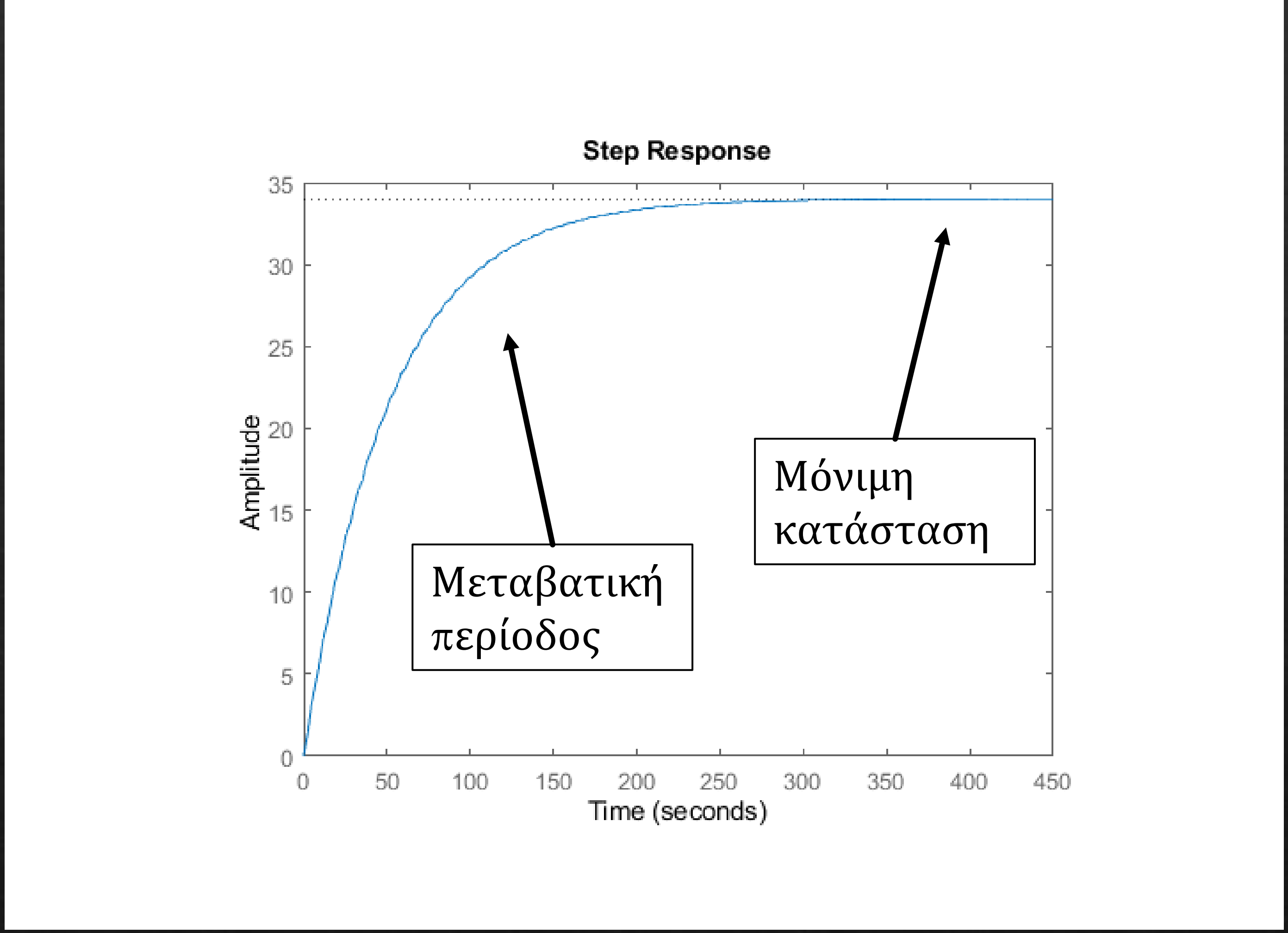
- Με $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{M_1} & \frac{k}{M_2} & -\mu g & -\mu g \\ \frac{k}{M_1} & \frac{-k}{M_2} & -\mu g & -\mu g \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{D} = 0$

Εισαγωγή συστήματος στο MATLAB

- Δημιουργείστε ένα .m file και εισάγετε τις εντολές clc;close all; clear all
- Εισάγετε τις παραμέτρους του υπό μελέτη συστήματος:
  - `>> M1=1; M2=0.5; k=1; mu =0.002; g=9.8;`
- <u>Δύο επιλογές αναπαράστασης</u>
  - Συνάρτηση Μεταφοράς: $\gg H = tf(num, den);$
    - `>> num = [M2  M2*mu*g  1];`
    - `>> den = [M1*M2  (2*M1*M2*mu*g)  (M1*k + M1*M2*(mu*g)^2 + M2*k)  k*mu*g*(M1+M2)];`
  - Χώρος κατάστασης : $\gg H = ss(A, B, C, D)$
    - $\gg A = [0\ 0\ 1\ 0\ ; 0\ 0\ 0\ 1\ ; -k/M_1\ \ k/M_2\ -\mu g\ -\mu g\ ;\ k/M_1\ \ -k/M_2\ -\mu g\ -\mu g]$
    - $\gg B = [0; 0; 1/M_1; 0]$
    - $\gg C = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$
    - $\gg D = 0$
- Δεδομένου του H η εντολή tf(H) μας δίνει τη ΣΜ του συστήματος (αντίστοιχα η ss(H) τις ΕΚ)

Προσομοίωση του συστήματος

- Βηματική απόκριση του συστήματος (για u=1):
  - >>step(H, [0 tfinal]) ή σκέτο step(H) σταματώντας μόλις το σύστημα φτάσει στη μόνιμη κατάσταση.
- Η τιμή της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση για μοναδιαία βηματική είσοδο ονομάζεται DC gain (ή gain at zero frequency) του συστήματος.
- Γενικά για προσομοίωση του συστήματος για είσοδο u χρησιμοποιείστε την:
  - [y , tout , x] = lsim(H,u,t) για κάποιο χρονικό διάστημα (π.χ. t=0:0.1:20)
  - <u>Προσοχή:</u> Τα u και t πρέπει να είναι 2 διανύσματα ίδιου μήκους.



Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί το αντίστοιχο μοντέλο μεταβλητών κατάστασης για τις ακόλουθες συναρτήσεις μεταφοράς χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ss():

a) $G_1(s) = \frac{1}{s+10}$

b) $G_2(s) = \frac{3s^2+10s+1}{s^2+8s+5}$

2. Να προσδιοριστεί το αντίστοιχο μοντέλο συνάρτησης μεταφοράς για τα ακόλουθα μοντέλα μεταβλητών κατάστασης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση tf():

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$

Ασκήσεις (1)

3. Έστω ένα σύστημα που παριστάνεται από το ακόλουθο μοντέλο:

$$G(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2 + 4s + 3}$$

Να γίνει σχεδιάση της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης του συστήματος για χρόνο t=0:0.01:8. Κάνοντας χρήση της απόκρισης, βρείτε το DC-Gain του συστήματος και συγκρίνετέ το με την θεωρητική τιμή που προκύπτει΄με τη χρήση της συνάρτησης dcgain. Να βάλετε τίτλο και axis labels στο διάγραμμα.

4. Έστω η διαφορική εξίσωση: $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = u$ όπου $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ και $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Να σχηματίσετε τη γραφική παράσταση της τροχιάς y(t) για t = 5 sec.

Άσκηση 5

Έστω ένα σύστημα που παριστάνεται από το ακόλουθο μοντέλο:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ , x}(0) = [1\ 0]^T$$

$$y = [1\ \ 0]x$$

a) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση lsim, να υπολογιστεί και να παρασταθεί γραφικά η απόκριση του παραπάνω συστήματος για t=10 s, όταν u(t) = 5cos(t).

b) Να γίνει η αναπαράσταση των καταστάσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ σε κοινό plot. (hint: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την εντολή hold on)

c) Να γίνει η αναπαράσταση των καταστάσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ σε κοινό figure αλλά διαφορετικά plots χρησιμοποιώντας την εντολή subplot. . Να βάλετε axis labels στο διάγραμμα.

Άσκηση 6

Δεδομένου του μηχανικού συστήματος που απεικονίζεται στο σχήμα, όπου η είσοδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)$ και η έξοδος δίνεται από τη συνάρτηση $y(t)$, να προσδιορίσετε τη διαφορική εξίσωση που διέπει το σύστημα δεδομένου ότι για t=0 το σύστημα ισορροπεί. Χρησιμοποιώντας το MATLAB, να γράψετε ένα αρχείο m-file και να σχεδιάσετε την απόκριση του συστήματος όταν η συνάρτηση διέγερσης είναι $f(t)$ = 1 N και για χρόνο t = 100 sec. Θεωρείστε ότι M=10kg, k=1 και b=0.5.

Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της εξόδου είναι περίπου 1.8.