Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

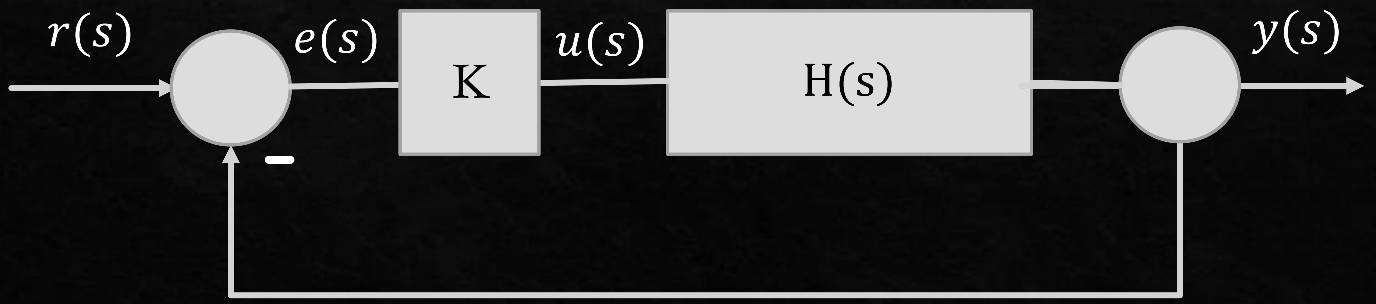
Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

Περιεχόμενα

- Εισαγωγή στον γεωμετρικό τόπο ριζών (ΓΤΡ)
- Ποιοτικά χαρακτηριστικά του ΓΤΡ
- ΓΤΡ στο MATLAB
- ΓΤΡ και έλεγχος συστημάτων κλειστού βρόχου (ΣΚΒ)
- Ρύθμιση κερδών PID μέσω ΓΤΡ
- Ασκήσεις

Εισαγωγή

- Ο γεωμετρικός τόπος ριζών αποτελεί μια συγκεκριμένη τροχιά πάνω στην οποία κινούνται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ΧΕ) ενός συστήματος συναρτήσει των μεταβολών μιας συγκεκριμένης παραμέτρου του (π.χ. των κερδών).
- Συγκεκριμένα ο γεωμετρικός τόπος μιας συνάρτησης μεταφοράς H(s) (open-loop) είναι η γραφική αναπαράσταση της θέσης όλων των πιθανών πόλων του ΣΚΒ με αναλογικό κέρδος K και μοναδιαία ανάδραση:

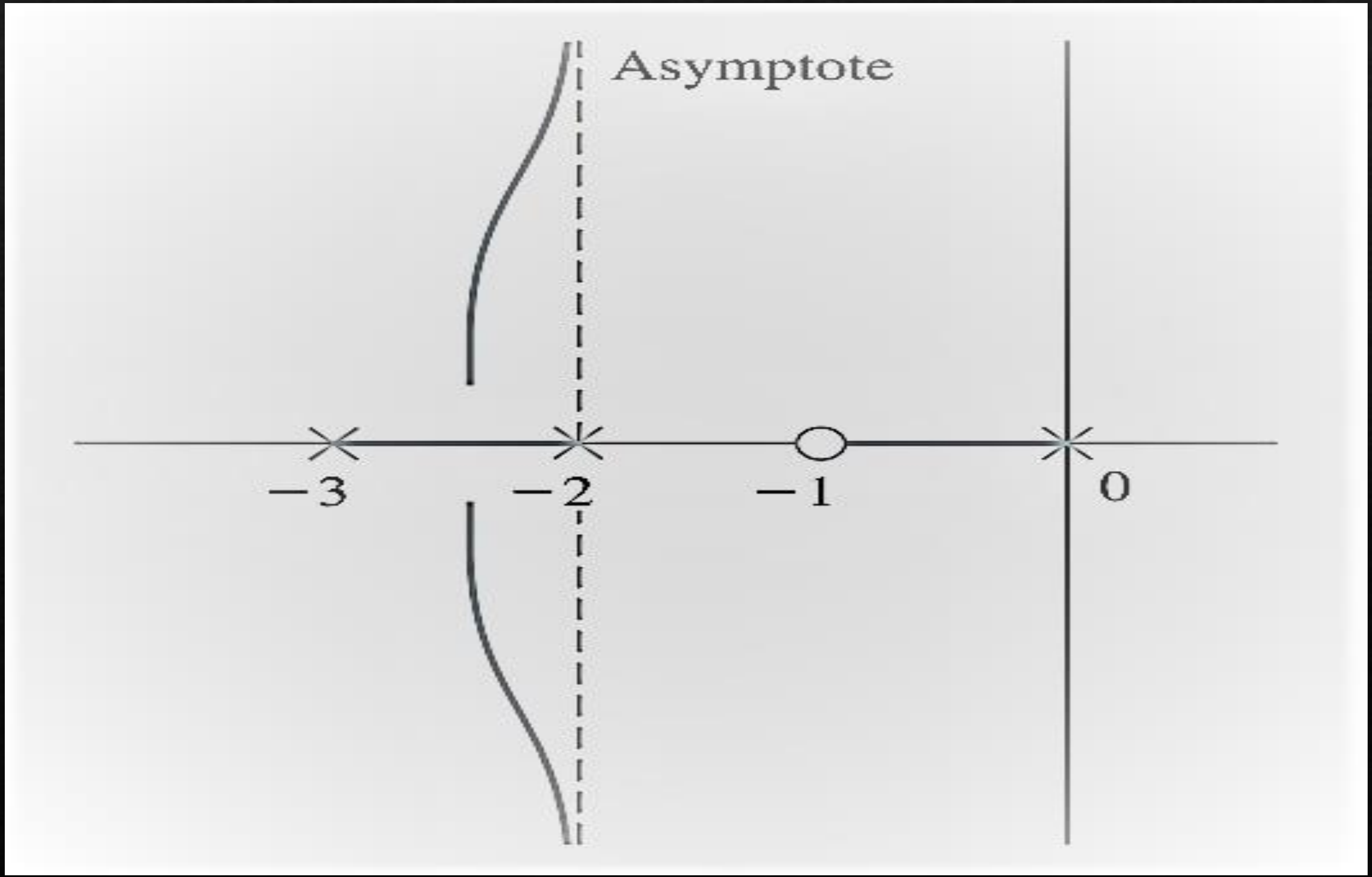


Η συνάρτηση κλειστού βρόχου του συστήματος είναι: $\mathrm{T}(s) = \frac{KH(s)}{1+KH(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$.
Συνεπώς οι πόλοι του ΣΚΒ είναι οι τιμές του s ώστε η ΧΕ: 1+KH(s)=0
Τέλος συμβολίζουμε με n την τάξη του a(s) και m την τάξη του b(s).

Ποιοτικά χαρακτηριστικά του ΓΤΡ

- Για την κατασκευή του ΓΤΡ λαμβάνουμε υπ’ όψην όλες τις θετικές τιμές του K.
- Στο όριο όπου $K \to 0$, οι πόλοι του ΣΚΒ είναι οι πόλοι του $\mathrm{H}(s)$.
- Στο όριο όπου $K \to \infty$, οι πόλοι του ΣΚΒ είναι τα μηδενικά του $\mathrm{H}(s)$.
- Ανεξάρτητα από το ποια τιμή επιλέγουμε για το K, το ΣΚΒ πρέπει πάντα να έχει n πόλους.
- Ο ΓΤΡ πρέπει να έχει n κλάδους, κάθε κλάδος ξεκινά από έναν πόλο της $\mathrm{H}(s)$ και καταλήγει σε ένα μηδενικό της $\mathrm{H}(s)$.
- Αν η $\mathrm{H}(s)$ έχει περισσότερους πόλους από μηδενικά (όπως συνήθως συμβαίνει), λέμε ότι η $\mathrm{H}(s)$ έχει μηδενικά στο άπειρο. Σε αυτήν την περίπτωση, το όριο του $\mathrm{H}(s)$ καθώς s→ ∞ είναι 0.
- Ο αριθμός των μηδενικών στο άπειρο είναι $n - m$ και είναι ο αριθμός των κλάδων του ΓΤΡ που τείνουν στο άπειρο (ασύμπτωτες).

$$\text{ΓΤΡ για ΧΕ: } 1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}=0$$



Ποιοτικά χαρακτηριστικά του ΓΤΡ (1)

- Καθώς ο ΓΤΡ είναι η αναπαράσταση όλων των πιθανών πόλων του ΣΚΒ, μπορούμε να επιλέξουμε ένα κέρδος έτσι ώστε να επιβάλλουμε στο σύστημα να αποκριθεί σύμφωνα με κάποιες επιθυμητές προδιαγραφές.
- Αν κάποιος από τους επιλεγμένους πόλους βρίσκεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο τότε το ΣΚΒ οδηγείται σε αστάθεια.
- Οι πόλοι που βρίσκονται πιο κοντά στον φανταστικό άξονα έχουν την μεγαλύτερη επίδραση στην απόκριση του ΣΚΒ.
- Έτσι ένα σύστημα 3 ή 4 πόλων μπορεί να λειτουργήσει ως ένα σύστημα $2^{ου}$ ή ακόμα και $1^{ου}$ βαθμού ανάλογα με τη θέση του κυρίαρχου πόλου ή πόλων.

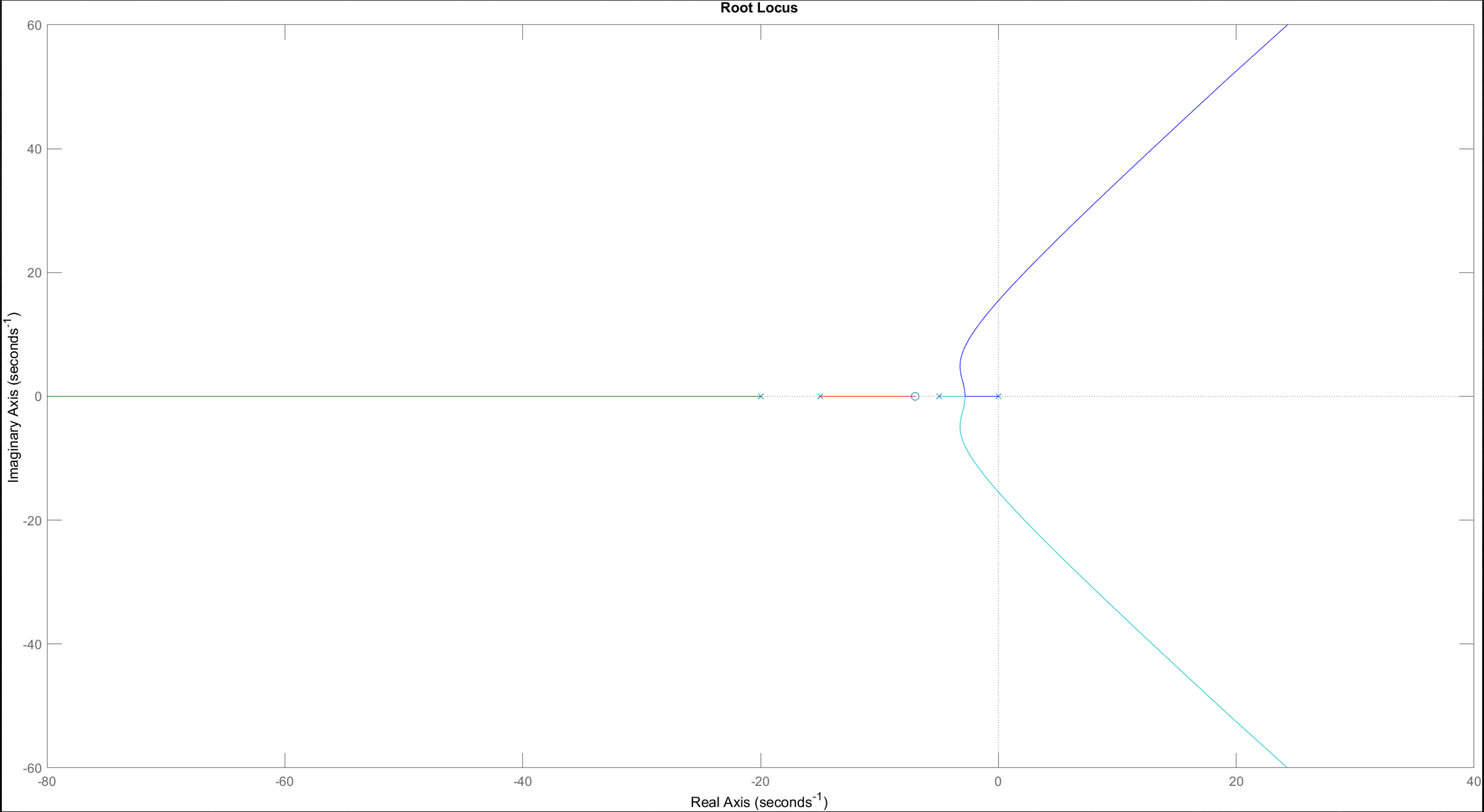
Κυρίαρχοι πόλοι και μηδενικά της ΣΚΒ

- Έστω ένα σύστημα με ΣΚΒ: $\mathrm{T(s)} = \dfrac{\frac{\omega_n}{a}(s+a)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(1+\tau s)}$ (1).
- Αν $\alpha \gg \zeta\omega_n$ ή $\tau \ll \zeta\omega_n$, τότε η επίδραση του μηδενικού ή του πραγματικού πόλου στην αντίστοιχη βηματική απόκριση είναι αμελητέα. (Θα πρέπει το DC gain να παραμείνει ίδιο)
- Παράδειγμα: Έστω το σύστημα $\mathrm{T(s)} = \dfrac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$
- Το dc gain της T είναι 1. Λόγω της (1) έχουμε $\zeta\omega_n = 3, \tau = 0.16, a = 2.5$. Συνεπώς ο πραγματικός πόλος μπορεί να εξαλειφθεί οδηγώντας στην προσέγγιση: $\mathrm{T}(s) \approx \dfrac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25}$

ΓΤΡ στο MATLAB

- Θεωρούμε το σύστημα με ΣΜ: $H(s) = \frac{s+7}{s(s+5)(s+7)(s+15)(s+20)}$
- <u>MATLAB code:</u>

```
>> num = [1 7];
>> den = conv(conv([1 0],[1 5]),conv([1 15],[1 20]));
>> sys = tf(num,den);
>>rlocus(sys)  or
>>[r,k] = rlocus(sys);  (r: διάνυσμα θέσεων
των μιγαδικών ριζών τη ΧΕ, k: διάνυσμα των
 συντελεστών κέρδους)
>>plot(r,'x')
```


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-60
-40
-20
0
20
40

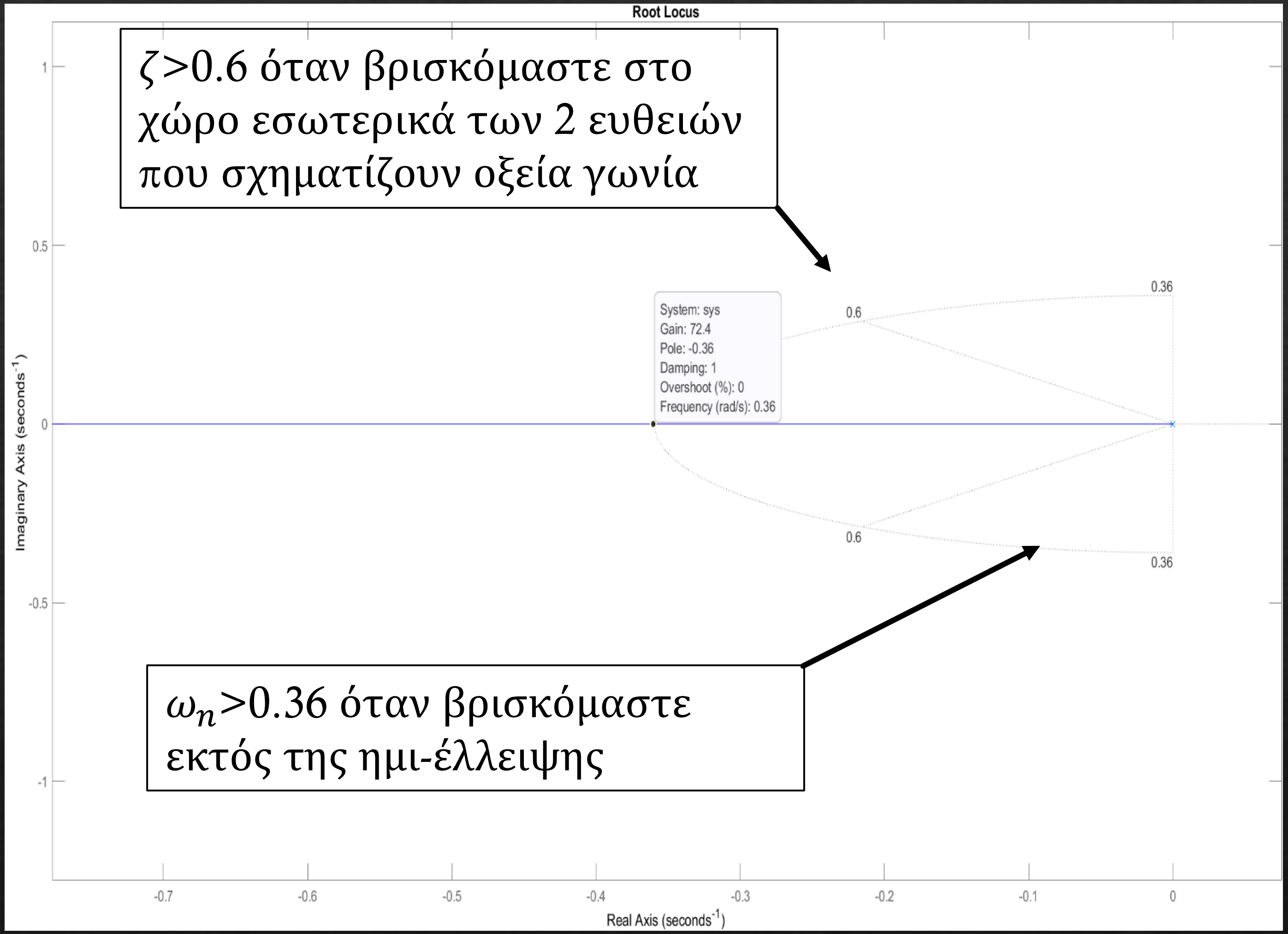
ΓΤΡ και έλεγχος του ΣΚΒ

- Το γράφημα παραπάνω δείχνει όλες τις δυνατές θέσεις των πόλων του ΣΚΒ για έναν απλό αναλογικό ελεγκτή P.
- Φυσικά, δεν ικανοποιούν όλες αυτές οι θέσεις τα κριτήρια σχεδίασης που θέτει ο χρήστης.
- Για να προσδιορίσουμε ποιο μέρος του τόπου είναι αποδεκτό, ας θυμηθούμε τις παραμέτρους σχεδίασης που αναλύσαμε στο προηγούμενο εργαστήριο.
- Για επιθυμητή μέγιστη υπερύψωση M_P και χρόνο ανόδου μικρότερο από t_r ορίζουμε τον επιθυμητό συντελεστή απόσβεσης ζ και τη φυσική συχνότητα ω_n ως:
  - $\zeta > \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{M_P}{\pi}\right)^2}{1+\ln\left(\frac{M_P}{\pi}\right)^2}}$ και $\omega_n > \frac{2.16\zeta+0.6}{t_r}$
- Όσο πιο μακριά από τον πραγματικό άξονα βρίσκεται ένας πόλος τόσο μεγαλύτερη ταλάντωση θα επιφέρει στην απόκριση του συστήματος.
- Έχοντας ήδη σχεδιάσει τον ΓΤΡ στο MATLAB, με τη εντολή >>sgrid(zeta,wn) βρίσκουμε την

επιθυμητή περιοχή όπου η απόκριση του ΣΚΒ ικανοποιεί τις προδιαγραφές σχεδίασης.

Ρύθμιση κέρδους P ελεγκτή μέσω ΓΤΡ

- Έστω πως θέλουμε το παραπάνω σύστημα να ικανοποιεί της παρακάτω προδιαγραφές:
  - Χρόνος ανόδου <5s
  - Μέγιστη υπερύψωση <10%
- Τότε πρέπει $\zeta > 0.6$ και $\omega_n > 0.36$
- Συνεπώς έχοντας ήδη δημιουργήσει τον ΓΤΡ χρησιμοποιούμε την εντολή >> sgrid(0.6,0.36) και αφού ζουμάρουμε παίρνουμε το διπλανό γράφημα.
- Συμπεραίνουμε πως για αναλογικό κέρδος μεγαλύτερο από $K_P = 72.4$ οι προδιαγραφές απόκρισης του ΣΚΒ θα ικανοποιούνται.



Ρύθμιση κερδών PID μέσω ΓΤΡ

- ΣΜ PID ελεγκτή: $\mathrm{G(s)} = \mathrm{K_p} + \frac{K_i}{s} + K_D s$
- Εναλλακτικά: $\mathrm{G(s)} = \frac{K_D(s+z_1)(s+z_2)}{s} = \frac{K_D(s^2+K_p/K_D s+K_i/K_\mathrm{D})}{s}$, όπου $(z_1 + z_2) = K_p/K_D$ και $\mathrm{z_1 z_2} = K_i/K_\mathrm{D}$ (**2**)
- Παρατηρούμε πως ο PID παρουσιάζει έναν πόλο στην στο 0 και δύο μηδενικά που μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
- <u>Μεθοδολογία ρύθμισης κερδών:</u>
  - Έστω ότι το σύστημα $H(s)$ το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε.
  - Έστω η ΣΜ ενός PID χωρίς το κέρδος K_D, $G_c(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$.
  - Επιλέξτε τα επιθυμητά μηδενικά z_1, z_2 και δημιουργήστε το σύστημα ανοιχτού βρόχου στο MATLAB ($>> Gs = series(Gc, H), 1)$)
  - Τυπώστε τον ΓΤΡ και με βάση αυτόν βρείτε ένα κέρδος K_D που τοποθετεί τους πόλους του συστήματος κοντά στα μηδενικά (ώστε να αναιρεθούν)
  - Για το επιλεγμένο K_D υπολογίστε τα υπόλοιπα κέρδη του PID αξιοποιώντας την (**2**)
- <u>Προσοχή:</u> Θα πρέπει πάντα ο αριθμός των πόλων να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των μηδενικών του ΣΚΒ

Άσκηση 1

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση rlocus να προσδιοριστεί ο αντίστοιχος ΓΤΡ για κάθε μια από τις ακόλουθες ΣΜ για κέρδος $0 < \mathrm{K} < \infty$:

i. $\mathrm{T(s)} = \frac{1}{s^3+4s^2+6s+1}$

ii. $\mathrm{T(s)} = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+4s+6)}$

iii. $\mathrm{T(s)} = \frac{s+7}{s(s+2)(s+4)(s+9)}$

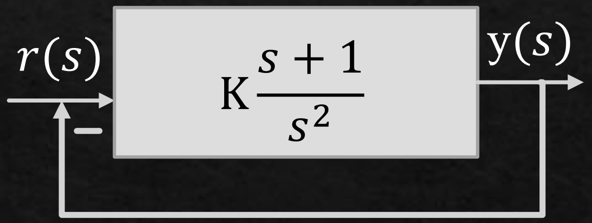
Άσκηση 2

Ένα σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης έχει αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $KG(s) = K\frac{s^2-2s+2}{s(s^2+3s+2)}$.

Χρησιμοποιώντας το MATLAB να κατασκευάσετε το διάγραμμα του ΓΤΡ και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του κέρδους K για την οποία το σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση 3

Θεωρούμε το σύστημα του παρακάτω σχήματος:

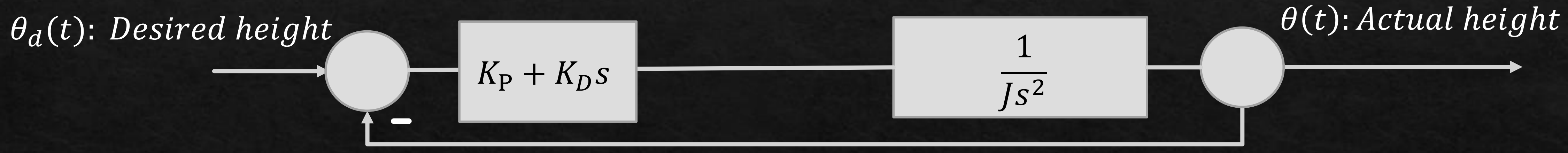


a) Για ποια τιμή του K οι κύριες ρίζες του ΣΚΒ αντιστοιχούν σε συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 0.7$; (Χρησιμοποιείστε πρώτα την εντολή >>sgrid(0.7) και μετά σχεδιάστε τον ΓΤΡ)

b) Για ποιες τιμές του K κύριες ρίζες του ΣΚΒ αντιστοιχούν σε συντελεστή απόσβεσης $\zeta > 0.64$ και φυσική συχνότητα $\omega_n > 1.5\ rad/s$; (Ακολουθείστε την διαδικασία που περιεγράφηκε σε προηγούμενη διαφάνεια)

Άσκηση 4

Ένα σύστημα ελέγχου ύψους ενός διαστημοπλοίου φαίνεται στο επόμενο λειτουργικό διάγραμμα.

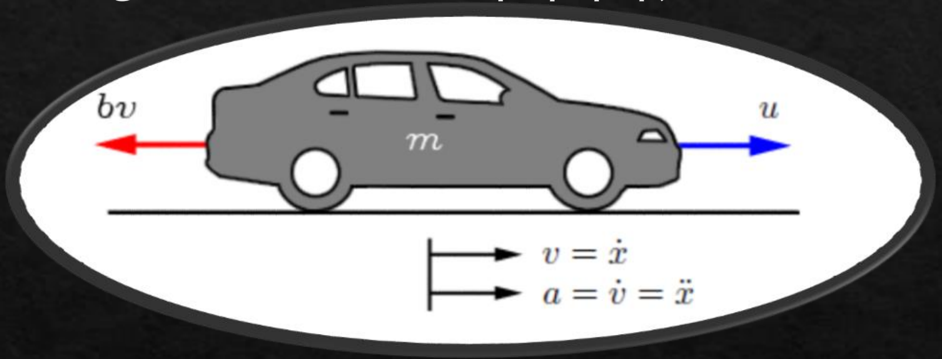


Για τον έλεγχο του ΣΚΒ χρησιμοποιείται ένας PD ελεγκτής με λόγο κερδών K_P/K_D=5.

Κάνοντας χρήση του ΓΤΡ στο MATLAB να βρεθούν οι κατάλληλες ποσότητες K_P/J και K_D/J τέτοιες ώστε ο χρόνος ανόδου t_r να μην υπερβαίνει τα 0.3 seconds και το ποσοστό της υπερύψωσης στην αντίστοιχη βηματική απόκριση να μην υπερβαίνει το 10%. Να τυπώσετε την επίσης τη μοναδιαία βηματική απόκριση του ΣΚΒ.

Άσκηση 5

Το απλοποιημένο μοντέλο για το πρόβλημα του cruise control δίνεται παρακάτω για ένα αυτοκίνητο με μάζα m=1000 kg και συντελεστή τριβής b=50.



Η ΣΜ του αυτοκινήτου είναι: $G(s) = \frac{1}{ms+b}$.

a) Σχεδιάστε και προσομοιώστε με τη βοήθεια του MATLAB έναν PID ελεγκτή με λόγους κερδών K_p/K_D=0.3 και K_i/K_D=0.45 , ο οποίος θα επιβάλλει στο αυτοκίνητο σταθερή ταχύτητα v=5m/s με μηδενική υπερύψωση και φυσική συχνότητα τουλάχιστον 0.03 rad/s.

b) Θα μπορούσε μια πιο απλή δομή ελεγκτή να ικανοποιήσει τις παραπάνω προδιαγραφές;