Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Lehrstuhl Computergestützte Statistik

Dr. Uwe Ligges
M.Sc. Marieke Stolte
Luca Sauer
Rudi Zulauf

Übung zur Vorlesung

Computergestützte Statistik

Wintersemester 2022/2023

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

c) Angenommen, in der linken, sortierten Liste sind i Elemente. Sei $V(i)$ die maximal mögliche Anzahl der Vergleiche, um die Einfügposition zu finden. Es gilt:

$$V(i) \leq 1 + \max(V(\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor), V(\lceil\frac{i-1}{2})\rceil)$$

und $V(1) = 1$ und $V(2) = 1$

Man kann jetzt direkt wg. der fortwährenden Teilung durch 2 raten

$$V(i) \leq \log_2(i) + 1$$

und beweist dies durch Induktion:

Induktionsanfang steht oben. Sei jetzt $i \geq 3$ fest und die Aussage gelte für alle $1, \ldots, i-1$

$$V(i) \leq 1 + \max(V(\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor), V(\lceil\frac{i-1}{2}\rceil)) \leq$$
$$2 + \max(\log_2(\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor), \log_2(\lceil\frac{i-1}{2}\rceil)) \leq 2 + \log_2(\frac{i}{2}) \leq 1 + \log_2(i)$$

d) Sei $C(n)$ die Anzahl der Vergleiche im Worst Case. Es gilt jetzt mit Teil c):

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} V(i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\log_2(i) + 1) \leq (n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \log_2(n)$$

$$= (n-1) + (n-1)\log_2(n) = O(n \log_2(n))$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

a) Sei $C(n)$ die Anzahl der Vergleiche im Worst Case für Insertion-Sort. Es gilt, egal wie die Daten aussehen:

$$C(n) \leq 1 + 2 + ... + (n-1) = n(n-1)/2$$

denn IS braucht in jeder äußeren Iteration maximal so viele Vergleiche wie Elemente links von „element" in der sortierten Liste stehen. Daraus folgt $C(n) = O(n^2)$. Man sieht aber sofort, dass diese Schranke auch angenommen wird, wenn die Liste genau verkehrt herum sortiert ist, da IS dann „element" immer mit allen Elementen der linken Teilliste vergleichen muss, denn „element" ist das Minimum dieser. Also folgt sofort $C(n) = \Theta(n^2)$