Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Lehrstuhl Computergestützte Statistik

Uwe Ligges
Marieke Stolte
Luca Sauer
Rudi Zulauf

Übung zur Vorlesung

# Computergestützte Statistik

Wintersemester 2022/2023

## Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 4

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Sei $y = g(x, a) = a_2x^2+a_1x+a_0 = \sum_{i=0}^{2} a_ix^i$. Wir interessieren uns für $\delta_y$.

$$\begin{aligned}
\delta_y &\approx \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i}{g(x,a)} \frac{\partial g(x,a)}{\partial a_i}\delta_{a_i} + \frac{x}{g(x,a)}\frac{\partial g(x,a)}{\partial x}\delta_x \\
&= \sum_{i=0}^{2} \frac{a_ix^i}{g(x,a)}\delta_{a_i} + \frac{x(2a_2x+a_1)}{a_2x^2+a_1x+a_0}\delta_x
\end{aligned}$$

Jetzt schätzen wir ab: Sei jetzt $\delta_a = \max_{i=0,1,2} \delta_{a_i}$

$$\begin{aligned}
&> \sum_{i=0}^{2} \frac{a_ix^i}{g(x,a)}\delta_a + \frac{x(2a_2x+a_1)}{a_2x^2+a_1x+a_0}\delta_x \\
&= \frac{\delta_a \sum_{i=0}^{2} a_ix^i}{g(x,a)} + \frac{x(2a_2x+a_1)}{a_2x^2+a_1x+a_0}\delta_x \\
&= \delta_a + \frac{2a_2x^2+a_1x}{a_2x^2+a_1x+a_0}\delta_x
\end{aligned}$$

Jetzt blicken wir auf den Vorfaktor von $\delta_x$ und versuchen den mal abzuschätzen. Recht offensichtlich geht er für $|x| \to \infty$ gegen 2 und für $x \to 0$ gegen $\frac{1}{a_0}$. Der Ausdruck ist also unabhängig von $x$ recht gut Konditioniert. Ein Problem kann jedoch auftreten, wenn der Nenner nahezu 0, und der Zähler dafür groß ist, d.h. wenn $-a_0 \approx a_2x^2 + a_1x$, bzw. wenn das Polynom einen Wert in der Nähe der 0 annimmt. Ein Beispiel dafür findet sich im R-Code mit $x = 1000000$, $a_2 = a_1 = 0.1$. Damit ist $a_0 = -a_2x^2 + a_1x = -100000100000$, damit $g(a, x) = 0$ erfüllt ist. Addiert man jetzt auf $a_0$ einen kleinen Wert, findet man einen großen relativen Fehler.

**Aufgabe 3** **(4 Punkte)**

a) Wir wollen $a_1 = (u \otimes u) \ominus (v \otimes v)$ und $a_2 = (u \oplus v) \otimes (u \ominus v)$ miteinander vergleichen. Als Beispiel nehmen wir $u = 0.3341$ und $v = 0.3340$. Die Idee dabei ist es, 2 Zahlen zu wählen die möglichst gleich sind, damit in der Subtraktion eine maximale Auslöschung auftritt. Hier ergibt sich (bitte darauf achten, dass immer auf 4 signifikante Stellen gerundet wird):

$$\begin{aligned}
u^2 &= 0.1116228 \Rightarrow u \otimes u = 0.1116 \\
v^2 &= 0.111556 \Rightarrow v \otimes v = 0.1116 \\
u^2 \ominus v^2 &= 0.1116 - 0.1116 = 0 \\
u \ominus v &= 0.0001 = 10^{-4} \\
u \oplus v &= 0.6681 \\
(u \oplus v) \otimes (u \ominus v) &= 0.6681 \cdot 10^{-4} = 0.00006681 = 0.668110^{-4}
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind die beiden Ergebnisse ungleich. In diesem extremen Fall erfährt $(u \otimes u) \ominus (v \otimes v)$ eine vollständige Auslöschung und dadurch einen vollständigen Verlust jeglicher Genauigkeit. Auf der anderen Seite kann mit $(u \oplus v) \otimes (u \ominus v)$ das Ergebnis fast exakt dargestellt werden. Bei Addition und Subtraktion erfolgen keine Rundungen, und bei der Multiplikation wird lediglich das Komma verschoben.

Als nächstes interessiert uns der relative Fehler zwischen diesen beiden Zahlen. Um den relativen Unterschied zwischen zwei Zahlen $a_1$ und $a_2$ zu bestimmen, gibt es 2 Möglichkeiten: $\frac{a_2 - a_1}{a_1}$ und $\frac{a_1 - a_2}{a_2}$. Da bei uns $a_1 = 0$ gilt, vereinfacht sich der Zähler auf jeden Fall zu $\pm a_2$. Im zweiteren Fall würde sich dadurch ein Fehler von -1 ergeben, im ersteren Fall dividieren wir durch 0 und erhalten dadurch einen relativen Fehler von unendlich, d.h. dieser Fall ist nicht sinnvoll. Damit erhalten wir für unser Zahlenbeispiel einen relativen Fehler von -1. Man kann sich leicht vorstellen, dass das zeitgleich auch der betragsmäig maximal erreichbare relative Fehler ist.

**Achtung**: Uns interessiert natürlich nicht der absolute Fehler! Durch eine Erhöhung des Exponenten in diesem Beispiel (d.h. multipliziere jede der beiden Zahlen mit $10^e$) kann ein beliebig großer, absoluter Fehler erzeugt werden – dazu muss lediglich $e$ immer weiter vergrößert werden. Dies ist dann sogar unabhängig von der Wahl von $u$ und $v$ möglich.