Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Lehrstuhl Computergestützte Statistik

Uwe Ligges
Marieke Stolte
Luca Sauer
Rudi Zulauf

Übung zur Vorlesung

Computergestützte Statistik

Wintersemester 2022/2023

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 5

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

a)

$$\frac{u}{uv}\frac{\partial(uv)}{\partial u}\delta_u + \frac{v}{uv}\frac{\partial(uv)}{\partial v}\delta_v = \frac{1}{v}v\delta_u + \frac{1}{u}u\delta_v = \delta_u + \delta_v$$

b)

$$\frac{u}{u \pm v}\frac{\partial(u \pm v)}{\partial u}\delta_u + \frac{v}{u \pm v}\frac{\partial(u \pm v)}{\partial v}\delta_v = \frac{u}{u \pm v} \cdot 1 \cdot \delta_u + \frac{v}{u \pm v} \cdot \pm 1 \cdot \delta_v = \frac{u\delta_u \pm v\delta_v}{u \pm v}$$

c)

$$\frac{u}{u/v}\frac{\partial(u/v)}{\partial u}\delta_u + \frac{v}{u/v}\frac{\partial(u/v)}{\partial v}\delta_v = \frac{uv}{u}\frac{1}{v}\delta_u + \frac{v^2}{u}(-\frac{u}{v^2})\delta_v = \delta_u - \delta_v$$

d) Zunächst wird bei $v + w$ der Fehler $\frac{v\delta_v + w\delta_w}{v+w}$ gemacht, siehe b). Jetzt kommt die Multiplikation mit u, nach a) haben wir dann $\delta_u + \frac{v\delta_v + w\delta_w}{v+w}$. Umformen führt zu:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta_u(v + w) + v\delta_v + w\delta_w}{v + w} \\ =&\frac{\delta_u v + \delta_v v + \delta_u w + \delta_w w}{v + w} \\ =&\frac{v(\delta_u + \delta_v) + w(\delta_u + \delta_w)}{v + w} \end{aligned}$$

e) Zunächst die beiden Multiplikationen, diese erzeugen Fehler $\delta_u + \delta_v$ und $\delta_u + \delta_w$. Jetzt müssen wir b) anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{uv(\delta_u + \delta_v) + uw(\delta_u + \delta_w)}{(uv) + (uw)} \\ =&\frac{u(v(\delta_u + \delta_v) + w(\delta_u + \delta_w))}{u(v + w)} \\ =&\frac{v(\delta_u + \delta_v) + w(\delta_u + \delta_w)}{v + w} \end{aligned}$$

Wir sehen: Ergebnisse aus d) und e) sind identisch. Also scheint die Fehlerfortpflanzung beim Distributivgesetz jeweils in der gleichen Größenordnung zu liegen. Allerding heißt das leider nicht, dass das Distributivgesetzt auch gilt, dem ist nämlich leider nicht so.

Aufgabe 2 **(1 Punkte)**

c) Analytische Berechnung der Varianz. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte Vektor $x = (1, \ldots, n)^T$ der Länge n. Dann ist die empirische Varianz von x gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(x) &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{\frac{3}{2}n(n+1)^2}{6}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{(n+1)\left(n(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1)\right)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{(n+1)\left(2n^2 + n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n\right)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{(n+1)\frac{1}{2}n(n-1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}
\end{aligned}
$$