Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Lehrstuhl Computergestützte Statistik

Uwe Ligges
Marieke Stolte
Luca Sauer
Rudi Zulauf

Übung zur Vorlesung

Computergestützte Statistik

Wintersemester 2022/2023

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe ist Dienstag, der 13.12.2022 bis 08:00 Uhr im Moodle

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

a) (2 Punkte) Implementieren Sie die *Golden-Section Suche*. Denken Sie daran Ihre Funktion zu dokumentieren.

b) (1 Punkt) Verwenden Sie Ihre Implementierung aus a), um den Median von Vektoren der Art `sample(n)` zu bestimmen. Passen Sie dazu die Funktion ein wenig an: Eingabe soll keine zu optimierende Funktion sondern lediglich das n sein. Weiterhin kann für diese spezielle Anwendung ein sinnvolleres Abbruchkriterium verwendet werden. Der Rückgabewert Ihrer Funktion soll eine Liste mit dem Median und der Anzahl benötigter Iterationen sein. Testen Sie, ob Ihre Funktion den richtigen Median bestimmt.

c) (1 Punkte) Führe Sie Ihre Funktion für geeignete n aus und stellen Sie den Zusammenhang zwischen Iterationszahl und n grafisch dar. Schätzen Sie anhand der Grafik die Laufzeit in Abhängigkeit von n ab und geben Sie sie mit einem geeigneten Landau-Symbol an. Lohnt sich diese Art der Median-Bestimmung?

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Betrachten Sie die *Quadratic-Interpolation-Search* aus dem Skript (Folie 391). **Achtung**: In der urspünglichen Variante des Skripts ist leider eine falsche Formel angegeben. Korrekt muss es lauten:

$$\theta_{\text{new}} = \frac{1}{2} \frac{f(\theta_{\text{right}})(\theta_{\text{left}}^2 - \theta_{\text{best}}^2) + f(\theta_{\text{best}})(\theta_{\text{right}}^2 - \theta_{\text{left}}^2) + f(\theta_{\text{left}})(\theta_{\text{best}}^2 - \theta_{\text{right}}^2)}{f(\theta_{\text{right}})(\theta_{\text{left}} - \theta_{\text{best}}) + f(\theta_{\text{best}})(\theta_{\text{right}} - \theta_{\text{left}}) + f(\theta_{\text{left}})(\theta_{\text{best}} - \theta_{\text{right}})}$$

a) (3 Punkte) Implementieren Sie den Algorithmus.

b) (1 Punkt) Testen Sie Ihre Implementierung. Denken Sie sich dazu einige (mindestens 4) eindimensionale, unimodale Optimierungsprobleme aus. Bestimmen Sie analytisch die wahren Optima dieser Probleme und überprüfen Sie, ob Ihre Implementierung diese findet.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die Aussagen der 4 Spiegelpunkte auf Folie 410:

Seien dazu $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie jeweils, dass dann auch g eine konvexe Funktion ist:

a) (1 Punkt) $g(\theta) = f_1(A\theta + b)$

b) (0.5 Punkte) $g(\theta) = \max\{f_1(\theta), f_2(\theta)\}$

c) (0.5 Punkte) $g(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta)$

Zeigen Sie weiterhin, dass $g(\theta) = f_4(f_3(\theta))$ eine konvexe Funktion ist, falls:

d) (1 Punkt) $f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton nicht-fallend ist,

e) (1 Punkt) $f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav und $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton nicht-steigend ist.