Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik
Lehrstuhl Computergestützte Statistik

Uwe Ligges
Marieke Stolte
Luca Sauer
Rudi Zulauf

Übung zur Vorlesung

Computergestützte Statistik

Wintersemester 2022/2023

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 9

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zu zeigen ist jeweils:

$$g(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) \leq \nu g(\theta_1) + (1-\nu)g(\theta_2)$$

gilt für alle θ_1, θ_2, ν.

a)

$$\begin{aligned}
g(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) &= f(A(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) + b) \\
&\overset{(1)}{=} f(A\nu\theta_1 + A(1-\nu)\theta_2) + \nu b + (1-\nu)b) \\
&= f(\nu(A\theta_1 + b) + (1-\nu)(A\theta_2 + b)) \\
&\overset{(2)}{\leq} \nu f(A\theta_1 + b) + (1-\nu)f(A\theta + b) \\
&= \nu g(\theta_1) + (1-\nu)g(\theta_2)
\end{aligned}$$

Wichtig ist hier in (1) die Addition von $\nu b - \nu b$, dadurch können die beiden Summanden νb und $(1-\nu)b$ entstehen. Ungleichung (2) ergibt sich dann direkt aus der Konvexität von f.

b)

$$\begin{aligned}
g(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) &= \max\{f_1(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2), f_2(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2)\} \\
&\overset{(1)}{\leq} \max\{\nu f_1(\theta_1) + (1-\nu)f_1(\theta_2), \nu f_2(\theta_1) + (1-\nu)f_2(\theta_2)\} \\
&\overset{(2)}{\leq} \max\{\nu f_1(\theta_1), \nu f_2(\theta_1)\} + \max\{(1-\nu)f_1(\theta_2), (1-\nu)f_2(\theta_2)\} \\
&\overset{(3)}{=} \nu \max\{f_1(\theta_1), f_2(\theta_1)\} + (1-\nu)\max\{f_1(\theta_2), f_2(\theta_2)\} \\
&= \nu g(\theta_1) + (1-\nu)g(\theta_2)
\end{aligned}$$

Ungleichung (1) folgt hier direkt aus der Konvexität von f_1 und f_2. Spannender ist Ungleichung (2). Wir betrachten hier im Prinzip eine Gleichung der Art: $\max\{a+b, c+d\}$, und müssen zeigen, dass diese kleiner ist als $\max\{a, c\} + \max\{b, d\}$. Falls $a > c$ und $b > d$ gilt offensichtlich die Gleichheit zwischen beiden Ausdrücken. Falls $a < c$ und $b > d$ wird die 2. Gleichung zu $b + c$. Weiterhin gilt sowohl $a + b < b + c$ als auch $c + d < b + c$, dies folgt direkt aus den Annahmen. Die Fälle $a > c, b < d$ und $a < c, b < d$ folgen ebenso. Und damit folgt die Ungleichung. In Umformung (3) wird letztlich lediglich ausgeklammert.

c)

$$\begin{aligned}
g(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) &= f_1(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) + f_2(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) \\
&\overset{(1)}{\leq} \nu f_1(\theta_1) + (1-\nu) f_1\theta_2) + \nu f_2(\theta_1) + (1-\nu) f_2\theta_2) \\
&= \nu(f_1(\theta_1) + f_2(\theta_1)) + (1-\nu)(f_1(\theta_2) + f_2(\theta_2)) \\
&= \nu g(\theta_1) + (1-\nu) g(\theta_2)
\end{aligned}$$

Umformung (1) nutzt die Konvexität von f_1 und f_2, mehr spannendes gibt es hier nicht zu berichten.

d)

$$\begin{aligned}
g(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) &= f_4(f_3(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2)) \\
&\overset{(1)}{\leq} f_4(\nu f_3(\theta_1) + (1-\nu) f_3(\theta_2)) \\
&\overset{(2)}{\leq} \nu f_4(f_3(\theta_1)) + (1-\nu) f_4(f_3(\theta_2)) \\
&= \nu g(\theta_1) + (1-\nu) g(\theta_2)
\end{aligned}$$

Interessant ist hier vor allem Umformung (1). Zwar gilt offensichtlich (weil f_3 eine konvexe Funktion ist) $f_3(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) \leq \nu f_3(\theta_1) + (1-\nu) f_3(\theta_2)$, dadurch folgt jedoch nicht direkt die Ungleichung (1). Diese ist lediglich möglich, weil f_4 monoton nicht-fallend ist, dadurch kann f_4 die Relation in ihrem Argument aufrecht erhalten. Schritt (2) folgt dann, weil f_4 selbst auch wieder konvex ist.

e) Hier ist der Beweis identisch zu Teil c). Lediglich die Argumentation für die Gültigkeit von (1) ändert sich. Hier gilt jetzt, weil f_3 konkav ist: $f_3(\nu\theta_1 + (1-\nu)\theta_2) \geq \nu f_3(\theta_1) + (1-\nu) f_3(\theta_2)$. Da f_4 dieses mal jedoch monoton nicht-steigend ist, bewahrt f_4 die Relation Ihres Argumentes nicht, sondern dreht diese um.