

Übung zur Vorlesung
Computergestützte Statistik
Wintersemester 2022/2023
Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Bitte beachten Sie: Wir geben die Algorithmen hier bis ins aller kleinste Detail an. Dies ist normalerweise nicht erforderlich, ein gewisses Grundwissen (z.B. die Funktionsweise von arithmetischen Operatoren) kann normalerweise vorausgesetzt werden. Um einmal ein Beispiel eines komplett vollständigen Algorithmus zu geben, haben wir hier absichtlich auf derartiges Vorwissen verzichtet.

a) Schriftliche Addition von beliebig vielen natürlichen Zahlen:

- Zunächst ein Algorithmus zur schriftlichen Addition von zwei natürlichen Zahlen:

Eingabe: Zwei natürliche Zahlen mit k_1 und k_2 Ziffern. Sei hier $k_1 \geq k_2$. Falls dies nicht erfüllt ist, starte den Algorithmus erneut, vertausche jedoch die beiden Zahlen.

Ausgabe: Eine einzelne natürliche Zahl.

Algorithmus:

- 0a *Nicht-mathematische Vorbereitung:* Schreibe die beiden Zahlen untereinander, so dass die jeweils rechten Ziffern untereinander stehen. Die übrigen links folgenden Ziffern stehen auch jeweils untereinander, wobei jedoch $k_1 > k_2$ sein kann und demnach die obere Zeile vorne mehr Ziffern enthalten kann.
- 0b *Mathematische Vorbereitung:* Setze einen Zähler i auf 1. Dieser gibt an, dass aktuell das Ziffern paar rechts außen bearbeitet wird. Setze weiterhin eine logische Variable Übertrag auf **FALSE**. Diese bedeutet, dass es aktuell keinen Übertrag gibt.
- 1 Addiere die Ziffern an der i -ten (hier der letzten – wir zählen von rechts nach links) Stellen der beiden Zahlen miteinander anhand der unten angegebenen Additionstafel. Schreibe das Einerglied unter die beiden Ziffern an die i -te Stelle der Ergebniszahl und setze den Übertrag auf **TRUE**, falls die Addition einen Übertrag ergeben hat. Erhöhe i um 1. Bearbeite nun das nächste Ziffern paar.
- 2 Solange $i \leq k_2$ ist, erledige die folgenden Schritte:
 - a Wenn der Übertrag **TRUE** ist: Addiere 1 und die i -te Stelle der 2. Zahl nach der Additionstafel. Falls dabei kein Übertrag auftritt, setze den Übertrag auf **FALSE**.
 - b Addiere den Einerteil der letzten Addition (aus 2a) und die i -te Stelle der 1. Zahl nach der Additionstafel. Falls dabei ein Übertrag auftritt, setze diesen auf **TRUE**.
 - c Setze den Einerteil des Ergebnis von 2b als i -te Stelle der Ergebniszahl.
 - d Erhöhe i um 1.

3 Solange $i > k_2$ und $i \leq k_1$ ist erledige die folgenden Schritte:

- a Wenn der Übertrag **TRUE** ist: Addiere 1 und die i -te Stelle der 1. Zahl nach der Additionstafel. Falls dabei kein Übertrag auftritt, setze den Übertrag auf **FALSE**. Setze die i -te Stelle des Ergebnis auf den Einerteil der Addition.
- b Wenn der Übertrag **FALSE** ist: Setze die i -te Stelle des Ergebnis auf die i -te Stelle der 1. Zahl
- c Erhöhe i um 1.

4 Nun ist $i = k_1 + 1$. Wenn der Übertrag **TRUE** ist, setze die i -te Stelle der Ergebniszahl auf 1.

5 Gebe die Ergebniszahl zurück.

Für den Algorithmus wird die folgende Additionstafel benötigt, die sowohl den Einerteil (rechts) als auch den Übertrag (links) der Addition angibt:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
1	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0
2	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1
3	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2
4	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3
5	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4
6	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5
7	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
8	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7
9	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8

- Schriftliche Addition von beliebig vielen Zahlen:

Eingabe: n natürliche Zahlen.

Ausgabe: Eine einzelne natürliche Zahl.

Algorithmus:

- 1 Setze das Ergebnis auf die 1. Zahl
- 2 Für $i \in \{2, \dots, n\}$: Addiere die i -te Zahl mit dem aktuellen Ergebnis. Verwende dazu den oben angegebenen Algorithmus zur Addition von zwei natürlichen Zahlen.
- 3 Gebe das Ergebnis zurück.

- b) Schriftliche Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen:

Eingabe: Zwei natürliche Zahlen mit k_1 und k_2 Ziffern.

Ausgabe: Eine einzelne natürliche Zahl.

Algorithmus:

- 0a *Nicht-mathematische Vorbereitung:* Schreibe die beiden Zahlen nebeneinander, getrennt durch ein \times . Ziehe einen waagerechten Strich unter die beiden Zahlen.
- 0b *Mathematische Vorbereitung:* Erzeuge unter den beiden Zahlen eine Matrix mit k_1 Zeilen und $k_1 + k_2 + 1$ Spalten. Setze weiterhin einen Zähler i für die 1. Zahl und einen Zähler j für die 2. Zahl auf 1. Dies bedeutet, dass aktuell die jeweils äußeren rechten Ziffern betrachtet werden (wir zählen jeweils von rechts nach links). Setze eine Variable u für den Übertrag auf 0.

- 1 Für $i \in \{1, \dots, k_1\}$, d.h. für jede Ziffer der 1. Zahl führe abwechselnd die folgenden Schritte aus:
 - a Multipliziere die i -te Ziffer der 1. Zahl mit der 1. Ziffer (rechts außen) der 2. Zahl (verwende Multiplikationstafel, siehe unten). Trage den Einerteil in das Feld in der i -ten Zeile und der $(i + j - 1)$ -ten Spalte der Matrix ein. Setze u auf den Übertrag. Erhöhe j um 1.
 - b Für $j \in \{2, \dots, k_2\}$:
 - i Multipliziere die i -te Ziffer der 1. Zahl mit der j -ten Ziffer der 2. Zahl (verwende die Multiplikationstafel, siehe unten).
 - ii Addiere u auf das Ergebnis der Multiplikation (verwende Additionstafel).
 - iii Trage das Ergebnis (Einerteil) in das Feld in der i -ten Zeile und der $(i + j - 1)$ -ten Spalte (beachte: von rechts nach links) der Matrix ein.
 - iv Setze u auf den Übertrag aus der Multiplikationstafel. Falls bei der Addition aus b ii ein Übertrag auftrat, setze zusätzlich $u = u + 1$.
 - c Falls $u \neq 0$, trage u in das Feld in der i -ten Zeile und $(i + k_2)$ -ten Spalte ein und setze u auf 0. Setze j wieder auf 1.
- 2 Fülle alle offenen Felder der Matrix mit 0 auf.
- 3 Verwende den Algorithmus zur Addition von beliebig vielen Zahlen, wobei jede Zeile der Matrix eine Zahl darstellt, um das Endergebnis zu bestimmen.

Und hier noch die benötigte Multiplikationstafel mit Einerteil (|rechts) und Übertrag (links|) der Multiplikation:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
1	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
2	0 0	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
3	0 0	0 3	0 6	0 9	1 2	1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
4	0 0	0 4	0 8	1 2	1 6	2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
5	0 0	0 5	1 0	1 5	2 0	2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
6	0 0	0 6	1 2	1 8	2 4	3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
7	0 0	0 7	1 4	2 1	2 8	3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
8	0 0	0 8	1 6	2 4	3 2	4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
9	0 0	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5	5 4	6 3	7 2	8 1