

Übung zur Vorlesung
Computergestützte Statistik
Wintersemester 2022/2023
Übungsblatt Nr. 5

Abgabe ist Dienstag, der 15.11.2022 bis 08:00 Uhr im Moodle

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien analog zu Folie 168 u, v, w Zahlen mit Gleitkommadarstellungen u^*, v^*, w^* und relativen Fehlern $\delta_u, \delta_v, \delta_w$. Beweisen Sie:

- a) (0.5 Punkte) $\delta_{uv} \approx \delta_u + \delta_v$
- b) (0.5 Punkte) $\delta_{u \pm v} \approx \frac{u}{u \pm v} \delta_u \pm \frac{v}{u \pm v} \delta_v$
- c) (0.5 Punkt) $\delta_{u/v} \approx \delta_u - \delta_v$

Bestimmen Sie weiterhin:

- d) (1 Punkt) $\delta_{u(v+w)}$
- e) (1 Punkt) δ_{uv+uw}

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus d) und e). Was fällt Ihnen auf? (0.5 Punkte)

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Wir vergleichen die beiden Standard-Algorithmen zur Varianzberechnung. Die beiden Implementierungen müssen jeweils wie üblich dokumentiert werden. Ein Test ist hier nicht notwendig, die nachfolgende Simulation kann als Test angesehen werden. Neben Implementierung der beiden Algorithmen brauchen wir dafür Vektoren, deren exakte Varianz wir kennen. Dazu verwenden wir Vektoren der Art $[1, 2, \dots, n]$.

- a) (0.5 Punkte) Implementieren Sie den Two-Pass Algorithmus zur Varianzberechnung:
 $s(x) = \sum (x_i - \bar{x})^2$.
- b) (0.5 Punkte) Implementieren Sie den Textbook Algorithmus zur Varianzberechnung:
 $s(x) = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2$.
- c) (1 Punkt) Berechnen Sie (analytisch) die Varianz des Vektors $[1, \dots, n]$ mit n beliebig.
- d) (1 Punkt) Berechnen Sie für je 10 zufällige Permutationen des Vektors $[1, \dots, n]$ sowohl mit Ihren Implementierungen aus a) und b) sowie mit der `var`-Funktion die Varianz. Bestimmen Sie die absolute Differenz von der wahren Varianz, die Sie mit der Formel aus c) ausrechnen können. Stellen Sie die Fehler für $n \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^{26}\}$ grafisch dar. Bis wann liefern die Algorithmen exakte Ergebnisse? Welchen Algorithmus implementiert R vermutlich? Welchen Einfluss hat die Reihenfolge des Vektors?

Hinweis: Sie dürfen gerne die Funktionen `sum` und `mean` verwenden.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Schreiben Sie eine Funktion `youngsCramerVar`, die den Updating Algorithmus von Youngs und Cramer implementiert. Dokumentieren Sie Ihre Funktion wie üblich. Testen Sie Ihre Funktion, in dem Sie sicherstellen, dass die Ergebnisse sich nicht zu sehr von den Ergebnissen der `var`-Funktion unterscheiden.