ANALISI SPETTRALE
INTRODUZIONE

Le Telecomunicazioni si occupano del problema del trasferimento di **informazioni**, e per raggiungere questo scopo l'informazione ha bisogno di un supporto fisico. Questo supporto viene chiamato **segnale**. Un segnale è una grandezza fisica, che varia nel tempo, e nella quale è racchiusa **l'informazione** da trasmettere. Ad esempio, se un insegnante volesse trasmettere un brano di un libro ad un alunno che si trovasse nella stessa aula a qualche metro di distanza non potrebbe limitarsi a *pensare* alle parole che legge sulla pagina del libro; bensì dovrebbe espirare l'aria dai polmoni e far vibrare le proprie corde vocali; questa vibrazione dell'aria si propaga fino ad arrivare all'orecchio dell'alunno, il cui cervello percepisce le parole: "Quel ramo del lago di Como, che volge a mezzogiorno...".
In questo caso il segnale è costituito dalla pressione istantanea dell'aria p(t), che varia in continuazione; ossia, dal segnale vocale.

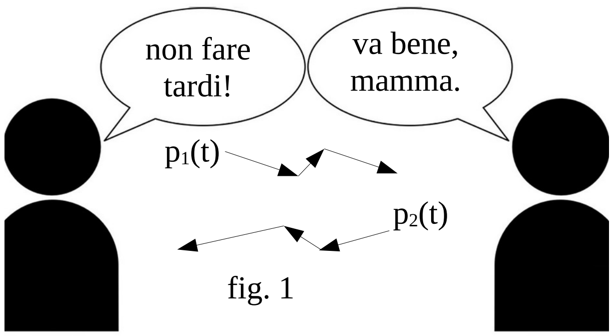


fig. 1

Se la comunicazione è bidirezionale allora bisogna distinguere i segnali vocali delle due stazioni.

Se però la distanza fosse maggiore, allora il segnale vocale non riuscirebbe a trasportare l'informazione fino alla destinazione. Ad esempio, se dal terzo piano dell'I.T.T. "Marconi" volessi chiedere al magazziniere del piano terra quante confezioni di disinfettante sono rimaste disponibili, non riuscirei a farmi capire nemmeno gridando. Per comunicare devo usare il telefono. In questo caso la mia voce, costituita dalla pressione istantanea $p_1(t)$, viene trasformata in un segnale elettrico: ossia la tensione istantanea $v_1(t)$, che viene inviata sul mezzo trasmissivo (il cavo telefonico) fino ad arrivare a destinazione, come si vede in figura 2.

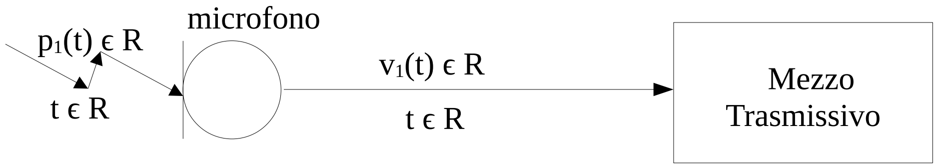


fig. 2

È bene notare che stiamo parlando di segnali **analogici**; ossia segnali a tempo continuo e ad ampiezze continue. Che cosa significa "**segnale a tempo continuo**" ? Significa che il dominio (temporale) della tensione $v_1(t)$ è **denso**, ovvero che la funzione $v_1(t)$ esiste in ogni punto dell'asse reale, per qualsiasi valore della variabile indipendente (il tempo). Anche, ad esempio, nell'istante $t = \pi$ sec.

Supponiamo ad esempio che l'evoluzione del segnale $v_1(t)$ sia quella riportata nella figura 3.

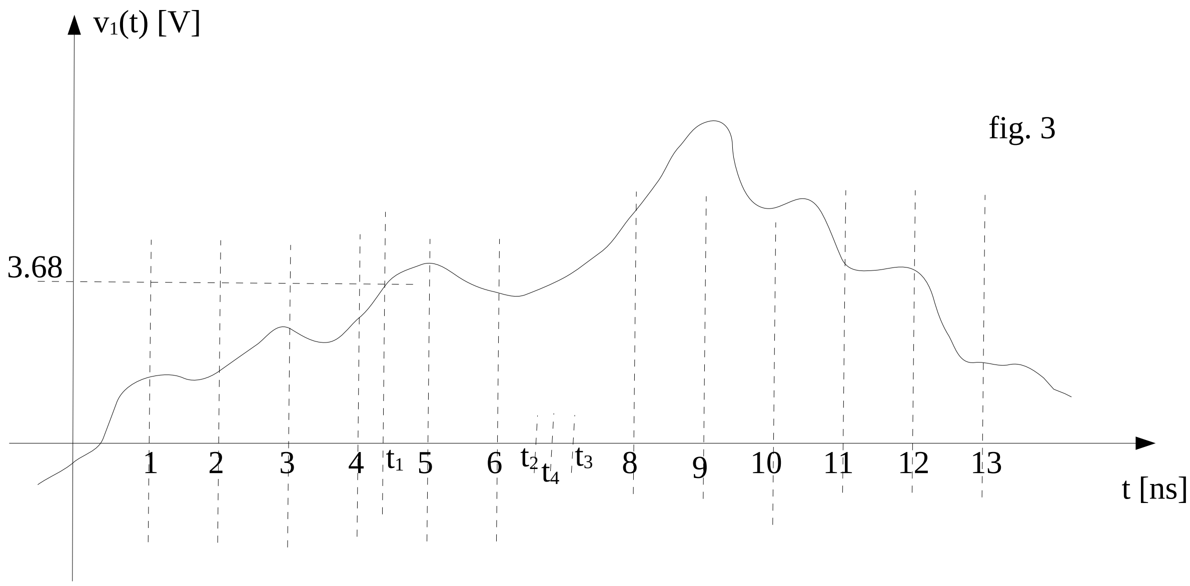


fig. 3

Se volessimo considerare il valore del segnale $v_1(t)$ nell'istante $t_1 = 4.36$ nsec

scopriremmo che in tale istante il segnale $v_1(t)$ esiste e vale 3.68 Volt.
in generale, avere un dominio **denso** della funzione $v_1(t)$ significa che, dati due istanti qualsiasi nel dominio, ad esempio t_2 e t_3 con $t_2 < t_3$ e vicini quanto vogliamo, esisterà un istante t_4 compreso tra t_2 e t_3 (ossia $t_2 < t_4 < t_3$) tale che t_4 appartiene anch'esso al dominio della funzione $v_1(t)$ come si vede in fig. 3.
Il segnale $v_1(t)$ della figura 3 è evidentemente **non periodico** dato che non si ripete mai. Ed i segnali informativi non possono essere periodici dato che in tal caso, una volta osservato l'andamento di un ciclo, potremmo predirne l'andamento futuro e non ci sarebbe più possibilità di alcuna novità nel segnale. Ovvero, nessuna informazione. Il caso di segnale periodico è un caso particolarissimo di segnale, ma particolarmente utile per le semplificazioni che tratteremo fra poco.
Potremmo fare svariati esempi di segnali periodici , ma ne scegliamo uno particolarmente facile da disegnare: l'onda quadra $v_q(t)$.

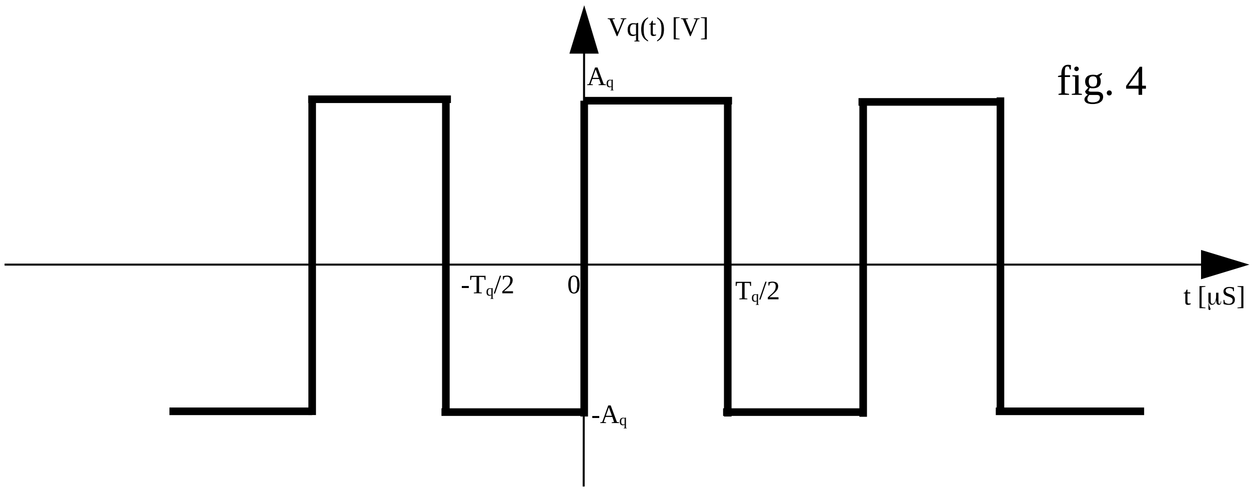


fig. 4

Indichiamo con T_q il suo periodo e con A_q la sua ampiezza di picco, come riportato nella figura 4.
Normalmente per indicare l'andamento di un segnale se ne traccia l'andamento nel dominio del tempo, ovvero la sua ampiezza istantanea $v_q(t)$ in funzione dell'istante generico t nel quale lo si misura. Attenzione a non confondere la scrittura " t " che indica un istante generico, ossia un elemento del dominio, con "T" che indica un intervallo di tempo. Nel nostro esempio, T_q

è il **periodo** della nostra onda quadra, ossia il tempo che dobbiamo aspettare affinché il segnale $v_q(t)$ si ripeta uguale a sè stesso, un ciclo dopo l'altro.

Segnale periodico: un segnale v(t) è periodico di periodo T_p se, dato un qualsiasi istante t_1 del dominio, risulta $v(t_1 + T_p) = v(t_1)$.

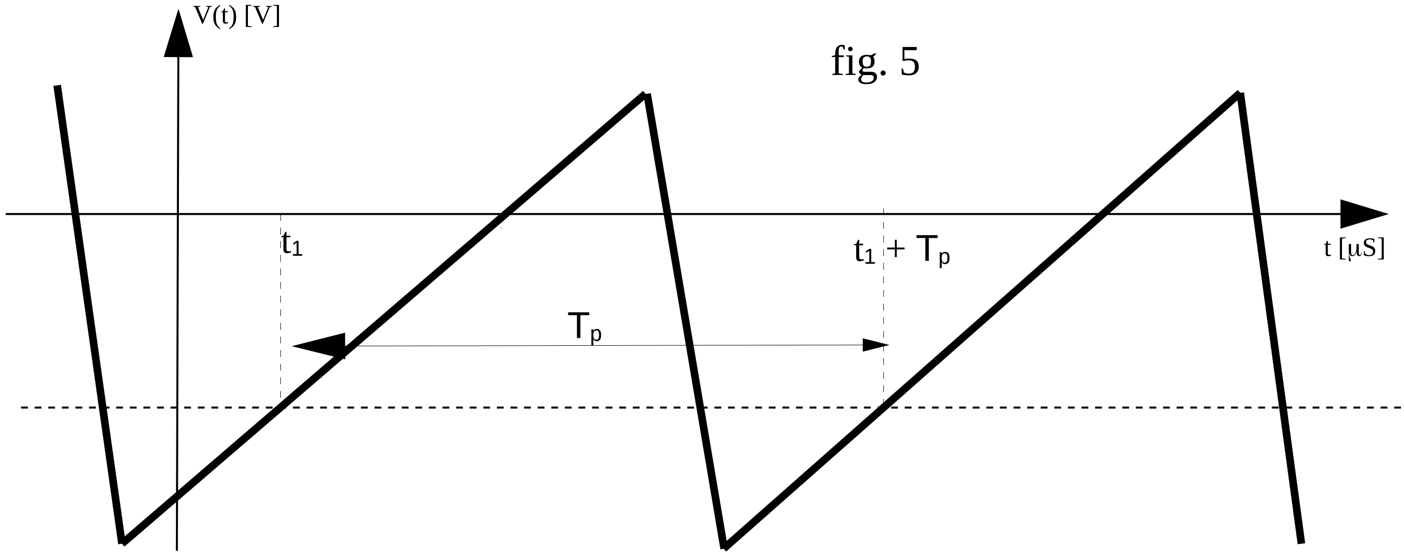


fig. 5

Nella figura 5 si può constatare facilmente che il segnale v(t) che vi è rappresentato è periodico di periodo T_p e per evitare di disegnare sempre un'onda quadra, abbiamo scelto un'altra forma d'onda.

SERIE DI FOURIER

Il vecchio metodo di descrivere i segnali mediante la loro rappresentazione nel dominio del tempo è stato usato per decenni, e lo è tuttora.

Ma il matematico Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) teorizzò la serie di Fourier e la conseguente Trasformata di Fourier, che ci permettono di descrivere un segnale non più mediante il suo andamento nel dominio del tempo, come riportato nella figura 4 bensì descrivendolo in un nuovo e diverso dominio: quello della **frequenza**. Una di queste rappresentazioni, facile da ottenere se il segnale da rappresentare è periodico, è ottenuta tramite un insieme di molte (eventualmente infinite) oscillazioni sinusoidali con diverse frequenze. Ciascuna di queste frequenze corrisponde ad un multiplo intero di una frequenza base detta **fondamentale** (o prima armonica). Osserviamo la figura 6 e notiamo che il segnale ad onda quadra $v_q(t)$ ha un suo periodo T_q al quale corrisponde una frequenza $f_q = 1/T_q$. Qui usiamo il pedice "q" per ricordare "quadro".

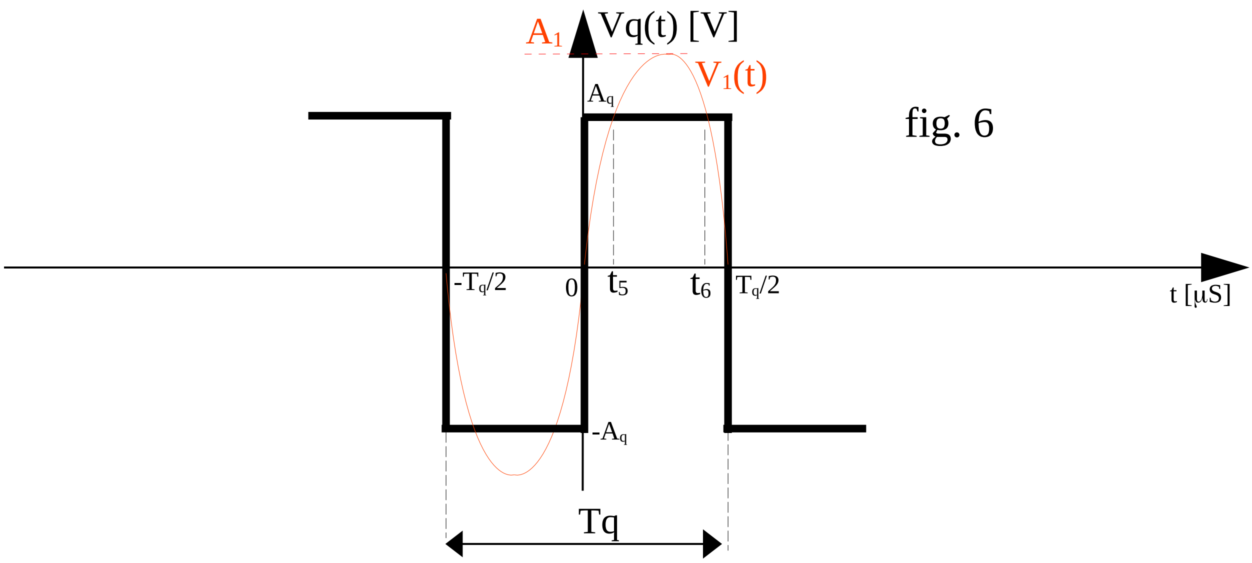
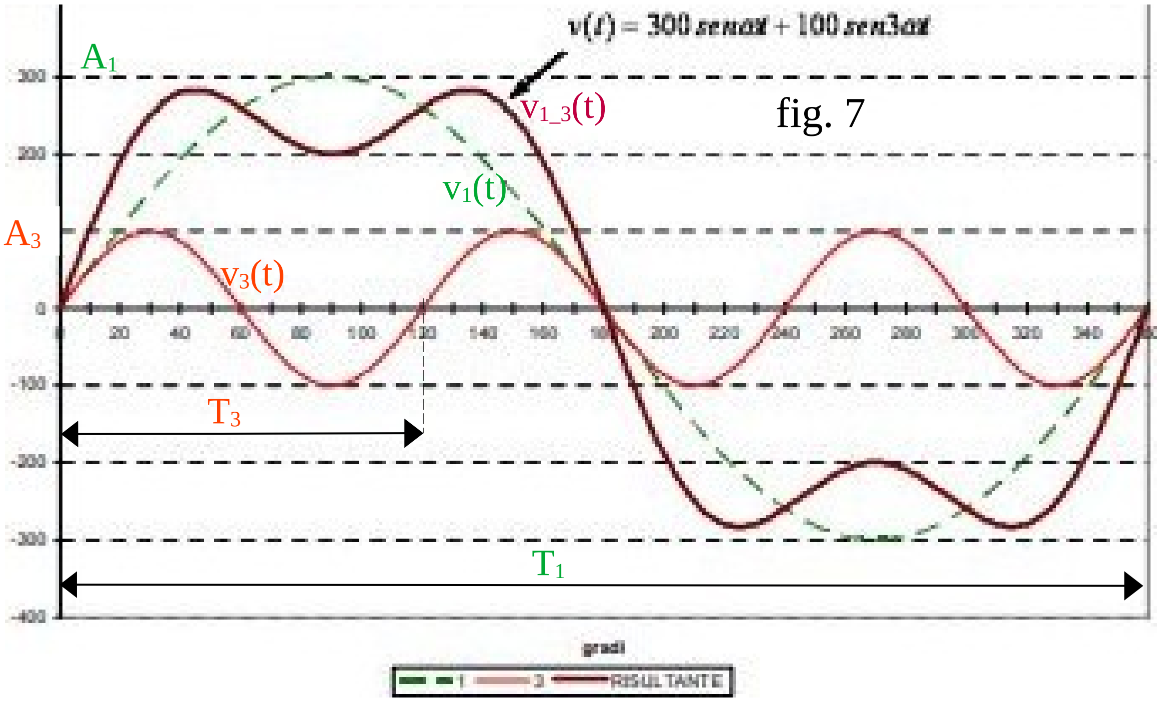


fig. 6

Osserviamo la sinusoide di colore arancio chiamata $v_1(t)$ e la sua espressione matematica: $v_1(t) = A_1 sen(2\pi f_1 t) = A_1 sen(\omega_1 t)$; essa ha un suo periodo $T_1 = T_q$ al quale corrisponde una frequenza $f_1 = 1/T_1 = f_q$. Ovvero, la **prima armonica** ha la stessa frequenza dell'onda quadra. Se lo vogliamo, anziché mettere in evidenza la frequenza $f_1 = 1/T_1$ possiamo specificare la sua pulsazione $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$. L'ampiezza massima della sinusoide arancio invece sarà A_1 e sarà diversa da A_q ; ma per il momento non la calcoleremo, ci basta sapere che Fourier è riuscito a determinarla. Purtroppo le somiglianze fra il segnale nero originale (l'onda quadra) e la sinusoide arancio si fermano qui: quando il segnale originale si evolve nella sua semionda positiva anche la sinusoide percorre la sua semionda positiva, e quando il segnale originale ha la sua semionda negativa anche la sinusoide ha la sua semionda negativa. È pur vero che negli istanti t_5 e t_6 risulta che il valore della prima armonica $v_1(t)$ coincide con quello dell'onda quadra $v_q(t)$; ma in tutti gli altri istanti i loro valori sono diversi, anche di molto, e la differenza fra i due segnali è notevole. L'approssimazione è grossolana. Introduciamo ora una nuova sinusoide $v_3(t)$ avente frequenza **tripla** rispetto a quella fondamentale: $f_3 = 3f_1$.



La sinusoide $v_3(t)$ verrà chiamata **terza armonica** e la sua ampiezza massima A_3 sarà diversa da A_1; per il momento non la calcoleremo, ci basta sapere che è possibile determinarla:

$v_3(t) = A_3 sen(2\pi f_3 t) = A_3 sen(3 \cdot 2\pi f_1 t) = A_3 sen(\omega_3 t) = A_3 sen(3\omega_1 t)$ dove il periodo $T_3 = T_q/3$ corrisponde alla frequenza $f_3 = 1/T_3 = 3f_q$.

Ovvero, la **terza armonica** ha frequenza tripla di quella dell'onda quadra.

Se lo vogliamo, anziché mettere in evidenza la frequenza $f_3 = 1/T_3$ possiamo specificare la sua pulsazione $\omega_3 = 2\pi f_3 = 2\pi/T_3 = 6\pi/T_1$.

Osservando la figura 7 vediamo, in verde, la prima armonica di ampiezza massima A_1 e di periodo T_1 ; ed in arancio la terza armonica di ampiezza massima A_3 e di periodo T_3 .

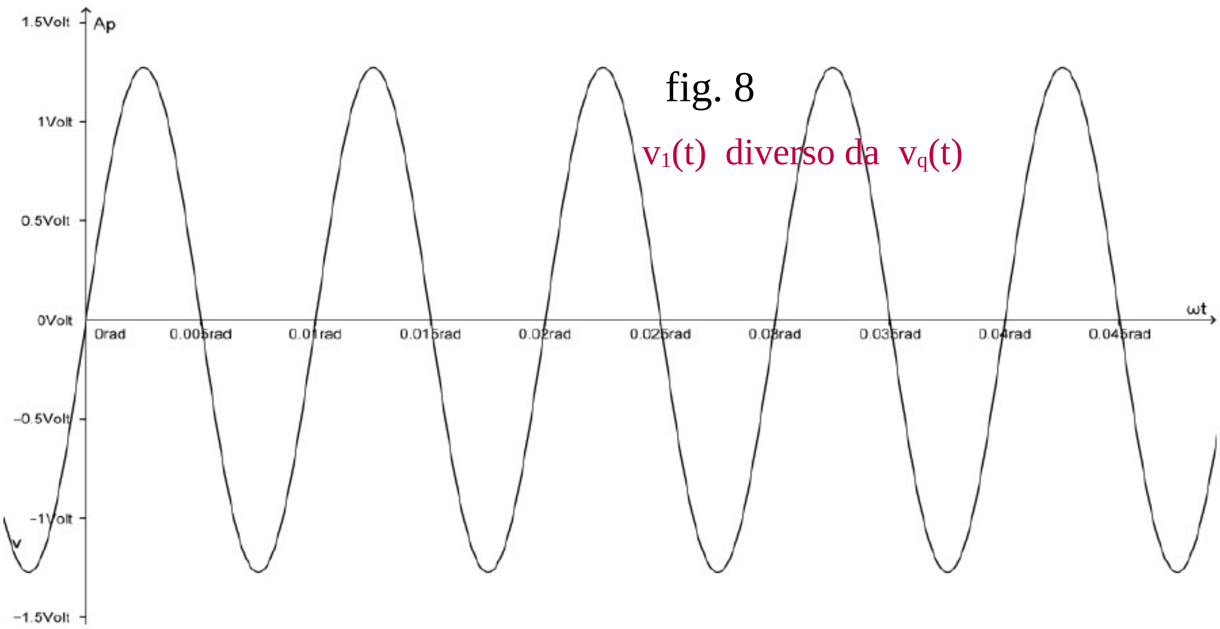
Possiamo notare anche che il periodo della prima armonica vale: $T_1 = 3\ T_3$

in quanto la terza armonica percorre tre cicli completi nello stesso intervallo di tempo nel quale la fondamentale ne percorre solo uno. Ecco per quale motivo diciamo che $f_3 = 3f_1$.

Se sommiamo insieme queste due sinusoidi otteniamo un nuovo segnale $v_{1\_3}(t) = v_1(t) + v_3(t)$; e quest'ultimo costituisce una **approssimazione** dell'onda quadra $v_q(t)$ di migliore qualità rispetto alla sola prima armonica $v_1(t)$.

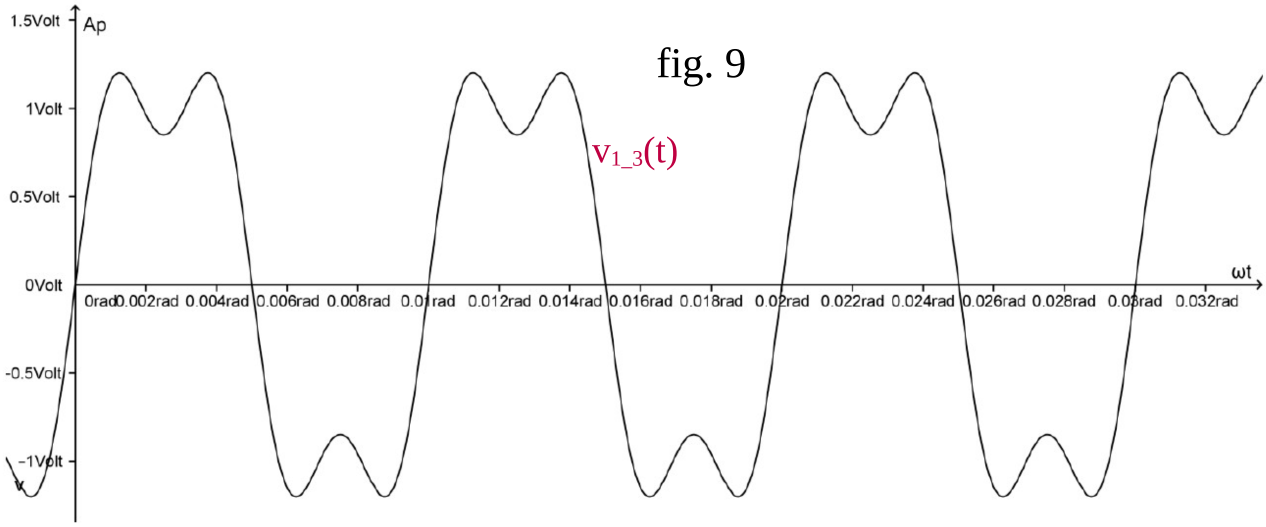
Infatti, in media, la differenza fra $v_{1\_3}(t)$ e $v_q(t)$ è **minore** di quella fra $v_1(t)$ e $v_q(t)$.

Riassumendo: se cerchiamo di approssimare l'onda quadra usando solo una sinusoide allora il risultato lascia molto a desiderare, e non possiamo certo dire che questa approssimazione sia somigliante all'onda quadra che vorremmo ottenere. Basta osservare la figura 8 per convincersene: infatti questo segnale non è somigliante ad un'onda quadra.



Ma se aggiungiamo la terza armonica alla prima, allora l'approssimazione è migliore. Ed infatti la somma delle due sinusoidi $v_{1\_3}(t) = v_1(t) + v_3(t)$ assomiglia maggiormente all'onda quadra che vorremmo ottenere. Basta osservare la figura 9 per convincersene.

fig. 9



Facciamo ora un passo in avanti. Introduciamo una nuova sinusoide $v_5(t)$ avente frequenza **quintupla** rispetto a quella fondamentale: $f_5 = 5f_1$.

La sua espressione sarà: $v_5(t) = A_5 sen(2\pi f_5 t) = A_5 sen(\omega_5 t)$ dove il periodo $T_5 = T_q/5$ corrisponde alla frequenza $f_5 = 1/T_5 = 5f_q$.

Ovvero, la **quinta armonica** ha frequenza quintupla di quella dell'onda quadra. Se lo vogliamo, anziché mettere in evidenza la frequenza $f_5 = 1/T_5$ possiamo specificare la sua pulsazione $\omega_5 = 2\pi f_5 = 2\pi/T_5 = 10\pi/T_1$.

La sinusoide $v_5(t)$ verrà chiamata **quinta armonica** e la sua ampiezza massima A_5 sarà diversa da A_3; per il momento ci basta sapere che è possibile calcolarla.

Se sommiamo insieme queste tre sinusoidi otteniamo un nuovo segnale $v_{1\_5}(t) = v_1(t) + v_3(t) + v_5(t)$; e quest'ultimo costituisce una approssimazione dell'onda quadra $v_q(t)$ di migliore qualità rispetto alla approssimazione precedente, ovvero $v_{1\_3}(t) = v_1(t) + v_3(t)$.

Osservando la figura 10 vediamo il risultato ottenuto, sempre che siano stati calcolati correttamente i valori da assegnare alle ampiezze delle armoniche. Ovviamente le ampiezze massime A_1 ; A_3 ; A_5 non vanno scelte a casaccio, ma devono essere accuratamente calcolate a partire dal valore di ampiezza dell'onda quadra originale, ossia A_q .

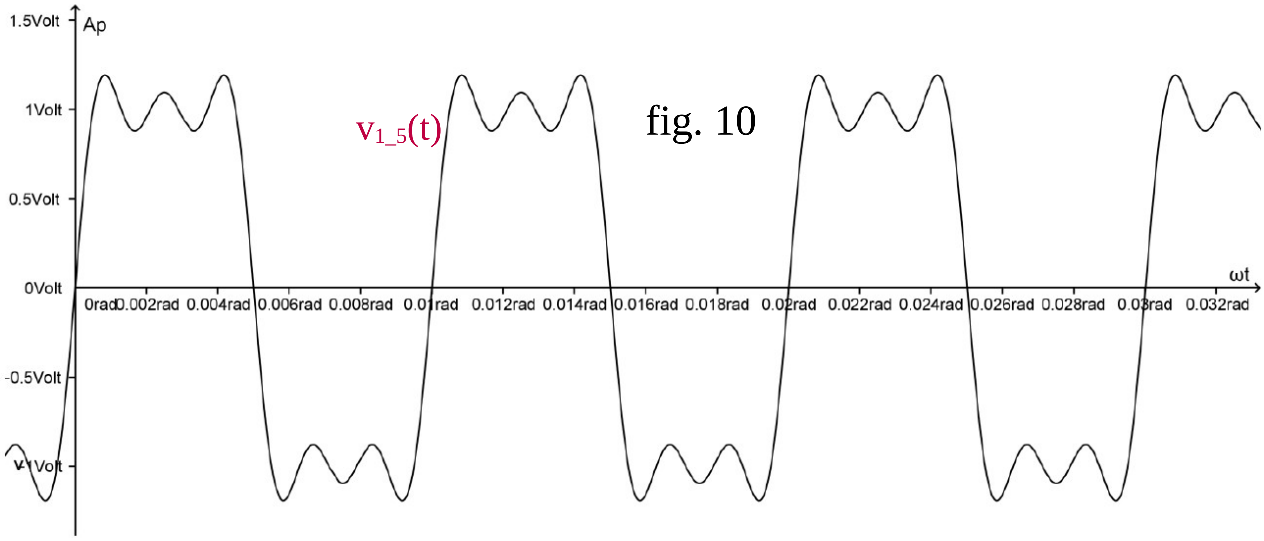


fig. 10

Ogni volta che aggiungiamo una nuova sinusoide otteniamo un miglioramento nell'approssimazione dell'onda quadra, ossia otteniamo un segnale che si discosta sempre meno dall'onda quadra. Certo ci servirebbe un numero di armoniche elevato per commettere un errore sempre più piccolo nell'approssimazione. Qui ci limitiamo ad introdurre una nuova sinusoide $v_7(t)$ avente frequenza sette volte maggiore rispetto a quella fondamentale: $f_7 = 7f_1$.

La sua espressione sarà: $v_7(t) = A_7 sen(2\pi f_7 t) = A_7 sen(\omega_7 t)$ dove il periodo $T_7 = T_q/7$ corrisponde alla frequenza $f_7 = 1/T_7 = 7f_q$.

Ovvero, la **settima armonica** ha frequenza sette volte maggiore di quella dell'onda quadra. Se lo vogliamo, anziché mettere in evidenza la frequenza $f_7 = 1/T_7$ possiamo specificare la sua pulsazione $\omega_7 = 2\pi f_7 = 2\pi/T_7 = 14\pi/T_1$.

La sinusoide $v_7(t)$ verrà chiamata **settima armonica** e la sua ampiezza massima A_7 sarà diversa da A_1; ma anche da A_3 ed A_5; per il momento ci basta sapere che è possibile calcolarla.

Se sommiamo insieme queste quattro sinusoidi otteniamo un nuovo segnale $v_{1\_7}(t) = v_1(t) + v_3(t) + v_5(t) + v_7(t)$; e quest'ultimo segnale $v_{1\_7}(t)$ costituisce una approssimazione dell'onda quadra $v_q(t)$ di migliore qualità rispetto alla approssimazione precedente, ovvero $v_{1\_5}(t) = v_1(t) + v_3(t) + v_5(t)$.

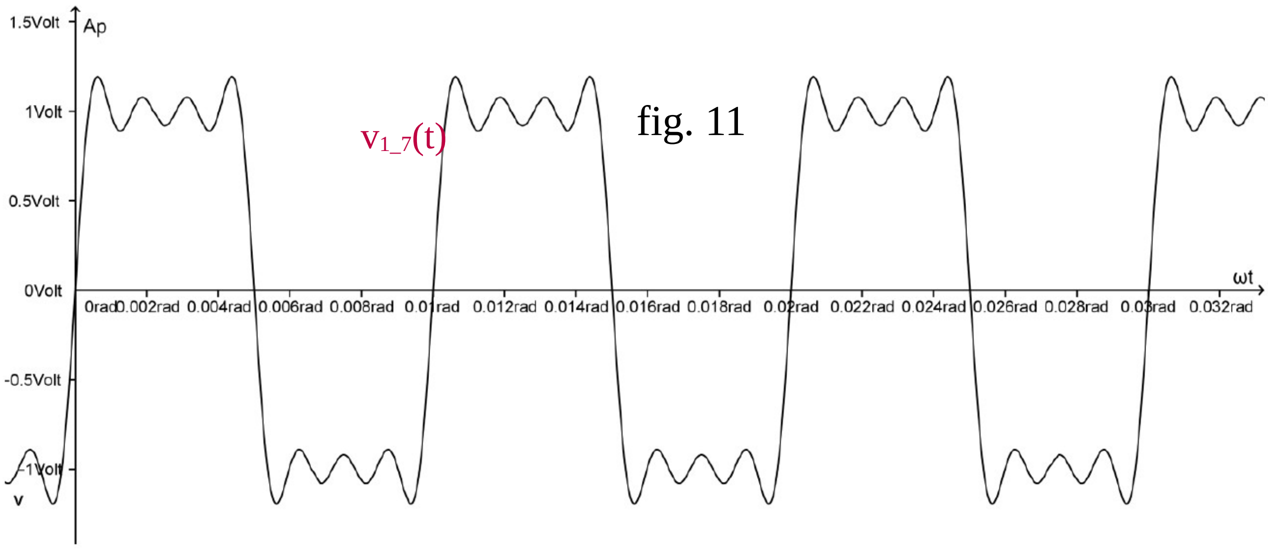


fig. 11

Osservando la figura 11 vediamo il risultato ottenuto, sempre che siano stati calcolati correttamente i valori da assegnare alle ampiezze delle armoniche. Ovviamente le ampiezze massime A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 non vanno scelte a casaccio, ma devono essere accuratamente calcolate a partire dal valore di ampiezza dell'onda quadra originale, ossia A_q . JBF ha indicato il modo di calcolare le ampiezze massime A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 etc. Abbiamo mostrato ciò che accade in modo intuitivo, ma J.B. Fourier l'ha dimostrato con il suo famoso

teorema di Fourier:

qualunque segnale, purché periodico, si può ottenere sommando un elevato (infinito) numero di sinusoidi armoniche.

Questa somma di infinite funzioni sinusoidali armoniche viene chiamata **serie di Fourier**. Inoltre Fourier ha dimostrato come si ricavano le ampiezze delle diverse sinusoidi armoniche: ossia A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 etc etc ... fino all'infinito. Queste ampiezze vengono chiamate anche **coefficienti di Fourier** ed è possibile calcolarli agevolmente mediante tabelle e/o con software reperibili in rete.

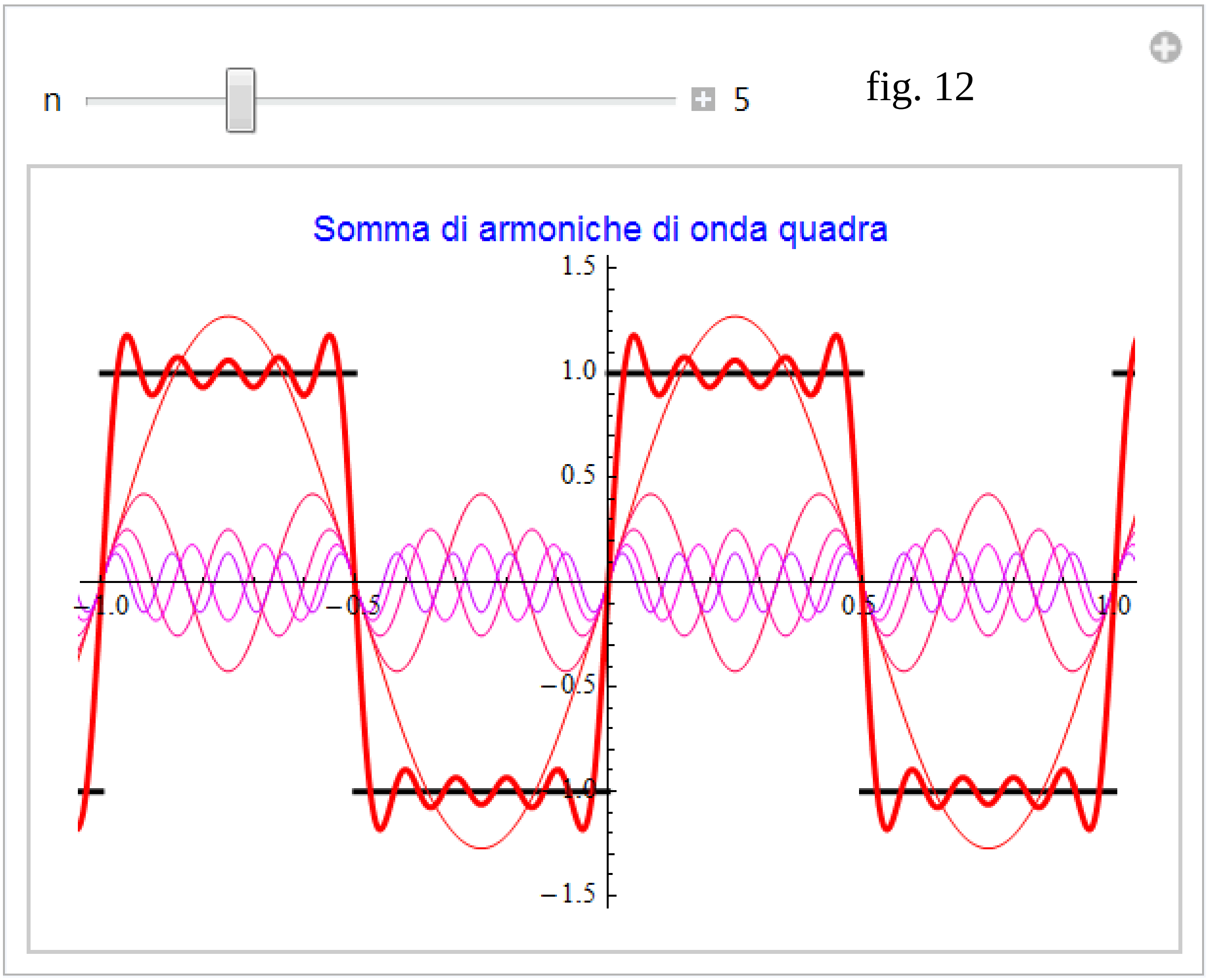
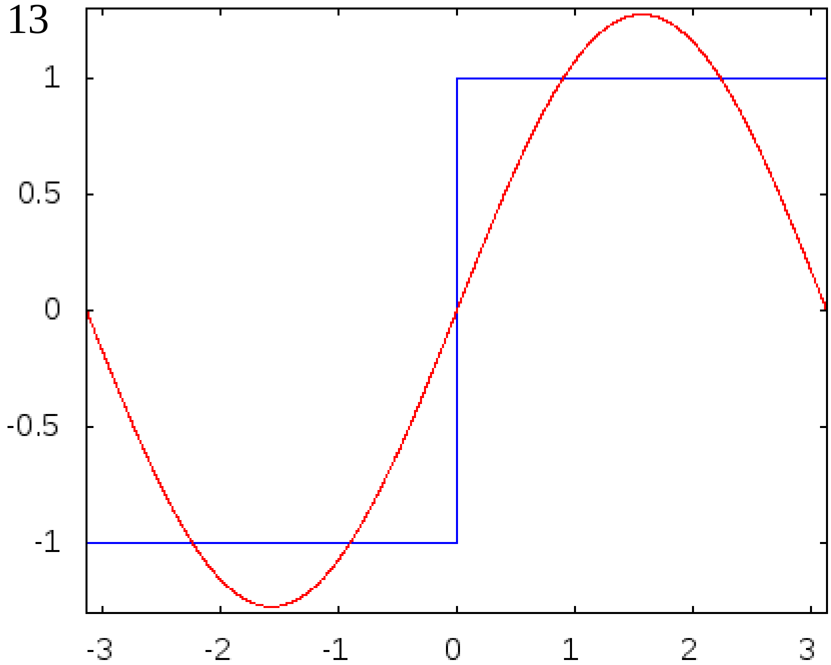


fig. 12

Nella figura 12 è possibile vedere, in nero, l'onda quadra originale; e con diversi colori sono state riportate le diverse armoniche che, sommate insieme, restituiscono una approssimazione molto buona dell'onda quadra originale. Occorre notare che nel nostro esempio stiamo trattando di un caso **molto** particolare: una vera onda quadra, con duty-cycle pari a 0.5, tale per cui le armoniche di ordine pari hanno ampiezza nulla: $A_2 = A_4 = A_6 ... = 0$. Inoltre si tratta di un'onda quadra simmetrica e dispari, e perciò il suo valore medio è nullo: $A_0 = 0$; così come **sono nulle tutte le fasi delle diverse armoniche:** $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 .... = 0;}$ Possiamo dire dunque che si tratta di un caso **molto** particolare. In generale, **non** accadrà che le fasi siano nulle e perciò dovremo specificare non solo le ampiezze delle diverse armoniche ma anche le relative fasi.

Nella figura 13 è possibile vedere una animazione delle successive approssimazioni ottenute sommando insieme le prime N armoniche.

fig. 13



Dunque, se conosciamo i valori dei coefficienti di Fourier A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; etc etc ... (fino all'infinito) e le fasi φ_1 ; φ_2 ; φ_3 ; φ_4 … etc. possiamo ricavare l'onda originaria, che nell'esempio appena fatto è quadra (ma potrebbe essere un **qualsiasi** segnale periodico). Perciò non è vero che per conoscere l'andamento del segnale (periodico) chiamato onda quadra sia necessario tracciarne il grafico nel dominio del tempo.

Possiamo, se lo desideriamo, specificare i valori dei coefficienti di Fourier A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 etc etc ... e sfruttarli per ricostruire il segnale originario nel dominio del tempo. In effetti, conoscendo il segnale $v_q(t)$ possiamo ricavarne i coefficienti di Fourier A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 etc etc ... . E viceversa, conoscendo i coefficienti di Fourier A_1 ; A_3 ; A_5 ; A_7 ... possiamo ricavare il segnale $v_q(t)$. Perciò questi due tipi di informazioni, seppure apparentemente diverse, sono

equipollenti ossia dicono entrambe la stessa cosa. Anche se in modo diverso.
Possiamo anche riportare i coefficienti di Fourier in un grafico: mettiamo in ascissa un numero intero k corrispondente al numero d'ordine dell'armonica che andiamo a considerare: 1, 3, 5, 7, etc; ed in ordinata l'ampiezza massima di quell'armonica. Ovvero il k-esimo coefficiente di Fourier. Cioè A_k .
Questo grafico prende il nome di **spettro** (d'ampiezza) del segnale $v_q(t)$.

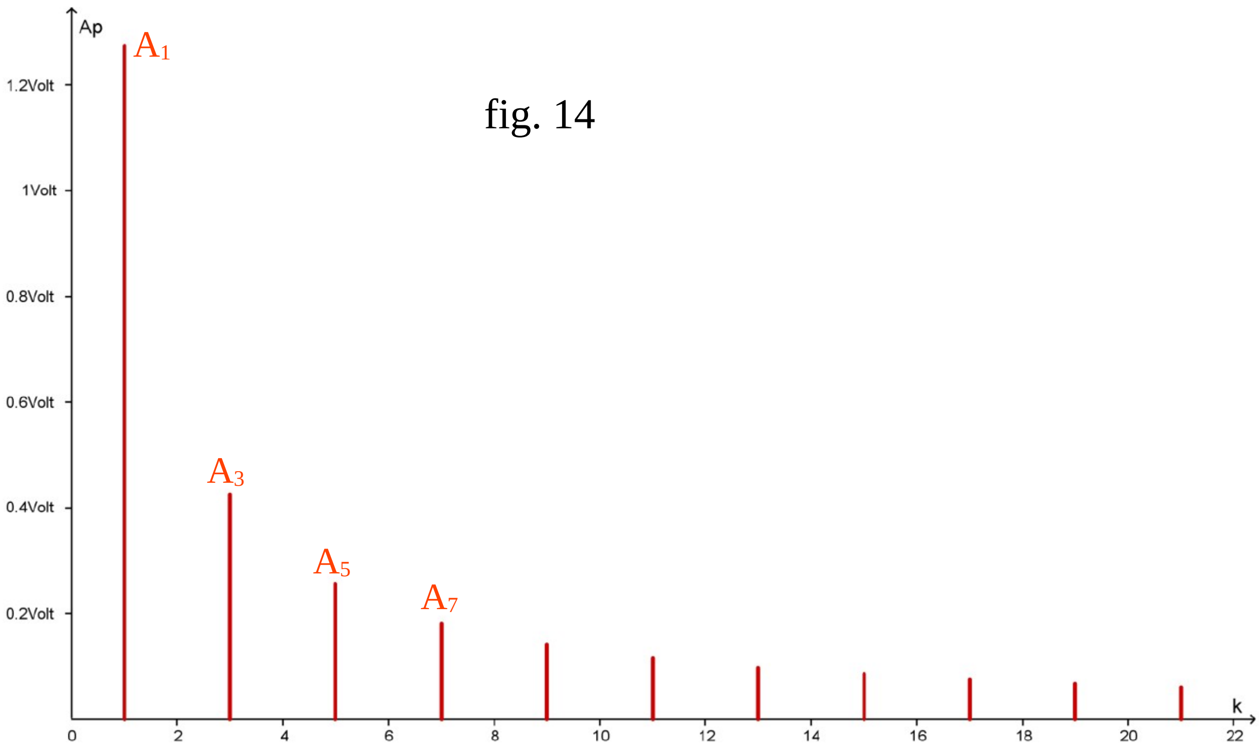


fig. 14

Nel grafico di figura 14 sono riportate delle **righe spettrali** che rappresentano con la loro lunghezza i valori dei coefficienti di Fourier.
Ovviamente, se ci garba, possiamo tarare l'ascissa in modo diverso: anziché indicare il numero d'ordine dell'armonica che andiamo a considerare, possiamo indicare la frequenza di quell'armonica. Cioè $f_k = k\ f_1$. Dove, ovviamente, $f_1 = f_q = 1/T_q$ dato che si tratta di un'onda quadra di periodo T_q .
Possiamo vedere nel grafico di figura 15 come si presenta lo spettro nel caso in cui decidiamo di tarare l'ascissa in Hertz. Per semplificare, potremmo fare

l'ipotesi che sia T_q = 1msec e dunque f_1 = 1KHz .

Possiamo dire che il nostro segnale "onda quadra" ha uno spettro a righe.

In effetti, considerando la figura 15, possiamo dire che il segnale $v_q(t)$ si può esprimere in serie di Fourier:

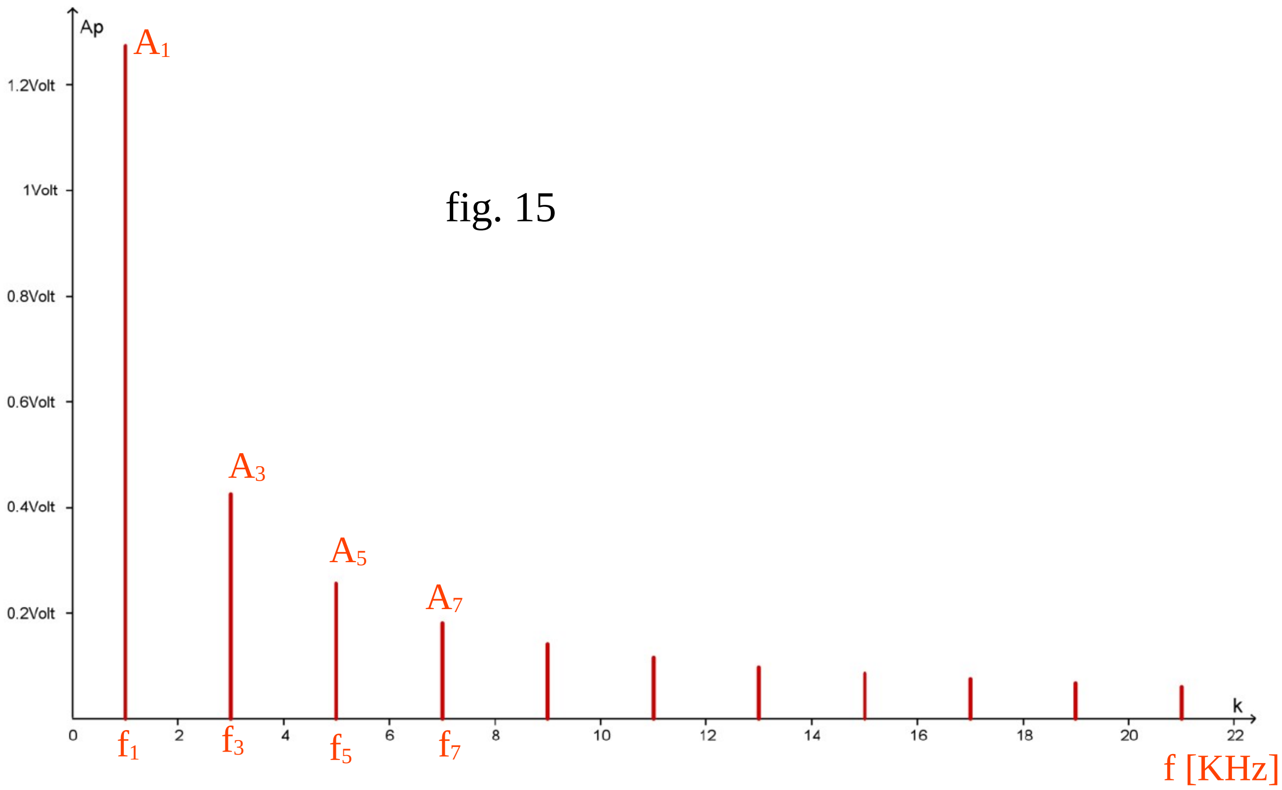


fig. 15

$$v_q(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \mathrm{sen}(\omega_k t + \varphi_k)$$ dove A_0 è il valore medio di $v_q(t)$

mentre $\omega_k = k \cdot \omega_1 = k \cdot 2\pi\, f_1 = k \cdot 2\pi/T_1 = k \cdot 2\pi\, /T_q$ è la pulsazione della k-esima armonica della nostra onda quadra, e φ_k è la fase della k-esima armonica della nostra onda quadra. JBF ha indicato il modo di calcolare le ampiezze delle armoniche ossia A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 … etc. nonché le fasi delle armoniche ossia φ_1 ; φ_2 ; φ_3 ; φ_4 … etc.

Nel nostro particolarissimo caso, risulta $\varphi_k = 0 \; \forall$ k ossia $\varphi_k = 0$ per tutti i valori di k; ovvero, tutte le fasi delle armoniche sono nulle ed anche il valor medio A_0 è nullo; anche le armoniche di ordine pari hanno ampiezza nulla. Ma non è affatto detto che debba sempre accadere quanto sopra. Vi sono molti segnali che hanno valore medio diverso da zero, ed altrettanti che presentano armoniche le cui fasi non sono nulle.

Si dice **spettro** di un segnale periodico l'insieme dei **due** grafici:

— delle **ampiezze** delle sue armoniche in funzione della frequenza,

— e delle **fasi** delle sue armoniche in funzione della frequenza.

Lo **spettro delle ampiezze** è un grafico in cui si riportano, per ciascuna frequenza delle sinusoidi, la corrispondente ampiezza; ciascuna sinusoide è rappresentata da una riga di altezza pari alla sua ampiezza.

Lo spettro delle ampiezze di un segnale periodico si presenta come una serie di righe spettrali, di ampiezza corrispondente a quella di ciascuna armonica e collocate a frequenze tutte multiple di quella fondamentale e quindi distanziate tra loro proprio di questo valore di frequenza. Se esiste anche un valore continuo, esso si può tenere in considerazione con una riga di ampiezza non nulla collocata a frequenza zero.

Spettro delle fasi

Lo spettro delle fasi è un grafico in cui si riportano per ciascuna frequenza delle sinusoidi la corrispondente fase.

Dunque non basta, in generale, specificare i valori di A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , ... etc etc (ossia le ampiezze delle armoniche) ma bisogna specificare anche i valori di φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 ... etc etc (ossia le fasi delle armoniche) e perciò non dobbiamo farci ingannare dal fatto che nel caso appena visto dell'onda quadra le fasi risultino tutte nulle. Normalmente non sarà così.

Banda di un segnale periodico

Si dice banda di un segnale l'intervallo di frequenze sulle quali le ampiezze del suo spettro sono di valore significativo (distinguibili dal rumore).

Volendo, possiamo inglobare il valore medio A_0 nella serie, facendola partire da zero anziché da 1:

$$v_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \mathrm{sen}(\omega_k t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \mathrm{sen}(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

ed in questo caso basta porre $\varphi_0 = \pi/2$ ottenendo come risultato che l'elemento zeresimo della serie vale A_0 ossia il valore medio del nostro segnale ad onda quadra, detto anche componente continua del segnale. Nell'esempio appena fatto, il periodo del nostro segnale vale: T_q = 1msec e dunque risulta f_1 = 1KHz .

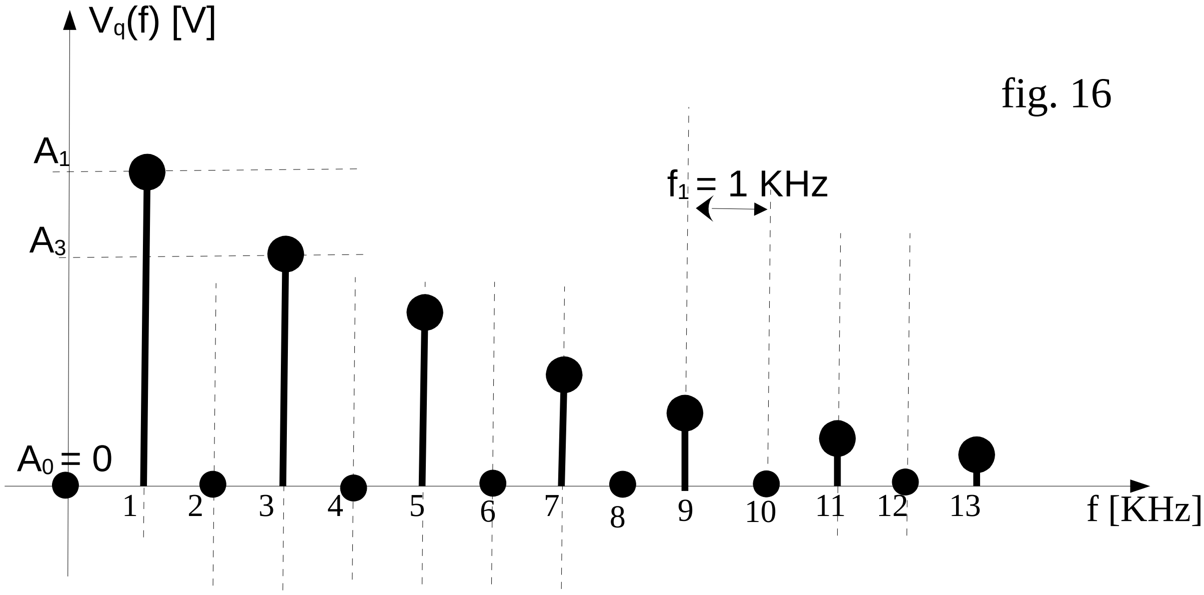


fig. 16

Nella figura 16 possiamo osservare che le righe spettrali sono distanziate fra loro di una quantità pari ad f_1 = 1KHz ; nella fattispecie, è messa in evidenza la distanza spettrale fra la nona e la decima riga. In corrispondenza della frequenza zero abbiamo un'armonica di ampiezza A_0 = 0 Volt ; e questo fatto lo abbiamo segnalato con un punto nell'origine, ossia all'incrocio degli assi. L'asse delle ordinate riporta l'ampiezza massima dell'armonica avente frequenza pari a quella riportata in ascissa. Tale ampiezza massima dell'armonica verrà indicata con $V_q(f)$ dove la lettera V è in maiuscolo, per distinguerla chiaramente da $v_q(t)$ ossia dal segnale nel dominio del tempo,

indicato con la lettera v minuscola. Va da sé che la variabile indipendente, nel caso dello spettro $V_q(f)$ è la frequenza (espressa ovviamente in Hertz); e l'unità di misura dello spettro $V_q(f)$ è Volt [V] dato che l'ampiezza delle armoniche si misura in Volt. Dato un qualunque valore di frequenza f_x sarà che $V_q(f_x)$ è l'ampiezza dell'armonica a quella particolare frequenza f_x .
Proviamo ora a pensare a cosa accade se raddoppia il periodo del segnale $v_q(t)$ ovvero se risulta: T_q = 2msec. Ovviamente abbiamo ora f_1 = 500Hz .

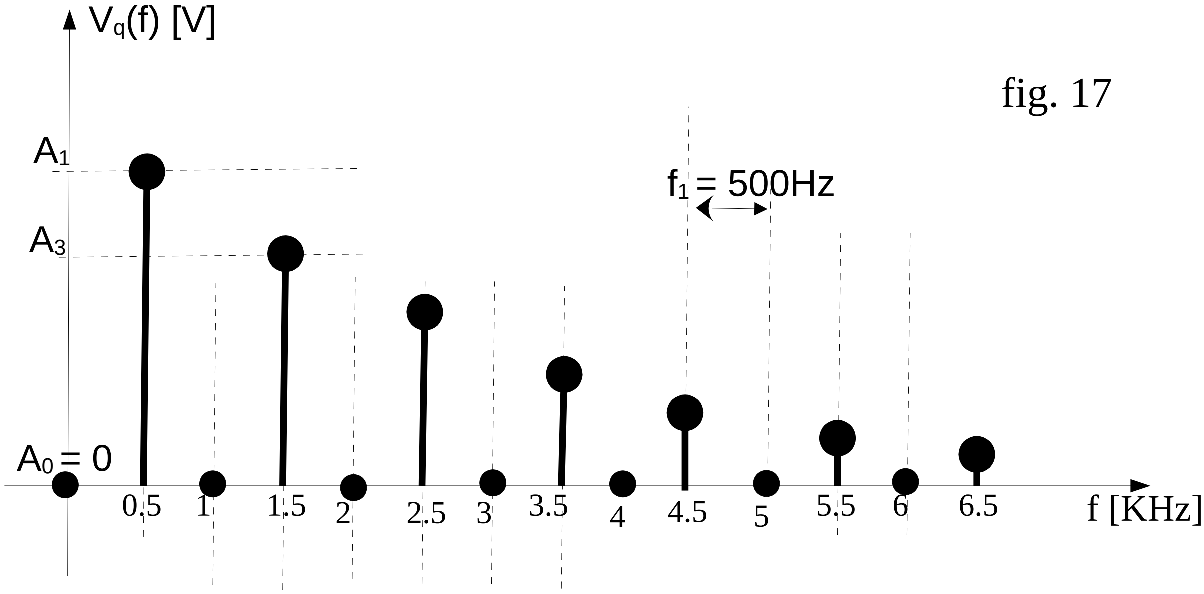


fig. 17

Nella figura 17 possiamo osservare che le righe spettrali sono **più dense**, in quanto sono distanziate fra loro di una quantità pari ad f_1 = 500Hz ; nella fattispecie, è messa in evidenza la distanza spettrale fra la nona e la decima riga.
Consideriamo la differenza tra la figura 16 e la figura 17. Nel primo caso abbiamo lo spettro di un'onda quadra di periodo T_q = 1msec. Le diverse righe spettrali sono distanziate fra loro di una quantità pari ad f_1 ossia proprio 1KHz; anche se le armoniche di ordine pari hanno ampiezza nulla. Perciò quando osserviamo lo spettro del nostro segnale possiamo dire che il suo dominio frequenziale è **discretizzato**, e NON ha la potenza del continuo; ossia possiamo dire che il suo dominio frequenziale NON è un insieme denso. Non è vero che si possa calcolare l'ampiezza dell'armonica $V_q(f)$ per

ogni valore di f, ma ciò è possibile solo se f è un multiplo intero di 1 KHz . Infatti siamo in grado di determinare l'ampiezza dell'armonica di frequenza 1KHz ossia possiamo dire quanto vale A_1 . Siamo anche in grado di determinare l'ampiezza dell'armonica di frequenza 2KHz ossia possiamo dire quanto vale A_2 ; nella fattispecie, $A_2 = 0$. Possiamo dire quanto vale l'ampiezza dell'armonica di frequenza 3KHz ossia quanto vale A_3 ; e così via. Ma non possiamo dire quanto valga l'ampiezza dell'armonica di frequenza 2,76 KHz per il semplice motivo che tale armonica NON esiste. Infatti il dominio frequenziale dello spettro del nostro segnale è costituito da un insieme **discreto**: tutti e soli i multipli interi di 1 KHz ossia tutti e soli i multipli interi di f_1 . Non per nulla si dice che lo spettro del nostro segnale è fatto **a righe** e che la serie di Fourier è costituita da un insieme **numerabile** di elementi.

Se abbiamo un segnale nel dominio del tempo, ad esempio $v_q(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ (cioè a tempo continuo, essendo $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali) e $v_q(t)$ è periodico di periodo T_q = 1msec come facciamo per rendere esplicita questa informazione? Scriviamo:

$$v_q(t) \ , \ t \in \mathbb{R}/Z(T_q)$$

e con questa scrittura intendiamo dire che:

1) — $v_q(t)$ esiste per ogni valore della variabile indipendente t che appartenga all'insieme $\mathbb{R}$ ovvero per ogni valore di t che appartenga all'asse dei numeri reali.

2) — Ed inoltre, intendiamo che $v_q(t)$ è periodico di periodo T_q ; quando scriviamo $Z(T_q)$ intendiamo l'insieme costituito da tutti i multipli interi di T_q ossia:

$$Z(T_q) = \{t : t = kT_q \ , \ k \in \mathbb{Z} \}$$

ovvero l'insieme $Z(T_q)$ è costituito da tutti gli istanti t tali per cui t è un multiplo intero di T_q ; infatti deve essere $t = kT_q$, dove k deve appartenere all'insieme dei numeri interi: $k \in \mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z} = \{ 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \}$

Dunque scrivendo:

$$v_q(t) \ , \ t \in \mathbb{R}/Z(T_q)$$

intendiamo che $v_q(t)$ è un segnale a tempo continuo, ed inoltre **è periodico** di periodo T_q .

Per quale motivo abbiamo sentito il bisogno di specificare quanto sopra?

Perché il dominio temporale di $v_q(t)$ andrà a determinare il dominio frequenziale del suo spettro $V_q(f)$. Infatti otterremo:

$$V_q(f) \ , \ f \in Z(f_1)$$

ossia lo spettro $V_q(f)$ avrà come dominio frequenziale i soli multipli interi della frequenza $f_1 = 1/T_1 = 1/T_q$ il che equivale a dire che $V_q(f)$ esiste solo se f è un multiplo intero di f_1 .

Infatti lo spettro $V_q(f)$ è uno spettro a righe ossia è costituito da un insieme numerabile di righe spettrali. Tanto che si può scrivere la serie di Fourier:

$$v_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \text{sen}(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

la quale è composta da un insieme numerabile di elementi. Le armoniche sono distinte l'una dall'altra, e la distanza fra loro è f_1 . Ovviamente non basta specificare le ampiezze A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , …. ma occorre specificare anche le fasi φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , ….

Teniamo sempre presente come è fatto lo spettro:

$$\overline{V}_q(f) \ , \ f \in Z(f_1)$$

dove

$$Z(f_1) = \{ f : f = k f_1 \ , \ k \in \mathbb{Z} \ \}$$

ovvero l'insieme $Z(f_1)$ è costituito da tutti i valori di frequenza f tali per cui f è un multiplo intero di f_1 ; infatti deve essere $f = kf_1$, dove k deve appartenere all’insieme dei numeri interi: $k \in \mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z} = \{ 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \}$

Dunque scrivendo:

$$\overline{V}_q(f) \text{ , } f \in Z(f_1)$$

intendiamo che $\overline{V}_q(f)$ è uno spettro a frequenza discretizzata, ossia a righe.

Ed è un **vettore**, ossia possiede un proprio modulo ed una propria fase. È per questo motivo che lo indichiamo con $\overline{V}_q(f)$ e non $V_q(f)$, per indicare che la funzione $\overline{V}_q(f)$ è una grandezza vettoriale caratterizzata da modulo **e fase**.

Nell’esempio iniziale riguardante l’onda quadra avevamo T_q = 1msec , e perciò f_1 = 1KHz; ovviamente è inutile chiedersi quale sia l’ampiezza dell’armonica di frequenza 2.76KHz. La risposta è che tale armonica NON ESISTE dato che le uniche armoniche presenti nello spettro hanno frequenza multipla intera di 1KHz. Possiamo calcolare le ampiezze delle armoniche di frequenza 1KHz ; 2KHz ; 3KHz etc scoprendo il valore di A_1 , di A_2 , di A_3 ; e così via . Ma non possiamo calcolare l’ampiezza dell’armonica di frequenza 2.76KHz. Infatti questo valore di frequenza **non fa parte del dominio** dello spettro.

Adesso possiamo capire meglio cosa accade se il periodo della nostra onda quadra aumenta. Supponiamo ad esempio che aumenti fino a dieci secondi. Cosa accade con un periodo così lungo? Risulta: T_q = 10sec. Ovviamente abbiamo ora f_1 = 0.1 Hz . Nella figura 18 possiamo osservare che le righe spettrali sono MOLTO più dense, in quanto sono distanziate fra loro di una quantità pari ad f_1 = 0.1Hz ; nella fattispecie, è messa in evidenza la distanza spettrale fra la nona e la decima riga.

Ma è ancora possibile distinguere una riga dall’altra, dunque è ancora valido il teorema di Fourier: qualunque segnale, **purché periodico**, si può ottenere sommando un elevato (infinito) numero di sinusoidi armoniche.

Nel seguente grafico di figura 18 abbiamo riportato solo le ampiezze e non abbiamo nemmeno tracciato il diagramma delle fasi dato che nel nostro particolare esempio (onda quadra simmetrica e dispari) le fasi sono tutte nulle.

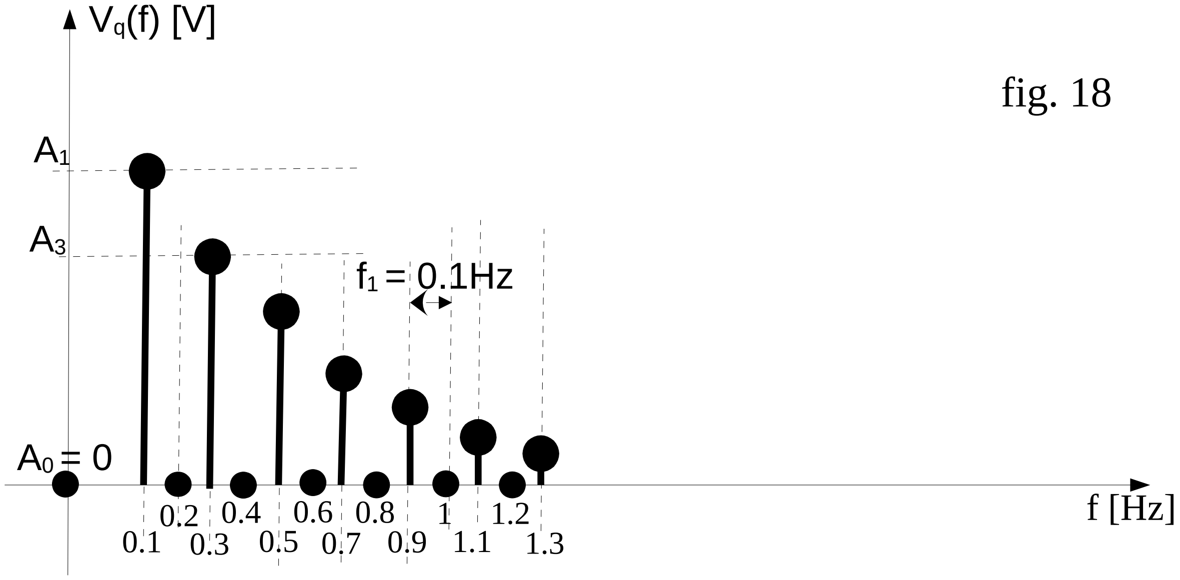


fig. 18

Anche se fosse [T_q = un secolo] potremmo trovare un (piccolissimo) valore di f_1 che ci permette di distinguere un'armonica dall'altra.
Se invece T_q tende ad infinito, allora f_1 tende a zero e perciò non possiamo più distinguere un'armonica dall'altra. Il dominio frequenziale dello spettro è diventato **denso**, coincide con $\mathbb{R}$ e perciò non esiste più la serie di Fourier, dato che non possiamo individuare gli elementi della serie. Anzi, essendo il segnale non più periodico (dato che non si ripete mai) il teorema di Fourier non è più valido, e la serie non esiste.
Vale la pena di notare che se è possibile conoscere il valore di T_q (ovvero, T_q ha un valore **finito**) allora ricaviamo $f_1 = 1/T_q$; e lo spettro $\overline{V}_q(f)$ ha un dominio frequenziale discreto, ossia lo possiamo descrivere come:

$$\overline{V}_q(f)\ ,\ f \in Z(f_1) \quad \text{dove } f_1 = 1/T_q \text{ ; ed è:}$$

$$Z(f_1) = \{f : f = k\, f_1\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

ma se T_q tende ad infinito allora f_1 vale zero e $Z(f_1)$ coincide con $Z(0) = \mathbb{R}$ così che abbiamo $\overline{V}_q(f)$, $f \in Z(0)$; dove $Z(0)$ è l'insieme dei punti che distano zero l’uno dall’altro sull’asse reale. Ossia Z(0) coincide con $\mathbb{R}$.

Oppure possiamo dire che lo spettro è:

$$\overline{V}_q(f) \ , \ f \in \mathbb{R}$$

il che è la stessa cosa. Abbiamo ottenuto uno spettro che è una funzione **continua** della frequenza. La variabile indipendente f può assumere **qualsiasi** valore sull’asse reale, anche π Hertz.

Qui abbiamo usato il simbolo $\overline{V}_q(f)$ per lo spettro indicando che si tratta di una funzione **vettoriale** della frequenza, anche se nel nostro (particolarissimo) caso di onda quadra le fasi sono tutte nulle e dunque $\overline{V}_q(f)$ è una funzione **reale** della frequenza; ci basta conoscerne il modulo dato che lo spettro di fase è nullo. Volendo, possiamo scriverla anche come $V_q(f)$.

Proviamo a chiederci: se il segnale nel dominio del tempo non è periodico, si può calcolarne lo spettro? La risposta è SI anche se tale spettro non consiste più in un insieme numerabile di righe spettrali. Ma in una funzione continua della frequenza:

$$\overline{V}_{np}(f) \ , \ f \in \mathbb{R}$$

abbiamo indicato qui con $v_{np}(t)$ un segnale non periodico, e con $\overline{V}_{np}(f)$ il suo spettro. Ora però lo spettro $\overline{V}_{np}(f)$ è una funzione **continua** della frequenza. Cioè ha un dominio (frequenziale) denso. La causa di ciò sta nel fatto che $v_{np}(t)$ ha un periodo infinitamente lungo. Ossia $T_{np} = \infty$. possiamo formalizzare ciò scrivendo:

$$v_{np}(t) \ , \ t \in \mathbb{R}/Z(\ \infty\ )$$

il che equivale a dire che $v_{np}(t)$ è un segnale a tempo continuo, dato che $t \in \mathbb{R}$ ed inoltre $v_{np}(t)$ è periodico di periodo infinito; ossia, $v_{np}(t)$ NON è periodico. Sicché non esiste più la serie di Fourier; ma la **trasformata** di Fourier .

$$\overline{V}_{np}(f) = \mathcal{F}\ [\ v_{np}(t)\ |\ f\ ]$$

Esiste forse un metodo per calcolarci la funzione $\overline{V}_{np}(f)$ partendo da $v_{np}(t)$?

La risposta è SI anche se ciò comporta una certa complessità di calcolo.

Vedremo più avanti come affidare questi calcoli ad un computer.
Dichiariamo ora quanto viene normalmente assunto per convenzione: di solito si lascia sottinteso che quando di un segnale non viene specificato il valore del suo periodo, s'intende che tale periodo sia infinito.
Oppure (il che è lo stesso) che se di un segnale non si conosce il periodo, s'intende che tale segnale sia non periodico. Come è il caso, ad esempio, di $v_{np}(t)$ che richiama questa sua caratteristica già nel nome: infatti "np" sta per "non periodico" .
Per il momento chiediamoci come si dichiara esplicitamente che un certo segnale $v_{np}(t)$ NON è periodico. Come si fa a scriverlo?
Se scriviamo:

$$v_{np}(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}/Z(\ \infty\ )$$

con ciò stiamo dichiarando esplicitamente che il nostro segnale $v_{np}(t)$ ha un periodo infinitamente lungo, cioè non è periodico. E la sua non-periodicità è dichiarata nella definizione del suo dominio:

$$t \in \mathbb{R}/Z(\ \infty\ )$$

ossia il dominio temporale è denso (coincide con l'asse reale $\mathbb{R}$), ed inoltre occorre aspettare un tempo infinito prima che il segnale si ripeta.
Mentre invece se scriviamo:

$$v_{np}(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

con ciò stiamo dichiarando che il nostro segnale $v_{np}(t)$ ha un dominio temporale denso, e non diciamo nulla riguardo al fatto che sia periodico o meno. Ma quando non è dichiarata esplicitamente la periodicità, questa viene considerata assente e dunque $v_{np}(t)$ viene considerato non periodico.
Solo nel caso che venga specificato, ad esempio:

$$v_1(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}/Z(\ T_1\ )$$

e possiamo conoscere il valore di T_1 allora il segnale $v_1(t)$ viene considerato periodico di periodo T_1 .
Fino ad ora abbiamo trattato di segnali a tempo **continuo** ossia con dominio

temporale del tipo: $t \in \mathbb{R}$; nel caso poi che il segnale di cui stiamo trattando sia periodico, potremo specificarlo scrivendo: $t \in \mathbb{R}/Z(T_p)$ dove T_p è il periodo temporale del nostro segnale. Se invece il segnale di cui stiamo trattando è NON periodico, potremo specificarlo scrivendo: $t \in \mathbb{R}/Z(\infty)$ indicando così che il nostro segnale non si ripete mai, dato che occorre attendere un tempo infinito prima che si ripeta. Se la periodicità non viene indicata esplicitamente, s'intende che essa non sussiste. Perciò un segnale a tempo continuo del quale venga indicato il dominio temporale con: $t \in \mathbb{R}$ viene considerato come un segnale non periodico.

Fino ad ora, dei quattro possibili casi di segnali sono stati esaminati solo i primi due:

— segnali a tempo continuo, e periodici.

— segnali a tempo continuo, e non periodici.

Mentre invece dovremo ancora esaminare gli altri due:

— segnali a tempo discreto, e periodici.

— segnali a tempo discreto, e non periodici.

È possibile anche descrivere tutti e quattro i casi con una teoria unificata. Vedremo fra poco che ci si porrà la necessità di elaborare segnali a tempo discretizzato, detti anche segnali a tempo campionato.

ACQUISIZIONE DI SEGNALI

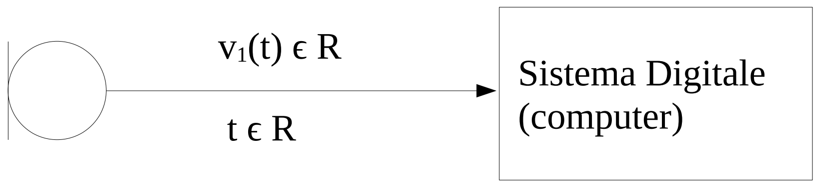


fig. 19

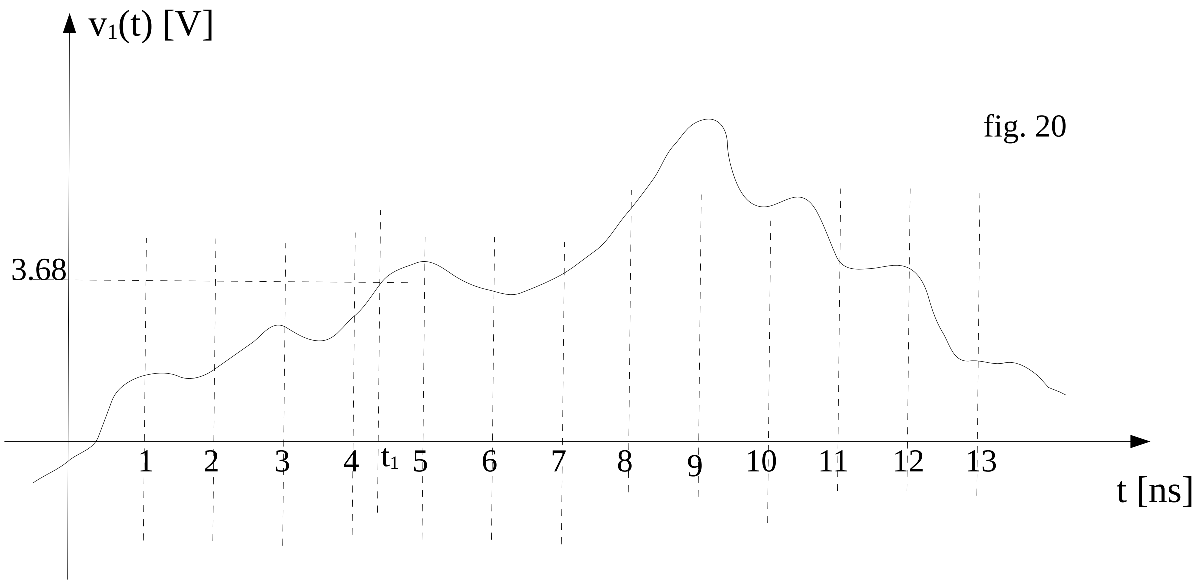
Supponiamo di voler effettuare dei calcoli basati sull'andamento nel dominio del tempo di un segnale analogico, come ad esempio il segnale erogato da un microfono posto davanti ad un'orchestra. Potremmo ad esempio voler ottenere lo spettro $\overline{V}_1(f)$ del segnale $v_1(t)$ erogato dal microfono. Per ottenere ciò dobbiamo far acquisire ad un computer il segnale del quale vogliamo calcolare in seguito la trasformata di Fourier. Nel mondo reale si intende che i segnali con i quali abbiamo a che fare sono dei segnali analogici, ossia sono segnali a tempo continuo e ad ampiezze continue.

Che cosa significa dire che il segnale $v_1(t)$ è un segnale a tempo continuo? Significa che l'istante generico t nel quale andiamo a misurare il valore di v_1 può assumere qualsiasi valore che appartenga all'asse reale, e questo fatto lo possiamo dichiarare scrivendo: $t \in \mathbb{R}$ ovvero che l'istante generico t che prendiamo in considerazione appartiene ad $\mathbb{R}$ ossia all'insieme dei numeri reali. Scriveremo allora:

$$v_1(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

per indicare che il segnale $v_1(t)$ ha come dominio l'intero asse reale, ossia un insieme denso, od anche (il che è lo stesso) che il dominio di $v_1(t)$ ha la potenza del continuo.

Questo fatto rende IMPOSSIBILE poter acquisire tali segnali con un sistema di elaborazione digitale, quale ad esempio un PC. Perciò l'acquisizione fatta secondo lo schema della figura 19 NON PUO' FUNZIONARE. Infatti un sistema di elaborazione digitale è un sistema a stati **discreti**, ed è in grado di eseguire le commutazioni dei suoi stati logici interni soltanto in corrispondenza di un insieme discretizzato di istanti temporali.



Supponiamo ad esempio di disporre di un processore la cui frequenza di clock valga 1 GHz e dunque il cui periodo di clock valga 1 nsec.

$T_{ck} = 1/f_{ck} = 1/(1GHz) = 1$ nsec. Supponiamo che l'evoluzione del segnale $v_1(t)$ sia quella riportata nella figura 20.

Se ad esempio volessimo considerare il valore del segnale $v_1(t)$ nell'istante $t_1 = 4.36$ nsec scopriremmo che in tale istante il segnale $v_1(t)$ esiste e vale 3.68 Volt; ma purtroppo il nostro computer non è in grado di valutarlo dato che è in grado di distinguere i valori di $v_1(t)$ solo negli istanti che siano dei multipli interi di un nanosecondo. Ad esempio, il nostro computer è in grado di valutare il valore di $v_1(t)$ nell'istante $t_2 = 4$ nsec ed anche nell'istante t_3 dove $t_3 = 5$ nsec ma non è in grado di valutare il valore di $v_1(t)$ nell'istante $t = t_1 = 4.36$ nsec dato che esso non è un multiplo intero di 1ns. Perciò se vogliamo acquisire il segnale analogico — un segnale audio, nel nostro esempio — con un computer dobbiamo innanzitutto ricavarci un secondo segnale — che chiameremo $v_2(t)$ — il cui dominio temporale sia discreto.

Ciò si ottiene mediante un dispositivo chiamato **campionatore**.

Nella figura 21 è rappresentato un cosiddetto campionatore ideale.

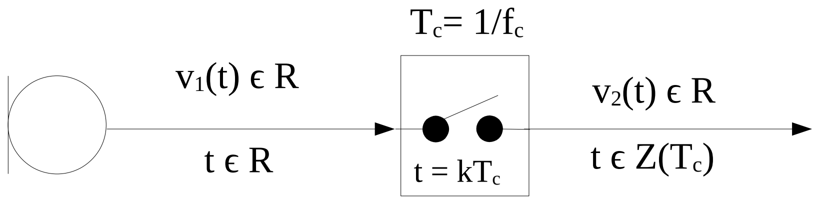


fig. 21

La differenza fra $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sta nel fatto che mentre il dominio temporale di $v_1(t)$ è continuo e coincide con $\mathbb{R}$, viceversa il dominio temporale di $v_2(t)$ è discretizzato e coincide con i soli multipli interi di T_c dove T_c viene detto intervallo di campionamento. Perciò possiamo dire che mentre nel caso di $v_1(t)$ il dominio è: $t \in \mathbb{R}$ ossia un insieme denso, invece nel caso di $v_2(t)$ il dominio è: $t \in Z(T_c)$ ossia un insieme discreto. Come è fatto questo insieme? L'insieme $Z(T_c)$ è costituito da tutti gli istanti t che siano il prodotto fra T_c ed un numero intero k; dunque scriveremo:

$$Z(T_c) = \{ t: t = kT_c \, , \; k \in \mathbb{Z} \} \; ;$$

infatti k è un numero intero: $k \in \mathbb{Z}$ dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi.

$$\mathbb{Z} = \{ 0, \pm1 \, , \pm2 \, , \; \pm3 \, , ...\} \, .$$

abbiamo allora che $Z(T_c)$ è l'insieme di tutti i multipli interi di T_c .

$$Z(T_c) = \{ 0, \pm T_c \, , \pm 2T_c \, , \; \pm 3T_c \, , ...\} \, .$$

Per inciso, le ampiezze del segnale $v_2(t)$ sono ancora continue: il **codominio** di $v_2(t)$ è ancora $\mathbb{R}$, così come il codominio di $v_1(t)$ è $\mathbb{R}$.
Per definire il dominio temporale di $v_1(t)$ possiamo dire indifferentemente che $t \in \mathbb{R}$ oppure che $t \in Z(0)$ dato che quest'ultimo è il caso limite di $Z(T_c)$ costituito da tutti i punti che distano zero fra di loro, quando T_c —> 0 .
Per definire il dominio temporale di $v_2(t)$ possiamo dire che $t \in Z(T_c)$ dove T_c è finito e non nullo. Facciamo ad esempio l'ipotesi che la frequenza di campionamento f_c valga 10KHz ed avremo che l'intervallo di campionamento vale: $T_c = 1/f_c = 1/(10KHz) = 100\ \mu sec$. Abbiamo fatto l'ipotesi che la frequenza di campionamento da noi impostata f_c valga 10KHz ovvero che

ogni secondo l'interruttore si chiuda diecimila volte (e subito dopo essersi chiuso, si riapra). Questo campionatore che abbiamo appena descritto viene detto anche **campionatore ideale**. Se noi volessimo conoscere il valore di $v_2(t)$ nell'istante t = 276.14 μsec dovremmo dire che non esiste alcun valore di $v_2(t)$ in quell'istante dato che l'interruttore è chiuso quando t = 100 μsec e quando t = 200 μsec ed anche quando t = 300 μsec ma è aperto nell'istante t = 276.14 μsec e dunque in tale istante il segnale $v_2(t)$ non esiste affatto.
Nella realtà, il segnale $v_2(t)$ viene applicato ad altri blocchi funzionali per le elaborazioni successive e questi ultimi hanno bisogno di ricevere un segnale d'ingresso **sempre** e non solo nei multipli di 100 μsec. Perciò nella pratica il campionatore che useremo sarà del tipo Sample&Hold ossia realizzerà il cosiddetto campionamento a tenuta. Ciò si ottiene mediante un condensatore posto immediatamente a valle del campionatore ideale.

CAMPIONATORE REALE

ossia campionatore a tenuta, Sample&Hold

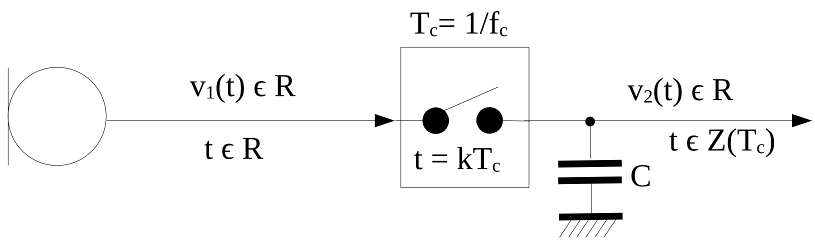


fig. 22

Come funziona il campionatore a tenuta detto anche Sample&Hold?
Nell'istante t = 100 μsec l'interruttore si chiude, ed il condensatore si carica al livello di tensione che $v_1(t)$ possiede in quell'istante. Dopo di che, l'interruttore si riapre immediatamente ma $v_2(t)$ rimane costantemente a quel livello dato che il condensatore si è ormai caricato, ed anche se l'interruttore è aperto la tensione v_2 rimane disponibile ed è "congelata" al valore prelevato

(campionato) nell'istante della chiusura. Questa condizione permane fino a quando arriva l'istante t = 200μsec nel quale avremo una nuova chiusura dell'interruttore, e $v_2(t)$ si porterà al nuovo valore per poi mantenerlo costante fino alla successiva chiusura.
Senza il condensatore si ottiene la successione di campioni di figura 23 dalla quale possiamo notare che, in tutti gli istanti che non siano multipli interi di 100 μsec, il segnale $v_2(t)$ non esiste.

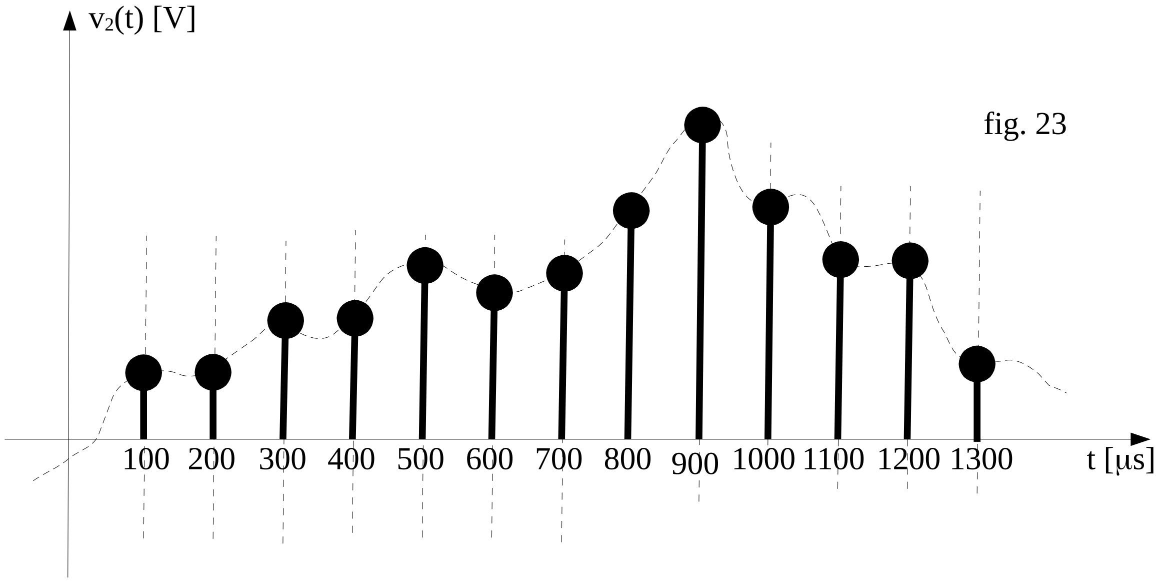


fig. 23

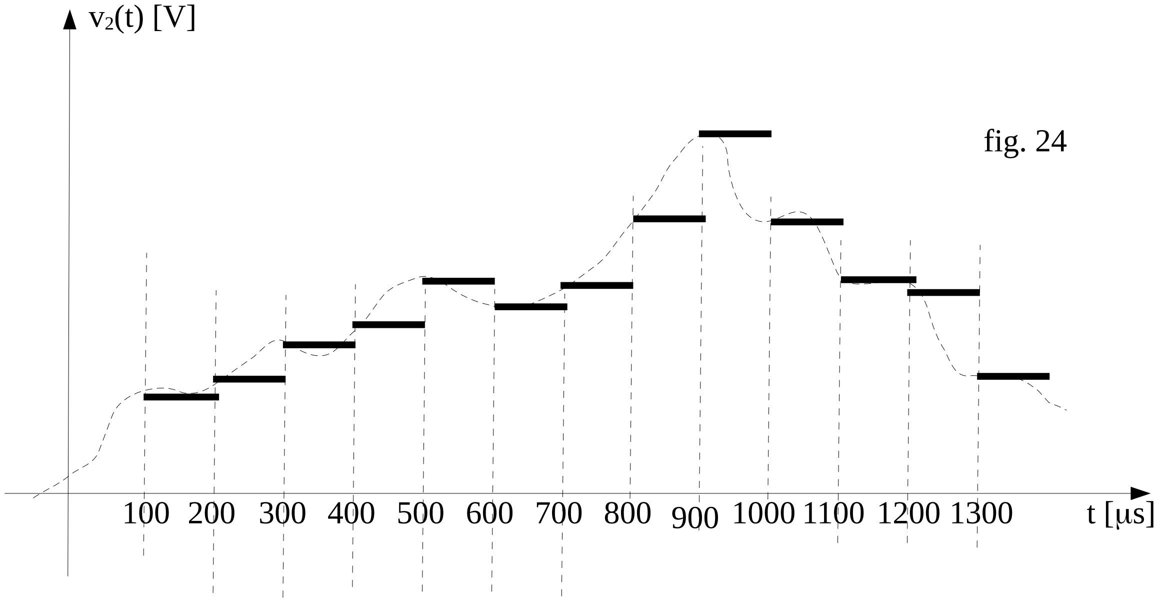


fig. 24

mentre invece con il campionatore reale della figura 22 munito di condensatore si ottiene l'andamento della tensione campionata di figura 24 sicché $v_2(t)$ mantiene il valore del campione precedente fino al campionamento successivo.

Possiamo anche dire che in uscita dal modulo campionatore Sample—and—Hold abbiamo una sequenza di campioni, che andranno a riempire un array di valori il cui indice è un intero k.

Per acquisire un minuto di musica ci servono seicentomila locazioni di memoria dato che abbiamo deciso di prelevare un campione ogni 100μsec .

Ovviamente non possiamo permetterci di avere una precisione infinita sul valore del segnale $v_2(t)$; infatti, se ad esempio fosse $v_2(t) = \pi$Volt accadrebbe che per scriverne in memoria il vero valore ciascuna delle locazioni occuperebbe infiniti bit. Per contenere l'array di numeri reali, ciascuno dei quali ha precisione infinita, serve una quantità di memoria infinita.

Evidentemente ciò è impossibile, e dunque dopo il campionamento dovremo compiere una ulteriore operazione detta quantizzazione. Ma ce ne occuperemo in seguito.

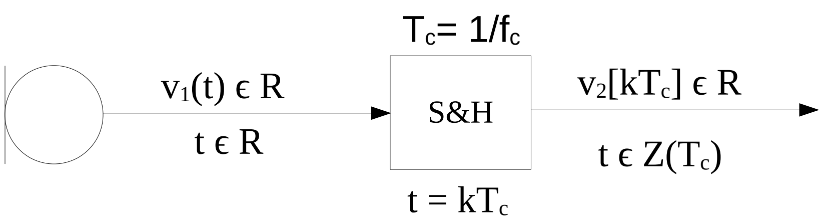


fig. 25

Ovviamente l'operazione di campionamento non è affatto banale, dato che non è scontato che dall'andamento del segnale campionato $v_2(t)$ riportato in figura 24 si riesca a ricostruire quello del segnale originario $v_1(t)$ riportato in figura 20. Affinché ciò sia possibile occorre rispettare le condizioni di Nyquist/Shannon. Esse stabiliscono che $v_1(t)$ dev'essere un segnale a banda rigorosamente limitata, ovvero che lo spettro $V_1(f)$ deve essere nullo per valori di frequenza maggiori di f_{max} — ossia della massima frequenza delle armoniche del segnale $v_1(t)$. Inoltre la frequenza di campionamento f_c

dev'essere maggiore del doppio di f_{max} .

Nella figura 26 è riportato lo spettro del segnale d'ingresso al campionatore ovvero la Trasformata di Fourier di $v_1(t)$

fig. 26

Nella figura 27 è riportato lo spettro del segnale d'uscita dal campionatore ovvero la Trasformata di Fourier di $v_2(t)$

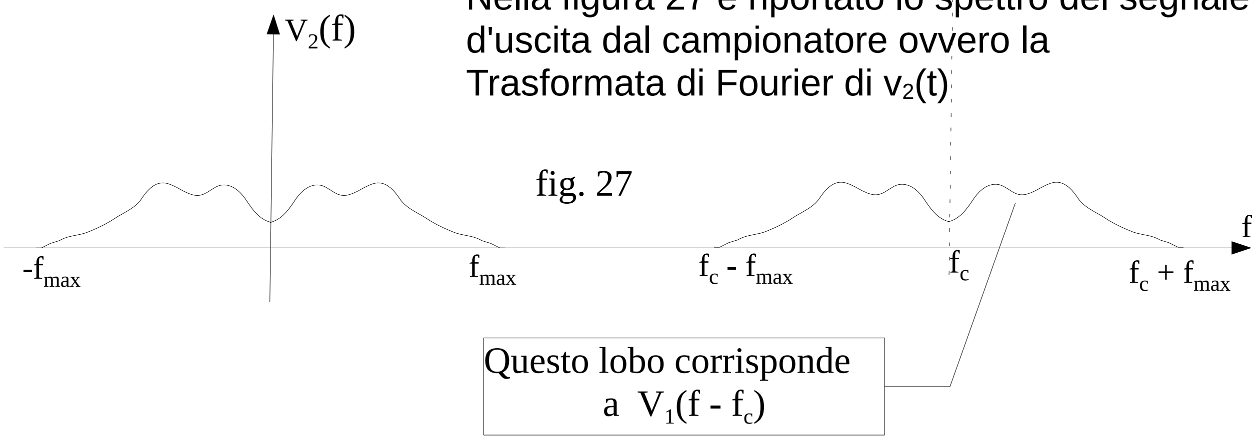


fig. 27

Per poter ricostruire il segnale originario $v_1(t)$ dalla sua versione campionata $v_2(t)$ è necessario che la frequenza di campionamento f_c sia maggiore del doppio di f_{max} .

Infatti se sono rispettate le condizioni di Nyquist/Shannon allora è possibile ricostruire un segnale a tempo continuo a partire da una sequenza di campioni, tramite una operazione di filtraggio.

Possiamo trovare una relazione che lega la Trasformata di Fourier di $v_1(t)$, ossia $V_1(f)$ a quella del segnale campionato $V_2(f)$. In particolare abbiamo:

$$V_2(f) = f_c \cdot \sum_{k \in Z} V_1(f - k\, f_c) = f_c \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_1(f - k\, f_c)$$

ovvero la Trasformata di Fourier del segnale campionato $V_2(f)$ è ottenuta periodicizzando, con periodo (frequenziale) pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$ la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo $V_1(f)$. Dunque, possiamo notare che se abbiamo un segnale come ad esempio $v_2(t)$ — che è campionato — ed il cui dominio temporale è:

$t \in Z(T_c)$ oppure anche:

$$t \in Z(T_c)/Z(\infty)$$

(nel caso sentissimo il bisogno di rendere esplicito il fatto che $v_2(t)$ è non periodico) allora il suo spettro $V_2(f)$ è periodico in frequenza, ed il suo periodo frequenziale vale: $f_c = 1/T_c$.

Spesso non viene detto esplicitamente che $v_2(t)$ sia non periodico, ossia anziché definire il suo dominio come: $t \in Z(T_c)/Z(\infty)$ diciamo semplicemente che $t \in Z(T_c)$. E lasciamo sottintesa la sua non periodicità.

Quello che ci importa dire ora è che $v_2(t)$ è un segnale **a tempo campionato**, e lasciamo sottinteso che sia non periodico. Di conseguenza il suo spettro (ossia la sua Trasformata di Fourier) $V_2(f)$ è uno spettro periodico (in frequenza). Ed il periodo frequenziale vale: $f_c = 1/T_c$. Dunque il dominio frequenziale di $V_2(f)$ è fatto nel seguente modo:

$$f \in \mathbb{R}/Z(f_c)$$

ossia la funzione $V_2(f)$ è definita sul dominio frequenziale denso $\mathbb{R}$ ed inoltre la funzione $V_2(f)$ è periodica in frequenza, con periodo frequenziale pari ad f_c .

Nel caso di figura 27 è evidente che è $f_c > 2f_{max}$ e perciò sarà $f_c - f_{max} > f_{max}$ ovvero non c'è alcuna sovrapposizione dei lobi che si sommano tra loro. Essi sono disgiunti. Dunque possiamo ricavare $V_1(f)$ a partire da $V_2(f)$. Basta applicare al segnale $v_2(t)$ un filtro passa basso, ossia un dispositivo che lasci passare indenni le armoniche aventi frequenza inferiore ad f_{max} ed invece cancelli del tutto le armoniche aventi frequenza maggiore di f_{max} . Infatti in $V_2(f)$ è racchiusa tutta l'informazione di $V_1(f)$ ed è possibile recuperarla mediante un filtro LPF (Low Pass Filter) che elimini le componenti armoniche aventi frequenza maggiore di f_{max} .

Quasi sempre ci troveremo davanti a segnali campionati, ossia a tempo discretizzato. Come il segnale $v_2(t)$. Talvolta (raramente) periodici.
Spesso vorremo descrivere il segnale campionato ed il suo spettro, ossia la sua $\mathscr{F}$-trasformata. L'operatore di trasformazione di Fourier è rappresentato dalla lettera F maiuscola e corsiva ossia $\mathscr{F}$; se conosciamo il dominio temporale di $v_2(t)$ possiamo ricavare il dominio frequenziale di $V_2(f)$.

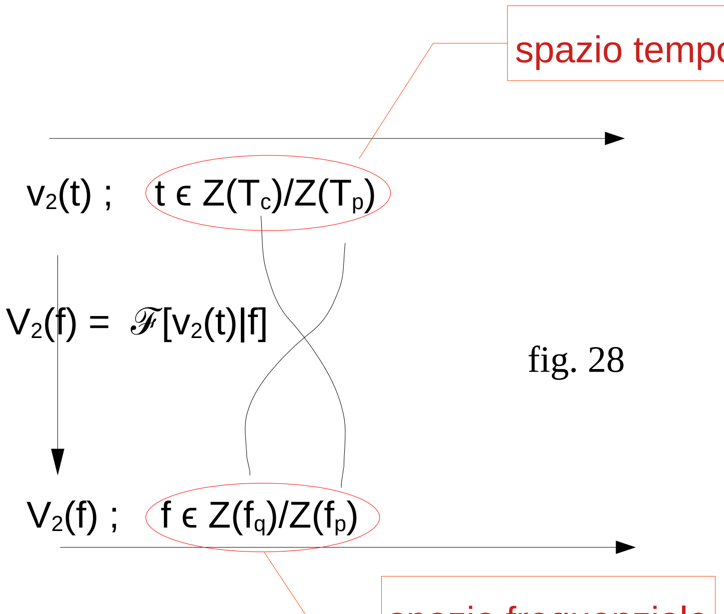


fig. 28

$\mathbf{f_q = 1/T_p}$

$\mathbf{f_p = 1/T_c}$

noi possiamo descrivere tanto il segnale nel dominio del tempo quanto il suo spettro nel dominio della frequenza mediante i rispettivi dominii ossia uno spazio temporale quoziente per $v_2(t)$; ed uno spazio frequenziale quoziente per $V_2(f)$.

Nello schema della figura 28 possiamo notare che se l'intervallo di campionamento T_c fosse nullo (l'interruttore del campionatore è sempre chiuso) allora ciò significa che $v_2(t)$ è un segnale a tempo continuo, ossia che $t \in \mathbb{R}$; in tal caso la sua trasformata $V_2(f)$ sarà una funzione **non periodica** della frequenza dato che il suo periodo frequenziale f_p vale infiniti Hertz essendo $f_p = 1/T_c$. Se invece l'intervallo di campionamento T_c fosse finito e non nullo allora ciò significa che $v_2(t)$ è un segnale a tempo campionato, ossia che $t \in Z(T_c)$; in tal caso la sua trasformata $V_2(f)$ sarà una funzione **periodica** della frequenza dato che il suo periodo frequenziale f_p ha un valore finito essendo $f_p = 1/T_c$.
Possiamo notare anche che se l'intervallo temporale di periodicità T_p fosse

infinito (il segnale $v_2(t)$ non si ripete mai) allora ciò significa che $v_2(t)$ è un segnale non periodico e perciò la sua trasformata $V_2(f)$ sarà una funzione **continua** della frequenza dato che il suo quanto frequenziale $f_q = f_1 = 1/T_p$ vale zero. Il quanto frequenziale $f_q = f_1 = 1/T_p$ viene chiamato anche frequenza fondamentale, oppure frequenza della prima armonica, ed è la distanza fra una riga spettrale e l'altra quando lo spettro è a righe. Ed ovviamente, lo spettro è a righe (nel senso che esiste addirittura la serie di Fourier) solo se il segnale $v_2(t)$ è periodico.

RICOSTRUZIONE DI SEGNALI CAMPIONATI MEDIANTE FILTRAGGIO

Supponiamo di aver già campionato un segnale, e di voler ricostruire il segnale originale $v_1(t)$ a partire dalla sequenza dei suoi campioni, ossia $v_2(t)$.

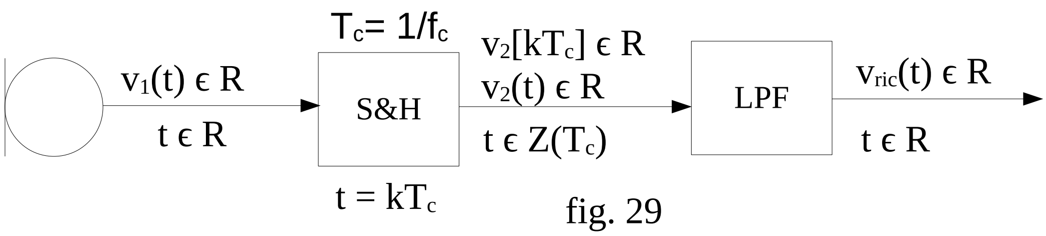
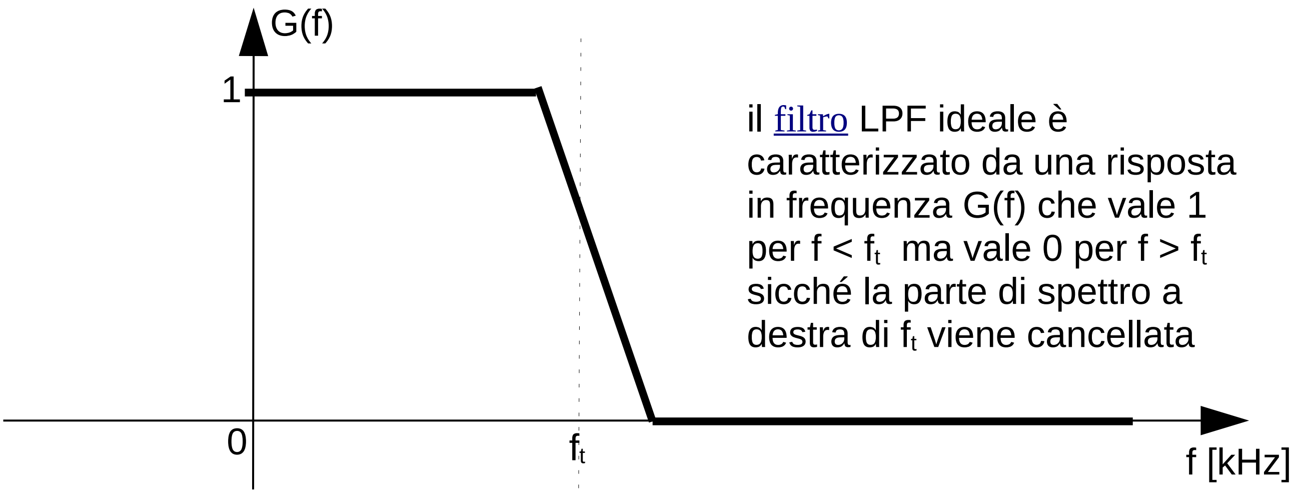


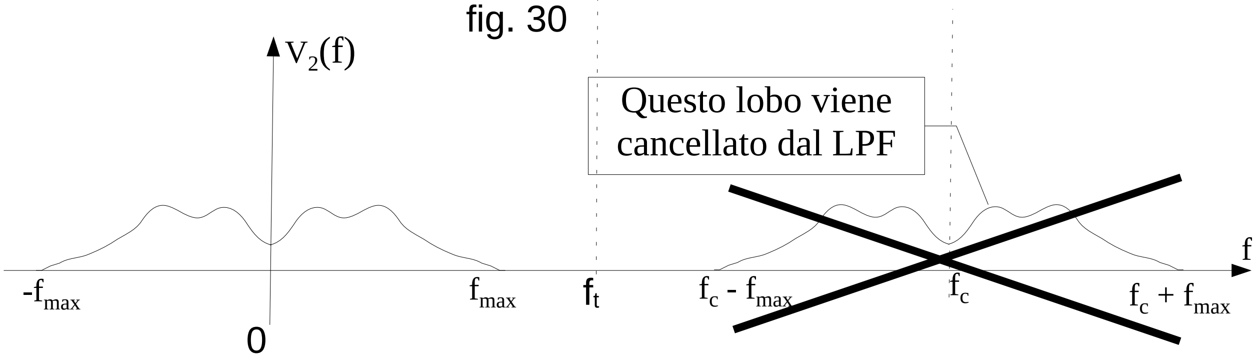
fig. 29

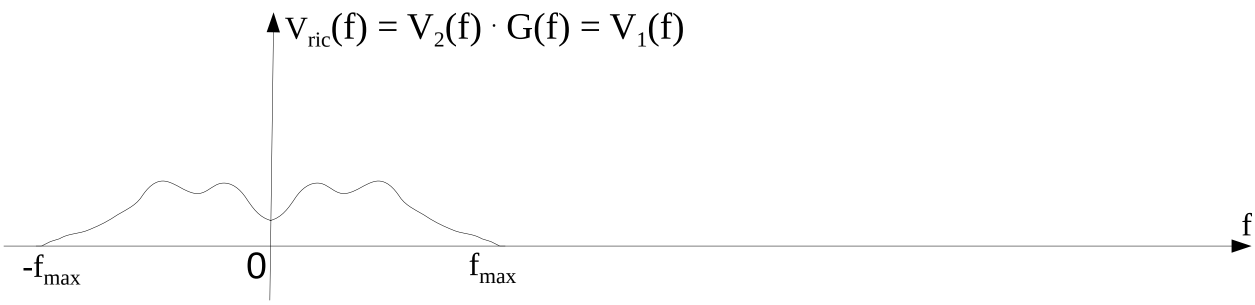
L'uscita del Low-Pass-Filter di figura 29 è il segnale $v_{ric}(t)$ ricostruito dai suoi campioni, ovvero non è altro che $v_1(t)$ ricostruito a partire da $v_2(t)$.



il filtro LPF ideale è caratterizzato da una risposta in frequenza G(f) che vale 1 per $f < f_t$ ma vale 0 per $f > f_t$ sicché la parte di spettro a destra di f_t viene cancellata

fig. 30





E' ovvio che affinché ciò sia possibile è necessario rispettare la condizione di Shannon. Detta f_{max} la massima frequenza delle armoniche del segnale $v_1(t)$, è necessario che il campionatore lavori con una frequenza di campionamento sufficientemente alta. Deve essere: $f_c > 2 \cdot f_{max}$ affinché sia possibile ricostruire $v_1(t)$ partendo da $v_2(t)$. Ma ottenere questo risultato equivale a voler ricostruire lo spettro $V_1(f)$ partendo da $V_2(f)$.

Grazie al LPF (Low—Pass—Filter) si eliminano le armoniche di $V_2(f)$ le cui frequenze siano maggiori di f_t ed in tal modo si ottiene uno spettro $V_{ric}(f)$ che è identico a $V_1(f)$.

Purtroppo per far ciò abbiamo bisogno di impiegare un filtro LPF **ideale**. Chiameremo $V_{ric}(f)$ lo spettro del segnale ricostruito mediante il filtro, ma nel caso ideale avremo che:

$$V_{ric}(f) = G(f)\, V_2(f) = V_1(f)$$

Ma cosa accade se f_c è troppo bassa e dunque non sono rispettate le condizioni di Nyquist/Shannon?

Nella figura 31 è riportato lo spettro del segnale d'uscita dal campionatore quando f_c è bassa.

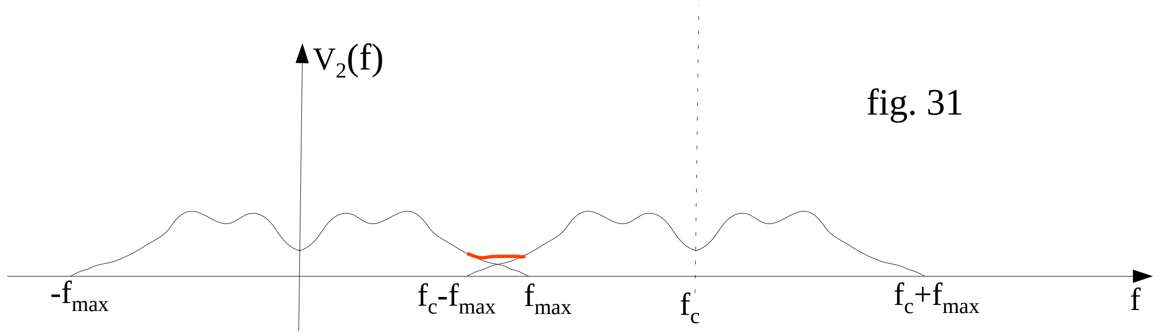


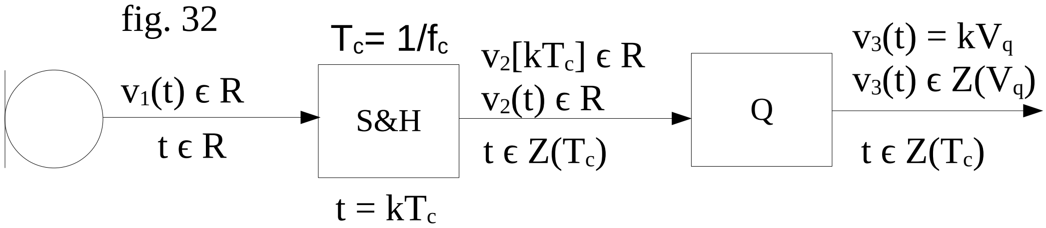
fig. 31

Qui non sono rispettate le condizioni di Nyquist/Shannon ed i lobi si sovrappongono tra loro. Infatti $f_c - f_{max} < f_{max}$ sicché nell'intervallo di frequenze compreso tra $(f_c - f_{max})$ ed f_{max} accade che $V_2(f)$ è diversa da $V_1(f)$ e dunque **non è più possibile** filtrare $V_2(f)$ e riottenere $V_1(f)$. Questo fenomeno si chiama aliasing e per poterlo evitare deve essere $f_c > 2f_{max}$.

QUANTIZZATORI (ADC)

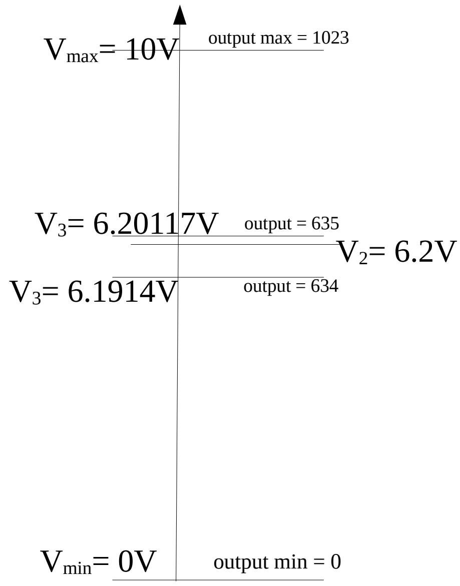
Certamente essere costretti a compiere l'operazione di campionamento non è indolore, ma ciò non basta. Abbiamo già notato che qualsiasi computer possiede un bus dati di dimensione finita e dunque non potrà mai rappresentare senza errori un numero reale che rappresenti ad esempio una ampiezza di π Volt. Evidentemente il sistema di acquisizione riportato nella figura 25 non può funzionare e perciò dopo aver campionato il segnale $v_1(t)$ ottenendo $v_2(t)$ dobbiamo purtroppo notare che il **codominio** di quest'ultimo è ancora **denso**: $v_2(t) \in \mathbb{R}$ e perciò non riusciamo a scrivere il valore di $v_2(t)$ in una locazione di memoria dato che servirebbero infiniti bit per poterlo fare. Dunque dobbiamo ricavare un terzo segnale, detto $v_3(t)$ che non solo abbia dominio discretizzato, ma abbia anche il codominio discretizzato.
Ciò si ottiene mediante una ulteriore operazione detta **quantizzazione**.

fig. 32



L'ampiezza del segnale $v_3(t)$ è un multiplo intero di V_q dove V_q viene detto passo di quantizzazione. Che cosa fa il quantizzatore, detto anche ADC (Analog—to—Digital—Converter)? Qual è la differenza fra $v_2(t)$ e $v_3(t)$? Entrambi sono segnali a tempo discretizzato ovvero hanno per dominio $Z(T_c)$ ma mentre l'ampiezza di $v_2(t)$ è rappresentabile con un numero reale (che richiede infiniti bit per essere memorizzato) abbiamo invece che $v_3(t)$ è rappresentabile con un numero intero, compreso in un certo sottoinsieme dei numeri interi e dunque rappresentabile in formato binario mediante una stringa di bit di lunghezza finita. In pratica $v_3(t)$ si può scrivere in una locazione di memoria avente dimensione, ad esempio, n = 10 bit.

Potremo avere in questo caso che l'ampiezza di $v_3(t)$ è un multiplo intero di una quantità predefinita detta passo di quantizzazione V_q . Poniamo ad esempio di dover acquisire un segnale unipolare avente ampiezze sempre positive e comprese fra un valore minimo V_{min} = 0V ed un valore massimo V_{max} = 10V ; supponiamo di disporre di un ADC la cui uscita sia rappresentata su di un bus da 10 bit.



Possiamo perciò rappresentare un numero di livelli (o fasce) NL = $2^n = 2^{10}$ = = 1024 e perciò la larghezza di ciascuna fascia — detta passo di quantizzazione — vale:

$$V_q = (V_{max} - V_{min})/NL = 10V/1024 = 9.765625\ mV.$$

La differenza ($V_{max} – V_{min}$) viene chiamata anche intervallo di misura o campo di misura, ovvero FSR (Full Scale Range). Purtroppo $v_3(t)$ non è esattamente uguale a $v_2(t)$ dato che il quantizzatore emette un numero intero che rappresenta la fascia nella quale è compreso il valore del segnale $v_2(t)$. Ad esempio, supponiamo che $v_2(t)$ valga 6.2V. Quale numero verrà emesso dall'ADC? Se esso fosse 634 allora $v_3(t)$ sarebbe minore di $v_2(t)$:
infatti

$$634V_q = 634 \cdot 9.765625mV = 6.1914\ V\ ;$$

mentre se l'ADC dovesse emettere 635 allora $v_3(t)$ sarebbe maggiore di $v_2(t)$:
infatti

$$635V_q = 635 \cdot 9.765625mV = 6.20117\ V$$

dunque in entrambi i casi si ha un errore. La maggior parte degli ADC in commercio approssima il valore di $v_2(t)$ per difetto se $v_2(t)$ cade nella metà inferiore della fascia di quantizzazione, mentre approssima il valore di $v_2(t)$ per eccesso se $v_2(t)$ cade nella metà superiore della fascia di quantizzazione. Nel nostro caso emetterebbe 635 dato che in tal modo il modulo dell'errore è minore. Abbiamo dunque acquistato un ADC con errore bipolare. Sono disponibili anche ADC che approssimano sempre per eccesso ed altri che approssimano sempre per difetto. Sono detti ADC con errore unipolare. Qualunque sia il tipo di ADC che usiamo, il massimo errore di quantizzazione corrisponde alla larghezza della fascia di quantizzazione ossia V_q . L'errore di quantizzazione viene detto anche rumore di quantizzazione perchè produce lo stesso effetto di un rumore, ossia quello di un segnale indesiderato prodotto da cause indipendenti dalla nostra volontà e che purtroppo si somma al segnale utile e ne degrada il contenuto informativo. Ovviamente vorremmo avere rumore pari a zero ma ciò non è possibile dato che

$$V_q = (V_{max} - V_{min})/NL = FSR/(2^n)$$

e perciò qualunque sia il numero n di bit che abbiamo a disposizione, il numero di fasce non potrà mai essere infinito e dunque la larghezza di una fascia non sarà mai zero.

Per poter valutare le prestazioni di un sistema di acquisizione si usa un parametro detto rapporto segnale/rumore SNR_q mediante il quale viene specificato quanto il segnale utile sia più grande rispetto al rumore. Infatti SNR sta per Signal to Noise Ratio mentre il pedice q indica che la causa del rumore è la quantizzazione.

$$SNR_q = V_{smax} / V_{nmax}$$

dove V_{smax} è la massima ampiezza del segnale utile mentre V_{nmax} è la massima ampiezza del rumore. Ma la massima ampiezza del segnale coincide con il campo di misura: V_{smax} = FSR mentre la massima ampiezza del rumore coincide con il passo di quantizzazione:

$$V_{nmax} = V_q = FSR/NL.$$

Abbiamo perciò che $SNR_q = V_{smax} / V_{nmax} = FSR/ (FSR/NL) = NL = 2^n$ dove n è il numero di bit del bus d'uscita del nostro ADC.

Normalmente non si indica SNR_q mediante un numero puro in valore lineare, bensì mediante una misura logaritmica in deciBel:

$SNR_q|dB = 20Log(SNR_q) = 20Log(2^n) = n \cdot 20 \cdot Log(2) = n \cdot 6.02$ dB/bit.

Questo risultato ci dice che se abbiamo ad esempio un convertitore con n = 10 bit potremmo ottenere un rapporto segnale/rumore pari a:

$SNR_q|dB = n \cdot 6.02$ dB/bit = 10bit $\cdot$ 6.02 dB/bit = 60.2 dB .

Per ogni applicazione occorre scegliere un quantizzatore (ADC) con un numero adeguato di bit in uscita. Ad esempio, per digitalizzare la voce umana volendo trasmetterla su di un canale telefonico occorre garantire un SNR di almeno 45 dB e dunque serviranno almeno 8 bit di risoluzione dell'ADC; mentre per digitalizzare la musica di un'orchestra volendo riprodurla in un sistema audio ad alta fedeltà occorre garantire un SNR di almeno 70 dB e dunque serviranno almeno 12 bit di risoluzione dell'ADC .

Nella pratica per rappresentare i segnali campionati si usano sequenze di durata finita: esse possono essere viste come l'osservazione, limitata temporalmente, di una sequenza infinita $v_2[n]$. Questa operazione prende il nome di troncamento e corrisponde matematicamente al prodotto della sequenza $v_2[n]$ per una finestra di osservazione w[n], che sia nulla per i valori di n esterni all'intervallo di osservazione.

$$v_3[n] = v_2[n] \cdot w[n] .$$

Consideriamo la trasformata di Fourier di una sequenza finita. Questa sarà ottenuta come Trasformata Discreta di Fourier (TDF) della sequenza ottenuta periodicizzando la sequenza originaria. Questo ci permetterà di descriverne il contenuto frequenziale tramite un numero finito e discreto di coefficienti.

Per un approfondimento sulla DFT si può leggere qui o qui .