ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA DE SISTEMAS

COMPUTACIÓN

METODOS NÚMERICOS

DOCENTE: ING. ZEA ALEJANDRO

ESTUDIANTE: MICHAEL YANEZ

Deber # 2: Errores Numéricos - Métodos Numéricos

Mayo 05, 2025

Introducción

Este presente documento presenta la resolución de los ejercicios propuestos para la tarea 02, en cada ejercicio se presenta la explicación de los mismos.

Ejercicio 1

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Variable	Valor Exacto	Valor Truncado (4 dígitos)
π	3.14159265	3.141
$\sqrt{e}$	2.71828182	2.718
2	1.41421356	1.414
$\frac{22}{7}$	1.4142135623	1.414

Table 1: Comparación entre valor exacto y valor truncado

a) $p = \pi,\ p^* = \frac{22}{7}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 1.72759265$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{\pi} \approx 0.54990982$$

b) $p = \pi$, $p^* = 3.1416$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |\pi - 3.1416| \approx 7.35 * 10^{-6}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416|}{\pi} \approx 2.33957 * 10^{-6}$$

c) $p = e$, $p^* = 2.718$

Solución:

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |e - 2.718| \approx 2.8182 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 2.718|}{e} \approx 1.036757 * 10^{-4}$$

d) $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1.414$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = \left|\sqrt{2} - 1.414\right| \approx 2.1356 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|\sqrt{2} - 1.414|}{\sqrt{2}} \approx 1.5100652 * 10^{-4}$$

Ejercicio 2

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Variable	Valor
8!	40320
e	2.71828182
$\sqrt{9!}$	362880
$18\pi \cdot \frac{9}{e}$	24.89
10^{π}	1385.45573

Table 2: Valores a usar en el Ejercicio 2

a) $p = e$, $p^* = 22000$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |e - 22000| \approx 21997.28172$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 22000|}{e} \approx 8092.347731$$

b) $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1400$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400| = 14.54427$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|10^{\pi} - 1400|}{10^{\pi}} = 0.010497$$

c) $p = 8!$, $p^* = 39900$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$E_a = |p - p^*| = |40320 - 39900| = 420$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|40320 - 39900|}{40320} \approx 0.0104166$$

d) $p = 9!,\ p^* = \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}| \approx 362855.11$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}|}{362880} \approx 0.999931$$

Ejercicio 3

Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p

a) $p = \pi$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \pi \approx 3.1416 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\pi - 3.1416 \times 10^{-4}, \pi + 3.1416 \times 10^{-4}\right]$$

b) $p = e$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot e \approx 2.7183 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[e - 2.7183 \times 10^{-4}, e + 2.7183 \times 10^{-4}\right]$$

c) $p = \sqrt{2}$ **Solución:**

- **Error relativo maximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condicion de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \approx 1.4142 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\sqrt{2} - 1.4142 \times 10^{-4}, \sqrt{2} + 1.4142 \times 10^{-4}\right]$$

d) $p = \sqrt{7}$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{7} \approx 2.6458 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\sqrt{7} - 2.6458 \times 10^{-4}, \sqrt{7} + 2.6458 \times 10^{-4}\right]$$

Ejercicio 4

Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para al menos cinco dígitos

Variable	Valor Exacto	Valor Redondeado (3 d´ıgitos)
e	2.71828	2.718
-10π	-31.41592	-31.416
$6e$	16.30969	16.310
$10\pi + 6e$	-15.10623	-15.106
$10\pi + 6e - 1$	-16.10623	-16.106
$2^{\frac{5}{3}}$	3.33333	3.333
$\sqrt{2}\sqrt{3}$	2.44945	2.449

Table 3: Comparación entre valor exacto y valor truncado

a) **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |-2.71828 + 2.718| \approx 2.8 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.8 * 10^{-4}}{-2.71828} \approx 1.03006 * 10^{-4}$$

b) $-10\pi + 6e - 1$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |-16.10623 + 16.106| \approx 2.3 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.3 * 10^{-4}}{-16.10623} \approx 1.42801 * 10^{-5}$$

$\frac{5}{3} \cdot 2$

c) **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.33333 - 3.333| \approx 3.3 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{3.3 * 10^{-4}}{3.33333} \approx 9.90000 * 10^{-5}$$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.44945 - 2.449| \approx 4.5 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{4.5 * 10^{-4}}{2.44945} \approx 1.83714 * 10^{-4}$$

Ejercicio 5

Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arco tangente son:

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arco tangente:

a) $4\arctan(1) + \arctan(1/2)$ **Solución:**

Usando el polinomio de Maclaurin, aproximamos:

$$\arctan(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} \approx 0.9333$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} \approx 0.4635$$

Por lo tanto,

$$4\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 4 \times 0.9333 + 0.4635 = 4.1967$$

Comparado con el valor real de $\pi \approx 3.1416$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.1416 - 4.1967| \approx 1.0551$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|3.1416 - 4.1967|}{3.1416} \approx 0.3359$$

b) 16arctan(1/5) − 4arctan(1/239) **Solución:**

Usando el polinomio de Maclaurin, aproximamos:

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3125} \approx 0.1974$$

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5} \approx 0.0042$$

Por lo tanto,

$$16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx 16 \times 0.1974 - 4 \times 0.0042 = 3.1512$$

Comparado con el valor real de $\pi \approx 3.1416$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.1416 - 3.1512| \approx 0.0096$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|3.1416 - 3.1512|}{3.1416} \approx 0.0031$$

Ejercicio 6

El número *e* se puede definir por medio de:

$$e = \sum \frac{1}{n!}, \text{ donde } n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \text{ para } n \neq 0 \text{ y } 0! = 1$$

Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de *e*:

a) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 5$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 5$:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$e \approx 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 = 2.7183$$

Comparado con el valor real de $e \approx 2.718281828$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.718281828 - 2.7183| \approx 1.8172 \times 10^{-5}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.718281828 - 2.7183|}{2.718281828} \approx 6.6846 \times 10^{-6}$$

b) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 10$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 10$:

Comparado con el valor real de $e \approx 2.718281828$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.718281828 - 2.7182818| \approx 2.8 \times 10^{-8}$$

- **Error relativo:**

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$

$$e \approx 1+1+0.5+0.1667+0.0417+0.0083+0.0014+0.0002+0.000025+0.000003+0.0000003 = 2.71828$$

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.718281828 - 2.7182818|}{2.718281828} \approx 1.03 \times 10^{-8}$$

Ejercicio 7

Intersección de dos puntos en una línea recta

Suponga que dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) se encuentran en línea recta con $y_1 /= y_2$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Use los datos $(x_1,y_1) = (1.31,3.24)$ y $(x_2,y_2) = (1.93,5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por que? **Solución:**

- **Datos:**

$$(x_1,y_1) = (1.31,3.24), \qquad (x_2,y_2) = (1.93,5.76)$$

- **Primer método:** $x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  Calculemos cada término aplicando redondeo a tres dígitos:

$$y_2 - y_1 = 5.76 - 3.24 = 2.52$$

  Redondeado a tres dígitos: $y_2 - y_1 \approx 2.52$.

$$x_2 - x_1 = 1.93 - 1.31 = 0.62$$

  Redondeado a tres dígitos: $x_2 - x_1 \approx 0.62$. Entonces,

$$x = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$

- **Segundo método:** $x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$
  Calculemos cada término aplicando redondeo a tres dígitos:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$

  Entonces,

$$x = x_1 - 4.06 = 1.31 - 4.06 = -2.75$$

- **Análisis de resultados:**

  Ambos métodos arrojan resultados diferentes debido a la acumulación de errores de redondeo durante los cálculos intermedios. El primer método produce un valor positivo, lo cual parece más apropiado para representar el punto de intersección xx entre los dos puntos, ya que refleja una relación directa con la pendiente. En cambio, el segundo método da un valor negativo que, en este caso, no concuerda con la ubicación de los puntos sobre la recta.

- **Conclusión:**

El primer método resulta más adecuado porque reduce los errores de redondeo durante los cálculos y ofrece un resultado más consistente con la disposición geométrica de los puntos.