Lab11 projekt

Michał Brzeziński

May 24, 2025

Lab. komputerowe z przedmiotu "Metody Obliczeniowe", prowadzący: dr hab. inż. L.Bieniasz

1 Ćwiczenie 11-i - treść zadania

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:
równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2},$$

określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,
warunek początkowy:

$$U(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ e^{\frac{-x}{b}} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{gdzie } b > 0, \text{oraz}$$

warunki brzegowe:

$$\begin{cases} U(-\infty, t) = 0 \\ U(+\infty, t) = 0 \end{cases}$$

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła w ośrodku nieskończonym o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym zetknięciu dwóch połówek ośrodka o różnych rozkładach temperatur, w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{Dt}{b^2} - \frac{x}{b}\right)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{2Dt/b - x}{2\sqrt{Dt}}\right), \quad \text{gdzie}$$

$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z)$, a $\mathrm{erf}(z)$ jest tzw. funkcją błędu:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw.$$

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erfc(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

———————————————————————————————————————

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć, ustaloną wartość $\lambda = D\frac{\delta t}{h^2}$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (w zależności logarytmu dziesiętnego błędu od log. dziesiętnego kroku przestrzennego h). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.
(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).
(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. **Należy wyjaśnić ewentualne obserwowane zmiany błędu w czasie.**

———————————————————————————————————————

Algorytmy:

Dyskretyzacja:

1. Klasyczna metoda bezpośrednia
2. Metoda pośrednia Laasonen

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:

1. Dekompozycja LU macierzy pełnej
2. Algorytm Thomasa

———————————————————————————————————————

Parametry: $t_{max} = 1, b = 0.1, D = 1.$