Równania Różniczkowe Zwyczajne

Data ostatniej aktualizacji: 11 września 2024

1 Krótki Wstęp

Uważny czytelnik zauważy też że poniższe notatki przypominają niezwykłe dydaktyczne prace dr Arkadiusza Męcla, które również gorąco polecam.

Link do omówienia pewniaków na egzamin znajduje się tutaj

Twierdzenie 1: Obustronne twierdzenie Peano

Niech
$f : D \to \mathbb{R}^n$
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ - niepusty i spójny
Niech

$$Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset D$$

Dla pewnych $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b, > 0$. Niech ponadto f ciągła w Q. Wtedy zagadnienie Cauchy'ego ma dokładnie jedno rozwiązanie na zbiorze $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$,$M = \sup\limits_{(t,x)\in Q} \|f(t, x)\|$

Przykład 1: Egzamin 2024

Zadanie 1. Dane jest zagadnienie Cauchy'ego $x' = |x - 1|, x(0) = 1$

1. Czy z tw. Peana wynika, że rozwiązanie istnieje dla $t \in [0, 1]$
2. Czy z tw. Peana wynika, że rozwiązanie istnieje w dowolnym przedziale $[0, A]$, gdzie $A > 0$
3. Czy rozwiązanie jest jednoznaczne?

Rozwiązanie Zadania 1.

1. Korzystamy z jednostronnego twierdzenia Peano.

   $$Q = \{(t, x) : t \in [0, a], |x - 1| \leqslant b\}$$

   f oczywiście ciągła na Q. Liczymy M:

   $$M = \sup_{(x,t)} f(t, x) = \sup_{(x,t)} |x - 1| \leqslant b$$

   Mamy więc

   $$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{b}\right\} = \min\{a, 1\}$$

   Tak więc rozwiązanie istnieje na $t \in [0, 1]$, wystarczy dobrać $a > 1$.

2. Nie, z tw. Peana nie wynika że rozwiązanie istnieje na $[0, A]$, $A > 0$, dla $A > 1$ zachodzi $M = \min\{A, 1\} = 1$, tak jak wynika to z poprzedniego podpunktu.

3. Chcemy skorzystać z tw. Picarda-Lindelofa.
   - Czy są spełnione założenia tw. Peano?
     Tak
   - Czy $f(t,x)$ lipchytzowska ze względu na x?
     Tak, z AM I.1 wiemy że funkcja $f(t,x) = |x-1|$ jest lipchytzowska.

   Tak więc rozwiązanie jest jednoznaczne.

Definicja 1: Równania różniczkowe jednorodne

Równanie postaci
$$x'(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Metoda 1: Rozwiązywanie równań jednorodnych

Podstawiamy $u = \frac{x}{t}$

Przykład 2

Zadanie 2. Rozwiąż równanie różniczkowe
$$tx' = x(1 + \ln x - \ln t), \qquad x(1) = e^{-\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie Zadania 2.
$$tx' = x(1 + \ln x - \ln t)$$
$$x' = \frac{x}{t}\left(1 + \ln\frac{x}{t}\right)$$
Podstawiamy $u = \frac{x}{t} \implies u + tu' = x'$. Otrzymujemy
$$u + tu' = u(1 + \ln u)$$
$$\frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{t}$$
$$\ln(\ln u) = \ln t + C$$
$$\ln\left(\ln\frac{x}{t}\right) = \ln t + \tilde{C}$$
$$\ln\left(\frac{x}{t}\right) = t \cdot e^{\tilde{C}}$$
Po podstawieniu warunku początkowego, otrzymujemy że
$$x = te^{t-\frac{1}{2}}$$

Twierdzenie 2: Twierdzenie o krzywej całkowej

Niech $R = (a,b) \times (c,d)$, a funkcje $P, Q : R \to \mathbb{R}$ oraz ich pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, które będziemy oznaczać przez P_y i Q_x odpowiednio, będą ciągłe w R. Jeśli $P_y = Q_x$ oraz jedna z funkcji $P(x,y)$ lub $Q(x,y)$ jest różna od zera w zbiorze R, to przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in R$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Twierdzenie kompletnie oczywiste dla osób znających formy różniczkowe

Twierdzenie 3: Lemat Gronwalla

Niech na przedziale $[0,T]$ dane będą funkcje rzeczywiste ciągłe $a(t), b(t), u(t)$. Niech $u(t)$ spełnia nierówność

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0,T]$$

Wtedy zachodzi oszacowanie

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\Big(\int_0^t b(\tau)\,d\tau\Big)\,ds$$

Jeśli dodatkowo funkcja $a(t)$ jest niemalejąca, to mamy

$$u(t) \leqslant a(t)\exp\Big(\int_0^t b(s)\,ds\Big)$$

Twierdzenie 4: Picarda-Lindelofa o istnieniu i jednoznaczności

Niech
$f : D \to \mathbb{R}^n$
$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ - niepusty i spójny
Niech

$$Q = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset D$$

Dla pewnych $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b, > 0$. Niech ponadto f ciągła w Q i niech spełnia jednostajny warunek Liptichza po drugiej zmiennej:

$$\underset{L>0}{\exists} \forall (t,x),(t,y) \in Q \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|$$

Wtedy zagadnienie Cauchy'ego ma dokładnie jedno rozwiązanie na zbiorze $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \sup\limits_{(t,x)\in Q} \|f(t,x)\|$

Twierdzenie 5: O przedłużeniu

Niech $f(t,x)$ będzie funkcją ciągłą w zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego w pewnym przedziale $[t_0, t_0 + \delta]$ takim, że $(t, x(t)) \in Q$ dla każdego $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Wtedy funkcja $x(t)$ może być przedłużona (jako rozwiązanie równania) do rozwiązania wysyconego z maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania (α_1, α_2). Jeśli ciąg $\{t_n\}$ jest zbieżny do jednego z końców przedziału (α_1, α_2), to ciąg $\{(t_n, x(t_n))\}$ jest zbieżny do brzegu Q, o ile Q jest ograniczony. Jeśli zbiór Q jest nieograniczony, to ciąg punktów $(t_n, x(t_n))$ jest nieograniczony dla $t_n \to \alpha_1^+$ lub $t_n \to \alpha_2^-$.

Przykład 3: Znalezienie formy pierwotnej

Najprostszym przypadkiem związanym z tym typem równania jest przypadek gdy znamy formę pierwotną $H(x,y)$ taką że $dH = \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie

$$2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

Rozwiązanie Zadania 3. Zauważmy, że oznaczając $\frac{\partial H}{\partial x} = P(x,y) = 2xy$, $\frac{\partial H}{\partial x} = Q(x,y) = 2x$, otrzymujemy

$$P'_y = 2x \qquad Q'_x = 2x$$

Sprawdźmy czy te dwie funkcje spełniają twierdzenie o krzywej całkowej. Rzeczywiście, obie są ciągłe na $\mathbb{R}$ i co najmniej jedna jest różna od 0, tak więc założenia twierdzenia są spełnione. Zauważmy więc, że formą pierwotną jest $H(x,y) = yx^2 - \frac{y^3}{3} + C$

Definicja 2: Rodzaje schematów

- Schemat jednokrokowy to schemat używający w swoim zapisie tylko x_n, t_n i h
- Schemat jest samostartujący, jeśli każde x_k jest określone jednoznacznie przez Φ oraz $x_0 = x(t_0)$. Zatem wszystkie schematy jednokrokowe są samostartujące.
- Schemat jest jawny (inaczej otwarty), jeśli x_{n+1} znajduje się tylko po lewej stronie.
- Schemat jest niejawny (inaczej zamknięty), jeśli wyznaczenie x_{k+1} wymaga rozwiązania pewnego równania (zwykle nieliniowego). Na przykład schemat niejawny Eulera: $x_{k+1} = x_k + hf_{k+1}$.
- Schemat wielokrokowy jest postaci $x_{k+1} = \Psi(t_k, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_{k-q+1}, h)$. O takim schemacie będziemy mówić, że jest q-krokowy. Na tym wykładzie będziemy się zajmować wyłącznie schematami wielokrokowymi liniowymi, które zdefiniujemy później. Przykładem jest schemat midpoint.

Definicja 3: Schemat Rungego-Kutty

Schemat postaci

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, x_n),\\
K_2 &= f(t_n + c_2 h, x_n + h a_{21} K_1),\\
K_3 &= f(t_n + c_3 h, x_n + h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2)),\\
&\vdots\\
K_r &= f(t_n + c_r h, x_n + h\sum_{j=1}^{r-1} a_{rj}K_j),\\
x_{n+1} &= x_n + h\sum_{j=1}^{r} b_j K_j
\end{aligned}$$

dla $r \geqslant 1$ oraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 2, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, r-1$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, r$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 2, \ldots, r$, nazywa się r-poziomowym schematem jawnym Rungego-Kutty.

Definicja 4: Schemat liniowy q-krokowy

Schemat liniowy q-krokowy ma postać

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{q} \beta_j f_{n+j}$$

gdzie $q \geqslant 1$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_q \neq 0$, $|\alpha_0|+|\beta_0| > 0$ oraz $x_{n+j} \approx x(t_n+jh)$ i $f_{n+j} = f(t_{n+j}, x_{n+j})$. Jeżeli $\beta_q = 0$, to schemat jest jawny, w przeciwnym przypadku jest niejawny.
Cechy schematów

- Jest zgodny, jeżeli jest rzędu co najmniej 1, łatwo stąd zauważyć, że w schemacie zgodnym mamy $c_0 = c_1 = 0$.
- Wielomian charakterystyczny równania to $\phi(\lambda) := \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \lambda^j$, natomiast wielomian tworzący to $\psi(\lambda) := \sum_{j=0}^{q} \beta_j \lambda^j$.
- W schemacie zgodnym mamy $\phi(1) = 0$ oraz $\phi'(1) = \psi(1)$.
- Schemat jest stabilny, jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu ϕ leżą w kole jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, a te o module równym 1, są jednokrotne.
- Schemat jest silnie stabilny, jeżeli jest stabilny i jedynym pierwiastkiem $\phi(\lambda)$ o module 1 jest $\lambda = 1$ (co jest dość logiczne, gdyby to było -1 to mielibyśmy oscylacje związane z potęgami $(-1)^n$)

Metoda 2: Maszynka do sprawdzania rzędu

Schemat jest rzędu $p \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_0 = c_1 = \ldots = c_p = 0$ i $c_{p+1} \neq 0$, gdzie

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{j=0}^{q} \alpha_j, \\ c_1 &= \sum_{j=0}^{q} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{q} \beta_j, \\ &\vdots \\ c_p &= \frac{1}{p!}\left(\sum_{j=0}^{q} j^p \alpha_j - p \sum_{j=0}^{q} j^{p-1} \beta_j \right). \end{aligned}$$

Twierdzenie 6: I bariera Dahlquista

Rząd p metody q-krokowej, która jest stabilna, spełnia nierówności:

$$p \leqslant \begin{cases} q+2 & \text{jeśli } q \text{ parzyste,} \\ q+1 & \text{jeśli } q \text{ nieparzyste,} \\ q & \text{jeśli } \frac{\beta_q}{\alpha_q} \neq 0 \text{ (w szczególności dla metod jawnych).} \end{cases}$$

Twierdzenie 7

Jeśli schemat jest zbieżny, to jest stabilny i zgodny.

Przykład 4: Egzamin 2024

Zadanie 4. Rozważmy schemat różnicowy dla parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(2a+2)y_{n+2} - ay_{n+1} - (2+a)y_n = h(bf_{n+1} + cf_n)$$

a) Wyznacz b i c w zależności od a tak, aby schemat był rzędu co najmniej 2

b) Zbadaj stabilność i silną stabilność w zależności od parametrów

c) Czy istnieją a, b i c takie, że schemat jest zbieżny i rzędu co najmniej 3.

Rozwiązanie Zadania 4.

a) Korzystamy z maszynki do rzędu

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = -(2+a) & \alpha_1 = -a & \alpha_2 = 2a+2 \\ \beta_0 = c & \beta_1 = b & \beta_2 = 0 \end{array}$$

$$c_p = \frac{1}{p!}\left(\sum_{j=0}^{q} j^p \alpha_j - p\sum_{j=0}^{q} j^{p-1} j^{p-1} \beta_j\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{0!}(-(2+a) - a + 2a + 2)) = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{1!}(-0 \cdot (2+a) - 1 \cdot a + 2 \cdot (2a+2) - (c+b+0)) = 3a+4-c-b$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\left(-0^2 \cdot (2+a) - 1^2 \cdot a + 2^2 \cdot (2a+2) - 2(0 \cdot c + 1 \cdot b + 2 \cdot 0)\right) = \frac{1}{2}(7a+8-2b)$$

Zgodnie z *maszynką do rzędu*, aby schemat był rzędu co najmniej 2, musi być spełnione:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{7a+8}{2} \\ c = \frac{a}{2} \end{cases}$$

b) Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$\phi(\lambda) = (2a+2)\lambda^2 - a\lambda - (2+a)$$

W celu zbadanie jego stabilności, badamy jego pierwiastki:

1. $(2a+2) = 0 \implies a = -1$. Wtedy

$$\phi(\lambda) = \lambda - 1$$

Tak więc w tym przypadku mamy schemat silnie stabilny

2. $(2a+2) \neq 0$. Badamy pierwiastki równania kwadratowego. Zauważmy że dla każdego a:

$$\Delta = 9a^2 + 6a + 4 > 0$$

Tak więc wielomian ma 2 jednokrotne pierwiastki rzeczywiste. Zbadajmy kiedy znajdują się one w przedziale [-1,1]:

- Przypadek I

$$2a+2 > 0 \quad \psi(-1) \geqslant 0 \qquad \psi(1) \geqslant 0$$

$$\underbrace{a > -1 \quad a \geqslant 0 \qquad 0 \geqslant 0}_{a \geqslant 0}$$

- Przypadek II

$$2a+2 < 0 \quad \psi(-1) \leqslant 0 \qquad \psi(1) \leqslant 0$$

$$\underbrace{a < -1 \quad a \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant 0}_{a < -1}$$

Tak więc dla $a \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ schemat jest silnie stabilny.

c) W celu zbadania rzędu, musimy wyznaczyć c_3:

$$c_3 = \frac{1}{3!}\left(-0^3 \cdot (2+a) - 1^3 \cdot a + 2^3 \cdot (2a+2) - 3(0^2 \cdot c + 1^2 \cdot b + 2^2 \cdot 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(15a + 16 - 3b)$$

aby schemat był rzędu co najmniej 3, musi być spełnione

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 15a + 16 - 3b = 0 \\ b = \frac{7a+8}{2} \\ c = \frac{a}{2} \end{cases} \implies a = -\frac{8}{9}$$

Przypomnijmy, że schemat jest zbieżny jeśli jest stabilny i zgodny, a zauważmy, że na podstawie poprzedniego podpunktu, schemat nie jest stabilny dla $a = -\frac{8}{9}$, nie może więc też być zbieżny.

Twierdzenie 8: Nierówność Gronwalla

Niech na przedziale $[0, T]$ dane będą funkcje rzeczywiste ciągłe $a(t)$, $b(t)$, $u(t)$, przy czym funkcja $b(t)$ jest nieujemna. Niech $u(t)$ spełnia nierówność

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0, T].$$

Wtedy zachodzi oszacowanie

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right) ds.$$

Jeśli dodatkowo funkcja $a(t)$ jest niemalejąca, to mamy

$$u(t) \leqslant a(t)\exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right).$$

Twierdzenie 9: O nierównościach

Niech $m(t)$ i $u(t)$ będą funkcjami ciągłymi, rzeczywistymi, określonymi na $[t_0, t_0+\alpha]$ i niech $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Jeżeli dla wszystkich $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ zachodzi:

(i) $D^+m(t) \leqslant g(t, m(t))$,

(ii) $D^+u(t) > g(t, u(t))$,

(iii) $m(t_0) \leqslant u(t_0)$,

to dla wszystkich $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ zachodzi $m(t) \leqslant u(t)$.
Uwaga: Teza jest prawdziwa po odwróceniu znaków nierówności.
Inaczej: Jeśli możemy ograniczyć zagadnienie Cauchego z góry i z dołu przez pochodne pewnych ciągłych funkcji na danym przedziale, z których obie spełniają pewien warunek początkowy $m(t_0) \leqslant u(t_0)$, to na tym przedziale zachodzi $m(t) \leqslant u(t)$

D_+ tutaj oznacza prawostronną pochodną Diniego. Jeśli f jest różniczkowalna w t, to pochodna Diniego w t pokrywa się ze zwykłą pochodną w tym punkcie.

Przykład 5: Zadanie z ćwiczeń

Zadanie 5. Wykaż, że rozwiązanie $x(t)$ zagadnienia początkowego:

$$x' = x^2 + t^2, \quad x(0) = 1$$

spełnia nierówność:

$$1 + \frac{t^3}{3} \leqslant x(t) \leqslant \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{dla} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Rozwiązanie Zadania 5. Chcemy skorzystać z twierdzenia o nierównościach. Widzimy nasze zagadnienie Cauchy'ego $g(t, x) = x^2 + t^2, x(0) = 0$. Niech $m(t)$ będzie rozwiązaniem tego zagadnienia, czyli $m' = g(t, m)$.
Nastepnie naturalnie, określmy $u(t) = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, zauważmy też, że tak określone u spełnia nasze zagadnienie Cauchy'ego z warunkiem , $u(0) = 1$.
Przejdźmy do sprawdzenia założeń:

1. m, u - funkcje ciągłe, określone na $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ - są
2. $D_+m(t) = m' \leqslant g(t, m)$ - jako że określiliśmy $m' = g(t, m)$, jest to oczywiście spełnione
3. $D_+u(t) = u' = u^2 + 1 \geqslant u^2 + 1 = g(t, u)$, jest to oczywiście spełnione
4. $1 = m(0) \leqslant u(0) = 1$, więc też oczywiście spełnione

Wszystkie założenia są spełnione, tak więc

$$m(t) \leqslant u(t) \iff x(t) \leqslant \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{dla} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Przejdźmy do drugiej strony nierówności. Niech teraz $u(t) = 1 + \frac{1}{}$
Przejdźmy do sprawdzenia założeń:

1. m, u - funkcje ciągłe, określone na $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ - są
2. $D_+m(t) = m' \geqslant g(t, m)$ - jako że określiliśmy $m' = g(t, m)$, jest to oczywiście spełnione
3. $D_+u(t) = u' = u^2 < u^2 + t^2 = g(t, u)$, jest to oczywiście spełnione
4. $1 = m(0) \geqslant u(0) = 1$, więc też oczywiście spełnione

Wszystkie założenia są spełnione, tak więc

$$u(t) \leqslant m(t) \iff 1 + \frac{1}{3}t^3 = u(t) \leqslant m(t) = f(t, m) = f(t, x) = x(t) \quad \text{dla} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Obie części nierówności zostały więc udowodnione.

Przykład 6: Pochodna względem parametru

Zadanie 6. Wyznacz pochodną $\frac{\partial x}{\partial p}\Big|_{p=0}$ równania

$$\begin{cases} x' = x + p(t + x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie Zadania 6. Będziemy chcieli skorzystać ze wzoru

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}$$

gdzie wartość wyrażenia $\frac{\partial x}{\partial p}$ w 0 jest dokładne tym czego szukamy.

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2px \\ \frac{\partial f}{\partial p} = t + x^2 \end{matrix}\right\} \text{funkcje ciągłe, więc wszystko git}$$

Oznaczmy $\frac{\partial x}{\partial p} = \psi$. Mamy więc że

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\psi' = (1 + 2px)\psi + (t + x^2), p = 0(*)$$

Musimy policzyć wartość x dla $p = 0$. Podstawiamy do oryginalnego równania:

$$\left.\begin{matrix} x' = x \\ x(0) = 1 \end{matrix}\right\} \implies x(t) = e^t$$

Teraz przechodzimy z równaniem $(*)$ dla $p = 0$ otrzymując

$$\psi' = \psi + (t + (e^t)^2)$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\psi' = \psi \implies \psi = e^t C(t)$$

Po podstawieniu, otrzymujemy:

$$C'(t)e^t + e^t C(t) = e^t C(t) + (t + (e^t)^2)$$

$$C'(t)e^t = t + (e^t)^2$$

$$C'(t) = te{-}t + e^t$$

$$C(t) = -e^{-t}(t + 1) + e^t + C$$

Wiedząc, że $\psi(0) = 0 \implies C(0) = 0 \implies C = e - 1$
Tak więc końcowo otrzymujemy, że $\psi = e^t(-e^{-t}(t + 1) + e^t + e - 1)$

Metoda 3: Cramera

Metoda używana do rozwiązywania równań 2 rzędu, polega ona na rozwiązywaniu układu

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

za pomocą wzorów Cramera

Metoda 4: Macierz Fundamentalna

Metoda służąca do rozwiązywania układów równań różniczkowych. Mając układ

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

możemy wyznaczyć macierz funadmentalną

$$x(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) f(s)\, ds, \quad x(t_0) = x_0$$

Przykład 7: Zadanie z Ćwoiczeń

Zadanie 7. Znajdź rozwiązanie ogólne układu

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{4t} \\ y' = 2x + y + e^{4t} \end{cases}$$

Oraz rozwiązanie spełniające $x(0) = 1, y(0) = 0$

Rozwiązanie Zadania 7. Chcemy znaleźć rozwiązanie ogólne układu:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad t_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + f(t)$$

chcemy skorzystać ze wzoru

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\, ds$$

Szukamy więc jego wielomianu charakterystycznego

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Mamy więc dwie wartości własne, na ich podstawie wyznaczamy wektory własne

$$\lambda_1 = 1 \implies v_1 = [1, -1]$$

$$\lambda_2 = 3 \implies v_2 = [1, 1]$$

Tak więc rozwiązanie ogólne ma postać

$$X(t) = C_1'(t)e^{\lambda_1 t}v_1 + C_2'(t)e^{\lambda_2 t}v_2$$

Na tej podstawie wyznaczamy wyraz wolny

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} \implies X^{-1}(t) = \frac{1}{e^{2t} + e^{2t}} \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Dalej mamy

$$X^{-1}(t)f(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix}$$

Przejdźmy do policzenia całki

$$\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} -e^{-3s} \\ 3e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\, ds = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 2e^{3t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}3e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$X(t)X^{-1}(t_0) \cdot x_0 = \begin{bmatrix} -e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-3\cdot 0} & e^{-2\cdot 0} \\ 2e^{-2\cdot 0} & -e^{-2\cdot 0} \end{bmatrix}$$

Definicja 5

Niech $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy równanie różniczkowe

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{gdzie } x(t) \text{ jest rozwiązaniem na } [t_0, +\infty).$$

Rozwiązanie $x(t)$ nazywamy STABILNYM W SENSIE LAPUNOWA, jeśli dla każdego $\delta > 0$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla każdego rozwiązania $x(t)$ spełniającego $\|x(t_0) - x(t_0)\| < \epsilon$, zachodzi $\|x(t) - x(t)\| < \delta$ dla $t \geqslant t_0$.

Jeśli dodatkowo $\lim_{t\to+\infty} \|x(t) - x(t)\| = 0$, to mówimy, że rozwiązanie $x(t)$ jest ASYMPTOTYCZNIE STABILNE.

Twierdzenie 10

Niech $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ i $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ będą funkcjami ciągłymi. Rozważamy układ liniowy

$$x' = A(t)x + b(t).$$

Rozwiązanie $x(t)$ równania niejednorodnego jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie zerowe równania jednorodnego $x' = A(t)x$ jest stabilne w sensie Lapunowa.

Płyną z tego proste wnioski:

1. Wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego są jednoczenie albo stabilne, albo niestabilne.
2. Aby zbadać stabilność układu niejednorodnego, wystarczy zbadać stabilność zerowego rozwiązania równania jednorodnego.

Twierdzenie 11

Niech dany będzie układ liniowy jednorodny ze stałą macierzą $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A mają niedodatnie części rzeczywiste, a wartości własne o geometrycznej krotności większej niż jeden (klatki Jordana rozmiaru większego niż jeden) mają ujemne części rzeczywiste, to zerowe rozwiązanie układu jest stabilne.
2. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A mają części rzeczywiste ujemne, to zerowe rozwiązanie układu jest asymptotycznie stabilne.
3. Jeśli istnieje wartość własna macierzy A o dodatniej części rzeczywistej lub wartość własna o zerowej części rzeczywistej i geometrycznej krotności większej niż jeden, to zerowe rozwiązanie układu nie jest stabilne.

Definicja 6: Funkcja Lapunowa

FUNKCJĘ LAPUNOWA dla równania nazywamy funkcję $V : U \to \mathbb{R}$ klasy C^1 spełniającą:

i) $V(x) > 0$ dla każdego $x \in U$,

ii) $V(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = x_0$,

iii) $\nabla V(x) \cdot f(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in U$.

Przykład 8: Egzamin 2024

Zadanie 8. Zbadaj stabilność i asymptotyczną stabilność w sensie Lapunowa zerowego rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2 - a), \\ y' = x + x(x^2 + y^2 - a), \end{cases}$$

W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$

Rozwiązanie Zadania 8. Niech

$$f(x,y) = (-y + x(x^2 + y^2 - a), x + x(x^2 + y^2 - a))$$

Spróbujemy wyciągnąć jakieś wnioski za pomocą skorzystania z funkcji Lapunowa $F(x,y) = x^2 + y^2$. Mamy

$$\nabla F \cdot f(x,y) = -2xy + 2x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2a + 2xy + 2y^2x^22y^4 - 2y^2a =$$

$$= 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a)$$

Tak więc dla $a > 0$ rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne.
Zauważmy, że dla $a > 0$

Twierdzenie 12

Jeśli dla równania istnieje funkcja Lapunowa, to punkt równowagi x_0 jest stabilny. Jeśli dodatkowo

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$$

dla $x \in U \setminus \{x_0\}$, to punkt x_0 jest asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie 13

Jeśli dla równania istnieje funkcja $V : U \to \mathbb{R}$ klasy C^1 spełniająca warunki:

i) $V(x_0) = 0$,

ii) dla każdego $\alpha > 0$ istnieje $x_\alpha \in U$ takie, że $|x_\alpha - x_0| > \alpha$ i $V(x_\alpha) > 0$,

iii) $\nabla V(x) \cdot f(x) > 0$ dla każdego $x \in U \setminus \{x_0\}$,

to punkt równowagi x_0 nie jest stabilny.

Twierdzenie 14: O stabilności układów autonomicznych

1. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy układu są mniejsze od zera to rozwiązanie stacjonarne układu jest asymptotycznie stabilne.
2. Jeżeli część rzeczywista chociaż jednej wartości własnej macierzy układu jest większa od zera to rozwiązanie stacjonarne układu nie jest stabilne w sensie Lapunowa.