Topologia I

Data ostatniej aktualizacji: 9 października 2024

1 Przestrzenie Metryczne i przestrzenie topologiczne

Twierdzenie 1: Przydatne Zależności Zbiorowe

- $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$
- $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{i\in I} B_i$
- $D \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap D)$
- $D \cup \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cup D)$
- $D \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} D \setminus A_i$
- $\bigcup_{j\in J} \bigcup_{k\in K} C_{j,k} = \bigcup_{k\in K} \bigcup_{j\in J} C_{j,k}$
- $\bigcup_{j\in J} \bigcap_{k\in K} C_{j,k} \subseteq \bigcap_{k\in K} \bigcup_{j\in J} C_{j,k}$

Definicja 1: Metryka i Przestrzeń Metryczna

Metryką na zbiorze X nazywa się funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, dla $x, y \in X$,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$,dla $x, y, z \in X$.

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Definicja 2: Zbiór Otwarty w Przestrzeni Metrycznej

U jest otwarty w przestrzeni metrycznej, jeśli

$$\underset{x\in U}{\forall} \ \underset{r\in\mathbb{R}}{\exists} B(x, r) \subset U$$

Inaczej: Dla każdego punktu należącego do zbioru, istnieje kula o środku w tym punkcie, która się całkowicie zawiera w tym zbiorze

Definicja 3: Topologia

Rodzina zbiorów $\mathcal{T}$ jest TOPOLOGIĄ na X jeśli spełnione są warunki:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Iloczyn dowolnej skończonej liczby elementów topologii należy do tej topologii
3. Suma dowolnej liczby elementów topologii należy do tej topologii.

Elementy $\mathcal{T}$ nazywamy ZBIORAMI OTWARTYMI. Mają one następujące własności:

1. Dowolna suma (nawet nieskończona) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
2. Skończony iloczyn zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym.

Własności:

1. Punkty izolowane są zbiorami otwartymi.

Definicja 4: Typy Topologii

Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ spełnia warunek:

- $T_0 : \underset{x \neq y \in \mathcal{T}}{\forall} \underset{V \in \mathcal{T}}{\exists} (x \in V, y \notin V) \vee (x \notin V, y \in V)$
- $T_1 : \underset{x \neq y \in \mathcal{T}}{\forall} \underset{V,U \in \mathcal{T}}{\exists} (x \in U, y \notin U) \wedge (x \in V, y \in V)$
- T_2(Hausodrffa) $: \underset{x \neq y \in \mathcal{T}}{\forall} \underset{V,U \in \mathcal{T}}{\exists} (x \in U, y \in U) \wedge (U \cap V = \emptyset)$ **Własności:**
  - Przestrzeń X jest Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy przekątna $\{(x, x) : x \in X\}$ jest zbiorem domkniętym w przestrzeni produktowej $X \times X$.
  - Podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa
  - Przestrzeń produktowa przestrzeni Hausdorffa również jest Hausdorffa.
  - Zwarte podprzestrzenie przestrzeni Hausdorffa są domknięte.

Twierdzenie 2

Jeśli $\mathcal{T}$ jest generowane przez metrykę $d : X \times X \to \mathbb{R}$ to $(X, \mathcal{T})$ jest Hausdorffa.

$$B\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right) = \emptyset$$

Definicja 5: Baza Topologii

Rodzinę $\mathcal{B}$ podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej (X, T) nazywamy bazą topologii $\mathcal{T}$, jeśli:

$$\underset{U\in\mathcal{T}}{\forall}\ \underset{x\in U}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}\ x\in B\subset U$$

Przykłady Baz:

- $\mathcal{T}=\mathcal{T}(d)$ to bazą są kule $B(x,r), r$-dowolne, $x\in X$
- $(\mathbb{R},\mathcal{T}(d_e))$ to baza jest rodzina $\left\{(q-\frac{1}{n},q+\frac{1}{n}),q\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}\right\}$

Twierdzenie 3

X-dowolny zbiór, $\mathcal{B}$-rodzina podzbiorów X

1. $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}B=X},\emptyset\in\mathcal{B}$
2. $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ jeśli $x\in B_1\cap B_2$ to istnieje $B\in\mathcal{B}$, t. że $B\subset B_1\cap B_2$

Wówczas rodzina $\mathcal{T}$ zbiorów $U\subset X$ takich, że jeśli $x\in U$, to $x\in B\subset U$ dla pewnego $B\in\mathcal{B}$, jest topologią w X.

Definicja 6: Przykład przestrzeni topologicznych

$X=\mathbb{R}$
$Z=\left\{\frac{1}{i},i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$
$\mathcal{B}$ - rodzina podzbiorów $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}=\begin{cases}B\left(x,\frac{1}{n}\right),x\neq 0,n\in\mathbb{N}_+\\ U_i(0)=B\left(0,\frac{1}{n}\right)\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$$

Definicja 7: Płaszczyzna Niemyckiego

$P\subset\mathbb{R}^2, P=\{((x,y),x\geqslant 0\}$

$$\mathcal{B}=\begin{cases}B_{d_e}\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset P,n\in\mathbb{N}_+,x\in P\\ B_{d_e}\left(x,\frac{1}{n}\right)\text{ styczne do osi } y \text{ wraz z punktem styczności}\end{cases}$$

Definicja 8: Topologia Porządkowa

$(X,\leqslant)$ - zbiór z linowym porządkiem

$$\mathcal{B}=\begin{cases}\underset{y\in X}{\forall}\ B_y=\{x\in X,y<x\}\\ \underset{y\in X}{\forall}\ B^y=\{x\in X,y>x\}\\ \underset{x,y\in X}{\forall}\ B_x^y=\{z\in X,x<z<y\}\end{cases}$$

Definicja 9: Topologia Strzałki na $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}=\{(a,b],a,b\in\mathbb{R}\}\cup\emptyset$$

Definicja 10: Otoczenie punktu

Zbiór V jest otoczeniem punktu $x \in X$ w przestrzeni topologicznej $(x, \mathcal{T})$ jeśli $\exists_{u \in \mathcal{T}}$ t.że $x \in U \subset V$

Definicja 11: Zbieżność

Jeśli $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ to mówimy że:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \text{ zbieżny do } x_0 \iff d(x_n, x_0) \xrightarrow{n} 0$$

Definicja 12: Domknięcie zbioru

Niech $A \subset X$, $(X, \mathcal{T})$-prz.topologiczna. A jest DOMKNIĘTY jeśli

$$\overline{A} = \{x \in X, \underset{V\text{- otwarte}}{\forall} V \cap A = \emptyset\}$$

Własności:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. A jest domknięty $\iff$ $X \setminus A$ jest otwarty
3. Jest to najmniejszy w sensie zawierania zbiór w X zawierający A
4. $\overline{A} = \bigcap\{A \subset F \subset X, F \text{ domknięty}\}$
5. Skończona suma zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym
6. Dowolny (nawet nieskończony) iloczyn zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym

Dodatkowo, w przestrzeni metrycznej (X, d)

$$\overline{A} = \{x \in X; \underset{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A}{\exists} a_n \to x\}$$

Inaczej: Zbiór A jest domknięty w przestrzeni metrycznej jeśli każdy ciąg nieskończony zawarty w A jest zbieżny do elementu z tego zbioru.

Twierdzenie 4

$(X, \mathcal{T})$ przestrzeń topologiczna, $Y \subset X$. Wtedy

$$B \subset (Y, \mathcal{T}\Big|_Y) \text{ jest domknięty} \iff \exists_{A \text{ domknięty w } Y} B = Y \cap A$$

Definicja 13: Wnętrze zbioru

$$Int(A) = \bigcap_{u \in \mathcal{T}, U \subset A} \iff Int(A) \text{ to maksymalny zbiór otwarty zawarty w } A$$

Własności:

1. Wnętrze zbioru F jest otwartym podzbiorem F.
2. Wnętrze jest sumą wszystkich otwartych podzbiorów F.
3. Wnętrze jest największym zbiorem otwartym zawartym w F.
4. Zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest swoim własnym wnętrzem.
5. Wnętrze dowolnego zbioru równa się swojemu wnętrzu: $Int(Int(S)) = Int(S)$
6. Jeżeli S jest podzbiorem F, to $Int(S)$ jest podzbiorem $Int(F)$.
7. Wnętrze części wspólnej zbiorów jest częścią wspólną wnętrz tych zbiorów: $Int(S \cap F) = Int(S) \cap Int(F)$
8. Jeżeli S jest zbiorem otwartym, to S jest podzbiorem F wtedy i tylko wtedy, gdy S jest podzbiorem $Int(F)$.

Definicja 14: Brzeg Zbioru

$$bdA = \overline{A} \setminus Int(A)$$

Definicja 15: Odwzorowanie ciągłe w przestrzeni metrycznej

$f : X \to Y$ jest ciągła jeśli

$$\forall_{a \in X} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_{b} d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon \qquad \text{def. Cauchy'ego}$$

$$\forall_{a \in X} \forall_{a_n \xrightarrow[d_y]{} a} f(a_n) \xrightarrow{d_y} f(a) \qquad \text{def. Heine'ego}$$

Twierdzenie 5: Charakteryzacja funkcji ciągłych

$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$
NWSR

1. f jest CIĄGŁA
2. Przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty
$$\forall_{U \in \mathcal{T}_Y} f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$
3. Przeciwobraz każdego zbioru domkniętego jest domknięty.
$$F \subset Y - \text{domknięty} \implies \mathcal{T}^{-1}(F) - \text{domknięty w } X$$

4. Obraz domknięcia każdego zbioru zawiera się w domknięciu obrazu tego zbioru.

$$\underset{A\subset X}{\forall} f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

5. $\underset{x\in X}{\forall} \underset{V\subset Y \text{ otwarte}}{\forall} \underset{U\subset X \text{ otoczenie} X}{\exists} f(U) \subset Y$

Własności:

- Złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe
- Obcięcie przekształcenia ciągłego jest ciągłe

Uwaga:
Ciągłość wystarczy sprawdzić na dowolnej bazie $\mathcal{B}$

Definicja 16: Homeomorfizm

Odwzorowanie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest HOMEOMORFIZMEM, jeśli

1. f jest bijekcją
2. f i f^{-1} jest bijekcją

Mówimy że f jest ZANURZENIE HOMEOMORFIZMU jeśli zadaje homeomorfizm ze zbioru X w jego obraz $f(X)$
Własności:

1. Niezmiennikami homeomorfizmu są domkniętość, otwartość, zwartość, ośrodkowość, spójność, izolowaność, skupienie, spójność.

Twierdzenie 6: Homeomorficzność z dziedziną

Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i rozpatrzymy wykres $W(Y) = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$ przekształcenia f jako podprzestrzeń iloczynu kartezjańskiego $(X \times Y, \mathcal{T})$ przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wtedy

1. $(X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorficzna z $W(f)$
2. Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa, to $W(f)$ jest domkniętym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T})$

Definicja 17: Zbiór Gęsty

$(X, \mathcal{T})$ - p. topologiczna, $A \subset X$
NWSR

1. A jest GĘSTY
2. Domknięciem zbioru A jest cała przestrzeń

$$\overline{A} = X$$

3. Zbiór A jest ma z każdym niepustym zbiorem otwartym co najmniej jeden punkt wspólny.

$$\underset{U\in\mathcal{T}}{\forall} A \cap U \neq \emptyset$$

4. Dopełnieniem zbioru A jest zbiór brzegowy -

$$X \setminus A - \text{brzegowy}$$

UWAGA: Zbiór może być jednocześnie gęsty i brzegowy
UWAGA: Zbiór gęsty musi zawierać wszystkie punkty izolowane danej przestrzeni.

Definicja 18: Zbiór Brzegowy

$(X, \mathcal{T})$ - p. topologiczna, $A \subset X$
NWSR

1. A jest BRZEGOWY
2. Wnętrze A jest puste
$$Int(A) = \emptyset$$
3. Dopełnienie zbioru A jest zbiorem gęstym

Zbiór A nazywamy BRZEGOWYM jeśli jego wnętrze jest puste
UWAGA: Zbiór może być jednocześnie gęsty i brzegowy

Definicja 19: Przestrzeń Ośrodkowa

Przestrzeń Topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy OŚRODKOWĄ, jeśli zawiera co najwyżej przeliczalny podzbiór gęsty.
Własności:

1. Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa
2. Przestrzeń metryzowalna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń posiada bazę przeliczalną.
3. Podprzestrzeń przestrzeni metrycznej ośrodkowej jest ośrodkowa.
4. Przestrzeń zwarta metryczna jest ośrodkowa.
5. Iloczyn kartezjański maksymalnie $2^{\aleph_0}$ wielu przestrzeni ośrodkowych jest ośrodkowy

Twierdzenie 7: Tieztego

Niech $f : A \to [a, b]$ będzie funkcją ciągłą okresloną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$. Wówczas istnieje funkcja ciągła $\overline{f}(x) : X \to [a, b]$ taka, że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$.
UWAGA: Zachodzi to również dla $f : A \to \mathbb{R}^n$

2 Zwartość

Definicja 20: Zbiór zwarty

$(X, \mathcal{T})$ - prz. topologiczna. Hausdorffa
NWSR

1. X jest Zwarta
2. Z dowolnego pokrycia X zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone

Własności:

1. Ciągły obraz przestrzeni zwartej jest zwarty.
2. Funkcja ciągła na przestrzeni zwartej o wartościach w $\mathbb{R}$ jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.
3. Obraz zbioru zwartego w funkcji ciągłej na przestrzeń Hausdorffa jest podzbiorem zwartym
4. Iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych (z topologią produktową) jest zwarty.
5. Zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.
6. Ciągła bijekcja zwartej przestrzeni X na przestrzeń Hausdorffa Y jest homeomorfizmem.
7. Każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.
8. Metryczna przestrzeń zwarta jest zupełna

Gdy X jest przestrzenią metryczną, zachodzą mocniejsze własności
NWSR

1. X jest zwarta
2. Każdy ciąg (x_n) w tej przestrzeni zawiera podciąg (x_{n_k}) zbieżny do punktu należącego do tej przestrzeni (tzn. X jest ciągowo zwarta).
3. Z każdego przeliczalnego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone
4. dla każdej funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ obraz $f(X)$ jest ograniczony

Definicja 21: Kostka Cantora

Weźmy przestrzeń top. $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d_{fd})$

$$d_{fd} = \begin{cases} 0 & a = b \\ \frac{1}{i}, i = \min(a_j \neq b_j) \end{cases}$$

Twierdzenie 8: Tw. Kuratowskiego

Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem przestrzeni topologicznej $(Y, \mathcal{T})$ i przestrzeni zwartej $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wykazać, że rzut zbioru domkniętego w iloczynie $X \times Y$ na X jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$.

Twierdzenie 9

$(X, \mathcal{T}_X)$ - zwarte
$(Y, \mathcal{T}_Y)$ - Hausdorffa.
$f : X \to Y$ odwzorowanie ciągłe.
Wówczas $f(X) \subset Y$ jest podzbiorem zwartym.

Twierdzenie 10

Produkt przestrzeni zwartej z topologią produktową jest zwarty.

Twierdzenie 11: Tw. Tichonowa

Przeliczalny produkt przestrzeni zwartej jest zwarty.

Definicja 22: Przestrzeń Doklejona

Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ prz. top.
$K \subset X$
$f : K \to Y$ - ciągłe
Na przestrzeni $X \sqcup Y$ wprowadzamy relację równoważności:

$$\underset{x \in K}{\forall} \begin{cases} x \sim f(x) \\ \text{pozostałe klasy abstakcji są jednoelementowe} \end{cases}$$

Przestrzeń $((X \sqcup Y_{/\sim}, \mathcal{T}_{X \sqcup Y_{/\sim}})$ nazywamy PRZESTRZENIĄ OTRZYMANĄ Z X PRZEZ DOKLEJENIE Y WZDŁUŻ f, ozn. $X \cup_f Y$.

Twierdzenie 12

Niech $X \subset \mathbb{R}^m, \qquad Y \subset \mathbb{R}^n$ zwarte
K- domknięty podzbiór w X, $f : K \to Y$.
Wówczas $X \cup Y$ zawiera się homeomorficznie w $\mathbb{R}^{n+m+1}$

3 Spójność

Definicja 23: Przestrzeń Spójna

$(X, \mathcal{T}_X)$ jest spójna jeśli nie można jej przedstawić w postaci $X = A \cup B$ gdzie

1. A, B otwarte w X
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \neq \emptyset \neq B$

Uwaga:
Równoważnie można zakładać spójność:

1. Nie istnieją domknięte A i B, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ $X = A \cup B$
2. Nie istnieje ciągła surjekcja $X \xrightarrow{\text{"}na\text{"}} \{0, 1\}$ (jedynymi funkcjami ciągłymi z X w $\{0, 1\}$ są funkcje stałe)

Własności:

1. Ciągłe przekształcenia zachowują spójność przestrzeni. (Jest to równoważne własności Darboux na $\mathbb{R}^n$)
2. Suma dwóch zbiorów spójnych o niepustym przekroju jest zbiorem spójnym.
3. Iloczyn kartezjański dowolnej rodziny przestrzeni spójnych jest spójny.
4.
5. Suma wszystkich podzbiorów spójnych jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 13

Niech $(X, \mathcal{T})$, $S \subset T \subset \overline{S}$ zbiór S jest spójny, to zbiór T też jest spójny. W szczególności, domknięcie zbioru spójnego jest spójne.

Definicja 24: Droga

Drogą w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ łączącą punkty a, b X nazywamy przekształcenie ciągłe $f : [0, 1] \to X$ takie, że $f(0) = a, f(1) = b$.

Definicja 25: Przestrzeń łukowo spójna

Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna, jeśli każdą parę punktów z X można połączyć drogą w X. **Własności:**

1. Otwarty łukowo spójny podzbiór przestrzeni euklidesowej jest łukowo spójny
2. Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

Definicja 26: Składowa przestrzeni topologicznej

Składową przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy zbiór spójny S w X taki, że żaden zbiór w X, zawierający w istotny sposób S, nie jest spójny.
Własności

1. Każda przestrzeń jest sumą rozłączną swoich składowych spójności.
2. Składowe spójne są domknięte w X

Definicja 27: Składowa Łukowej Spójności

Składową łukowej spójności przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny, w sensie inkluzji, łukowo spójny podzbiór X.
UWAGA: Składowe łukowej spójności nie muszą być domknięte

4 Zupełność

Definicja 28: Ciąg Cauchy'ego

Ciąg punktów (x_n) w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m\geqslant n_0}{\forall}\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Własności:

1. Każdy ciąg zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy'ego
2. Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony
3. Jeśli ciąg Cauchy'ego x_n ma punkt skupienia x_0, to $x_n \to x_0$.

Definicja 29: Zupełność

Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.
Własności:

1. Przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}^n, d_e)$ są zupełne.
2. Dowolny zbiór z topologią dyskretną jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny przez metrykę dyskretną.
3. Przestrzeń jest zupełna $\iff$ każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie. (Warunek Cantora)
4. W przestrzeni metrycznej zupełnej przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.(Tw. Baire'a)
5. Przestrzeń metryczna jest zupełna i całkowicie ograniczona $\iff$ przestrzeń metryczna jest zwarta.

Twierdzenie 14

Niech (X, d_x) będzie przestrzenią metryczną, $Y \subset X$ i niech d_y będzie obcięciem metryki d_y do Y . Wówczas:

1. jeśli przestrzeń (Y, d_y) jest zupełna, to zbiór Y jest domknięty w (X, d_x)

2. jeśli przestrzeń (X, d_x) jest zupełna i zbiór Y jest domknięty w (X, d_x), to przestrzeń (Y, d_y) jest zupełna.

Twierdzenie 15

Jeśli przestrzeń metryczna (Y, d) jest zupełna, to dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, przestrzeń funkcyjna $(C_b(X, Y), d_{\text{sup})}$ jest zupełna.

Definicja 30: Przekształcenie zwężające

Przekształcenie $T : X \to X$ przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie jest ZWĘŻAJĄCE, jeśli dla pewnej stałej $c \in [0, 1)$ zachodzi

$$d(T(x), T(y)) \leqslant c \cdot d(x, y), x, y \in X$$

Definicja 31: Punkt Stały

Mówimy, że x jest PUNKTEM STAŁYM PRZEKSZTAŁCENIA T, jeśli $T(x) = x$.

Twierdzenie 16

(X, d) - przestrzeń metryczna
$T : X \to X$ - przekształceniem zwężające
to T ma dokładnie jeden punkt stały.
Ponadto, dla dowolnego $a \in X$ ciąg iteracji $T(a), T(T(a)), ...$ zbiega do punktu stałego przekształcenia T

Definicja 32: Całkowita ograniczoność

Zbiór w przestrzeni metrycznej (X, d) jest CAŁKOWICIE OGRANICZONY, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ można go pokryć skończenie wieloma zbiorami o średnicach $\leqslant \varepsilon$.

Twierdzenie 17

Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta $\iff$ jest zupełna i całkowicie ograniczona.
UWAGA:
W $\mathbb{R}^n$
domknięttość $\iff$ zupełeność
ogrniczoność $\iff$ całkowita ograniczoność

Definicja 33: Rodzina Przekształceń Jednakowo Ciągłych

$X, \mathcal{T}$ - p. topologiczna
Rodzina przekształceń ciągłych $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest JEDNAKOWO CIĄGŁA, jeśli dla każdego $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$, $diam f(U) \leqslant \varepsilon$

Definicja 34: Rodzina ograniczona

$X, \mathcal{T}$ - p. topologiczna
Rodzina $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ jest OGRANICZONA, jeśli dla pewnego $r > 0$, obrazy $f(X)$ wszystkich przekształceń $f \in \mathcal{F}$ leżą w kuli $B(\mathbf{0}, r)$.

Twierdzenie 18

$(X, \mathcal{T})$ - przestrzeń zwarta
$\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ - rodzina jednakowo ciągła i ograniczona
Wówczas domknięcie $\mathcal{F}$ w przestrzeni metrycznej $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{\text{sup}})$ jest zwarte

5 Homotopie

Definicja 35: Przekształcenie Homotopijne

Przekształcenia ciągłe $f, g : X \to Y$ przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są homotopijne, jeśli istnieje przekształcenie ciągłe

$$H : X \times I \to Y - \text{homotopia łącząca } f \text{ z } g$$

takie, że $f(x) = H(x, 0)$ i $g(x) = H(x, 1)$, dla $x \in X$. Piszemy wówczas $f \sim g$

Definicja 36: Homotopijna Równoważność

Przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne jeśli istnieją ciągłe

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to X$$

t.że

$$g \circ f \sim id_X \qquad f \circ g \sim id_Y$$

Uwaga:
Jeśli X jest homeomorficzna z Y to X i Y są homotopijnie równoważne.

Definicja 37: Przestrzeń Ściągalna

Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ŚCIĄGALNA, jeśli identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym $\varepsilon_a(x) = a$, dla pewnego $a \in X$. **Uwaga:**
Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

Definicja 38: Pętle i Homotopie między pętlami

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionym punktem $a \in X$.

1. Pętlą w X zaczepioną w a nazywamy drogę $\alpha : I \to X$ taką, że $\alpha(0) = a = \alpha(1)$. Zbiór pętli w X zaczepionych w a oznaczamy symbolem $\Omega(X, a)$.

2. Homotopią między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(X, a)$ nazywamy homotopię $H : I \times I \to X$ łączącą α z β i spełniającą warunek $H(0, t) = a = H(1, t)$, dla $t \in I$.

Własności:

1. Jeśli X jest ściągalna i $a \in X$ to ${}^{\Omega(A,a)}\!/\!_{\sim}$ jest jednopunktowy

Twierdzenie 19

Niech $f : I^n \to S^1$ będzie przekształceniem ciągłym, gdzie S^1 oznacza okrąg jednostkowy, oraz $f(0) = 1$. Istnieje wówczas dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $\widetilde{f} : I^n \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \widetilde{f} = f$, oraz $\widetilde{f}(0) = 0$.

Twierdzenie 20

Pętle $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe stopnie, $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Definicja 39: Iloczyn Pętli

Iloczynem pętli $\alpha, \beta \in \Omega(X, a)$ nazywamy pętlę

1. $\alpha \star \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s-1), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$
2. Pętla odwrotna do $\alpha \in \Omega(X, a)$ jest określona formułą $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$, $s \in [0, 1]$.

Definicja 40: Grupą podstawową

Grupą podstawową $\pi_1(X, a)$ przestrzeni topologicznej (X, T) z wyróżnionym punktem a nazywamy zbiór klas abstrakcji $[\alpha] = \{\alpha' : \alpha' \in \Omega(X, a), \alpha \sim \alpha'\}$, $\alpha \in \Omega(X, a)$, z działaniem mnożenia $[\alpha][\beta] = [\alpha \star \beta]$, elementem jednostkowym $[\varepsilon_a]$ i operacją odwracania $[\alpha]^{-1} = [\alpha]$.

Twierdzenie 21

Jeśli przestrzeń (X, T) jest łukowo spójna, to dla dowolnych punktów $a, b \in X$, grupy $\pi_1(X, a)$ i $\pi_1(X, b)$ są izomorficzne.