Funkcje Analityczne

na podstawie wykładu prof. Krzysztof Oleszkiewisz

author: Michał Posiadała
przy wykorzystaniu nieocenionych notatek
dr Wojciecha Politarczyka, Marty Kołodziejczyk oraz Małgorzaty Ciołek

Znicz pamięci [*] dla wszystkich osób które nie zdały FANu w 2025 roku.

Data ostatniej aktualizacji: 18 lutego 2025

1 Podstawowe informacje na liczbach zespolonych

Twierdzenie 1.1: de Movire

$$\underset{\substack{\alpha\in\mathbb{R}\\ n\in\mathbb{N}}}{\forall} (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

Wniosek 1.1: Pierwiastki z 1

Dla $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ niech

$$w_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Tak więc w_n^k są więc pierwiastkami stopnia n z 1.

2 Ciągi i szeregi zespolone

Twierdzenie 2.1: Nierówność Cauchy'ego

Niech z_i, w_i - ciągi liczb zespolonych. Wtedy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)^{\frac{1}{2}}$$

Twierdzenie 2.2: Kryteria Porównawcze

Kryterium Weierstrassa
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ - zbieżny szereg o wyrazach nieujemnych. Wtedy jeśli prawie wszystkie wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ spełniają nierówność

$$|z_n| \leqslant A_n$$

wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Kryterium d'Alamberta
Jeśli $\limsup \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, a jeśli $\liminf \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Kryterium Cauchy'ego
Jeśli $\gamma = \limsup \sqrt[n]{z_n} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwględny, a w przypadku $\gamma > 1$ jest on rozbieżny.

Kryterium Raabego
Jeżeli $\limsup n \left(\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) < -1$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Twierdzenie 2.3: Kryteria Zbieżności jednostajnej

Rozważmy szereg funkcyjny,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

gdzie wszystkie funkcje f_n są określone na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. (**Kryterium Cauchy'ego**) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $D \subset \Omega$, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N > 0$ takie, że dla $n > m > N$ zachodzi

$$\sup_{z \in D} |f_m(z) + f_{m+1}(z) + \cdots + f_n(z)| < \epsilon.$$

2. (**Kryterium Weierstrassa**) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $D \subset \Omega$, jeśli istnieje ciąg liczb nieujemnych $(A_n)_{n \geqslant 1}$ takich, że dla prawie wszystkich n mamy

$$\sup_{z \in D} |f_n(z)| \leqslant A_n,$$

oraz szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny. Dodatkowo, jeśli $f_1, f_2, ...$ są ciągłe, to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ też jest funkcją ciągłą.

3. (**Kryterium Dirichleta**) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $D \subset \Omega$, jeśli współczynniki a_n są liczbami dodatnimi dążącymi do zera oraz istnieje $M > 0$ takie, że dla prawie wszystkich $n > 0$ zachodzi

$$\sup_{z \in D} \sum_{k=1}^{n} f_k(z) < M.$$

Definicja 2.1: Promień zbieżności

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty]$$

Twierdzenie 2.4: Abel - Cauchy - Hadamard

Szereg potęgowy jest zbieżny wewnątrz promienia zbieżności i rozbieżny na zewnątrz.

Twierdzenie 2.5: Abela

Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ jest taki sam jak promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

2. Funkcja $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ zadana wzorem

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

jest różniczkowalna w sensie zespolonym i

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Inaczej: *Promień zbieżność pochodnej szeregu potęgowego jest taki sam jak funkcji pierwotnej*

Wniosek 2.1

Szereg potęgowy o środku $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz dodatnim promieniu zbieżności R jest swoim własnym szeregiem Taylora na $D(z_0, R)$

Twierdzenie 2.6: O zbieżności w kącie

$\sum c_n(z-z_0)^n$ - szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności R. Załóżmy, że dla pewnej liczby zespolonej $w \in \partial D(z_0, R)$, tzn. takiej, że $|z_0 - w| = R$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(w-z_0)^n$ jest zbieżny.
Wtedy

$$\lim_{t \in A} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w-z_0)^n$$

3 Różniczkowalność w sensie zespolonym

Definicja 3.1: Różniczkowalność zespolona

Niech f będzie funkcją zespoloną określoną na zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{C}$. Funkcja f nazywamy RÓŻNICZKOWALNĄ W SENSIE ZESPOLONYM w punkcie $z_0 \in G$, jeśli granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

istnieje i jest skończona. Granicę tę nazywamy POCHODNĄ FUNKCJI f w punkcie z_0 i oznaczamy $f'(z_0)$

Definicja 3.2: Równania Cauchy'ego-Riemanna

Mając funkcją
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$$
wtedy definiujemy RÓWNANIA CAUCHY'EGO-RIEMANNA jako:
$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$
$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Twierdzenie 3.1

NWSR

- Funkcja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym (jest holomorficzna)
- Pochodne cząstkowe u i v istnieją, są ciągłe i spełniają równania CR

Definicja 3.3: Holomorficzność

Mówimy, że funkcja jest HOLOMORFICZNA na obszarze Ω, jeśli jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie tego obszaru Ω.

Twierdzenie 3.2

Każda funkcja f holomorficzna na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ ma pochodną $f^{(n)}$ dowolnego rzędu $n \in \mathbb{N}$ na tym obszarze.

Definicja 3.4: Analityczność

Mówimy, że funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest ANALITYCZNA na zbiorze otwartym U, jeśli
$$\underset{z \in U}{\forall} \underset{r_z}{\exists} D(z, r_z) \subseteq U$$
oraz $f\Big|_{D(z,r_z)}$ rozwija się w szereg potęgowy o środku z i promieniu r_z

Fakt 3.1

Każda funkcja analityczna na U jest jednocześnie holomorficzna na U.

Definicja 3.5: Funkcje harmoniczne

Jeśli U - otwarty oraz $u : U \to \mathbb{R}^n$, wówczas mówimy, że
$$u \text{ jest FUNKCJĄ HARMONICZNĄ} \iff \sum_{k=1}^{n} u_{kk} = 0$$

Twierdzenie 3.3

Jeśli $f : \Omega \to \mathbb{C}$ posiada pochodną zespoloną w każdym punkcie obszaru Ω, wówczas funkcje $\mathrm{Re}(f)$ oraz $\mathrm{Im}(f)$ są harmoniczne.

4 Własności funkcji holomorficznych

Definicja 4.1: Funkcja wykładnicza

Dla $z \in \mathbb{C}$ FUNKCJĘ WYKŁADNICZĄ definiujemy przy pomocy następującego szeregu potęgowego:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

który jest niemal jednostajnie zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej.
Własności:

1. Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, zachodzi $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.
2. Równość $\exp(z) = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 2k\pi i$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji, funkcja exp jest okresowa o okresie $2\pi i$.
3. Równanie $\exp(z) = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}$.
4. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$, $\mathrm{Arg}(\exp(z)) = \mathrm{Im}(z)$.
5. Dla wszystkich $w \in \mathbb{C}$ zachodzi $(\exp)' = \exp$.

Definicja 4.2: Ciągła gałąź argumentu na zbiorze

Jeśli $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to powiemy, że funkcje $f : U \to \mathbb{R}$ jest CIĄGŁĄ GAŁĘZIĄ ARGUMENTU NA ZBIORZE U jeśli:

1. f jest ciągła na U
2. $\underset{z \in \mathbb{C}}{\forall} f(z) \in \arg(z)$

Definicja 4.3: Ciągła gałąź logarytmu

Jeśli $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to powiemy, że funkcje $g : U \to \mathbb{R}$ jest CIĄGŁĄ GAŁĘZIĄ LOGARYTMU w na zbiorze U jeśli:

1. g jest ciągła na U
2. $\underset{z \in \mathbb{C}}{\forall} e^{g(z)} = z$

Fakt 4.1

Załóżmy, że $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$

1. Wówczas jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ jest ciągłą gałęzią argumentu na U, to funkcja $g : U \to \mathbb{C}$ zdefiniowana wzorem
$$g(z) = \log|z| + if(z)$$
jest ciągłą gałęzią logarytmu naturalnego na U
2. Jeśli zaś $g : U \to \mathbb{C}$ jest ciągłą gałęzią logarytmu naturalnego na U, to $f : U \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $f(z) = \log g(z)$ jest ciągłą gałęzią argumentu na U.

Uwaga:
Jeśli $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest zbiorem spójnym oraz $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ są ciągłymi gałęziami argumentu na U, to

$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists} \underset{z\in U}{\forall} f_1(z) = 2k\pi + f_2$$

Fakt 4.2

Nie istnieje ciągła gałąź argumentu na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definicja 4.4

$U = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, U- spójny. Jeśli $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą gałęzią argumentu na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ to $f\Big|_U : U \to \mathbb{R}$ jest ciągłą gałęzią argumentu na U.

Definicja 4.5: Argument Główny

Argument Główny $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiujemy wzorem $\{\operatorname{Arg}(z)\} = \arg(z) \cap [0, 2\pi)$

Definicja 4.6: Gałąź główna logarytmu

Główną gałęzią logarytmu naturalnego na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy funkcję $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem

$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

na ogół nie jest prawdą $\log(uw) = \log u + \log w$

5 Własności funkcji Log i exp

Definicja 5.1: Funkcja potęgowa

Załóżmy, że log jest gałęzią logarytmu naturalnego na niepustym zbiorze $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas dla $w \in \mathbb{C}$ możemy zdefiniować ciągłą gałąź funkcji potęgowej o wykładniku w na zbiorze U dana wzorem

$$z^w = e^{w \cdot \log z}$$

$$z^{u+w} = z^u \cdot z^w$$

Definicja 5.2: Pierwiastek n-tego stopnia

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log z}{n}}$$

Uwaga:
Jeśli $w \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem n-tego stopnia z jedynki, to

$$f(z) = wz^{\frac{1}{n}}$$

również jest ciągłą gałęzią pierwiastka n-tego stopnia na U.
Własności:

1. Jeśli $\mu \in \mathbb{Z}$, wówczas funkcja $z \mapsto z^\mu$ jest jednoznaczna na $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
2. Jeśli $\mu = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, to funkcja wieloznaczna $z \mapsto z^\mu$ ma

$\log_{(k)} z = \log|z| + \operatorname{Arg} z + 2k\pi$

dokładnie n gałęzi:

$$\mathrm{Pow}_k(z,\mu) = \exp\left(\frac{m}{n}\log_{(k)}(z)\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

3. Jeśli $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, to funkcja wieloznaczna $z \mapsto z^\mu$ ma nieskończenie wiele gałęzi:

$$\mathrm{Pow}_k(z,\mu) = |z|^\mu \cdot \exp\left(\mu \cdot \log_{(k)}(z)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Fakt 5.1

Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, f jest ciągła w z_0, $g :\to \mathbb{C}$ jest różniczkowalna w z_0 przy czym $g'(f(z_0)) \neq 0$. Jeśli $g(f(z)) = z$ dla każdego $z \in U$, to f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z oraz

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}$$

W pewnym sensie funkcja f jest jednostronnie odwrotna do funkcji g

Fakt 5.2

Niech:

- $\emptyset \neq U, V \subseteq \mathbb{C}$ - otwarte
- $f : U \to V$ - ciągła
- $g : V \to \mathbb{C}$ - holomorficzna na V
- $\underset{z\in U}{\forall}\, g(f(z)) = z$ oraz $\underset{v\in V}{\forall}\, g'(v) \neq 0$

Wtedy przy powyższych założeniach f jest holomorficzna na zbiorze U oraz

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$$

Wniosek 5.1

Załóżmy, że $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a ponadto log jest ciągłą gałęzią logarytmu na U. Wówczas log jest funkcją holomorficzną na U a ponadto

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z} \text{ na } U$$

6 Homografia

Stwierdzenie 6.1

a) Przekształcenie $z \mapsto \overline{z}$ jest symetrią prostopadłą płaszczyzny względem osi rzeczywistej.

b) Gdy $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, to przekształcenie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem $f(z) = az + b$ jest podobieństwem. Ściślej biorąc, jest ono:

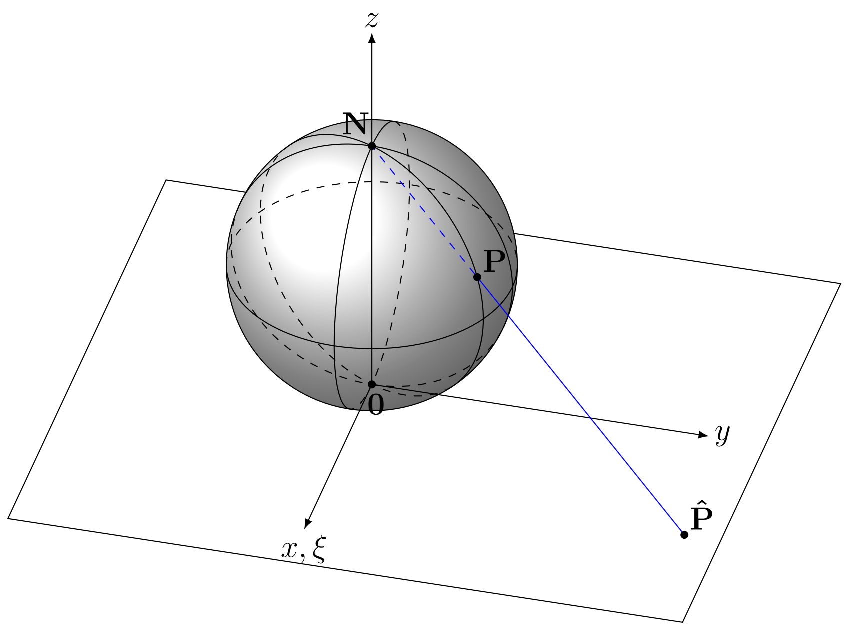
   i) przesunięciem, gdy $a = 1$,
   ii) obrotem wokół 0 o kąt $\arg(a)$, gdy $|a| = 1$ i $b = 0$,
   iii) jednokładnością o środku w 0 i skali $|a|$, gdy $a \in \mathbb{R}$ i $b = 0$,
   iv) złożeniem obrotu wokół punktu $z_0 = \frac{b}{1-a}$ o kąt $\arg(a)$ i jednokładności o środku w tym punkcie i skali $|a|$, gdy $a \neq 1$.

Definicja 6.1: Konforemność

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^2$ nazwiemy KONFOREMNYM, jeśli jest ono homeomorfizmem klasy C^1 i pochodna $df(p)$ jest podobieństwem, dla każdego $p \in U$.

Definicja 6.2: Rzut Stereograficzny

Symbolem $\mathbb{S}^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\right\}$ SFERA RIEMANNA. Natomiast punkt $N = (0,0,1)$ nazwiemy BIEGUNEM PÓŁNOCNYM.



Jeśli P jest dowolnym punktem na $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, a l to półprosta o początku N i przechodząca przez P, to punkt

$$(x,y,0) = l \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

nazywamy RZUTEM STEREOGRAFICZNY punktu P.

Definicja 6.3: Zbieżność w $\mathbb{C}$ a zbieżność w $\mathbb{S}^2$

Załóżmy, że $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, dla pewnego $R > 0$.

1. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$. Mówimy, że $\lim_{z\to\infty} f(z) = z_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, R_0 > R \text{ takie, że } |z| > R_0 \implies |f(z) - z_0| < \epsilon.$$

2. Podobnie definiujemy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, jeśli

$$\forall\, R' > 0\ \exists\, R_0 > R \text{ takie, że } |z| > R_0 \implies |f(z)| > R'.$$

3. Dla $z_0 \in \Omega$ definiujemy $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ w następujący sposób:

$$\forall\, R' > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ takie, że } |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > R'.$$

Fakt 6.1

Na ogół funkcja ciągła na $\mathbb{C}$ nie przedłuża się do funkcji ciągłej na $\overline{\mathbb{C}}$.

Fakt 6.2

Jeśli $w \in \mathbb{C}[z]$ to w można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\overline{\mathbb{C}}$. Kładziemy:

- $w(\infty) = \infty$ gdy $\deg w \geqslant 1$
- $w(\infty) = w(0)$ jeśli w jest wielomianem stałym

Uwaga: Każdą funkcje wymierną również da się przedłużyć na funkcję stałą w $\overline{\mathbb{C}}$

Definicja 6.4: Homografia

Jeśli $ad \neq cb$ to funkcja $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ określoną wzorem

$$h(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq -\frac{1}{c} \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \text{ (Biegun Homografii)} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases}$$

to nazywamy ją HOMOGRAFIĄ o macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Uwaga: *macierz homografii nie jest jednoznaczna*

Własności:

1. Homografie tworzą grupę przekształceń
2. Każda homografia jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości w trzech punktach.
3. Każda homografia jest złożeniem translacji, podobieństwa i inwersji.
4. Każda homografia przekształca okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.
5. **(Zasada symetrii)** Jeśli punkty z i z^* są symetryczne względem okręgu uogólnionego C oraz f jest homografią, wówczas $f(z)$ i $f(z^*)$ są symetryczne względem $f(C)$.

Definicja 6.5: Okrąg uogólniony

Powiemy, że podzbiór $\mathbb{C}$ jest okręgiem uogólnionym, jeśli jest albo okręgiem w $\mathbb{C}$ albo jest zbiorem postaci $l \cup \{+\infty\}$

Twierdzenie 6.1

Jeśli L jest prostą na płaszczyźnie $\mathbb{C}$, to dla dowolnej homografii h, zbiór $h(L \cup \{\infty\})$ jest prostą (wraz z punktem ∞) lub okręgiem. Co więcej, $h(L)$ jest okęgiem wtedy i tylko wtedy, gdy $c \neq 0$ i $-\frac{d}{c} \notin L$.

Definicja 6.6: Inwersja Analityczna

Jeśli

$$h(z) = z^{-1} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$$

to h nazwiemy INWERSJĄ ANALITYCZNĄ WZGLĘDEM OKRĘGU JEDNOSTKOWEGO

7 Całka z funkcji zespolonej

Definicja 7.1: Funkcja pierwotna

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem oraz niech $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ będą funkcjami ciągłymi. Mówimy, że F jest FUNKCJĄ PIERWOTNĄ f, jeśli dla każdego $z \in \Omega$ istnieje pochodna zespolona $F'(z)$ oraz $F'(z) = f(z)$.

Twierdzenie 7.1

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem oraz niech f będzie funkcją ciągłą na Ω.
NWSR:

1. Funkcja f posiada funkcję pierwotną na Ω.
2. Dla dowolnej drogi γ w Ω mamy $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Przykład 7.1: Egzamin 2025

Zadanie 1. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Proszę wyznaczyć zbiór wszystkich liczb zespolonych w o tej własności, że funkcja $\varphi_w : V \to \mathbb{C}$ określoną wzorem $\varphi_w(z) = (1 + z)^{-1}e^{wz} + (1 - z)^{-1}$ ma na zbiorze V funkcję pierwotną.

Rozwiązanie Zadania 1. Oznaczmy $f(z) = 1, \quad g(z) = e^{wz}$. Zauważmy, że są one holomorficzne na całym obszarze V. Oznaczmy $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = 2e^{it}$. Wtedy f posiada funkcję pierwotną na V gdy całka po γ będzie równa 0, czyli gdy:

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1} - \frac{1}{z-1}\,dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1}\,dz - \int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = 0$$

Korzystamy ze wzoru Cauchy'ego:

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1}\,dz - \int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = \frac{0!}{2\pi i}\left(f(1) - g(-1)\right) = \frac{1}{2\pi i}(e^{-w} - 1)$$

Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i}(e^{-w} - 1) = 0$$

$$e^{-w} = 1$$

$$e^{-w} = e^0$$

Korzystając z własności liczb zespolonych widzimy, że $w = \{z \in \mathbb{C} : z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$

Twierdzenie 7.2

Jeśli Ω jest gwiaździste, oraz f jest funkcją ciągłą na Ω taką, że dla dowolnego trójkąta $\Delta \subset \Omega$ zachodzi $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, to f ma funkcję pierwotną na Ω.

Twierdzenie 7.3

Jeśli Ω jest gwiaździsty, oraz f jest funkcją ciągłą na Ω taką, że dla dowolnego trójkąta $\Delta \subset \Omega$ zachodzi $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, to f ma funkcję pierwotną na Ω.

Lemat 7.1: Lemat Goursata

Jeśli Ω jest obszarem oraz f jest holomorficzna na Ω, wówczas, dla dowolnego trójkąta

$\Delta \subset \Omega$ mamy

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Wniosek 7.1: Twierdzenie Cauchy'ego

Jeśli Ω jest gwiaździstym obszarem i funkcja f jest holomorficzna na Ω, to dla każdej drogi zamkniętej γ w Ω zachodzi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Twierdzenie 7.4: Uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego

Niech Ω będzie obszarem oraz niech f będzie funkcją holomorficzną na Ω. Załóżmy, że $\Omega_1 \subset \Omega$ jest obszarem takim, że:

1. $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$,
2. istnieje droga zamknięta $\gamma : [a,b] \to \Omega$ taka, że $\gamma([a,b]) = \partial\Omega_1$ oraz odwzorowanie $\gamma : S(0,1) \to \partial\Omega_1$, $\gamma(e^{2\pi it}) = \gamma((b-a)t+a)$, gdzie $t \in [0,1]$, jest homeomorfizmem zachowującym orientację,
3. dla dowolnej funkcji holomorficznej $h : \Omega \to \mathbb{C}$ mamy
$$\int_\gamma h(z)\,dz = 0.$$

Wówczas, dla dowolnego $z \in \Omega_1$ oraz dowolnego całkowitego $n \geqslant 0$ mamy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

Definicja 7.2: Całka zespolona

$\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$
ϕ - ciągła poza skończoną liczbą punktów

$$\phi = \mathrm{Re}(\varphi) + i\,\mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \mathrm{Re}\int_a^b \varphi(t)\,dt + i\,\mathrm{Im}\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

Własności:

1. $$\int_a^b \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\,dt = \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + \int_a^b \varphi_2(t)\,dt$$
2. $s \in (a,b)$
$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^s \varphi(t)\,dt + \int_s^b \varphi(t)\,dt$$
3. $z \in \mathbb{C}$
$$\int_a^b z\varphi(t)\,dt = z\int_a^b \varphi(t)\,dt$$
4. $$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

Definicja 7.3: Ścieżka

ŚCIEŻKĄ nazywamy dowolną funkcję ciągłą $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

1. Jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$ nazywamy ją PĘTLĄ
2. Ścieżkę nazywamy GŁADKĄ jeśli $\mathrm{Re}(\gamma)$ i $\mathrm{Im}(\gamma)$ są klasy C^1. Wtedy

$$\gamma'(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))' + i\,\mathrm{Im}(\gamma(t))' \qquad |\gamma'(t)| \neq 0$$

3. Ścieżka jest KAWAŁKAMI GŁADKA jeśli $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ t. że $\gamma\Big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ jest gładka

Stwierdzenie 7.1

Niech:
$\tau : [c, d] \to [a, b]$ - homeomorfizm kawałkami gładki
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest drogą
$f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ - ciągła
$\delta = \gamma \circ \tau$ oraz $\gamma^* = \delta^*$
Wówczas, jeśli τ zachowuje orientację, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$$

Zaś jeśli *tau* nie zachowuje orientacji, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\delta f(z)\,dz$$

*Gwiazdką * będziemy oznaczać obrazy*

Czyli całka jest niezależna od drogi, zdziwienie dla nikogo

Stwierdzenie 7.2

Jeśli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\lambda : [c, d] \to \mathbb{C}$ są drogami, t. że ich obrazy są równe oraz γ i τ są różnowartościowe to zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- $\lambda(c) = \gamma(a)$ i $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\lambda f(z)\,dz$
- $\lambda(c) = \gamma(b)$ i $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\lambda f(z)\,dz$

Wniosek 7.1

$f_n : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ - obszar. f_n ciągłe i jednostajnie zbieżne do $f : U \to \mathbb{C}$ to

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow{n\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz$$

Jednostajnie zbieżne *- zbieżne na każdym zbiorze zwartym*

Definicja 7.4

1. ŁUK KAWAŁKAMI GŁADKI L różnowartościowej drogi. Końce L to punkty $x \in L$ t. że $L \setminus \{x\}$ jest spójny
2. KONTUREM $\Lambda = (L_1, L_2, ..., L_k)$ nazywamy skończony ciąg zorientowanych łuków takich, że koniec L_k jest początkiem L_{k+1}
3. KONTUR PROSTY to taki kontur którego parametryzacja $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest różnowartościowa na $(a, b]$ i $[a, b)$.

Dla konturu Λ definiujemy obraz

$$\Lambda^* = \bigcup_{i=1}^{k} L_i^* \leftarrow \text{Nośnik Konturu}$$

Jeśli $f : \Lambda^* \to \mathbb{C}$ ciągła to

$$\int_\Lambda f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} f(z)\,dz$$

4. Dla $-\Lambda = (L_1, L_2, ..., L_i)$ definiujemy KONTUR PRZECIWNY

$$-\Lambda = (K_1, K_2, ..., K_k) \text{ t. że } K_i^* = L_{k-i+1}^*$$

$$\int_{-\Lambda} f(z)\,dz = -\int_\Lambda f(z)\,dz$$

5. Zdefiniujmy SUMĘ KONTURÓW jako

$$\Lambda_1 = (L_1^1, L_2^1, ..., L_k^1) \qquad \Lambda_2 = (L_1^2, L_2^2, ..., L_m^2)$$

Takie że koniec Λ_1 = początek Λ_2

$$\Lambda_1 \# \Lambda_2 = (L_1^1, L_2^1, ..., L_k^1, L_1^2, L_2^2, ..., L_m^2)$$

Wtedy

$$\int_{\Lambda_1 \# \Lambda_2} f(z) = \int_{\Lambda_1} f(z)\,dz + \int_{\Lambda_2} f(z)\,dz$$

Wniosek 7.2

Jeśli $U \subset \mathbb{C}$ - otwarty i gwiaździsty,a $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, to dla każdej drogi zamkniętej $\gamma : [a, b] \to U$ $(\gamma(a) = \gamma(b))$, $\gamma-$ ciągła, kawałkami C^1 mamy

$$\int_\gamma f = 0$$

Lemat 7.2

Jeśli U jest obszarem,a $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorfizmem oraz taka, że $\forall_{z\in U}\, f'(z) = 0$ to f jest stała.

Wniosek 7.3

Jeśli $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym,a $f : U \to \mathbb{C}$.
NWSR

1. Jest holomorficzna i taka, że $\forall_{z\in U}\, f'(z) = 0$
2. f jest stała na każdej składowej spójności zbioru U

Fakt 7.1

Jeśli $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$ oraz $f : U \to \mathbb{C}$ jest ciągła, a F jest funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Definicja 7.5: Zbiór gwieździsty

Powiemy, że U jest GWIEŹDZISTY (względem punktu z_0), jeśli $\underset{z \in U}{\forall} [z_0, z] \subset U$

Twierdzenie 7.5: Goursata

Jeśli $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i gwiaździsty, a funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest ciągła to f to NWSR

1. f ma funkcję pierwotną na U
2. dla każdego trójkąta Δ z wnętrzem

$$\int\limits_{\partial \Delta} f = 0$$

Twierdzenie 7.6: Weierstrassa)

Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $f_n \in H(U)$ dla $n \geqslant 1$.

Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to funkcja ta jest holomorficzna, zaś ciąg (f'_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f'.

8 Wnioski z Lematu Goursata

Wniosek 8.1

Jeśli $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i gwiaździsty, a funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, to dla każdej pętli γ mamy

$$\int\limits_{\gamma} f = 0$$

Fakt 8.1

Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ - otwarty. Jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ ma na U funkcję pierwotną to f jest holomorficzna.

Twierdzenie 8.1: Morery

Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ - otwarty i $f : U \to \mathbb{C}$ - ciągła.
NWSR

1. f jest holomorficzna na U
2. dla każdego trójkąta $\Delta \subseteq U$ z wnętrzem

$$\int\limits_{\partial \Delta} f = 0$$

Wniosek 8.2

Przy powyższych założeniach

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw = \frac{1}{k} \int_\gamma \frac{f'(w)}{(w-z)^k}\, dw$$

Twierdzenie 8.2: Wzór Całkowy Cauchy'ego

Niech Ω - obszar oraz niech f bęzie funkcją holomorficzną na Ω. Załóżmy, że γ jest cyklem w Ω. Wówczas dla dowolnego $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f^{(n)}(z)\text{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

Przykład 8.1: 2022

Zadanie 2. Znajdź część rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_{\partial D} \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{z(z-i)^2}\, dz,$$

gdzie:

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$,

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Uwaga: W powyższej całce log oznacza logarytm główny, czyli funkcję holomorficzną

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C},$$

która jest gałęzią logarytmu zespolonego taką, że $\log(1) = 0$.

Rozwiązanie Zadania 2. Zauważmy najpierw, że funkcja $\log\left(z+\sqrt{3}\right)$ jest holomorficzna na zbiorze $\Omega = \mathbb{C} \setminus L$, gdzie $L = (-\infty, -\sqrt{3}]$.

(a) Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Zauważmy, że funkcja $f(z) = \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{(z-i)^2}$ jest holomorficzna na D.

Dodatkowo, $\mathrm{Ind}_{\partial D}(0) = 1$. Zatem, z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy:

$$I = \int_{\partial D} \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{z(z-i)^2}\, dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\, dz = f(0) = 2\pi i \frac{\log\left(\sqrt{3}\right)}{(-i)^2} = -2\pi i \log\left(\sqrt{3}\right).$$

Zatem:

$$\mathrm{Re}(I) = 0, \quad \mathrm{Im}(I) = -2\pi \log\left(\sqrt{3}\right).$$

(b) Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Wówczas funkcja $g(z) = \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{z}$ jest holomorficzna na D oraz $\mathrm{Ind}_{\partial D}(i) = 1$. Zatem, na mocy twierdzenia Cauchy'ego, otrzymujemy:

$$I = \int_{\partial D} \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{z(z-i)^2}\, dz = \int_{\partial D} \frac{g(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i g'(i).$$

Mamy:

$$g'(z) = \frac{1}{z(z+\sqrt{3})} - \frac{\log\left(z+\sqrt{3}\right)}{z^2},$$

zatem:

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{i(i+\sqrt{3})} - \frac{\log\left(i+\sqrt{3}\right)}{i} \right) = 2\pi \frac{\sqrt{3}-i}{2} - 2\pi \log\left(i+\sqrt{3}\right).$$

Obliczamy:

$$\frac{2\pi}{i+\sqrt{3}} = 2\pi \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \pi(\sqrt{3}-i),$$

oraz:

$$\log\left(i+\sqrt{3}\right) = \log\left(|i+\sqrt{3}|\right) + i\,\mathrm{Arg}(i+\sqrt{3}) = \log(2) + \frac{\pi i}{6},$$

gdzie Arg jest argumentem głównym, a log oznacza logarytm naturalny. Zatem:

$$\mathrm{Re}(I) = \pi(\sqrt{3} + 2\log(2)), \quad \mathrm{Im}(I) = -\pi + \frac{\pi}{6}.$$

Twierdzenie 8.3: Nierówność Cauchy'ego

Jeśli $f \in \mathrm{H}(D(z_0, r))$, f ciągłą na $\overline{D}(z_0, r)$ i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_0)^n$ dla $z \in D(z_0, r)$ to

$$|u_n| \leqslant \frac{\sup\limits_{w \in \partial D(z_0, r)} |f(w)|}{r^n}$$

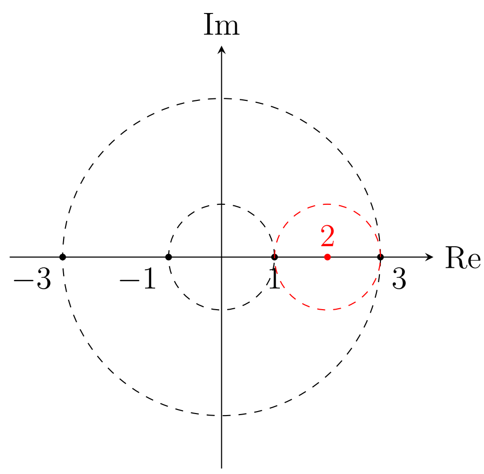
równoważnie:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} |f(w)|$$

Przykład 8.2: Egzamin 2025

Zadanie 3. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a więc $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$, a także niech $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Załóżmy, że funkcja $f : W \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna (na zbiorze W), a jej obraz $f(W)$ zawiera się w dysku $\mathbb{D}$. Proszę udowodnić, że $f'(2) \in \mathbb{D}$.

Rozwiązanie Zadania 3. Rozważmy zbiór $W' = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$ (zaznaczony na rysunku na czerwono):



f jest oczywiście holomorficzna na W', da się ją więc przedstawić jako

$$\forall_{z \in W'} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 2)^n$$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-2) + c_2(z-2)^2 + \ldots$$

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-2) + \ldots$$

$$f'(2) = c_1$$

Korzystamy z nierówności Cauchy'ego

$$|f'(2)| = |c_1| \leqslant \frac{\sup\limits_{z \in \partial D(2,1)} |f(z)|}{1^2} \leqslant$$

Wiemy że obraz $f(z)$ zawiera się w dysku jednostkowym, więc

$$\leqslant \frac{1}{1} = 1$$

Należy jeszcze udowodnić, że $|f'(2)| \neq 1$.

Trudniejsza część tego dowodu jest autorstwa dr Politarczyka

Załóżmy przeciwnie, że $|f'(2)| = 1$. Dodatkowo, zauważmy że jeśli $f(z)$ jest holomorficzna, to $f'(z)$ również. Zauważmy więc, że jeśli

Definicja 8.1: Funkcja Całkowita

Funkcję holomorficzną określoną na całej płaszczyźnie zespolonej, nazywamy FUNKCJĄ CAŁKOWITĄ.

Twierdzenie 8.4: Liouville'a

Każda ograniczona funkcja całkowita jest stała

Wniosek 8.3

Jeśli f jest całkowita, to albo f jest stała albo $f(\mathbb{C})$ jest gęstym podzbiorem $\mathbb{C}$

Przykład 8.3

Zadanie 4. Proszę wyznaczyć wszystkie funkcje całkowite f, które spełniają warunki:

- $f(0) = 0$, $f(1) = 2024$,
- dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ spełniona jest nierówność $|f(z) - f(w)| \geqslant |z - w|$.

Rozwiązanie Zadania 4. Zauważmy, że drugi warunek mówi nam, że dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \geqslant 1.$$

W szczególności, $f'(z_0) \neq 0$. Zatem, funkcja

$$g(z) = \frac{1}{f'(z)}$$

jest całkowita oraz $|g(z)| \leqslant 1$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Na mocy twierdzenia Liouville'a funkcja g musi być stała. Stąd wynika, że funkcja f' jest stała, a zatem

$$f(z) = Az + B,$$

dla pewnych $A, B \in \mathbb{C}$.

Podstawiając wartości z pierwszego warunku, otrzymujemy $A = 2024$ oraz $B = 0$.

Zatem, jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja

$$f(z) = 2024 \cdot z.$$

Wniosek 8.4: Zasada izolowanych zer

Niezdegenerowane zero - o skończonej krotności

Gdy $f \in H(U)$, gdzie U jest obszarem, to równoważne są warunki:

(a) zbiór $f^{-1}(0)$ zer funkcji f ma w U punkt skupienia;

(b) istnieje punkt $p \in U$ taki, że $f^{(n)}(p) = 0$ dla $n = 0, 1, \ldots$;

(c) $f = 0$.

Inaczej: Niezdegenerowane zera funkcji holomorficznych są izolowane.

Twierdzenie 8.5

Załóżmy, że U- obszar, a $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna. Wówczas dla zachodzi jedna z dwóch możliwości

1. wówczas $\forall_{z\in U}\, f(z) = 0$
2. f ma wyłącznie izolowane zera

Twierdzenie 8.6: Zasada identyczności

Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $f, g : U \to \mathbb{C}$. Wtedy jeśli istnieje taki zbiór $A \subseteq U$, że A ma punkt skupienia należący do U oraz taki że $\forall_{z\in A}\, f(z) = g(z)$ to wtedy $\forall_{z\in U}\, f(z) = g(z)$

Przykład 8.4: Kolokwium 2022

Zadanie 5. Rozważmy obszar

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1/2\}.$$

Załóżmy, że $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ oraz dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$f\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{k^3}{(k-1)^3}.$$

Oblicz $f^{(2022)}(1)$.

Rozwiązanie Zadania 5. Podstawmy $z = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$, wówczas $k = \frac{1}{z-1}$. Zatem,

$$f(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{\left(\frac{1}{z-1} - 1\right)^3}. = \frac{1}{(z-2)^3}.$$

Zatem funkcja f zgadza się z funkcją $\frac{1}{(z-2)^3}$ dla $z = 1 + \frac{1}{k}$, dla k dostatecznie dużych. Na mocy zasady identyczności mamy $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$.

Aby policzyć $f^{(2022)}(1)$, zauważmy, że dla $g(z) = \frac{1}{z-2}$ mamy

$$g''(z) = \frac{2}{(z-2)^3} = 2f(z).$$

Rozwijając funkcję g w punkcie $z_0 = 1$, otrzymujemy szereg potęgowy, który jest zbieżny na Ω:

$$g(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k.$$

Różniczkując wyraz po wyrazie, mamy:

$$g''(z) = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)(z-1)^k.$$

Zatem:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)(z-1)^k.$$

Stąd:

$$f^{(2022)}(1) = -2022! \cdot \frac{2024 \cdot 2023}{2}.$$

Wniosek 8.5

Równoważne są warunki:

(a) funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu p;

Uwaga: *nie było tego na wykładzie, jest to fragment ze skryptu Torunczyka*

(b) p jest jednokrotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$;

(c) $f'(p) \neq 0$.

Twierdzenie 8.7: Zasada zachowania obszaru

Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, to zbiór $f(U)$ jest obszarem, zaś przekształcenie f jest otwarte.

Twierdzenie 8.8: Zasada maksimum

Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, funkcja $|f|$ nie przyjmuje maksimum w U, zaś minimum przyjmuje w swych zerach (jeśli je ma).

Twierdzenie 8.9: Zasada Wartości Średniej

Jeśli $f : \overline{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ ciągła i f holomorficzna na $D(z_0, R)$ to

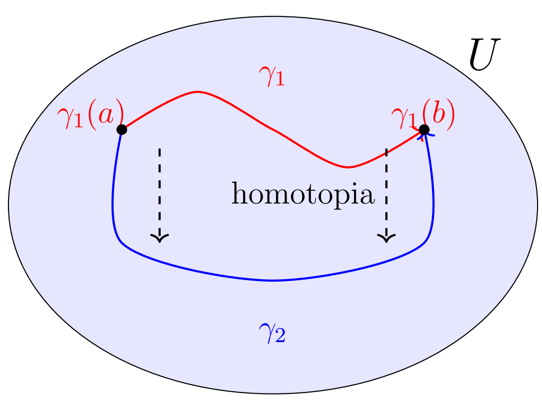
$$\underset{(r,R]}{\forall} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\alpha})\, d\alpha$$

9 Homotopijne wzory Cauchy'ego

Twierdzenie 9.1: Homotopijny Wzór Cauchy'ego I

Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ otwarty, niepusty, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorficzna $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ - drogi, takie że $\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Wtedy jeśli γ_1 i γ_2 są homotopijnie równoważne w U to

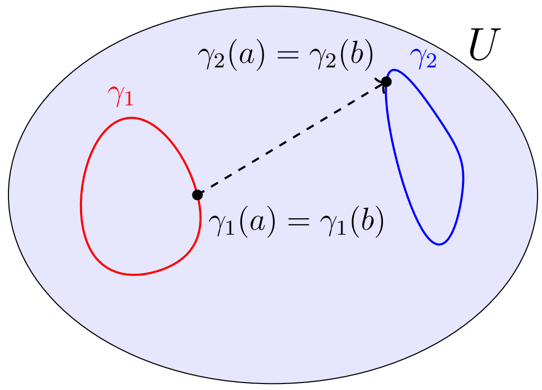
$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$



Twierdzenie 9.2: Homotopijny Wzór Cauchy'ego II

Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ otwarty, niepusty, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorficzna $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ - pętle klasy C^1, takie że $\gamma_1(a) = \gamma_1(b), \gamma_2(b) = \gamma_2(b)$. Wtedy jeśli γ_1 i γ_2 są homotopijnie równoważne w U to

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$



Fakt 9.1

Niech $A \subseteq \mathbb{C}$ gwiaździsty, $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to A$ drogi zamknięte, kawałkami C^1. Wtedy γ_1 i γ_2 są homotopijne

Wniosek 9.1

Niech A gwiaździsty, $A \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to A$ pętle zamknięte, kawałkami C^1. Wtedy γ_1 i γ_2 są homotopijne w U.

Fakt 9.2

Jeśli $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to B \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ są petlami kawałkami C^1 a ponadto B jest zbiorem homeomorficznym z pewnym zbiorem gwiaździstym. Wtedy γ_1 i γ_2 są homotopijnie równoważne w B, a więc i w zbiorze U.

Fakt 9.3

Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{S}(0, 1)$ (lub też dowolny obszar konforemny z pierścieniem) oraz niech f holomorficzna, $f(z) \neq 0$. NWSR

1. Na Ω istnieje holomorficzna gałąź logarytmu z f
2. Dla pewnego pewnego okręgu γ $(R > 1)$ zawartego w Ω zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

Przykład 9.1: Egzamin 2025

Zadanie 6. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Proszę wyznaczyć zbiór wszystkich liczb zespolonych w o tej własności, że funkcja $\varphi_w : V \to \mathbb{C}$ określoną wzorem $\varphi_w(z) = (1 + z)^{-1}e^{wz} + (1 - z)^{-1}$ ma na zbiorze V funkcję pierwotną.

Rozwiązanie Zadania 6. Oznaczmy $f(z) = 1, \quad g(z) = e^{wz}$. Zauważmy, że są one holomorficzne na całym obszarze V. Oznaczmy $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = 2e^{it}$. Wtedy f posiada funkcję pierwotną na V gdy całka po γ będzie równa 0, czyli gdy:

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1} - \frac{1}{z-1}\, dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1}\, dz - \int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz = 0$$

Korzystamy ze wzoru Cauchy'ego:

$$\int_\gamma \frac{e^{wz}}{z+1}\,dz - \int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz = \frac{0!}{2\pi i}\left(f(1) - g(-1)\right) = \frac{1}{2\pi i}(e^{-w} - 1)$$

Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i}(e^{-w} - 1) = 0$$
$$e^{-w} = 1$$
$$e^{-w} = e^0$$

Korzystając z własności liczb zespolonych widzimy, że $w = \{z \in \mathbb{C} : z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$

Twierdzenie 9.3: Laurenta

Niech $A(z_0, R, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \in (r, R)\}$. Niech $f : A(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorficzna. Wówczas istnieją liczby zespolone $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ takie że

$$\underset{z\in A(z_0,R,r)}{\forall} f(z) = u_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z-z_0)^n}_{\text{Szereg zbieżny na } D(z_0,R)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{Szereg zbieżny na } \mathbb{C}\setminus\overline{D}(z_0,r)}$$

Dodatkowo, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, całka $\int\limits_{\partial D(z_0,s)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ jest jednakowa dla wszystkich $s \in (r, R)$

Definicja 9.1: Szereg Laurenta

Szereg postaci danej w twierdzeniu Laurenta, nazywamy Szeregiem Laurenta.
Własności:

1. Część szeregu Laurenta zawierająca wyrazy o potęgach ujemnych nazywana jest częścią główną.
2. Jeśli część główna szeregu jest trywialna (wszystkie współczynniki dla potęg ujemnych są równe zero), to szereg Laurenta redukuje się do szeregu Taylora.
3. Szereg Laurenta zbiega absolutnie i niemal jednostajnie w pierścieniu zbieżności $r < |z - z_0| < R$, co oznacza, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w tym obszarze.
4. Szeregi Laurenta można dodawać, odejmować oraz mnożyć, zachowując pierścień zbieżności.
5. Szeregi Laurenta można całkować i różniczkować wyraz po wyrazie w obrębie pierścienia zbieżności.

Twierdzenie 9.4

Jeżeli f jest funkcją analityczną na pierścieniu $\Omega = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, wówczas współczynniki w rozwinięciu f w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

dane są wzorem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r'} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

gdzie $r < r' < R$.

Przykład 9.2

Zadanie 7. Znajdź rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+2)(z+3)}$$

w szereg Laurenta na obszarach:

(a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$,

(b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

Rozwiązanie Zadania 7. Rozłóżmy funkcję f na ułamki proste:

$$f(z) = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3}.$$

Mnożąc obustronnie przez $(z+2)(z+3)$ oraz porównując współczynniki, otrzymujemy, że $A = -3$ oraz $B = 4$.

Na pierścieniu $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$ mamy $\frac{2}{|z|} < 1$ oraz $\frac{|z|}{3} < 1$, zatem:

$$\frac{-3}{z+2} = \frac{-3}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} = \frac{-3}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-3)\cdot(-2)^{k-1}z^{-k},$$

$$\frac{4}{z+3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+z/3} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(-3)^{k+1}}z^k.$$

Zatem na pierścieniu A_1 mamy:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \begin{cases} \frac{4}{(-3)^{k+1}}, & k \geqslant 0, \\ (-3)\cdot(-2)^{k-1}, & k < 0. \end{cases}$$

Na zbiorze $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$ mamy $\frac{2}{|z|} < 1$ oraz $\frac{3}{|z|} < 1$, zatem rozwinięcie funkcji $\frac{-3}{z+2}$ otrzymaliśmy wcześniej. Rozwinięcie funkcji $\frac{4}{z+3}$ otrzymujemy następująco:

$$\frac{4}{z+3} = \frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1+3/z} = \frac{4}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}4\cdot(-3)^{k-1}z^{-k}.$$

Zatem na A_2 mamy:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(4\cdot(-3)^{k-1} - 3\cdot(-2)^{k-1}\right)z^{-k}.$$

Definicja 9.2: Residuum w punkcie

Gdy $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest szeregiem Laurenta, to wyraz a_{-1} nazywamy RESIDUUM FUNKCJI W PUNKCIE z_0

$$\mathrm{res}_{z=z_0}(f) = a_{-1}$$

Definicja 9.3: Osobliwości izolowane

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem oraz niech $z_0 \in U$. Jeśli f jest analityczna na $\Omega = U \setminus \{z_0\}$, wówczas mówimy, że f ma izolowaną osobliwość w punkcie z_0.

Izolowane osobliwości funkcji analitycznych można podzielić na trzy typy:

1. Osobliwość usuwalna: Funkcja $f(z)$ ma osobliwość usuwalną w punkcie z_0, jeśli $\lim_{z \to z_0} f(z)$ istnieje.

2. Biegun: Funkcja f ma biegun rzędu m, gdzie $m \in \mathbb{Z}_+$, jeśli funkcja $\phi(z) = z^m \cdot$

$f(z)$ ma osobliwość usuwalną w z_0, ale funkcja $\frac{\phi(z)}{z} = z^{m-1}f(z)$ nie ma usuwalnej osobliwości w z_0.

3. Osobliwość istotna: Funkcja $f(z)$ ma osobliwość istotną w punkcie z_0, jeśli nie jest ani osobliwością usuwalną, ani biegunem.

Twierdzenie 9.5: Riemanna o osobliwości usuwalnej

Niech f będzie analityczna na $\Omega \setminus \{z_0\}$. Jeśli funkcja $f(z)$ jest ograniczona w sąsiedztwie punktu z_0, to z_0 jest osobliwością usuwalną. Wówczas funkcja F zdefiniowana następująco:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z), & z = z_0, \end{cases}$$

jest analityczna na Ω.

Twierdzenie 9.6: Weierstrassa

Załóżmy, że funkcja f jest analityczna na zbiorze $\Omega \setminus \{z_0\}$. Jeśli z_0 jest osobliwością istotną funkcji $f(z)$, to jeśli $U \subset \Omega$ jest dowolnym otoczeniem punktu z_0, to $f(U \setminus \{z_0\})$ jest gęstym podzbiorem $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 9.7

Załóżmy, że funkcja f jest analityczna w pierścieniu $\Omega = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$. Typ osobliwości w punkcie z_0 związany jest z częścią główną rozwinięcia w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

funkcji $f(z)$ w otoczeniu z_0:

- Funkcja f ma osobliwość usuwalną w z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy część główna rozwinięcia jest trywialna, tj. $a_n = 0$ dla każdego $n < 0$.
- Funkcja f ma biegun rzędu m w punkcie z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy część główna rozwinięcia jest postaci

$$c_{-m}(z - z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1},$$

  gdzie $c_{-m} \neq 0$.
- Funkcja f ma osobliwość istotną w z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy część główna rozwinięcia w szereg Laurenta jest nieskończona, tj. $a_{-m} \neq 0$ dla nieskończenie wielu $m > 0$.

Fakt 9.4

Niech z_0 będzie biegunem rzędu n funkcji f. Zachodzi wtedy:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{d^{n-1}z}((z - z_0)^k f(z))$$

Twierdzenie 9.8: Lemat Jordana

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze zawierającym półpłaszczyznę $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, a $a > 0$ będzie stałą. Wówczas dla funkcji $f(z)e^{iaz}$ zachodzi nierówność:

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leqslant M(R)\cdot\frac{\pi}{a},$$

gdzie C_R jest górnym półokręgiem o promieniu R i środku w $z_0 = 0$, a $M(R) = \sup_{|z|=R} |f(z)|$.
Ponadto, jeśli $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, to

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 0.$$

Przykład 9.3

Zadanie 8. Wyznaczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Rozwiązanie Zadania 8. Zauważmy, że funkcja podcałkowa jest parzysta, tak więc zachodzi:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

Przypomnijmy też, że $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, więc $\mathrm{Re}\, e^{iz} = \sin z$ więc

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz$$

Określmy teraz całkę pomocniczą

$$I = \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz$$

Gdzie C_R to górny półokrąg dodatnio zorientowany o $|R| > 1$. niech δ_R będzie górnym łukiem okręgu. Wtedy oczywiście

$$I = \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz + \int_{\delta_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz$$

Z jednej strony, jesteśmy w stanie policzyć całkę I przez twierdzenie o residuuach. Zauważmy, że mamy punkty osobliwe i i $-i$ które są biegunami rzędu 2, więc ze wzoru biegunowego:

$$\mathrm{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}+e^{iz}-2(z+i)}{(z+i)^4} =$$

$$= \frac{ie^{-1}+e^{-1}-4i}{16}$$

Analogicznie licząc otrzymujemy

$$\mathrm{res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}(z+i)^2\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{ze^{iz}}{(z-i)^2} = \frac{-ie+e+4i}{16}$$

Tak więc

$$I = 2\pi i\left(\mathrm{res}_{z=i}\,\mathrm{ind}_{z=i}C_R + \mathrm{res}_{z=-i}\,\mathrm{ind}_{z=-i}C_R\right) =$$

Indeks obu punktów wokół okręgu to oczywiście 1, więc

$$= 2\pi i\left(\frac{ie^{-1}-ie+e+e^{-1}}{16}\right)$$

Przechodząc dalej, zauważmy że

$$\left|\int_{\delta_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz\right| \leqslant \int_{\delta_R} \left|\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\right| dz \leqslant \int_{\delta_R} \frac{R}{|1+z^2|^2}\,dz \leqslant \int_{\delta_R} \frac{R}{R^4}\,dz = \int_{\delta_R} \frac{1}{R^3}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Tak więc z jednej strony mamy:

$$I = 2\pi i\left(\frac{ie^{-1} - ie + e + e^{-1}}{16}\right)$$

Z drugiej zaś

$$\lim_{R\to\infty} I = \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\delta_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz$$

Tak więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{ie^{-1} - ie + e + e^{-1}}{16}\right)$$

A nasza szukana wartość to

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re} 2\pi i\left(\frac{ie^{-1} - ie + e + e^{-1}}{16}\right) = \frac{2\pi e - 2\pi e^{-1}}{16}$$

Definicja 9.4: Indeks krzywej względem punktu

Niech γ - pętla zdefiniowana jak w poprzednim twierdzeniu. Wtedy INDEKSEM KRZYWEJ γ WZGLĘDEM PUNKTU s nazywamy liczbę okrążeń krzywej γ wokół punktu s, formalnie

$$\operatorname{ind}(\gamma, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-s}$$

Własności:

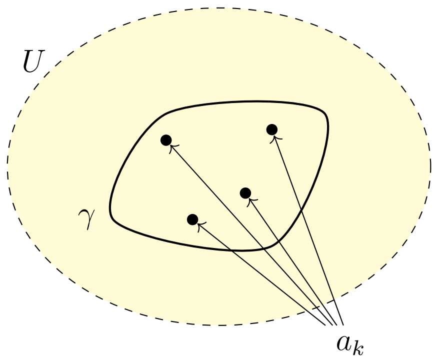
1. **Całkowitość**: $\operatorname{ind}(\gamma, s) \in \mathbb{Z}$
2. **Ciągłość**: funkcja $p \mapsto \operatorname{ind}(\gamma, p)$ jest ciągła na $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
3. **Niezmienniczość względem homotopii** Jeśli γ_1 i γ_2 są homotopijnymi pętlami, kaw. klasy C^1 w $\mathbb{C} \setminus \{s\}$ to $\operatorname{ind}(\gamma_1, s) = \operatorname{ind}(\gamma_2, s)$
4. Jeśli punkty na pętli leżą na tych samych składowych spójności, to ich indeks jest taki sam.

Twierdzenie 9.9: O całkowaniu przy użyciu residuów

$U \subset \mathbb{C}$ - otwarty

Niech $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ - holomorficzna, gdzie $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ - punkty osobliwości funkcji f.
γ - pętla kawałkami C^1 w $U \setminus S$
Ponadto załóżmy, że γ jest homotopijnie równoważna w U pewnej pętli stałej
Wówczas

$$\int_\gamma f = 2\pi i \cdot \sum_{a_i\in S} \left(\operatorname{res}_{a_i} f \cdot \operatorname{ind}(\gamma, a_i)\right)$$



Przykład 9.4: Egzamin 2025

Zadanie 9. Określmy $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Proszę wyznaczyć wartość całki

$$\int_\gamma \frac{z^{2025}}{z^{2025}-1}\,dz$$

Rozwiązanie Zadania 9. Zauważmy, że funkcja w mianowniku ma 2025 miejsc zerowych: $z_1, z_2, ..., z_{2025}$ Są one biegunami pierwszego rzędu funkcji

$$f(z) = \frac{z^{2025}}{z^{2025}-1}$$

Policzmy residua funkcji f w tych miejscach korzystając z tego że są to bieguny pierwszego rzędu:

$$\operatorname{res}_{z=z_i} f = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)\frac{z^{2025}}{z^{2025}-1} = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)\frac{z^{2025}}{z^{2025}-1} = \lim_{z\to z_i}\frac{z^{2026}-z_i\cdot z^{2025}}{z^{2025}-1} =$$

Granica ma postać $\left[\frac{0}{0}\right]$, korzystamy więc z reguły de l'Hospitala

$$= \lim_{z\to z_i}\frac{2026z^{2025}-2025z_i\cdot z^{2024}}{2025z^{2024}} = \lim_{z\to z_i}\frac{2026z-2025z_i}{2025} = \frac{z_i}{2025}$$

Korzystamy ze wzoru obliczania całek przez residua, korzystając z tego że $\operatorname{ind}_{z_i}\gamma = 1$:

$$\int_\gamma \frac{z^{2025}}{z^{2025}-1}\,dz = 2\pi i\sum_1^{2025}\operatorname{res}_{z_i} f\cdot\operatorname{ind}_{z_i}\gamma = 2\pi i\sum_1^{2025}\frac{z_i}{2025} = \frac{2\pi i}{2025}\sum_1^{2025} z_i =$$

I tutaj korzystamy z faktu że suma pierwiastków z liczby zespolonej jest równa 0, więc

$$= \frac{2\pi i}{2025}\cdot 0 = 0$$

Lemat 9.1

Gdy punkt p jest zerem (uogólnionym lub nie) funkcji f, to jego krotność $k(p)$ jest równa

$$k(p) = \operatorname{res}_p\left(\frac{f'}{f}\right)$$

Tego faktu również nie było na wykładzie, autor uznał go jednak za przydatny