Rachunek Prawdopodobieństwa I

Data ostatniej aktualizacji: 30 czerwca 2024

1 Krótki Wstęp

Uważny czytelnik zauważy też że poniższe notatki przypominają niezwykłe dydaktyczne prace dr Arkadiusza Męcla, które również gorąco polecam.

Link do omówienia pewniaków na egzamin znajduje się tutaj

2 Aksjomatyka Rachunku Prawdopodobienstwa ´

Definicja 1: Przestrzeń Propabilistyczna

Przestrzenią Propabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

- Ω - zbiór (nazywany zbiorem zdarzeń elementarnych),
- $\mathcal{F}$ - σ-ciało podzbiorów Ω,
- P - nieujemna miara na $\mathcal{F}$ taka, że $P(\Omega) = 1$.

Miarę P nazywamy prawdopodobieństwem lub miarą probabilistyczną.

Definicja 2: σ-ciało zbiorów

$\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω jeżeli:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$,
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicja 3: Aksjomaty prawdopodobieństwa (Kołmogorowa)

- $\forall\limits_{A \in \mathcal{F}} P(A) \geqslant 0$,
- $P(\Omega) = 1$,
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$, dla $i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicja 4

Przyjmujemy następującą terminologię:

- Zbiór Ω to zbiór zdarzeń elementarnych (podstawowych możliwych wyników eksperymentu, oznaczanych $\omega \in \Omega$),

- Elementy $\mathcal{F}$ to zdarzenia,
- Dla $A \in \mathcal{F}$, elementy A to zdarzenia sprzyjające A,
- Zdarzenie A^C to zdarzenie przeciwne,
- Zdarzenie $\emptyset$ to zdarzenie niemożliwe,
- Zdarzenie Ω to zdarzenie pewne.

Twierdzenie 1: Własności prawdopodobieństwa

Poniżej zakładamy, że wszystkie rozważane zbiory należą do $\mathcal{F}$.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ o ile $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,
3. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$,
4. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$,
5. $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
6. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ dla $n < \infty$.

Twierdzenie 2: Twierdzenie o Ciągłości

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \ldots$.

1. Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (mówimy, że A_i są wstępujące, ozn. $A_i \nearrow A$) oraz $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
2. Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (mówimy, że A_i są zstępujące, ozn. $A_i \searrow A$) oraz $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Definicja 5: Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś $B \in \mathcal{F}$ zdarzeniem takim, że $\mathbb{P}(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym pod warunkiem B nazywamy funkcję $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ określoną dla $A \in \mathcal{F}$ wzorem

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Twierdzenie 3

Jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Twierdzenie 4

Jeżeli $\{H_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalnym rozbiciem Ω takim, że dla każdego $i \in I$ mamy $P(H_i) > 0$, to dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i).$$

Definicja 6: Zdarzenia niezależne

Zdarzenia A i B nazwiemy NIEZALEŻNYMI, jeśli $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Definicja 7: Niezależne σ-ciała

σ-ciała $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ nazwiemy NIEZALEŻNYMI, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{G}_1$ i $B \in \mathcal{G}_2$ zachodzi $\forall\, A \in \mathcal{G}_1 \,\forall\, B \in \mathcal{G}_2\, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Definicja 8: π-układ

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów Ω nazwiemy π-UKŁADEM (lub rodziną multiplikatywną), jeżeli dla każdych $A, B \in \mathcal{A}$ zachodzi $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Definicja 9: λ-układ

Rodzinę $\mathcal{G}$ podzbiorów Ω nazwiemy λ-UKŁADEM, jeżeli

1. $\Omega \in \mathcal{G}$,
2. $\forall_{A,B \in \mathcal{G}},\ A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{G}$,
3. $\forall_{A_1,A_2,\ldots \in \mathcal{G}},\ A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{G}$.

Twierdzenie 5: Lemat o π-λ układach (o rodzinie multiplikatywnej)

Niech $\mathcal{A}$ będzie π-układem podzbiorów Ω, zaś $\mathcal{G}$ to λ-układ taki, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$. Wówczas $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$.

Twierdzenie 6

Niech Ω - dowolny zbiór, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ będzie π-układem, $\mathcal{F} = \sigma(A)$, $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ - miary probabilistyczne, t. że

$$\underset{A \in \mathcal{A}}{\forall} \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$$

to wtedy

$$\underset{B \in \mathcal{F}}{\forall} \mathbb{P}(B) = \mathbb{Q}(B)$$

Twierdzenie 7

Niech Ω_i, $\mathcal{F}_i$, $\mathbb{P}_i$, $i = 1, \dots, n$ będą przestrzeniami probabilistycznymi. Możemy zdefiniować:

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma(A_1 \times \ldots \times A_n | A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n).$$

Wówczas $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$ jest jedyną taką miarą na $\mathcal{F}$, że zachodzi

$$\forall\, A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n \quad \mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_n(A_n).$$

Twierdzenie 8

Niech $(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{F}$ niezależne $\pi-$ układy, takie że

$$\underset{A_i \in \mathcal{A}_i}{\forall} \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Wtedy $\sigma(A_1), ..., \sigma(A_n)$ niezależne

Twierdzenie 9: Twierdzenie 0-1 (Twierdzenie Kołmogorowa)

Niech $G_1, G_2, ...$ σ-ciała niezależne

$$G_R = \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma(G_i, G_{i+1}, \dots)$$

Wtedy

$$\underset{B \in G_R}{\forall} \mathbb{P}(B) = 0 \text{ albo } \mathbb{P}(B) = 1$$

Prostym wnioskiem z tego twierdzenia jest to, że jeśli A_i są niezależne, to $\mathbb{P}(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$

Twierdzenie 10: Lemat Borela-Cantellego

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Wówczas:

1. Jeśli $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$, to prawdopodobieństwo zajścia nieskończenie wielu spośród zdarzeń A_i wynosi 0.

2. Jeśli A_i są <u>niezależne</u> oraz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, to $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, to prawdopodobieństwo zajścia nieskończenie wielu spośród zdarzeń A_i wynosi 1.

Definicja 10: Przestrzeń stanów

Parę $(E, \mathcal{B})$, gdzie E to zbiór, a B to σ-ciało jego podzbiorów, nazywamy przestrzenią stanów.

Definicja 11: Zmienna losowa

Zmienną losową o wartościach w przestrzeni stanów $(E, \mathcal{B})$ nazywamy dowolną funkcję mierzalną $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{B})$.
Równoważnie:
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ $\{X \neq a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie 11

Jeżeli $\mathcal{A}$ to dowolna rodzina podzbiorów E, taka że $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, to dla każdego $X : \Omega \to E$ zachodzi

$$X \text{ jest zmienną losową} \Leftrightarrow \underset{A\in\mathcal{A}}{\forall} X^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Wynikają z tego nastepujące wnioski:
.

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathbb{R}\,\{X \neq a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.
2. $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym wtedy i tylko wtedy, gdy $X_1, \ldots, X_n$ są rzeczywistymi zmiennymi losowymi.

Twierdzenie 12

Jeżeli $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ to wektor losowy, zaś $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ to funkcja borelowska, to $\phi(X)$ jest wektorem losowym.

Definicja 12: Rozkład zmiennej losowej

Rozkład zmiennej losowej $X : \Omega \to (E, \mathcal{B})$ to miara probabilistyczna μ_X na $(E, \mathcal{B})$ dana wzorem

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}), \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}.$$

Definicja 13: Rozkład Dyskretny

Rozkład μ nazywamy dyskretnym jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $\mu(S) = 1$.

Definicja 14: Rozkłady Dyskretne - przykłady

1. Rozkład skupiony w punkcie (delta Diraca):

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } a \in A, \\ 0, & \text{jeśli } a \notin A. \end{cases}$$

   Jest to rozkład zmiennej X takiej, że $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

2. Rozkład Bernoulliego z parametrami $n \geqslant 0$, $p \in [0, 1]$:

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$

   Jest to rozkład zmiennej X takiej, że $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$ dla $k = 0, 1, \ldots$.

3. Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$:

$$p_s = \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}, \quad S = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Definicja 15: Rozkład ciągły i Gęstość rozkładu

Rozkład prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^n$ nazwiemy ciągłym jeśli istnieje funkcja borelowska

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\underset{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}{\forall} \mu(A) = \int_A f(x)\, dx$$

Funkcję f nazywamy GĘSTOŚCIĄ. Jeżeli X jest wektorem losowym i μ_X jest rozkładem ciągłym o gęstości f, to mówimy też, że f jest gęstością X. Oznacza to, że

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$$

Czasami stosowane jest oznaczenie $f(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}$.
Własności gęstości:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$.
2. $f = 0$ prawie wszędzie, tzn. $\lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}) = 0$.
3. Funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbioru miary zero.

Definicja 16: Rozkłady Ciągłe - Przykłady

1. ROZKŁAD JEDNOSTAJNY na zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz $0 < \lambda(A) < \infty$. Wówczas funkcja
$$g(x) = \frac{\mathbf{1}_A(x)}{\lambda(A)}$$
jest gęstością prawdopodobieństwa.

W szczególności,
$$g(x) = \frac{\mathbf{1}_{(a,b)}(x)}{b-a}$$
zadaje rozkład jednostajny na odcinku (a, b)

2. ROZKŁAD WYKŁADNICZY z parametrem $\lambda > 0$ to rozkład o gęstości
$$g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$
Ten rozkład oznaczamy $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
3. ROZKŁAD GAUSSOWSKI/NORMALNY z parametrami a, σ^2, oznaczany $N(a, \sigma^2)$ (gdzie a - wartość oczekiwana/wektor średni, a σ^2 - wariancja/macierz kowariancji) to rozkład o gęstości
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$
Na $\mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$, Q macierz $d \times d$ dodatnio określona, gęstość ma postać:
$$g(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d \sqrt{\det Q}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^T Q^{-1}(x-a)\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$
4. ROZKŁAD GAMMA $\Gamma(r, \lambda)$, $r > 0$, $\lambda > 0$.
Gęstość:
$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$
gdzie Γ oznacza funkcję Gamma Eulera: $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$.

Przykład 1: Egzamin poprawkowy 2009

Pomimo użycia wartości oczekiwanej i wariancji, kluczem do tego zadania jest znajomość własności rozkładu normalnego, dlatego dałem je tutaj

Zadanie 1. Niech X, Y - niezależne zmienne losowe, $X, Y \sim N(0,1)$

a) znaleźć gęstość $X + 2Y + 1$

b) znaleźć gęstość $(X+Y, X+2Y)$

Rozwiązanie Zadania 1.

a) Przypomnijmy, że liniowy obraz (X, Y), gdzie X i Y mają rozkład normalny, ma rozkład normalny, więc

$$\mathbb{E}X + 2Y + 1 = \mathbb{E}X + 2\mathbb{E}Y + \mathbb{E}1 = 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\mathrm{Var}(X+2Y+1) = \mathrm{Var}(X+2Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}2Y = \mathrm{Var}X + 2^2 \cdot \mathrm{Var}Y = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

Alternatywnie, możemy znaleźć parametry poprzez własności rozkładu normalnego $X + 2Y + 1$:

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(0,1)$$
$$X \sim N(0,1) \qquad 2Y \sim N(2 \cdot 0, 2^2 \cdot 1) = N(0,4)$$
$$X \sim N(0,1) \qquad 2Y + 1 \sim N(0+1, 4) = N(1,4)$$
$$X + 2Y + 1 \sim N(0+1, 1+4) = N(1,5)$$

Tak czy siak, otrzymujemy

$$g_{X+2Y+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 5}\right)$$

b) Korzystamy z przypadku wielowymiarowego. Ponieważ X, Y - niezależne, łatwo liczymy

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 0 + 0 = 0 \qquad \mathbb{E}(X+2Y) = 0 \implies a = [0,0]$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y = 1 + 1 = 2$$
$$\mathrm{Var}(X+2Y) = \mathrm{Var}X + 4\mathrm{Var}(Y) = 5$$
$$\mathrm{Cov}(X+Y, X+2Y) = \mathrm{Cov}(X, X+2Y) + \mathrm{Cov}(Y, X+2Y) =$$
$$= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,2Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,2Y) = \mathrm{Var}X + 0 + 0 + 2\mathrm{Var}Y =$$
$$= 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Mamy więc że

$$Q = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X+Y) & \mathrm{Cov}(X+Y, X+2Y) \\ \mathrm{Cov}(X+Y, X+2Y) & \mathrm{Var}(X+2Y) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \implies Q^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \det Q = 1$$

Podstawiamy do wzoru:

$$g_{(X+Y,X+2Y)}(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d \sqrt{\det Q}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x,y)-a)^T Q^{-1}((x,y)-a)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(5x^2 - 6xy + 2y^2\right)\right)$$

Twierdzenie 13

Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są zmiennymi losowymi, to następujące warunki są równoważne:

1. $X_1, \dots, X_n$ są niezależne,
2. $\mu(X_1, \dots, X_n) = \mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$,
3. Dla każdego $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$F_{X_1,\dots,X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n)$$

Definicja 17: Dystrybuanta

Dystrybuantą wektora losowego $X = (X_1, \dots, X_n)$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, daną wzorem

$$F_X(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2, \dots, X_n \leqslant t_n).$$

W szczególności dystrybuantą zmiennej losowej X jest funkcja $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dana wzorem $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$. Uwaga: W starszych podręcznikach czasami definiuje się $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$.

Twierdzenie 14

Jeżeli X i Y to n-wymiarowe wektory losowe, to

$$F_X = F_Y \iff \mu_X = \mu_Y.$$

Uwaga: X i Y nie muszą być określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Twierdzenie 15: Własności dystrybuanty zmiennej losowej

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, zaś $F = F_X$ jej dystrybuantą. Wówczas:

1. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$, $F(t) \in [0, 1]$,
2. F jest niemalejąca,
3. F jest prawostronnie ciągła: Dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to t_0^+} F(t) = F(t_0)$,
4. $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$ oraz $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$.

Twierdzenie 16

Jeżeli F jest dystrybuantą zmiennej losowej X, F' istnieje prawie wszędzie oraz

$$\int_{\mathbb{R}} F'(x)\, dx = 1,$$

to F' jest gęstością zmiennej losowej X.

Twierdzenie 17

Jeśli X jest zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$ o gęstości g_X, zaś $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją klasy C^1 i różnowartościową, to $\varphi(X)$ ma gęstość daną wzorem

$$g_{\varphi(X)}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{Im}\varphi(x)} \cdot g_X(\varphi^{-1}(x)) \cdot \left|\det D\varphi^{-1}(x)\right|$$

Definicja 18: Rozkłady Brzegowe

Jeśli $X = (X_1, \ldots, X_n)$ jest wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$ o rozkładzie μ, to rozkłady zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tj.

$$\mu_{X_i}(A) = \mu(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) \qquad \text{dla } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ na } i\text{-tym miejscu}$$

nazywamy ROZKŁADAMI BRZEGOWYMI. Na odwrót, rozkład wektora X nazywamy rozkładem łącznym zmiennych $X_1, \ldots, X_n$.

Twierdzenie 18

Jeśli rozkład wektora losowego $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość g, to rozkłady brzegowe również mają gęstości wyrażone wzorami:

$$g_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Definicja 19: Niezależne wektory losowe

Wektory losowe $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ nazwiemy NIEZALEŻNYMI jeżeli σ-ciała $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ są niezależne.

Mówimy tu o niezależności łącznej. Istnieją zmienne losowe parami niezależne, które nie są niezależne łącznie

Twierdzenie 19

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi o rozkładach dyskretnych skupionymi odpowiednio na zbiorach $S_{X_1}, \ldots, S_{X_n}$ (tzn. $\mathbb{P}(X_i \in S_{X_i}) = 1$). Wówczas

$$\forall_{s_1, \ldots, s_n \in S}$$

$$X_1, \ldots, X_n \text{ są niezależne} \iff \mathbb{P}(X_1 = s_1, \mathbb{P}(X_2 = s_2), ..., X_n = s_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = s_k)$$

.

Twierdzenie 20

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi o rozkładach ciągłych z gęstościami odpowiednio $g_1, g_2, ..., g_n$. Wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład łączny ma gęstość g_X spełniającą:

$$g_X(x_1, ..., x_n) = g_1(x_1) \cdot .... \cdot g_n(x_n)$$

.

Definicja 20: Wartość oczekiwana

Niech X będzie zmienną losową o wartościach rzeczywistych, określoną na pewnej przestrzeni probabilistycznej $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$. Mówimy, że X ma wartość oczekiwaną jeżeli

$$\int_\Omega |X(\omega)| \, \mathbb{P}(d\omega) < \infty.$$

Wtedy wartością oczekiwaną (albo wartością średnią) zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega)$$

Własności:

1. Jeśli X i Y mają wartości oczekiwane, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wartość oczekiwana $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y)$ istnieje oraz $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$.
2. Jeśli $X \geqslant 0$ prawie na pewno, to $\mathbb{E}X \geqslant 0$.
3. Jeśli $\mathbb{E}|X| = 0$, to $X = 0$ prawie na pewno.
4. $|\mathbb{E}X| \leqslant \mathbb{E}|X|$.
5. Jeśli $0 \leqslant X \leqslant Y$ prawie na pewno i $\mathbb{E}Y$ istnieje, to istnieje również $\mathbb{E}X$ oraz $0 \leqslant \mathbb{E}X \leqslant \mathbb{E}Y$.
6. Jeśli X i Y są niezależne, to $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$
7. $\mathbb{E}|XY| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2}$.
8. Twierdzenie o zbieżności monotonicznej: Jeśli (X_n) jest ciągiem niemalejącym i $X_n \geqslant 0$ prawie na pewno, to $\mathbb{E} \lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$.
9. **Lemat Fatou**: Jeśli $X_n \geqslant 0$ prawie na pewno, to $\mathbb{E} \liminf\limits_{n\to\infty} X_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$.
10. **Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej**: Jeśli ciąg (X_n) jest taki, że $|X_n| \leqslant Y$ prawie na pewno, $\mathbb{E}Y < \infty$, oraz istnieje granica $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ prawie na pewno, to X ma wartość oczekiwaną oraz $\mathbb{E}X = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$.
11. Niech X będzie zmienną losową o wartościach w przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{B})$ i niech $\varphi : E \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{B})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Wtedy

    $$\mathbb{E}\varphi(X) = \int_E \varphi(x) \, \mu(dx),$$

    gdzie μ oznacza rozkład X. Przy czym prawa strona równości jest dobrze określona wtedy i tylko wtedy, gdy lewa strona jest dobrze określona.
12. X jest zmienną losową o wartościach w $(E, \mathcal{B})$, a $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mierzalna względem odpowiednich σ-ciał, to

    $$\mathbb{E}\varphi(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) p_k,$$

    o ile szereg jest zbieżny bezwzględnie.
13. Jeśli X jest wektorem losowym w $\mathbb{R}^d$ o rozkładzie ciągłym z gęstością g, a $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funkcją borelowską, to

    $$\mathbb{E}\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) g(x) \, dx,$$

    o ile $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| \, g(x) \, dx < \infty$.

14. Jeśli $X \geqslant 0$ prawie na pewno, to dla każdego $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\, dt$$

15. Jeśli X jest zmienną losową o dystrybuancie F, $X \geqslant 0$ prawie na pewno, to

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, dt = \int_0^\infty (1 - F(t))\, dt$$

Przykład 2: Egzamin 2023

Zadanie 2. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = Ce^{-x}y\mathbf{1}_{\{0 \leqslant y \leqslant x\}}$

a) wyznaczyć stałą C

a) Obliczyć $\mathbb{P}(2Y \leqslant X)$

a) Obliczyć $\mathbb{E}((X + Y)^2|X)$

Rozwiązanie Zadania 2.

a) Chcemy skorzystać z tego że całka z gęstości wynosi 1. Liczymy całkę:

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) =$$

Z warunku indykatora odczytujemy granice całkowania:

$$= \int_0^\infty \int_0^x Ce^{-x}y\, dy\, dx = \int_0^\infty Ce^{-x}\frac{x^2}{2}\, dx = \frac{C}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x}\, dx =$$

Następującą całkę możemy policzyć oczywiście przez części, możemy też zauważyć, że jest to funkcja gamma Eulera $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$, a wiemy że dla $z \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z+1) = z!$. Mamy więc

$$= \frac{C}{2}\Gamma(3) = \frac{C}{2} \cdot 2! = C \implies C = 1$$

b)

$$\mathbb{P}(2Y \leqslant X) = \mathbb{P}\left(Y \leqslant \frac{X}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^2}{8}\, dx = \frac{1}{8}\int_0^\infty e^{-x}x^2\, dx =$$

Zauważmy, że jest to ta sama całka co w podpunkcie $a)$

$$= \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

c) dokończyć

Definicja 21: Wariancja

Niech X będzie zmienną losową rzeczywistą, taką że $\mathbb{E}X$ istnieje. Wariancję X nazywamy wielkością

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

o ile $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 < \infty$.
Własności:

1. Zmienna losowa X ma wariancję (skończoną), wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Ponadto
$$\text{Var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$
2. $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}X$, $a \in \mathbb{R}$;
3. $\text{Var}X \geqslant 0$;
4. $\text{Var}X = 0 \Leftrightarrow X = \text{Const}$ p.n.;
5. $\text{Var}(X + a) = \text{Var}X$, $a \in \mathbb{R}$.
6. Jeśli zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o skończonej wariancji, to
$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}X_i.$$

Definicja 22: (Kowariancja i korelacja)

Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o skończonej wariancji.

a) Kowariancję X i Y nazywamy liczbą
$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

b) Współczynnikiem korelacji zmiennych X i Y nazywamy
$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}}.$$
jeśli żadna ze zmiennych X i Y nie jest stała ($\text{Var } X > 0$ i $\text{Var } Y > 0$). W przeciwnym wypadku kładziemy $\rho(X, Y) = 0$.

Przykład 3: Egzamin Zerowy 2024

Zadanie 3. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \begin{cases} Cye^{-x^2y} & \text{jeśli } x \geqslant 1, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie C jest pewną dodatnią stałą.

a) Czy X i Y są niezależne?

b) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X

c) Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y

Rozwiązanie Zadania 3.
Przypomnijmy, że

$$\text{Zmienne } X \text{ i } Y \text{ są niezależne} \iff g_X \cdot g_Y = g(x, y)$$

Łatwo zauważyć jednak że nie da się policzyć wzorów na gęstości brzegowe. Musimy więc kombinować, w tym celu znajdźmy najpierw C:

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) = C \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \int_0^\infty yx^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx =$$

Oczywiście możemy policzyć powyższą całkę przez części, możemy też zauważmy, że przekształciliśmy wewnętrzną całkę do postaci gdzie jest całką z gęstości rozkładu wykładniczego $Exp(x^2)$, czyli jest jego wartością oczekiwaną, z wiemy że $\mathbb{E}Exp(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$. Otrzymujemy więc że

$$= C \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx = \frac{C}{3} \implies C = 3$$

Policzyliśmy C, pomińmy podpunkt a) i przejdźmy do podpunktu b)

b) Skorzystamy z tej samej sztuczki na poradzenie sobie z trudną całką

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot g(x,y) = \int_1^\infty \int_0^\infty 3yxe^{-x^2 y}\, dy\, dx = 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \int_0^\infty yx^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx =$$

$$= 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{3}{2}$$

Do obliczenia wariancji potrzebujemy jeszcze $\mathbb{E}X^2$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \cdot g(x,y) = \int_1^\infty \int_0^\infty 3yx^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx =$$

tutaj znowu sztuczka z wartością oczekiwaną rozkładu wykładniczego

$$= 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 3$$

Otrzymujemy

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

c) Przypomnijmy, że $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$. Liczymy więc brakujące rzeczy

$$\mathbb{E}Y = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot g(x,y) = \int_1^\infty \int_0^\infty 3y^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \int_0^\infty 3x^2 y^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx =$$

$$= 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(Exp(x^2))^2\, dx = 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x^4}\, dx = \frac{6}{5}$$

$$\mathbb{E}XY = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot g(x,y) = \int_1^\infty \int_0^\infty 3y^2 x e^{-x^2 y}\, dy\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} \int_0^\infty 3y^2 x^2 e^{-x^2 y}\, dy\, dx =$$

$$= 3 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^4}\, dx = \frac{3}{2}$$

Tak więc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{10}$$

Wrócimy teraz do pozostawionego podpunktu a). Gdyby X i Y był niezależne, to $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Widzimy jednak że tak nie jest, więc X i Y nie są niezależne.

Definicja 23: (Macierz kowariancji)

Jeśli $X = (X_1, \ldots, X_d)$ jest wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^d$, przy czym zmienne losowe X_i mają skończoną wariancję, to macierz

$$(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1}^{d}$$

nazywamy macierzą kowariancji wektora X.

Twierdzenie 21: Wielowymiarowy rozkład Gaussa

Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_d$ o łącznym rozkładzie Gaussa są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane.

Twierdzenie 22: Nierówności związane z wartością oczekiwaną

1. **(Nierówność Höldera)** Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, p, $q \geqslant 1$, takimi że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wtedy
$$\mathbb{E}|XY| \leqslant (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}} = \|X\|_p \|Y\|_q.$$
2. **(Nierówność Jensena)** Niech X będzie zmienną losową, taką że $\mathbb{E}|X| < \infty$ i niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Ponadto zakładamy, że $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$. Wtedy
$$\varphi(\mathbb{E}X) \leqslant \mathbb{E}\varphi(X).$$
3. **(Nierówność Minkowskiego)** Niech $p \geqslant 1$, wtedy
$$\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p.$$
4. **(Nierówność Markowa)** Jeśli $X \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, to
$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}.$$
5. **(Nierówność Czebyszewa)** Jeśli X jest zmienną losową o skończonej wariancji, to dla każdego $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}\, X}{\varepsilon^2}.$$

Twierdzenie 23: Słabe prawo wielkich liczb

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o skończonej wariancji. Oznaczmy $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1 \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Definicja 24: Rodzaje zbieżności

Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi o wartościach w przestrzeni (E, ρ), określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mówimy, że

1. ciąg X_n zbiega do X PRAWIE NA PEWNO przy $n \to \infty$ (piszemy: $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$), jeżeli

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1;$$

2. ciąg X_n zbiega do X WEDŁUG PRAWDOPODOBIEŃSTWA ($X_n \xrightarrow{P} X$), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P(\rho(X_n, X) > \varepsilon) = 0;$$

3. niech $0 < p < \infty$. Ciąg X_n zbiega do X WEDŁUG p-TEGO MOMENTU, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} E\rho(X_n, X)^p = 0.$$

Stosowane w zasadzie, gdy (E, ρ) jest przestrzenią Banacha i wtedy mówimy, że X_n zbiega do X w L^p, jeżeli $E\|X_n\|^p < \infty$, $E\|X\|^p < \infty$, oraz $\lim_{n\to\infty} E\|X_n - X\|^p = 0$. Piszemy: $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Przy czym, jeżeli $p \geqslant 1$, to wystarczy zakładać, że $E\|X_n\|^p < \infty$. Jeżeli zachodzi $\lim_{n\to\infty} E\|X_n - X\|^p = 0$, to warunek $E\|X\|^p < \infty$ jest automatycznie spełniony.

Twierdzenie 24

Następujące warunki są równoważne:

(i) $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} \{\rho(X_n, X) \leqslant \varepsilon\}\right) = 1$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{\rho(X_n, X) > \varepsilon\}\right) = 0$.

Twierdzenie 25: Riesza

Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi o wartościach w (E, ρ). Jeżeli ciąg X_n zbiega według prawdopodobieństwa do X przy $n \to \infty$, to istnieje podciąg X_{n_k} taki, że X_{n_k} zbiega do X prawie na pewno, gdy $k \to \infty$.

Twierdzenie 26

Ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega w L^p ($p \geqslant 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy X_n zbiega według prawdopodobieństwa oraz rodzina $\{|X_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie całkowalna.

Twierdzenie 27

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $F, \|\cdot\|$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wówczas

$$S_n \text{ zbiega prawie na pewno przy } n \to \infty \iff S_n \text{ zbiega wg. prawdopodobieństwa.}$$

Twierdzenie 28: Nierówność Lévy'ego-Ottavianiego

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $F, \|\cdot\|$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wtedy dla każdego $j \in \mathbb{N}$ i $t > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leqslant j} \|S_k\| > 3t\right) \leqslant 3 \max_{k \leqslant j} P(\|S_k\| > t).$$

Twierdzenie 29: Kołmogorowa o 2 szeregach

Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych, o skończonej wariancji takimi, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}(X_i) < \infty \text{ oraz } \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} X_i < \infty,$$

to szereg $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$ zbiega prawie na pewno.

Twierdzenie 30: Kołmogorowa o 3 szeregach

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych.

1. Jeśli istnieje $c > 0$ takie, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n|^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n)^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c)$$

   są zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno.

2. Na odwrót: Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega prawie na pewno, to dla każdego $c > 0$ szeregi w powyższym wzorze są zbieżne.

Przykład 4: Egzamin Zerowy 2024

Zadanie 4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|x|^{-\frac{3}{2}} \text{ jeśli } |x| > 1 \\ 0 \text{ jeśli } |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$$

zbiega prawie na pewno?

Rozwiązanie Zadania 4. Chcemy skorzystać z Twierdzenia o 3 szeregach. Dobierzmy

$c = 1$ i zacznijmy od policzenia

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^p}\right| > c\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^p}\right| > 1\right) = \mathbb{P}(|X_n| > n^p) = \int_{n^p}^{\infty} \frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int_{-\infty}^{-n^p} -\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}\, dx = n^{-\frac{p}{2}}$$

Tak więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^p}\right| > 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$$

Powyższy szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{p}{2} > 1 \implies p > 2$
Idąc dalej, zauważmy że przedział niezerowej gęstości jest symetryczny, więc

$$\mathbb{E}\left|\frac{X_n}{n^p}\right|^1 = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{X_n}{n^p}\right|^1 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Obliczmy teraz wariancję

$$\operatorname{Var}\left(\frac{X_n}{n^p} \mathbf{1}_{|\frac{X_n}{n^p}|>1}\right)^1 = \mathbb{E}\frac{X_n^2}{n^{2p}} \mathbf{1}_{|\frac{X_n}{n^p}|>1} - 0 = \frac{1}{n^{2p}}\left(2\int_1^{n^p} x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}\, dx\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{n^{\frac{3}{2}p} - 1}{n^{2p}}\right)$$

Wstawiając do naszego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{X_n}{n^p} \mathbf{1}_{|\frac{X_n}{n^p}|>1}\right)^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n^{\frac{3}{2}p} - 1}{n^{2p}}\right)$$

Widzimy, że ten szereg będzie zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $p > 2$, założenia twierdzenia o 3 szeregach zostały więc spełnione, więc dla $p > 2$ ten szereg ejst zbieżny prawie na pewno.

Twierdzenie 31: Mocne prawo wielkich liczb

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, takim samym jak zmienna losowa X, o skończonej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X$. Wówczas

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathbb{E}X \quad \text{dla} \quad n \to \infty.$$

Przykład 5: Random zadanie z konsów

Zadanie 5. Niech X_i, Y_i będą niezależnymi zmienny losowymi o rozkładzie jdnostajnym na okręgu o środku w zerze i promieniu $\sqrt{5}$. Zbadaj zbieżność prawie na pewno, według prawdopodobieństwa i w L^1 szeregu

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1}$$

Rozwiązanie Zadania 5. Chcemy skorzystać z MPWL. Nie mamy jednak od razu spełnionych założeń dla naszego szeregu, wyrazy $X_i^2 Y_i Y_{i+1}$ nie są niezależne, ale możemy je pogrupować tak aby były. Załóżmy BSO, że n - parzyste. Wtedy:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1} = \frac{X_1^2 Y_1 Y_2 + X_3^2 Y_3 Y_4 ... + X_{n-1}^2 Y_{n-1} Y_n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{X_2^2 Y_2 Y_3 + X_4^2 Y_4 Y_5 ... + X_n^2 Y_n Y_{n+1}}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

Zauważmy że wyrazy pogrupowane w tych sumach są już niezależne i o tym samym rozkładzie, więc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1} \to \mathbb{E}X_1^2 Y_1 Y_2 + \mathbb{E}X_2^2 Y_2 Y_3 = \mathbb{E}X_1^2 Y_1 \mathbb{E}Y_2 + \mathbb{E}X_2^2 Y_2 \mathbb{E}Y_3 =$$

Czy wiemy coś o wartościach oczekiwanych? Tak, skoro te zmienne leżą jednostajnie na okręgu, to widać, że $\mathbb{E}Y_i = 0$, więc

$$= \mathbb{E}X_1^2 Y_1 \cdot 0 + \mathbb{E}X_2^2 Y_2 \cdot 0 = 0$$

Tak więc szereg jest zbieżny do 0 prawie na pewno do, jest też więc zbieżny do 0 według prawdopodobieństwa.
Zastanówmy się teraz nad zbieżnością w L^1. Okazuje się, że prościej jest udowodnić mocniejszą zbieżność w L^2, czy

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1} - 0\right|^2 \to 0$$

Zauważmy, że to wyrażenie można rozpisać

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1}\right|^2 = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^4 Y_i Y_{i+1} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j Y_{j+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j Y_{j+1}\right)$$

Skupmy się na wyrazie $\mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j Y_{j+1}$ i zauważmy, że zawsze Y_{j+1} będzie zmienną niezależną od reszty iloczynu, więc

$$\mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j Y_{j+1} = \mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j \mathbb{E}Y_{j+1} = \mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j \cdot 0 = 0$$

Nasza suma się więc redukuje:

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4 Y_i Y_{i+1} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \mathbb{E}X_i^2 Y_i Y_{i+1} X_j^2 Y_j Y_{j+1}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4 Y_i Y_{i+1}\right)$$

Co z kolei zbiega do 0, tak więc szereg jest zbieżny w L^2, więc też w L^1

Twierdzenie 32: de'Moivre'a-Laplace'a

Niech S_n będzie zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego $B(n,p)$, gdzie $q = 1-p$. Wtedy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant t\right) = \Phi(t),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standardowego.
Alternatywnie:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var} S_n}} \leqslant t\right) = \Phi(t),$$

Twierdzenie 33: Ogólne Centralne Twierdzenie Graniczne

Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, mającym skończoną i niezerową wariancję, to

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n \operatorname{Var} X_1}} \leqslant t\right) = \Phi(t).$$

Twierdzenie 34: Przybliżenie Poissona

Niech $S_n \sim \mathrm{B}(n,p)$, oznaczmy $\lambda = np$. Wtedy dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi oszacowanie

$$\left|\mathbb{P}(S_n \in B) - \sum_{\substack{k\in B\\ k=0}}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

Czasami równoważnie przyjmujemy

$$\mathbb{P}(S_n \in B) \sim \sum_{\substack{k\in B\\ k=0}}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Przykład 6: Egzamin 2023

Zadanie 6. Dane są trzy urny. W pierwszej znajduje się 100 kul, wśród nich jedna zielona i 99 niebieskich, zaś w każdej z pozostałych urn znajduje się 50 kul białych i 50 kul czarnych. Gracz powtarza 900 razy następujący eksperyment: wybiera losowo jedną z urn (każdą z prawdopodobieństwem 1/3), następnie zwraca ją do urny. Obliczyć w przybliżeniu

(a) prawdopodobieństwo, że kulę białą wylosowano ponad 310 razy

(b) prawdopodobieństwo, że kulę zieloną wylosowano co najmniej 3 razy

Rozwiązanie Zadania 6.

(a) Określmy zmienną losową:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i\text{-ta wylosowana kula będzie biała} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Chcemy policzyć $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{900} > 310\right)$.
Korzystamy z Tw. dM-L, z $n = 900, p = \frac{1}{3}, q = 1-p = \frac{2}{3}$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{900} X_i > 310\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - 900\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} > \frac{310 - 900\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right) \sim 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(b) Określmy zmienną losową:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i\text{-ta wylosowana kula będzie zielona} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Zauważmy, że mamy małą ilość zdarzeń oraz znacznie mniejsze prawdopodobieństwo względem poprzedniego podpunktu ($\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{300}$). Korzystamy więc z przybliżenia Poissona z $\lambda = np = 900\cdot\frac{1}{300} = 3$:

$$\mathbb{P}(Y \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2}\mathbb{P}(Y_k) \sim 1 - \sum_{k=0}^{2}\frac{3^k}{k!}e^{-3} = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!}\right)$$

Definicja 25: Warunkowa wartość oczekiwana

Niech X będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, taką że $E|X| < \infty$, i niech $\mathcal{G}$ będzie σ-ciałem, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Warunkową wartością oczekiwaną X warunkowo względem $\mathcal{G}$ nazywamy zmienną losową Y spełniającą warunki:

1. Y jest $\mathcal{G}$-mierzalna,
2. Dla każdego $A \in \mathcal{G}$, $E[Y\mathbf{1}_A] = E[X\mathbf{1}_A]$.

Taką zmienną losową Y oznaczamy przez $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
Własności gdy $\mathbb{E}X^2 < \infty$:

1. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}) = \alpha\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \beta\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \quad P.n.$$
2. Jeśli $X \geqslant 0$ p.n., to $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geqslant 0$ p.n.
3. Jeśli $X_1 \geqslant X_2$, to $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \geqslant \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ p.n.
4. $X_n \nearrow X$ p.n. to $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$
5. Nierówność Jensena
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła, $\mathbb{E}|\varphi(X)| \leqslant \infty$. Wtedy
$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G})$$
6. Jeśli X jest $\mathcal{G}$-mierzalne to $(\mathbb{X}|\mathcal{G}) = X$ p.n.
7. Jeżeli $H \subset \mathcal{G}$, to $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|H) = \mathbb{E}(X|H)$ p.n.
8. Jeżeli wszystkie zbiory z σ-ciała $\mathcal{G}$ mają prawdopodobieństwo 0 lub 1 (np. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$), to $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ p.n.
9. Jeżeli σ-ciała $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ są niezależne, to $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ p.n.
10. Jeżeli Y jest zmienną losową $\mathcal{G}$-mierzalną oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$ i $\mathbb{E}|XY| < \infty$, to $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ p.n.

Twierdzenie 35

Niech (X, Y) będzie wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ i o rozkładzie ciągłym z gęstością g. Niech

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{g(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^k} g(x,y)dx} & \text{jeśli } \int_{\mathbb{R}^k} g(x,y)dx > 0 \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Wtedy dla każdej borelowskiej funkcji $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, takiej że $\mathbb{E}|\psi(X)| < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}(\psi(X)|Y = y) = \int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|y)dx$$

Równoważnie, używając innego zapisu:

$$\mathbb{E}(\psi(X)|Y) = \int_{\mathbb{R}^k} \psi(x) f_{X|Y}(x|Y)dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^k} \psi(x)g(x,Y)dx}{\int_{\mathbb{R}^k} g(x,Y)dx} \quad \text{p.n.}$$

Przykład 7: Egzamin 2023

Zadanie 7. Wektor losowy ma gęstość $g(x, y) = Cxy^2 \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}$

(a) Wyznaczyć stałą C

(b) Obliczyć $\mathbb{P}(Y \geqslant \frac{1}{2})$

(c) Obliczyć $\mathbb{E}((X + Y)^3|Y)$

Rozwiązanie Zadania 7.

(a) Liczymy całkę po gęstości:

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) = \int_0^1 \int_0^y Cxy^2\, dx\, dy = C \int_0^1 y^2 \int_0^y x\, dx\, dy = \frac{C}{10} \implies C = 10$$

(b)

$$\mathbb{P}(Y \geqslant \frac{1}{2}) = 10 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^y xy^2\, dx\, dy = \frac{31}{32}$$

(c) mamy wzór

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} g_{X|Y}(x|Y)\, dx$$

Liczymy więc jego poszczególne elementy

1. **Gęstość względem** Y

$$g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g_{(x,y)}\, dx = 10 \int_0^y xy^2\, dx = 10 \frac{y^4}{2} \mathbf{1}_{y \in (0,1)} = 5y^4 \mathbf{1}_{y \in (0,1)}$$

2. **Gęstość warunkowa**

$$g_{X|Y}(x|y) = \frac{g_{(x,y)}(x,y)}{g_Y(y)} = \frac{10xy^2 \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}}{5y^4 \mathbf{1}_{y \in (0,1)}} = \frac{2x}{y^2} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}$$

3. **Warunkowa wartość oczekiwana**

$$\mathbb{E}((X+Y)^3|Y) = \int_{\mathbb{R}} (x+y)^3 \cdot g_{X|Y}(x|y)\, dx = \frac{49}{10} Y^3 \cdot \mathbf{1}_{\{Y \in (0,1)\}}$$

Przykład 8: Egzamin 2023

Zadanie 8. W urnie znajduje się losowa liczba kul (oznaczmy ją przez N), Jedna z nich jest biała, pozostałe zielone. Gracz losuje kule z urny bez zwracania do momentu wyciągnięcia kuli białej. Niech T oznacza liczbę przeprowadzonych losowań. Zakładając, że $\mathbb{P}(N = n) = \frac{9n}{4^{n+1}}$ dla $n = 1, 2, 3, ...$

a) wyznaczyć rozkład zmiennej T

b) wyznaczyć $\mathbb{E}(N|T)$

wsk. Jeśli Z ma rozkład geometryczny z parametrem p, to $\mathbb{E}Z = \frac{1}{p}$

Rozwiązanie Zadania 8.

a) Mamy

$$\mathbb{P}(T = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T = k|N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n) =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{9n}{4^{n+1}} =$$

$$= 9 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{3}{4^k}$$

b) Przypomnijmy wzór $\mathbb{E}(N = n|T = k) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(N = n, T = k)$. Liczymy więc

$$\mathbb{P}(N = n, T = k) = \frac{\mathbb{P}(T = k, N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(T = k)} = \frac{\frac{9}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4^k}} = \frac{3}{4^{n-k+1}}$$

podstawiamy do wzoru:

$$\mathbb{E}(N = n|T = k) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(N = n, T = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{3n}{4^{n-k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+k)}{4^{n+k-k+1}} =$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} n 4^{-n-1} + 3k \sum_{n=0}^{\infty} n 4^{-n-1} = \frac{1}{3} + k = \frac{1}{3} + T$$