Analiza Matematyczna II.1

Data ostatniej aktualizacji: 18 listopada 2024

Krótki Wstęp

Znacząca część poniższych notatek wzoruje się na stylu materiałów Marysi Nazarczuk, czasem w postaci luźnej inspiracji a czasem chamsko ściągając treść pewnych definicji lub twierdzeń. Bez materiałów Marysi już dawno bym się poddał i mam nadzieję, że nie ma mi za złe inspirowanie się jej ciężką pracą, do której zalecam zajrzeć przed kolokwium i egzaminem ze względu na znacznie większą ilość znajdujących się tam zadań. Uważny czytelnik zauważy też że poniższe notatki przypominają niezwykłe dydaktyczne prace dr Arkadiusza Męcla, które również gorąco polecam.

Link do omówienia pewniaków na egzamin znajduje się tutaj

■ oznaczono twierdzenia i definicje których nieznajomość jest warunkiem wystarczającym do oblania egzaminu z AM II.1. Warunki zostały sformułowane przez dr Annę Zatorską-Goldstein w roku 2023.

1 Topologia w $\mathbb{R}^n$

Definicja 1: Standardowy Iloczyn Skalarny w $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Każdy iloczyn skalarny jest:

- dwuliniowy
- symetryczny
- dodatnio określony

Definicja 2: Norma

Jest to dowolna funkcja $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ spełniająca następujące własności

- dla każdego $\mathbf{x} \in X$ zachodzi $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, przy czym $\|\mathbf{x}\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$(dodatnia określoność)
- dla każdego $\mathbf{x} \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (dodatnia jednorodność)
- dla każdego $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ zachodzi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (nierówność trójkąta)

Definicja 3: p -Norma

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p > 1$$

Definicja 4: Kule

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\} - \text{Kula otwarta}$$
$$\overline{B}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant r\} - \text{Kula domknięta}$$

Twierdzenie 1: O sumie zbiorów otwartych

Suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym (suma dowolnie wielu, nawet nieskończenie)

Twierdzenie 2: O iloczynie zbiorów otwartych

Iloczyn (skończony) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

Definicja 5: Zbiór Zwarty

Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$
NWSR

1. K jest Zwarty
2. Z każdego ciągu elementów $(\mathbf{x}_n \subset K)$ można wybrać podciąg zbieżny do $\mathbf{x} \in K$
3. K jest domknięty i ograniczony

2 Funkcje ciągłe

Definicja 6: Granica funkcji wielu zmiennych

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_{k_l} \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{l>n}{\forall} \|\mathbf{x}_{k_l} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$$

Definicja 7: Ciągłość funkcji wielu zmiennych

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{a} \in A$

$$f \text{ jest ciągła w } \mathbf{a} \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta}{\exists} \mathbf{x} \in A \text{ i } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$$

Inaczej:
Niech $f = (f_1, ..., f_m)$, gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f jest ciągłe w $\mathbf{a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda ze składowych f_i jest ciągła

Twierdzenie 3: Podstawowe twierdzenia funkcji ciągłych

1. Obraz zbioru zwartego w funkcji ciągłej jest zbiorem zwartym.
2. Przeciwobraz zbioru otwartego w funkcji ciągłej jest zbiorem otwartym.
3. Suma, różnica, iloczyn, (porządny) iloraz i (porządne) złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
4. **Tw Weierstrassa** ■
   K - zwarty, $f : K \to \mathbb{R}$, ciągła
   istnieją $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, t. że
   $$f(\mathbf{x}) = \sup_K f \qquad f(\mathbf{y}) = \inf_K f$$
5. **Tw. Cantora o jednostajnej ciągłości**
   Każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jendostajnie ciągła.
6. **Warunek Lipschitza**
   $$f \text{ spełnia na } A \text{ warunek Lipchitza ze stałą } L \iff \underset{\mathbf{x},\mathbf{y}}{\forall} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leqslant L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$
7. **Własność Darboux** ■
   $U \subset \mathbb{R}^n$ spójny i otwarty, $f : U \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Wtedy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ oraz $f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y})$. Wówczas:
   $$\underset{\mathbf{z}\in A}{\exists} f(\mathbf{z}) = c$$

Definicja 8: Równoważność form

$\mathbf{x}$ - przestrzeń linowa

$$\|\cdot\|_A \sim \|\cdot\|_B \iff \underset{0<c_1\leqslant c_2}{\exists}\ \underset{\mathbf{x}\in X}{\forall} c_1\|\mathbf{x}\|_A \leqslant \|\mathbf{x}\|_B \leqslant c_2\|\mathbf{x}\|_A$$

Wszystkie normy w $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

Definicja 9: Przekształcenie liniowe ograniczone

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ - przestrzenie unormowane
$A : X \to Y$ - przekształcenie liniowe
Przekształcenie jest OGRANICZONE jeżeli $\underset{c>0}{\exists} \|A\mathbf{x}\|_Y \leqslant \|\mathbf{x}\|_X$

$$|||A||| = \sup_{\mathbf{x}\in X} \frac{\|A\mathbf{x}\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X \\ \|\mathbf{x}\|_X=1}} \|A\mathbf{x}\|_Y$$

$|||\cdot|||$ jest normą na zbiorze przekształceń z X do Y.

Twierdzenie 4

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ - przestrzenie unormowane
A - przekształcenie linowe
NWSR

1. A jest ciągłe
2. A jest ciągłe w jednym punkcie
3. A jest ograniczone

UWAGA:
Dla przekształceń $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to zachodzi:

$$\|A\| = \sqrt{\textit{Największa wartość własna macierzy } A^T \cdot A}$$

Twierdzenie 5

Przekształcenie linowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spełnia warunek Lipchtiza dla dowolnych norm. Stałe Lipchitza zależą od przyjętych norm

3 Pochodne cząstkowe i kierunkowe

Definicja 10: Pochodna kierunkowa i czątkowa

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, U$ - otwarty
$\mathbf{x}_0$ oraz $h \in \mathbb{R}^n$.
Pochodną kierunkową f w punkcie $\mathbf{x}_0$, w kierunku $\mathbf{h}$ wyrażamy skończoną granicą:

$$\partial_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

Różniczkując w kierunku wektora bazowego e_i, mówimy o POCHODNEJ CZĄSTKOWEJ.
Uwaga: Z istnienia w punkcie pochodnych kierunkowych w dowolnym kierunku nie wynika nawet ciągłość f w $\mathbf{x}_0$.

Definicja 11: Różniczkowalność

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, U$ - otwarty f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}_0 \in U$ jeśli $\exists\, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniowe takie że

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h}\|_B}{\|\mathbf{h}\|_C} = 0$$

gdzie
$\|\cdot\|_B$ - dowolna forma na $\mathbb{R}^m$,
$\|\cdot\|_C$ - dowolna forma na $\mathbb{R}^n$
A nazywamy RÓŻNICZKĄ.
Inaczej:
Niech $f = (f_1, ..., f_m)$, gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda ze składowych f_i jest różniczkowalna.

Twierdzenie 6: Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, U$ - otwarty,
f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}_0 \in U$

$$\iff$$

Istnieją:

1. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
2. Funkcja $r : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \mathbf{h} \in U\} = U_x \to \mathbb{R}^m, r(0) = 0$ ciągłe w 0, t. że

$$\underset{\mathbf{h}\in U_x}{\forall} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + L\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| r(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + L\mathbf{h} + o(\|\|\mathbf{h}\|)$$

Inaczej, $f = (f_1, .., f_m)$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ wtedy i tylko wtedy gdy każda ze składowych f_i jest różniczkowalna w $\mathbf{a}$
Pochodna f w $\mathbf{x}_0$ (o ile istnieje), jest jednoznacznie wyznaczona.

Twierdzenie 7

Jeżeli f ma w $\mathbf{x}$ pochodną kierunkową w kierunku $v \in \mathbb{R}^n$, to ma ją w kierunku $\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$ i $D_v f(x)$ jest jednorodną funkcją v, czyli:

$$D_{\lambda v} f(z) = \lambda D_v f(z)$$

Twierdzenie 8: Związek pomiędzy pochodną kierunkową a różniczką

Jeżeli f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$, to jej pochodne kierunkowe $D_v f(x)$ istnieją dla wszystkich $v \in \mathbb{R}^n$, zachodzi

$$D_v f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})$$

Wniosek:
Jeżeli f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$, to $D_v f(\mathbf{x})$ liniowo zależy od v

Twierdzenie 9

Jeżeli f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$, to też w $\mathbf{x}$ ciągła.

Definicja 12: Różniczkowalność Gateaux

f jest w $\mathbf{x}$ różniczkowalna w sensie Gateaux, jeżeli f ma w $\mathbf{x}$ wszystkie pochodne kierunkowe $D_v f(x)$ oraz przekształcenie $v \mapsto D_v f(x)$ jest linowe

Twierdzenie 10

f jest w $\mathbf{x}$ różniczkowalna to $D_v f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})v$. W szczególności

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{e_i} f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})e_i$$

Twierdzenie 11: Różniczka złożenia funkcji

Niech $A \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^m$ - otwarte. Jeśli

1. $f : A \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{a} \in A$
2. $f(A) \subset B$
3. $g : B \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$,

to złożenie $g \circ f$ jest różnickzowalne w punkcie $\mathbf{a}$ i zachodzi wzór

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a}) \circ Df(\mathbf{a})$$

Definicja 13: Macierz Jacobiego ■

Jeśli $f = (f_1, ..., f_m)$ jest różniczkowalan w $\mathbf{a}$ to jej różncizka ma w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ macierzą

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Gdy $n = m$ to wyznacznik tej macierzy nazywamy Jakobianem w tym punkcie.

4 Gradient. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji i punkty krytyczne

Definicja 14: Gradient

Jest to wektor pochodnych cząstkowych funkcji różniczkowalnej f w punkcie. Wskazuje on w kierunku najszybszego wzrostu funkcji. $\mathbf{x}$.

Twierdzenie 12

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$
U - otwarty
Jeżeli funkcja posiada wszytkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}$ w punktach $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r), r > 0$ oraz są one ciągłe, to wtedy f jest różniczkowalna w $\mathbf{a}$ to zachodzi

$$Df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\right)_{\substack{i=1,..,m \\ \alpha=1,...,n}}$$

Definicja 15: Płaszczyzna styczna do punktu

Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ to płaszczyzną styczną do wykresu f nazywamy zbiór

$$T = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = x_{n+1} - f(\mathbf{a})\}$$

Twierdzenie 13

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$
Jeśli f ma w punkcie $\mathbf{a} \in U$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna to $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

Definicja 16: Punkt Krytyczne

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, to mówimy, że $\mathbf{a}$ jest punktem krytycznym gdy

$$r(Df(\mathbf{a})) < \min\{n, m\}$$

Ekstremum jest oczywiście punktem krytycznym

Dla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ widac że gradient musi mieć rząd 0 (musi się zerować)

Definicja 17: Poziomica Funkcji

$$M_a = \{\mathbf{a} \in U : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\} \subset \mathbb{R}^n$$

Twierdzenie 14: Związek pomiędzy Gradientem a Poziomicą w punkcie ■

Gradient f w punkcie $\mathbf{a}$ jest prostopadły do poziomicy f w tym punkcie.

Definicja 18: Wektor Styczny ■ i Stożek styczny

Nazywamy $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ WEKTOREM STYCZNYM DO $\mathbf{a}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $\{\mathbf{x}_j\} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$, taki że

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ jest styczny do dowolnego zbioru w punkcie.
Zbiór wektorów stycznych do A w punkcie $\mathbf{a}$ nazywamy Stożekiem Stycznym.

Twierdzenie 15

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$
U - otwarty, f ciągła w $\mathbf{a} \in U$
NWSR

1. f jest różniczkowalny w $\mathbf{a}$
2. Stożek styczny do wykresu funkcji f w punkcie $\mathbf{a}$ jest m-wymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{n+1}$ nie zawierającą wektora $(0, .., 0, 1)$

Twierdzenie 16

Inaczej: wektor styczny w punkcie jest prostopadły do gradientu w tym punkcie

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$
U - otwarty, $\mathbf{a} \in U$
f ciągła na pewnej kuli $B(\mathbf{a}, r), r > 0$. Niech

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$$

NWSR

1. $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$ czyli $\underset{\mathbf{x}_j \subset A \setminus \mathbf{a}}{\exists} \lim_{j\to\infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$
2. $\mathbf{w} \perp \nabla f(\mathbf{a})$

5 Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie 17: O wartości średniej - wersja z odcinkiem

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$
U - otwarty, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset U$, f różniczkowalne na $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$
Wtedy

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leqslant \sup_{[a,b]} \|Df(\gamma(t))\| \cdot \|x - y\|$$

Twierdzenie 18: O wartości średniej - wersja z krzywą

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$ - klasy C^1
U - otwarty, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in U$
$\gamma : [a, b] \to U$ klasy C^1, taka że $\gamma(a) = \mathbf{x}, \gamma(b) = \mathbf{y}$
Wtedy

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leqslant \sup_{[a,b]} \|D_f(\lambda(t))\| \cdot l_\gamma$$

gdzie l_γ to długość krzywej

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma^{i,1}(t))^2 dt}$$

6 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora

Definicja 19: II Pochodne Cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}+h, ..., x_n) - f(\mathbf{x})}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{x})$$

Twierdzenie 19: Schwarza

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$
U - otwarty
f - ciągła, różniczkowalna
Jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ istnieje i jest funkcją ciągłą na U, to wtedy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ też istnieje i obie są równe dla $\mathbf{x} \in U$

Twierdzenie 20

Jeśli wszystkie pochodne cząstkowe II rzędu istnieją i są ciągłe, to macierz $D^2 f(\mathbf{x})$ jest macierzą symetryczną

Twierdzenie 21

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$
U - otwarty
$\mathbf{x}_0 \in A$
$D^2 f(\mathbf{x}_0)$ jest macierzą w sensie

$$\underset{i,j,k}{\forall} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f^j}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x}_0)$$

Definicja 20: Wzór Taylora funkcji wielu zmiennych ■

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$
U - otwarty, $\mathbf{x}_0 \in U$
f jest $(k-1)$ krotnie różniczkowalna
$D^k f(\mathbf{x})$ istnieje
$B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$
Wtedy dla $\|\mathbf{h}\| < r$ mamy

$$f(\mathbf{x}_0 + h) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + ... + \frac{1}{k!} D^k f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}) + R(\mathbf{h})$$

gdzie

$$\frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Definicja 21: Ekstremum lokalne funkcji

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f ma w $\mathbf{x}_0$:

- właściwe minimum lokalne, jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu $\mathbf{x}_0$, takie że dla każdego $\mathbf{x}$, ze zbioru U, z wyjątkiem $\mathbf{x}_0$, spełniony jest warunek $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$.
- właściwe maksimum lokalne, jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu $\mathbf{x}_0$, takie że dla każdego $\mathbf{x}$, ze zbioru U, z wyjątkiem $\mathbf{x}_0$, spełniony jest warunek $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$.

Twierdzenie 22: Warunki konieczne istnienia ekstremum lokalnego

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$
U - otwarty, $\mathbf{x}_0 \in U$

1. Jeśli f ma w punkcie $\mathbf{x}_0$ minimum lokalne to $D^2 f(\mathbf{x}_0) \geqslant 0$ jest dodatnio półokreślona
2. Jeśli f ma w punkcie $\mathbf{x}_0$ maksimum lokalne to $D^2 f(\mathbf{x}_0) \leqslant 0$ jest ujemnie półokreślona

Twierdzenie 23: Warunki dostateczne istnienia ekstremum

$f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$
U - otwarty, $\mathbf{x}_0 \in U$
$f \in C(U, \mathbb{R}^2)$ i załóżmy, że f ma w $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$ punkt krytyczny. Niech H będzie macierzą Hessego w punkcie $\mathbf{x}_0$ (na podstawie twierdzenia Schwarza jest ona macierzą symetrzyczną). Wówczas jeśli macierz $H(f)(\mathbf{x}_0)$ jest

1. dodatnio określona, $H(f)(\mathbf{x}_0) > 0$, to f ma w $\mathbf{x}_0$ minimum lokalne
2. ujemnie określona, $H(f)(\mathbf{x}_0) < 0$, to f ma w $\mathbf{x}_0$ maksimum lokalne
3. Jeśli nieokreślona, to f nie ma w $\mathbf{x}$ ekstremum lokalnego
4. w przypadku pół dodatniej określoności $H(f)(\mathbf{x}_0) \geqslant 0$ (odpowiednio pół ujemnej określoności $H(f)(\mathbf{x}_0) \leqslant 0$ nie możemy wykluczyć istnienia lokalnego minimum (odpowiednio maksimum), ale musimy taki przypadek dokładniej zbadać.

Jeśli hesjan w danym punkcie macierzą o wartościach własnych o różnych znakach to nie ma w nim ekstremum lokalnego

Przykład 1: Kolokwium I - 2015

Zadanie 1. $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(\frac{3}{4}x^2+y-1)$. Znaleźć punkty krytyczne f i rozpoznać czy f ma w nich ekstrema lokalne

Rozwiązanie Zadania 1. Musimy znaleźć punkty zerowania się gradientu, liczymy więc pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial x}\left(\frac{3}{4}x^2+y-1\right) + (x^2+y^2-1)\frac{\partial(\frac{3}{4}x^2+y-1)}{\partial x} =$$

$$\bar{(}2x)\left(\frac{3}{4}x^2+y-1\right) + (x^2+y^2-1)\left(\frac{3}{2}x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial y}\left(\frac{3}{4}x^2+y-1\right) + (x^2+y^2-1)\frac{\partial(\frac{3}{4}x^2+y-1)}{\partial y} =$$

$$= 2y\left(\frac{3}{4}x^2+y-1\right) + (x^2+y^2-1)$$

Niech $a = \left(\frac{3}{4}x^2+y-1\right), b = (x^2+y^2-1)$. Mamy

$$\begin{cases} 2xa + \frac{3}{2}xb = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2a + \frac{3}{2}b) = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + \frac{3}{2}b = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -\frac{3}{2}b \\ -3by + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -\frac{3}{2}b \\ b(-3y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2ya + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -\frac{3}{2}b \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tak więc punktami krytycznymi są $(0,-\frac{1}{3}), (0,1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Aby zbadać czy są ekstremami lokalnymi, zbadajmy macierz 2 pochodnej

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 9x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{7}{2} & 3xy + 2x \\ 3xy + 2x & \frac{3x^2}{2} + 6y - 2 \end{bmatrix}$$

$$H(f)\left(0, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad H(f)\,(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad H(f)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$H(f)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{11}{4} \end{bmatrix} \qquad H(f)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Widzimy więc że

1. Hesjan jest w punkcie $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ujemnie określony, ma więc w tym punkcie maksimum lokalne
2. W punkcie $(0,1)$ nie ma ani minimum ani maksimum (hesjan jest nieokreślony)
3. Hesjan jest w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right)$ dodatnio określony, ma więc w tym punkcie minimum lokalne

4. Hesjan jest w punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}\right)$ dodatnio określony, ma więc w tym punkcie minimum lokalne

Jedyne wątpliwości mamy w punkcie $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Zobaczmy, że zbliżając się do tego punktu z dwóch stron po okręgu $x^2+y^2=1$ otrzymujemy zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, więc nie jest on esktremum.

Twierdzenie 24: O lokalnym odwracaniu funkcji ■

Dla $n=1$ twierdzenie ma charakter globalny

Jeśli odwzorowanie $F: U \to V$ klasy C^1 ma w jakimś punkcie $\mathbf{p} \in U$ nieosobliwą pochodną $d_\mathbf{p}F$ ($\det d_\mathbf{p}F \neq 0$), to wówczas istnieją $\delta > 0, V \subset \mathbb{R}^n$ że

1. $f : B(\mathbf{p}, \delta) \to V$ jest bijekcją
2. $g = f^{-1} : V \to f : B(\mathbf{p}, \delta)$ jest klasy C^1
3. $d_g(y) = (df(x))^{-1}, \qquad y = f(x)$

Twierdzenie 25: O funkcji uwikłanej ■

Niech $F = (f_1, ..., f_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy punkt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ taki, że $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Załóżmy, że różniczka $d_\mathbf{y}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ (różniczka F względem zmiennych zależnych y w punkcie $((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))$ jest nieosobliwa czyli

$$\det d_\mathbf{y}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$$

Wówczas istnieje pewne otoczenie $U \ni (x_0, y_0)$ i odwzorowanie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, takie że $y = g(\mathbf{x})$ rozwiązuje równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ w U. To znaczy dla dowolnego $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$ równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.
Uwaga: Zauważmy, że odwzorowanie g spełnia tożsamość $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ w otoczeniu punktu $(\mathbf{x}_0)$. Różniczkując ją względem $\mathbf{x}$ można uzyskać wiedzę o pierwszej różniczce $D_\mathbf{x}g(\mathbf{x})$:

$$d_\mathbf{x}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + d_\mathbf{y}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \circ d_\mathbf{x}g(\mathbf{x}) = 0$$

W szczególności, jeśli regularność F jest wyższa niż C^1, możemy też podnieść regularność g. Kolejne różniczkowania pozwalają obliczyć wyższe pochodne g.

Definicja 22: Rozmaitość (Opis Parametryczny)

Inaczej: Jest to zbiór, który lokalnie, w otoczeniu każdego swojego punktu, jest wykresem pewnej funkcji klasy C^1 wybranych n zmiennych

Zbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ nazywamy ZANURZONĄ ROZMAITOŚCIĄ n-WYMIAROWĄ KLASY C^1 wtedy i tylko wtedy, gdydla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ istnieją:

1. kula $B(\mathbf{p}, r)$ w $\mathbb{R}^{n+m}$
2. n-wymiarowa podprzestrzeń liniowa $P = \text{lin}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$
3. zbiór U otwarty w P (oznaczone jako $U \equiv \mathbb{R}^n$)
4. Istnieją przekształcenia

   $\psi : U \cap M \to V \subset \mathbb{R}^n$(mapa) $\quad$ $\psi : V \to M \subset \mathbb{R}^{n+m}$(lokalna parametryzacja)

   takie że

   - ϕ jest ciągłe
   - ψ jest klasy C^1
   - $\psi = \phi^{-1}$
   - Macierz $D\psi(\mathbf{y})$ jest monomorfizmem liniowym (1-1) we wszystkich punktach $\mathbf{y} \in V$

Stożek Styczny: $T_{\mathbf{p}}M = D\psi(g)(\mathbb{R}^n)$

Definicja 23: Rozmaitość (Opis przez wykres)

Ta definicja mogłaby być bardziej formalna, nie chciało mi się jej rozpisywać

Każdy punkt $\mathbf{p} \in M$ ma otoczenie U_2 takie, że $U_2 \cap M$ jest wykresem funkcji klasy C_1 n zmiennych
Stożek Styczny: $T_{\mathbf{p}}M = \{(v, Df(g)\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ gdzie $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$

Definicja 24: Rozmaitość (Opis przez poziomicę)

Każdy punkt $\mathbf{p} \in M$ ma otoczenie U_3 takie, że $U_3 \cap M$ jest poziomicą regularną funkcji klasy C^1
Stożek Styczny: $T_{\mathbf{p}}M = \ker DF(\mathbf{p})$

Twierdzenie 26: Twierdzenie o Submersji

Niech $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^k. Jeśli w każdym punkcie $\mathbf{p}$ zbioru $M = \{v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(v) = 0\}$ pełna pochodna $d_{\mathbf{p}}F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem liniowym maksymalnego rzędu (równoważnie: jeśli w punkcie $p \in M$ gradienty $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo niezależne), to M jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną.

Ponadto przestrzeń styczna do M w $\mathbf{p}$ to

$$T_{\mathbf{p}}M = \ker d_{\mathbf{p}}F = \{v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid d_{\mathbf{p}}F(v) = 0\}$$

równoważnie

$$T_{\mathbf{p}}M = \{v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid v \perp \nabla f_i(\mathbf{p}) \text{ dla } i = 1, \ldots, k\}$$

Innymi słowy, jeśli chcemy przedstawić fragment zbioru $M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid F(v) = 0\}$ jako wykres pewnej funkcji klasy C^1 (i nie obchodzi nas względem których zmiennych odwracamy równanie $F(\mathbf{b}) = 0$), to wystarczy, aby w macierzy dpF jakiś minor $k \times k$ był odwracalny, czyli równoważnie wystarczy, aby rząd macierzy $d_{\mathbf{p}}F$ był równy k (maksymalny możliwy).

Przykład 2

Zadanie 2. Niech

$$M_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 - y^2 + tz^3 = 0\}$$

Wyjaśnić dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zbiór M_t jest rozmaitością klasy C^1

Rozwiązanie Zadania 2. Niech

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \qquad f_1(x, y, z) = x^2 - y^2 + tz^3 \qquad F = (f_1, f_2)$$

Korzystamy z twierdzenia o submersji, czyli badamy rząd macierzy

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2y & 3tz^2 \end{bmatrix}$$

Zadziałajmy nie wprost, czyli zastanówmy się dla jakiego t ta macierz nie jest pełnego rzędu, czyli

1. $r(DF) = 0$
   Dzieje się tak tylko wtedy gdy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, a to stoi w sprzeczności z f_1
2. $r(DF) = 1$
   Mamy 3 podprzypadki:
   - $x = 0, y = 0, z \in \mathbb{R}$, co nam daje

     $$\begin{cases} z^2 = 1 \\ tz^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \pm 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

   - $x \neq 0, y = 0, z = \frac{2}{3t}$

     $$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + tz^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

     SPRZECZNOŚĆ!
   - $x = 0, y \neq 0, 2z = -3tz^2$

     $$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ -y^2 + tz^3 = 0 \end{cases}$$

     SPRZECZNOŚĆ

Tak więc na podstawie twierdzenia o submersji, na pewno wiemy że dla $t \neq 0$ jest to rozamaitość. Musimy teraz rozważyć przypadek $t = 0, z = \pm 1$:

$$M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 - y^2 = 0\}$$

I tutaj Czytelnik najlepiej zrobi jak sobie narysuje ten zbiór, to przecięcie sfery jednostkowej z dwoma płaszczyznami, tworzące zbiór przypominający przecięcie dwóch obręczy. Czujemy więc że koncepcja rozmaitości popsuje się nam właśnie w tych przecięciach. Argument czemu jest bardzo prosty. Rozmaitość jednowymiarowa jest lokalnie obrazem funkcji ciągłej odcinka. Usuwając punkt z odcinka, rozpadnie się on może na co najwyżej 2 składowe spójne. Natomiast biorąc otoczenie jednego z takich przecięć, usunięcie samego punktu przecięcia powoduje rozpad na 4 składowe spójne, co powoduje że opis przez wykres nie może mieć miejsca.

Twierdzenie 27: O mnożnikach Lagrange'a

Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ i odwzorowanie $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, oba klasy C^1, i niech $M = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\mathbf{a}) = 0\}$. Jeśli funkcja $g|_M : M \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $p \in M$, to zachodzi jedna z dwóch sytuacji:

1. Gradienty $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_k(p)$ są liniowo zależne (to znaczy F nie spełnia założeń twierdzenia o submersji w $\mathbf{p}$ i w konsekwencji nie wiemy, czy M jest rozmaitością w otoczeniu $\mathbf{p}$).
2. Gradient $\nabla g(\mathbf{p})$ jest kombinacją liniową gradientów $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$, to znaczy istnieją stałe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (zwane mnożnikami Lagrange'a) takie, że

$$\nabla g(\mathbf{p}) = \lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{p}) + \ldots + \lambda_k \nabla f_k(\mathbf{p})$$

W obu przypadkach gradienty $\nabla g(\mathbf{p}), \nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo zależne.

Uwaga: W przypadku, gdy gradienty $\nabla f_1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{p})$ są liniowo niezależne, przestrzeń styczna $T_{\mathbf{p}}M$ jest prostopadła do każdego z nich. Zatem warunek drugi w powyższym twierdzeniu oznacza, że $\nabla g(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}M$. Wynika stąd, że dla każdego $v \in T_{\mathbf{p}}M$ pochodna $\partial_v g(\mathbf{p}) = \langle v, \nabla g(p) \rangle = 0$, a więc w pierwszym rzędzie przybliżenia funkcji g nie zmienia się wzdłuż M w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$.

Przykład 3: Egzamin 0 - 2024

Zadanie 3. Wyznaczyć maksymalną i minimalną wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{20}z^2$$

na zbiorze $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 10, x^2 + y^2 - z = 0\}$

Rozwiązanie Zadania 3.
Pierwszą rzeczą którą warto zauważyć jest fakt, że A jest zbiorem zwartym. Czemu?

$x + 2y + z = 10$ opisuje płaszczyznę skośną (nie jest ona równoległa do żadnej płaszczyzny wyznaczanej przez osie), a $x^2 + y^2 - z = 0$ a opisuje paraboloidę obrotową. Proste rachunki pokazują że przecięcie płaszczyzny i paraboloidy tworzą elipsę, będącą zbiorem zwartym.

Oznacza to, że funkcja f przyjmuje na A swoje kresy.

Przyjmijmy teraz że

$$f_1(x, y, z) = x + 2y + z - 10, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad F = (f_1, f_2)$$

$$\nabla f(x, y, z) = [2x, 2y, -\frac{1}{10}z] \quad \nabla f_1(x, y, z) = [1, 2, 1], \quad \nabla f_2(x, y, z) = [2x, 2y, -1]$$

Musimy sprawdzić czy F jest epimorfizmem liniowym na A, czyli że macierz

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \end{bmatrix}$$

jest pełnego rzędu na A. Jedynym punktem w którym rząd jest mniejszy niż 2 jest gdy $x = -\frac{1}{2}, y = -1$, ale dla punktów takiej postaci jesteśmy poza A
Sprawdzamy więc kandydatów na ekstrema, korzystając z tw. o mnożnikach Lagrange'a.
Badamy kombinację $\nabla f = a\nabla f_1 + b\nabla f_2$

$$\begin{cases} 2x = a + 2xb \\ 2y = 2a + 2yb \\ -\frac{1}{10}z = a - b \end{cases} \implies \begin{cases} y = a + yb \\ 2x - y = b(2x - y) \\ -\frac{1}{10}z = a - b \end{cases}$$

Widzimy że musimy rozważyć 2 przypadki:

1. $b = 1$
   Łatwo otrzymujemy że $a = 0$ i dostajemy rozwiązania $\left(\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 10\right)$

2. $2x = y$

$$\begin{cases} 2x = y \\ x + 2y + z = 10 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = y \\ 5x + z = 10 \\ 5x^2 - z = 0 \end{cases} \implies 5x^2 + 5x - 10 = 0 \implies$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies (x - 1)(x + 2) = 0$$

   Mamy więc dwa potencjalne punkty, $(1, 2, 5), (-2, -4, -20)$

Tak więc teraz podstawiamy nasze punkty do wzoru na funkcję f i znajdujemy maksimum oraz minimum:

$$f(\pm 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 10) = 5 \quad f(1, 4, 5) = 3\frac{3}{4}, \quad f(-2, -4, 20) = 0$$

Definicja 25: Dyfeomorfizm

Odwzorowanie $F : U \to V$ pomiędzy podzbiorami otwartymi $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy DYFEOMORFIZMEM, gdy:

- F jest bijekcją, co oznacza, że istnieje odwzorowanie odwrotne $F^{-1} : V \to U$,
- F i F^{-1} są różniczkowalne (ponieważ różniczkowalność pociąga za sobą ciągłość, F jest jednocześnie homeomorfizmem).

W przypadku, gdy F i F^{-1} są różniczkowalne klasy C^k, mówimy o DYFEOMORFIZMACH KLASY C^k.

Twierdzenie 28

Niech odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^k będzie bijekcją pomiędzy zbiorami otwartymi $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Jeśli pochodna $d_{\mathbf{p}}F$ jest nieosobliwa w każdym punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, to F jest dyfeomorfizmem klasy C^k.

Twierdzenie 29: Grupowe własności dyfeomorfizmów

Dyfeomorfizmy mają własności grupowe:

- Jeśli $F : U \to V$ jest dyfeomorfizmem, to $F^{-1} : V \to U$ też jest dyfeomorfizmem.
- Jeśli $F : U \to V$ i $G : V \to W$ to dyfeomorfizmy, to złożenie $G(F) : U \to W$ to też dyfeomorfizm.

7 Teoria Miary

Definicja 26: Ciało zbiorów

Definicja: Rozważmy zbiór X. CIAŁEM ZBIORÓW nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ o następujących własnościach:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $X \setminus A \in \mathcal{F}$
3. jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cup B \in \mathcal{F}$

Definicja 27: σ-Ciało zbiorów

σ-CIAŁEM ZBIORÓW nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ o następujących własnościach:

1. $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów.
2. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$, to również $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicja 28: Miarą zewnętrzną na X

Rozważmy zbiór X. MIARĄ ZEWNĘTRZNĄ NA X nazywamy funkcję $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ o następujących własnościach:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$

2. Jeśli $A \subseteq B$, to $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ (monotoniczność)

3. $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (przeliczalna podaddytywność)

Powiemy, że zbiór $A \subseteq X$ jest μ^*-mierzalny, gdy spełnia następujący warunek Caratheodoty'ego: dla dowolnego $Z \subseteq X$ zachodzi $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$.

W szczególności łatwo pokazać, że jeśli $\mu^*(A) = 0$, to A jest μ^*-mierzalny. Rodzinę wszystkich podzbiorów μ^*-mierzalnych będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Definicja 29: Miarą na $\mathcal{F}$

Rozważmy σ-ciało $F \subseteq 2^X$. Miarą na $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ o następujących własnościach:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów parami rozłącznych, to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad \text{(przeliczalna addytywność)}$$

Definicja 30: Warunek Carathéodory'ego

Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Powiemy, że zbiór $A \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

dla każdego zbioru $Z \subset X$.

Twierdzenie 30

Jeśli μ^* jest miarą zewnętrzną na X i $\mu^*(A) = 0$ dla pewnego $A \subset X$, to A spełnia warunek Carathéodory'ego.

Definicja 31: Zbiór μ^*-mierzalny

Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Każdy zbiór $A \subset X$ spełniający warunek Carathéodory'ego, nazywamy zbiorem μ^*-mierzalnym

Definicja 32: Miara zewnętrzna metryczna

Niech (X, σ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że miara zewnętrzna $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną metryczną, jeśli

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

dla wszystkich $A, B \subset X$, których odstęp $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, gdzie

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \quad \operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \operatorname{dist}(x, y).$$

Twierdzenie 31

__Inaczej__: Wszystkie zbiory borelowskie są mierzalne

Niech (X, σ) będzie przestrzenią metryczną, zaś μ^* – miarą zewnętrzną metryczną na X. Wówczas σ-ciało zbiorów borelowskich $\mathscr{B}(X)$ jest zawarte w σ-ciele $\mathscr{F}(\mu^*)$.

Definicja 33: Przedziały n-wymiarowe

Załóżmy, że $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ i $x \prec y$. Zbiory

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \prec \mathbf{z} \prec \mathbf{y}\}$$

oraz

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \preccurlyeq \mathbf{z} \preccurlyeq \mathbf{y}\}$$

nazywamy, odpowiednio, N-WYMIAROWYM PRZEDZIAŁEM OTWARTYM i N-WYMIAROWYM PRZEDZIAŁEM DOMKNIĘTYM o końcach x i y. Odcinki $[x_i, y_i] \subset \mathbb{R}$ nazywamy KRAWĘDZIAMI takich przedziałów.

Definicja 34: Objętość przedziału n-wymiarowego

Jeśli P jest przedziałem o końcach $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $x \prec y$, to liczbę

$$\mathrm{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i)$$

nazywamy OBJĘTOŚCIĄ PRZEDZIAŁU P.

Definicja 35: Miara zewnętrzna metryczna

Dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ kładziemy

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_j) : \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ jest rodziną przedziałów pokrywającą } A \right\}.$$

Definicja 36: Zbiór klasy G_δ

Zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się ZBIOREM KLASY G_δ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory otwarte $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, takie, że

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Definicja 37: Zbiór klasy F_σ

Zbiór F nazywa się ZBIOREM KLASY F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy jego uzupełnienie $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem klasy G_δ.

Twierdzenie 32: Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a

Wnioskiem z tego jest to, że każdy zbiór A jest sumą pewnego zbioru borelowskiego i pewnego zbioru miary zero

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$.
NWSR

(i) $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ (jest mierzalny w sensie Lebesgue'a);

(ii) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $A \subset \Omega$ i $\lambda_n^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon$;

(iii) Istnieje zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ typu G_δ taki, że $A \subset G$ i $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$;

(iv) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon$;

(v) Istnieje zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ typu F_σ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) = 0$.

Twierdzenie 33

Dla każdego przedziału P zachodzi $\text{vol}(P) = \lambda_n(P)$.

Twierdzenie 34

Dla każdego zbioru $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ i każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zbiór $\mathbf{x} + A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i $\lambda_n(\mathbf{x} + A) = \lambda_n(A)$.

Twierdzenie 35

Załóżmy, że μ jest miarą na σ-ciele $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli $\mu(A) = \mu(\mathbf{x} + A)$ dla wszystkich $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i ponadto $\mu(P)$ jest skończona i dodatnia dla każdego przedziału P, to wówczas

$$\mu(A) = c \cdot \lambda_n(A), \quad A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),$$

gdzie $c = \mu([0, 1]^n)$.

Definicja 38: Funkcja Mierzalna

Mówimy, że funkcja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna (względem σ-ciała $\mathscr{F}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

należy do $\mathscr{F}$. Jeśli $X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda_n$, to mówimy o FUNKCJACH MIERZALNYCH W SENSIE LEBESGUE'A.
Własności:

1. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) \leqslant a\} \in \mathscr{F}$;
2. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathscr{F}$;
3. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) \geqslant a\} \in \mathscr{F}$.
4. jeśli $f, g : X \to \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi, to zbiory
$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) \geqslant g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$
należą do σ-ciała $\mathscr{F}$.
5. przeciwobraz $f^{-1}(B)$ każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ jest mierzalny
6. Niech f_j, będzie dowolnym ciągiem funkcji mierzalnych. Wówczas każda z funkcji
$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j$$
jest mierzalna.
7. Jeśli ciąg funkcji mierzalnych f_j jest zbieżny punktowo na X, to $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ jest funkcją mierzalną.
8. Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a funkcje $f, g : X \to \mathbb{R}$ są mierzalne. Wówczas mierzalna jest każda z funkcji
$$\alpha \cdot f, \quad \alpha f + \beta g, \quad f^2, \quad fg, \quad |f|, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g).$$
9. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to złożenie $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną.

Definicja 39: Funkcja Prosta

Funkcję mierzalną $f : X \to \mathbb{R}$, która ma skończony zbiór wartości, nazywamy FUNKCJĄ PROSTĄ.

Twierdzenie 36

Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, \ldots, A_k \in F$ oraz różne elementy $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \chi_{A_j}$$

Twierdzenie działa też gdy zbiory A_j nie są parami rozłączne.

Twierdzenie 37: Rozkład na Funkcje Proste ■

Jeśli $f : X \to [0, \infty]$ jest funkcją mierzalną, to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych $f_n : X \to [0, \infty]$ zbieżny do f punktowo na X.
Jeśli ponadto f jest ograniczona, to istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych zbieżny do f jednostajnie na X.

Twierdzenie 38: N. Łuzina

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$, że $f|_F$ jest ciągła i $\lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$.

Twierdzenie 39: M. Frécheta

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a, to istnieje ciąg funkcji ciągłych $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zbieżny do f prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$.

8 Całka Lebesque'a

Definicja 40: Rozbicie zbioru mierzalnego

Załóżmy, że $E \in \mathscr{F}$ jest mierzalnym podzbiorem X. Mówimy, że skończona lub przeliczalna rodzina $\mathcal{P} = \{E_1, E_2, \dots\}$ zbiorów E_i jest rozbiciem E wtedy i tylko wtedy, gdy E_i są mierzalne, parami rozłączne i $E = \bigcup E_i$.

Zbiór wszystkich rozbić danego zbioru mierzalnego E oznaczamy $R(E)$.

Definicja 41: Całka funkcji nieujemnej

Załóżmy, że funkcja mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ jest nieujemna na zbiorze mierzalnym $E \subset X$. Kładziemy wówczas

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu(x) = \sup\left(\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \mu(E_i)\right),$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich rozbiciach $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$ zbioru E.
Własności całek nieujemnych:

1. Liniowość całki
$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu.$$
2. **Monotoniczność całki**
Jeśli $0 \leqslant f \leqslant g, \qquad f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sa mierzalne, to:
$$\int_E f(x)\,d\mu(x) \leqslant \int_E g(x)\,d\mu(x).$$
3. **O wartości średniej**
Jeśli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i nieujemna na zbiorze E, to
$$\mu(E) \cdot \inf_{x \in E} f \leqslant \int_E f(x)\,d\mu(x) \leqslant \mu(E) \cdot \sup_{x \in E} f.$$
4. **Całka z funkcji stałej**
$$\int_E c\,d\mu = c \cdot \mu(E)$$

5. **Całka z funkcji zerowej**

$$\text{Jeśli } \mu(E) = 0, \text{ to } \int_E f\, d\mu = 0$$

6. **Addytywność całki**
Funkcja
$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathscr{F}$$
jest miarą na σ-ciele $\mathscr{F}$ gdy zbiór $E \in \mathscr{F}$ jest sumą skończoną lub przeliczalną zbiorów mierzalnych i parami rozłącznych E_i, to
$$\int_E f\, d\mu = \sum_i \int_{E_i} f\, d\mu.$$

7. $$\int_{E_1} f\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu$$
dla każdego zbioru mierzalnego $E_1 \subset E$.

8. Jeśli funkcje mierzalne f, g są nieujemne i równe prawie wszędzie na zbiorze $E \in \mathscr{F}$, to
$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

9. Jeśli $\int_E f\, d\mu = 0$, to $f = 0$ prawie wszędzie na E.

Twierdzenie 40: Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej

Załóżmy, że ciąg funkcji mierzalnych $f_j : X \to \mathbb{R}$ jest niemalejący, a wszystkie funkcje f_j są nieujemne na zbiorze $E \in \mathscr{F}$. Wówczas
$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\, d\mu.$$

Definicja 42: Całka Lebesgue'a dla funkcji ogólnych

Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, $E \subset X$ jest zbiorem mierzalnym, i co najmniej jedna z całek $\int_E f_+\, d\mu$, $\int_E f_-\, d\mu$ jest skończona, to przyjmujemy
$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$
Jeśli obie te całki są skończone, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna na E.
Własności:

1. Jeśli $f = c$ jest stała na zbiorze E, to
$$\int_E f\, d\mu = c\mu(E)$$

2. Jeśli $\mu(E) = 0$
$$\int_E f\, d\mu = 0$$

3. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na zbiorze $E \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $|f|$ jest całkowalna na E.

4. Funkcja f całkowalna na $E \subset X$ jest skończona prawie wszędzie w E.

5. **Monotoniczność całki**: jeśli $f \leqslant g$ na zbiorze E i całki z obu funkcji są określone, to $\int_E f\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu$.

6. **Własność wartości średniej**: dla każdej funkcji f całkowalnej na E jest
$$\inf_E f \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant \sup_E f \cdot \mu(E)$$

7. **Nierówność trójkąta**: jeśli $\int_E f\, d\mu$ jest określona, to
$$|\int_E f\, d\mu| \leqslant \int_E |f|\, d\mu$$

8. **Przeliczalna addytywność całki jako funkcji zbioru**: Jeśli E jest sumą zbiorów $E_i \in \mathcal{F}$ parami rozłącznych, a f jest całkowalna na E, to
$$\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$$

9. **Liniowość całki**: jeśli całki funkcji f, g są określone na E i ich suma też jest określona (tzn. nie jest wyrażeniem $\infty - \infty$), to
$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$$

Twierdzenie 41: Lemat Fatou

Jeśli funkcje $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, są mierzalne i są nieujemne na zbiorze mierzalnym $E \subset X$, to
$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j\, d\mu \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\, d\mu.$$

Twierdzenie 42: Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

Załóżmy, że funkcje $f_j, f : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, są mierzalne i $|f_j| \leqslant g$, gdzie $g : X \to [0, \infty]$ jest funkcją całkowalną. Jeśli $f_j(x) \to f(x)$ prawie wszędzie w X, to
$$\lim_{j\to\infty} \int_X |f_j - f|\, d\mu = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \int_X f_j\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Przykład 4: Egzamin 0 - 2024

Zadanie 4. Niech

$$f_{n,\alpha} = \left(1+\frac{2x}{n^2}\right)^{\alpha n^2} e^{-3\alpha n} \text{dla n } \in \mathbb{N}, \alpha > 0$$

Wyznaczyć granicę

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} f_{n,\alpha}\, d\lambda_1\right)$$

Rozwiązanie Zadania 4. Chcemy skorzystać z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, z $g(x) = e^{-\alpha x}$ jako majorantą. Sprawdźmy więc założenia:

1. $f_{n,\alpha}$ są mierzalne
   Funkcje $f_{n,\alpha}$ są ciągłe, a wszystkie funkcje ciągłe są mierzalne.

2. $|f_{n,\alpha}| \leqslant g$

$$\left|\left(1+\frac{2x}{n^2}\right)^{\alpha n^2} e^{-3\alpha n}\right| \leqslant e^{-\alpha x}$$

$$\left(1+\frac{2x}{n^2}\right)^{\alpha n^2} \leqslant e^{2\alpha x}$$

$$\left(1+\frac{2x}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{2x}$$

   Co jest z kolei znaną nierównością z AM I.1.

3. Majoranta jest granica punktową (prawie wszędzie) $f_{n,\alpha}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n^2}\right)^{\alpha n^2} e^{-3\alpha n} = e^{2x\alpha}\cdot e^{-3x\alpha} = e^{-\alpha x}$$

Są zatem spełnione założenia twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, czyli możemy wejść z granicą pod całkę:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} f_{n,\alpha}\, d\lambda_1\right) = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_{(0,1)} e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{\alpha\to 0^+} -\frac{e^{-\alpha\cdot 1}}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha\cdot 0}}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{e^{-\alpha}-1}{-\alpha}$$

Co jest znaną granicą równą 1.

Twierdzenie 43: Bezwzględna ciągłość całki jako funkcji zbioru

Jeśli f jest funkcją całkowalną na zbiorze mierzalnym E, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\int_A |f|\, d\mu < \epsilon$$

dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset E$ o miarze $\mu(A) < \delta$.

Twierdzenie 44: Związek Całek Lebesque'a i Riemanna

Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, całkowalną w sensie Riemanna, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $[a,b]$. Obie całki – Riemanna i Lebesgue'a – funkcji f są równe.

Dowód:

Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest na $[a,b]$:

- ograniczona
- całkowalna w sensie Riemanna

Z całkowalności w sensie Riemanna wynika mierzalność. Oczywiście całka Lebesgue'a modułu takiej funkcji nie przekracza $M(b-a)$, gdzie $M = \sup |f|$. Niech P będzie dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$, a $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ oznacza końce odcinków tworzących ten podział. Wobec addytywności całki jako funkcji zbioru całka Lebesgue'a

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{J_i} f \, d\lambda^1, \text{ gdzie } J_i = [x_{i-1}, x_i] \text{ dla } i = 1, \ldots, N.$$

Z monotoniczności całki

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \sup_{J_i} f = \sum_{i=1}^{N} \sup_{J_i} f \cdot \lambda_1(J_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{J_i} f \, d\lambda_1 \text{ (ta suma jest całką Lebesgue'a dla } f)$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \inf_{J_i} f = \sum_{i=1}^{N} \inf_{J_i} f.$$

Lewa i prawa strona powyższych nierówności są, odpowiednio, górną i dolną sumą całkową Riemanna dla podziału P. Zatem $G(f,P) \geqslant \int_{[a,b]} f \, d\lambda^1 \geqslant D(f,P)$ dla każdego podziału P. Biorąc kres dolny lewych stron i kres górny prawych stron względem wszystkich podziałów $[a,b]$, sprawdzamy, że całka Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1$ jest nie większa od całki górnej Riemanna funkcji f i nie mniejsza od całki dolnej Riemanna funkcji f:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \inf_P G(f,P) \geqslant \int_{[a,b]} f \, d\lambda_1 \geqslant \sup_P D(f,P) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Ponieważ f jest całkowalna w sensie Riemanna, więc jej całka dolna i całka górna Riemanna są równe całce (Riemanna!) $\int_a^b f(x) \, dx$. Dlatego całki Lebesgue'a i Riemanna funkcji f na $[a,b]$ są równe.

Twierdzenie 45: O dyfeomorficznej zamianie zmiennych

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem klasy C^1 zbioru Ω na $\Phi(\Omega)$. Załóżmy, że f jest funkcją całkowalną (lub mierzalną i nieujemną) względem miary Lebesgue'a λ^n na $\Phi(\Omega)$. Wtedy $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest całkowalna (odpowiednio, mierzalna i nieujemna) na zbiorze Ω i zachodzi równość

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda^n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda^n$$

Twierdzenie 46: Fubiniego

Niech $f : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją całkowalną (lub mierzalną w sensie Lebesgue'a i nieujemną). Wówczas:

1. Dla λ^n-prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i λ^m-prawie wszystkich $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, funkcje $f_{\mathbf{x}}(y) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oraz $f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ są mierzalne odpowiednio względem $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ i $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

2. Funkcje
$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\lambda^m(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\lambda^n(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$$
są mierzalne odpowiednio względem σ-ciał $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$.

3. Zachodzą równości
$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\, d\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\lambda^m(\mathbf{y}) \right) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\lambda^n(\mathbf{x}) \right) d\lambda^m(\mathbf{y})$$

Przykład na istotność założeń:
Pokażemy, że założenie całkowalności f w twierdzeniu Fubiniego jest istotne. Wybierzmy ciąg liczb $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < 1$, $\lim a_j = 1$. Dla $j \in \mathbb{N}$ niech $g_j : [0,1] \to [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$ (np. kawałkami liniową), znikającą poza przedziałem $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ i taką, że $\int_0^1 g_j(x)\, dx = 1$. Połóżmy
$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j(x) - g_{j+1}(x)) g_j(y), \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Zauważmy, że dla każdego punktu $(x,y) \in [0,1]^2$ szereg, określający f, ma co najwyżej jeden składnik niezerowy (trzeba dobrać j_0 tak, aby $y \in [a_{j_0-1}, a_{j_0}]$; dla $j \neq j_0$ jest $g_j(y) = 0$). Dlatego f jest dobrze określoną funkcją mierzalną.

Nietrudno zauważyć (proszę na rysunku zaznaczyć w kwadracie $[0,1]^2$ zbiór, gdzie funkcja $f \neq 0$, a następnie zbadać całki z f po odcinkach $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$), że
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{I_j} g_j(y) \left(\int_0^1 g_j(x) - g_{j+1}(x)\, dx \right) dy \right) = 0,$$
jednak
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{I_j} \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \right) =$$
$$= \int_{I_1} \left(\int_{I_1} g_1(x) g_1(y)\, dx\, dy \right) = 1.$$

Wyniki są różne, gdyż $\int_{[0,1]^2} |f|\, d\lambda^2 = \infty$, tzn. f nie jest całkowalna na kwadracie $[0,1]^2$.