Analiza Matematyczna I.2

Data ostatniej aktualizacji: 16 sierpnia 2023

Kręgosłup poniższych notatek opracował Eryk Werens w roku 2022, przykłady pochodzą z zadań opracowanych przez kadrę profesorską Wydziału MIM UW
Za redakcję, oprawę graficzną i uzupełnienie definicji odpowiada Michał Posiadała.
(Pociąg wiedzy nieustannie za nim podążał, lecz on zawsze był szybszy)

Definicje ważnych klas zbiorów

Definicja 1: Zbiór zwarty

Zbiór $K \subset \mathbb{R}$ jest **zwarty** wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu $(x_n) \subset K$ można wybrać taki podciąg zbieżny (x_{n_k}), że $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} \in K$.
Własności

1. Zbiór $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty $\iff$ K jest domknięty i ograniczony
2. Przedział domknięty $[a, b]$ jest zbiorem zwartym

Definicja 2: Zbiór Domknięty

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest **domknięty** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbieżnego ciągu $(x_n) \subset A$ zachodzi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in A$.
Własności:

1. Każdy zbiór zwarty jest domknięty
2. Przedział domknięty $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym
3. Zbiorami domkniętymi oraz otwartymi jednocześnie są $\mathbb{R}$ oraz $\varnothing$

Definicja 3: Zbiór otwarty

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest **otwarty** wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x_o \in X}\ \exists_{\varepsilon > 0}\ (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon) \subseteq X$.
Własności:

1. Przedziały otwarte (a, b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ są zbiorami otwartymi
2. Zbiorami otwartymi oraz domkniętymi jednocześnie są $\mathbb{R}$ oraz $\varnothing$

Zbiór A jest domknięty $\iff$ Zbiór $\mathbb{R} \setminus A$ jest otwarty

Definicja 4: Zbiór wypukły

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy wypukłym, jeśli dla dowolnych x, $y \in A$ i dowolnego $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.
W przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie $n > 1$ powyższa definicja ma zgrabną interpretację geometryczną. Mianowicie zbiór wypukły to taki, w którym dla dowolnych dwóch punktów z tego zbioru odcinek je łączący też leży w tym zbiorze.

Definicja 5: Punkt skupienia zbioru

Niech $A \subset \mathbb{R}$. Punkt $a \in \bar{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(a_n) \subset A \setminus \{a\}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Punkt skupienia zbioru A nie musi należeć do A.

Ciągłość funkcji

Definicja 6: Definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji

Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_o \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in A}{\forall} \quad |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

Należy to rozumieć, że dla małego wzrostu argumentu, wartość funkcji rośnie mało.

Definicja 7: Definicja Heinego ciągłości funkcji

Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_o \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_o ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ zbiega do $f(x_o)$.
Łatwo posługiwać się tą definicją, żeby wskazywać brak ciągłości funkcji w punkcie $x_o \in A$. Wystarczy znaleźć takie dwa ciągi x_n, y_n zbieżne do x_o takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

Definicja 8: Ciągłość jednostajna

O funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ powiemy, że jest jednostajnie ciągła na $B \subseteq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in B}{\forall} \ \underset{y\in B}{\forall} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Różnica między zwykłą ciągłością, a jednostajną jest taka, że w jednostajnej dla każdego ε bierzemy jedną δ dobrą dla dowolnego x i y.
Własności

1. Funkcja ciągła jest jednostajnie ciągła na dowolnym przedziale domkniętym.
2. Funkcja ciągła na przedziale $(a, +\infty)$ jest na nim jednostajnie ciągła, jeśli $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
3. Funkcja ciągła nie jest jednostajnie ciągła, jeśli istnieją ciągi (x_n), $(y_n) \subset A$ takie, że $x_n - y_n \to 0$ i $f(x_n) - f(y_n) \to a \neq 0$.

Definicja 9: Ciągłość lipshizowska

Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła lipshizowsko na $B \subseteq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x,y\in B}{\forall} \ \underset{L\in\mathbb{R}}{\exists} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|$$

Własności:

1. Funkcja ciągła lipshtizowsko jest ciągła jednostajnie, ale niekoniecznie na odwrót.
2. Funkcja ciągła jest ciągła lipshizowsko wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna tej funkcji jest funkcją ograniczoną

Przykład 1

Zadanie 1. Czy funkcja
$$f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$$

(a) Jest lipschitzowska na $\mathbb{R}$

(b) Jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$

Rozwiązanie Zadania 1.

(a) Liczymy pochodną:
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\sin x + \ln(1+x^2)\sin x$$
Widzimy, że f' jest nieograniczona, więc f nie spełnia warunku Lipschitza

(b) Korzystamy z definicji Heinego ciągłości jednostajnej. Niech $a_n = 2\pi c_n$, gdzie c_n jest pewnym ciągiem składającym się z liczb naturalnych oraz niech $b_n = a_n + d_n$, gdzie d_n jest ciągiem liczb nieujemnych zbieżnym do zera. Wówczas $b_n a_n = d_n \to 0$ przy $n \to \infty$ oraz
$$f(b_n) - f(a_n) = f(b_n) = ln(1+(b_n)^2)\sin b_n = ln(1+(2\pi c_n + d_n)^2) \cdot \frac{\sin d_n}{d_n}$$
Dobrze wiemy, że drugi czynnik zbiega do 1. Wobec tego dla dostatecznie dużych n możemy napisać:
$$|f(b_n) - f(a_n)| \geqslant \frac{1}{2} d_n \ln(1+c_n^2)$$
Wynika stąd, że funkcja nie jest jednostajnie ciągła, bo możemy wziąć na przykład $c_n = [e^{\frac{n}{2}+1}+1]$ i $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, co prowadzi do
$$|f(b_n) - f(a_n)| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \ln(1+e^n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2} \to \infty$$

Twierdzenie 1: Weierstrassa o przyjmowaniu kresów

Jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją takie argumenty $c, d \in [a,b]$, że $f(c) = \sup\limits_{[a,b]} f$ oraz $f(d) = \inf\limits_{[a,b]} f$. Innymi słowy, funkcja ciągła na przedziale domkniętym gdzieś przyjmie skończoną wartość największą i najmniejszą.

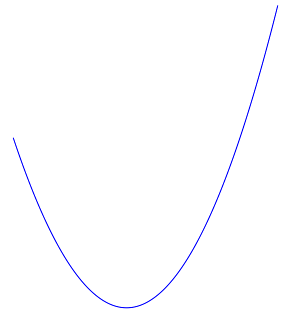
Twierdzenie 2: Własność Darboux

Jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego przedziału $(c,d) \subset [a,b]$ i dla każdej wartości $y_o \in (f(c), f(d))$ - o ile $f(c) < f(d)$ - istnieje takie $x_o \in (c,d)$, że $f(x_o) = y_o$.
Innymi słowy, jeśli funkcja ciągła przyjmuje dla argumentów x_1 i x_2 pewne wartości, to przyjmuje ona wszystkie wartości pośrednie dla argumentów między x_1 i x_2.

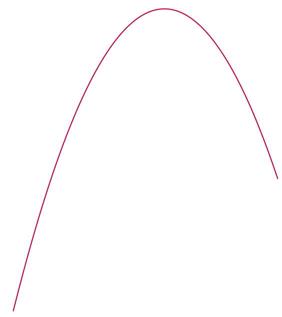
Wypukłość i wklęsłość funkcji

Definicja 10: Definicja funkcji wypukłej

Funkcję $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest zbiorem wypukłym, nazwiemy funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x,y\in A}{\forall} \ \underset{\lambda\in(0,1)}{\forall} \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
Funkcją wypukła wygląda „mniej więcej” następująco



Z kolei funkcja wklęsła wygląda „mniej więcej” tak



Twierdzenie 3: Nierówność Jensena

Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest zbiorem wypukłym, jest wypukła to dla x_1, ..., $x_n \in A$ oraz t_1, ..., $t_n \in (0,1)$ takich, że $\sum t_i = 1$ zachodzi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Czasami nierówność Jensena jest przydatna do wykazywania nierówności. Należy znaleźć wtedy funkcję „wiodącą” i spróbować dokonać przekształceń, dzięki którym łatwo będzie widać wagi.

Przykład 2

Zadanie 2. Udowodnić nierówność $a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{2(a+b+c)(bc+ac+ab)}$ dla dodatnich a, b, c.

Rozwiązanie Zadania 2. W oczy rzuca się pierwiastek kwadratowy obecny po obu stronach nierówności. Należy jednak uważać, gdyż funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest wklęsła, więc kierunek nierówności w nierówności Jensena się odwraca. Chwilę należy się zastanowić nad możliwością dobrania wag, ale dość oczywistym jest, że będą to $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$, które oczywiście sumują się do 1. Żeby jednak mieć te wagi w widocznej formie, należy podzielić nierówność przez $a+b+c > 0$.

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{2(a+b+c)(bc+ac+ab)} \quad | : (a+b+c)$$

$$\frac{a}{a+b+c}\sqrt{b+c} + \frac{b}{a+b+c}\sqrt{c+a} + \frac{c}{a+b+c}\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{\frac{2(bc+ac+ab)}{a+b+c}}$$

Teraz możemy już skorzystać z nierówności Jensena. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) = \frac{a}{a+b+c}\sqrt{b+c} + \frac{b}{a+b+c}\sqrt{c+a} + \frac{c}{a+b+c}\sqrt{a+b}$$

Wobec tego

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b+c}\cdot(b+c) + \frac{b}{a+b+c}\cdot(c+a) + \frac{c}{a+b+c}\cdot(a+b)}$$

Upraszczając, dostajemy

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sqrt{\frac{2(bc+ac+ab)}{a+b+c}}$$

Więc teza wynika bezpośrednio z twierdzenia Jensena.

Twierdzenie 4

Jeśli funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest przedziałem, spełnia warunek

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

to f jest wypukła.

Twierdzenie 5

Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest przedziałem, jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe równoważne warunki dla dowolnych $x < y < z$, x, y, $z \in A$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Rachunek Różniczkowy

Definicja 11: Pochodna funkcji w punkcie

Niech $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru A oraz niech $f : A \to \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f w punkcie a nazwiemy (o ile istnieje) granicę właściwą następującej postaci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Pochodne funkcji elementarnych:

- $(\sin\, x)' = \cos\, x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\text{tg } x)' = 1 + \text{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\text{ctg } x)' = -\left(1 + \text{ctg}^2\, x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
- $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$
- $(x^a)' = a x^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Twierdzenie 6

Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in A$ pochodną, to jest ona w tym punkcie ciągła.

Definicja 12: Definicja pochodnej prawostronnej funkcji w punkci

Niech $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $A \cap [a, +\infty)$ oraz niech $f : A \to \mathbb{R}$. Pochodną prawostronną funkcji f w punkcie a nazwiemy (o ile istnieje) granicę właściwą następującej postaci

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas, jeśli istnieje $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ i jest to wartość skończona, to $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$.

Uwaga

- Rózniczkowalność w punkcie a pociąga za sobą ciągłość w punkcie a.
- Ciągłość w punkcie a jest konieczna, ale nie dostateczna do różniczkowalności w a.
- Różniczkowalność na przedziale (a,b) pociąga za sobą ciągłość na przedziale $[a,b]$
- $f'(a)$ istnieje $\iff$ $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ istnieją oraz $f'_+(a) = f'_-(a)$

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, to zachodzi

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Przykładem jest choćby funckja $f(x)=|x|$ i punkt $a=0$.

Twierdzenie 7: Pochodna funkcji odwrotnej

Przy odpowiednich założeniach i o ile $f'(a)\neq 0$ oraz $f(a)=b$ mamy

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Jeśli $f'(a)=0$, to f^{-1} nie jest różniczkowalna w b.

Przykład 3

Zadanie 3. Niech $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie okreslona wzorem $f(x)=x+\cos(x)$.

(a) Wykaż, że f jest odwracalna

(b) Wyznacz dziedzinę funkcji odwrotnej (uwaga: należy to wykazać, a nie tylko zapostulować)

(c) Wyznacz zbiór punktów różniczkowalności funkcji odwrotnej

(d) Wyznacz pochodną funkcji odwrotnej w punkcie $\frac{3+2\pi}{6}$

Rozwiązanie Zadania 3.

(a) Pominiemy tutaj dokładniejsze rozwiązanie, kluczem jest (proste) pokazanie że f jest monotoniczna i ciągła

(b) Rozszerzając argumenty z poprzedniego podpunktu, f jest bijekcją, więc dzidziną funkcji odwrotnej będzie $\mathbb{R}$

(c) Patrząc na twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej, musimy sprawdzić gdzie pochodna f jest równa 0:

$$f'(x) = 1-\sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

(d) Zauważmy że $f(x)$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej, oraz $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2} = \frac{3+2\pi}{6}$, tak więc;

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3+2\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Definicja 13: Styczna do wykresu funkcji

Prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_o ma następujący wzór

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

Twierdzenie 8: Pochodna w zerze funkcji parzystych i nieparzystych

Jeśli funkcja $f : I \to$ jest parzysta, $(2n)$ - krotnie różniczkowalna na I oraz różniczkowalna $(2n + 1)$ - krotnie w zerze, to $f^{(2n+1)}(0) = 0$.
Jeśli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta, $(2n - 1)$ - krotnie różniczkowalna na I oraz różniczkowalna $(2n)$ - krotnie w zerze, to $f^{(2n)}(0) = 0$.

Twierdzenie 9: Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie $(2n - 1)$ - krotnie różniczkowalna na (a, b) oraz niech będzie $(2n)$ - krotnie różniczkowalna w $x_o \in (a, b)$.
Jeśli $f'(x_o) = f''(x_o) = ... = f^{(2n-1)}(x_o) = 0$ oraz $f^{(2n)} = a \neq 0$, to f ma w x_o ekstremum lokalne.

Twierdzenie 10: Warunek dostateczny nieistnienia ekstremum

Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie $(2n)$ - krotnie różniczkowalna na (a, b) oraz niech będzie $(2n + 1)$ - krotnie różniczkowalna w $x_o(a, b)$.
Jeśli $f'(x_o) = f''(x_o) = ... = f^{(2n)}(x_o) = 0$ oraz $f^{(2n+1)} = a \neq 0$, to f **nie** ma w x_o ekstremum lokalne. Czyli jeśli pochodne aż do jakiegoś parzystego stopnia się zerują, ale kolejna pochodna nieparzystego stopnia się nie zeruje, to nie mamy ekstremum. W sytuacji z powyższego przykładu, jeśli $f'(x_o) = 0$ i $f''(x_o) = 0$, to jeśli $f'''(x_o) \neq 0$, to mamy gwarancję **braku** ekstremum lokalnego w x_o.

Twierdzenie 11: Reguła de L'Hôpitala

Niech funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne na (a, b). Ponadto niech istnieje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{\mathbb{R}}$ i niech $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x) \neq 0$. Jeśli spełniony jest jeden z warunków

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

to $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Warto zwrócić uwagę na drugi punkt. O ile mianownik dąży do nieskończoności, to nie interesuje nas, do czego dąży $f(x)$.

Twierdzenie 12: Twierdzenie Fermata

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ i niech $c \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $a < c < b$. Jeśli f jest różniczkowalna w c oraz ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.
Implikacja w drugą stronę **nie musi** być prawdziwa, jednak jeśli założymy, że w c znak pochodnej się zmienia, to mamy wtedy gwarację, że znaleźliśmy ekstremum.

Twierdzenie 13: Twierdzenie Rolle'a

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) oraz niech $f(a) = f(b)$. Wtedy $\exists_{\zeta\in[a,b]}\ f'(\zeta) = 0$

Twierdzenie 14: Twierdzenie Lagrange'a

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a, b]$ i rózniczkowalna na (a, b). Wówczas $\exists_{\zeta\in(a,b)}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta)$.

Twierdzenie 15: Własność Darboux

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie rózniczkowalna na (a, b). Wówczas funkcja $f'(x)$ ma własność Darboux, **nawet jeśli $f'(x)$ nie jest funkcją ciągłą**.

Twierdzenie 16: o monotoniczności

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie rózniczkowalna na (a, b). Jeśli $[c, d] \subset (a, b)$, to f jest nierosnąca na $[c, d]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x\in(c,d)}\ f'(x) \leqslant 0$.

Twierdzenie 17: o ścisłej monotoniczności

Jeśli $\forall_{x\in(c,d)}\ f'(x) < 0$, to f jest ściśle malejąca, ale implikacja przeciwna nie jest prawdziwa. Możemy jednak zapisać mocniejszy warunek, który pozwoli nam wykryć każdy przypadek funkcji ściśle malejącej lub rosnącej. Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie rózniczkowalna. Wówczas f jest ścisle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą oba poniższe warunki

1. $\forall_{x\in I}\ f'(x) \leqslant 0$
2. $\forall_{J\subset I}\ \exists_{x\in J}\ f'(x) > 0$ o ile J jest przedziałem niejednoelementowym

W zadaniach wystarczy, jeśli pokażemy, że pochodna zeruje się w skończenie lub przeliczalnie wielu punktach.

Twierdzenie 18: o wypukłości

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie podwójnie rózniczkowalna na (a, b). Jeśli $[c, d] \subset (a, b)$, to f jest wypukła na $[c, d]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x\in(c,d)}\ f''(x) \geqslant 0$ lub równoważnie gdy f' jest niemalejąca.

Szeregi Taylora

Definicja 14: Ogólna postać szeregu Taylora rozwiniętego w x_o

Niech funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I oznacza przedział, będzie $(n-1)$ - krotnie rózniczkowalna na I oraz n - krotnie różniczkowalna w $x_o \in I$. Wówczas

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + r_n(x),$$

gdzie $r_n(x)$ jest resztą.
Resztę możemy zapisać w postaci Peano (jako po prostu $o((x-x_o)^n)$) lub w postaci Lagrange'a.
Reszta w postaci Lagrange'a ma postać

$$\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}$$

, gdzie $\zeta \in (x, x_o)$ o ile $x < x_o$ (używana głownie do przybliżeń).
Podstawowe szeregi rozwinięte w $x_o = 0$:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n)$

Przykład 4

Zadanie 4. Oblicz $\sqrt[10]{e}$ z dokładnością do 10^{-8}

Rozwiązanie Zadania 4. Wykorzystamy wzór Taylora z resztą Lagrange'a. Zastanówmy się w jakim punkcie chcemy rozwijać $f(x) = e^x$. Znamy wartość dla $x_0 = 0$, więc takie będzie dla nas najwygodniejsze. Rozważmy więc rozwinięcie do n-tego wyrazu

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2! \cdot 10^2} + ... + \frac{1}{10^n \cdot n!} + R_n\left(\frac{1}{10}\right), \qquad R_n\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

Musimy znaleźć takie n żeby ten błąd był mniejszy niż 10^{-8}:

$$\left|\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{10^{n+1}}\right)\right| < 10^{-8}$$

Pytanie dotyczy stałej c, którą musimy w jakiś sposób oszacować, a wiemy że $e^c < e^{\frac{1}{10}} < 2$. Tak więc mamy nierówność:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{10}\right)\right| < \frac{2}{(n+1)!10^{n+1}} < \frac{1}{10^8}$$

Szukamy wiec jak najlepszego n (możliwie małego) aby powyższe było prawdziwe. Takim n jest $n = 5$, więc szukane przybliżanie jest równe:

$$\sqrt[10]{e} \approx T_{e^x,5}$$

Ciągi funkcyjne

Definicja 15: Zbieżność punktowa

Ciąg funkcji (f_n) jest zbieżny punktowo na przedziale A do funkcji $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Definicja 16: Zbieżność jednostajna

Następujące warunki są równoważne:

- (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale A do funkcji $f(x)$
- $\underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{N\geqslant n_0}{\exists} \; \underset{x\in A}{\forall} \; \underset{n\geqslant N}{\forall} \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

Wynikają z tego dwie ważne metody badania zbieżności jednostajnej:

Metoda 1: Zachodzenie zbieżności jednostajnej

Niech $a_n = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$. Jeśli istnieje taki ciąg $b_n \to 0$, taki że

$$\underset{x\in A}{\forall} \; |f_n(x) - f(x)| \leqslant b_n$$

to $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do f.

Metoda 2: Brak zachodzenia zbieżności jednostajnej

Jeśli istnieje $(x_n) \subset A$ oraz $a > 0$, oraz zachodzi:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant a$$

to f_n nie jest jednostajnie zbieżny na A.

Przykład 5

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność jednostajną $f_n(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$ na $\mathbb{R}$

Rozwiązanie Zadania 5.
Zbadajmy granicę punktową, wychodzi ona $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Sprawdźmy czy ciąg jest jednostajnie zbieżny poprzez podstawienie ciągu $x_n = \sqrt{n}$.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \sqrt{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{\sqrt{n}^2}{n}\right) - 0 \right| = \sqrt{n} \cdot \ln 2 \longrightarrow +\infty$$

Tak więc na podstawie powyższej metody, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$

Twierdzenie 19: Ciągłość granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych

Jeśli $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$ i $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f_n$ jest funkcją ciągłą na A, to f jest ciągła na A.

Twierdzenie 20: O zamianie kolejności granic

Jeśli $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$ i $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \exists : \lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)$ to $\lim\limits_{x\to b^-}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)\right)$.
Poniższe twierdzenie jest fajnym i często łatwym do sprawdzenia kryterium zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego.

Twierdzenie 21: Pierwsze twierdzenie Diniego

Ciąg funkcji (f_n) jest zbieżny jednostajnie na K do funkcji f, jeśli spełnione są warunki:

1. ciąg f_n zbiega punktowo na K do funkcji f
2. K jest zbiorem zwartym (czyli np. przedziałem domkniętym. Twierdzenie nie stosuje się, gdy K jest np. przedziałem otwartym lub $\mathbb{R}$)
3. funkcje f_n oraz f są ciągłe
4. $\underset{x\in K}{\forall}\ f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \dots$, czyli $\underset{x\in K}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$

Twierdzenie 22: Drugie twierdzenie Diniego

Ciąg funkcji (f_n) jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$ do funkcji f, jeśli spełnione są warunki:

1. ciąg (f_n) zbiega punktowo na $[a,b]$ do f,
2. f jest ciągłe (f_n nie muszą być),
3. wszystkie funkcje f_n są nierosnące

Uwaga: Funkcje tutaj nie musza być ciągłe

Twierdzenie 23: Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje ciąg wielomianów P_n o wyrazach rzeczywistych taki, że $P_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.
Twierdzenie nie musi być prawdziwe w przypadku funkcji np. na przedziale otwartym lub na całym $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 24: Osłabione twierdzenie Weierstrassa

Jeśli $f \in C((a,b))$ i $a,\ b \in \bar{\mathbb{R}}$, to istnieje ciąg wielomianów P_n o wyrazach rzeczywistych taki, że P_n zbiega **niemal jednostajnie** na (a,b) do f.

Twierdzenie 25: O różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

Niech $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Załóżmy że:

- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do g.
- istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki że $(f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny

Wówczas

- f_n jest jednostajnie zbieżny do f
- $f' = g$

Szeregi Funkcyjne

Definicja 17: Zbieżność punktowa szeregu

Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny punktowo na pewnym przedziale I wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x_o \in I} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny. Do badania zbieżności punktowej możemy swobodnie stosować kryteria dla zwykłych szeregów liczbowych. Warunkiem koniecznym zbieżności punktowej na A jest zbiezność punktowa na A ciagu f_n do 0.

Definicja 18: Zbieżność jednostajna

Do jej badania nie wystarczą kryteria dla zwykłych szeregów liczbowych. Stosuje się do tego kryteria Weierstrassa, Abela oraz Dirchleta.

Warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ na A jest $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} 0$.

Definicja 19: Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{m>n>N}{\forall} \ \underset{x\in A}{\forall} \ |\sum_{k=n}^{m} f_n(x)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 26: Weierstrassa

Na odcinku $[a, b]$ każdą funkcję ciągłą przedstawić jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

Przykład 6

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność jednostajną $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2(x^2+1)}$ na $\mathbb{R}$

Rozwiązanie Zadania 6.
Funkcja $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2(x^2+1)}$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$, więc prawdziwe będzie szacowanie:

$$\left|\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2(x^2+1)}\right| \leqslant \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

A wiem że szereg jest zbieżny jednostajnie na podstawie kryterium Weierstrassa, ponieważ szereg o wyrazie $\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 27: Kryterium zbieżności Abela

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$ oraz $\forall_{x\in A}\ f_n(x) \geqslant 0$. Dodatkowo niech ciąg $(f_n(x))$ będzie monotoniczny. Wówczas jeśli spełnione są jednocześnie oba poniższe warunki:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na A,
2. prawie wszystkie f_n są funkcjami ograniczonymi,

to $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na A.

Za $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ można wziąć zwykły szereg liczbowy (czyli coś niezależnego od x), bo szereg taki jest jednostajnie zbieżny.

Przykład 7

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność jednostajną szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$ na $[0, +\infty)$.

Rozwiązanie Zadania 7.
Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

jest jednostajnie zbieżny, bo jest to szereg liczbowy zbieżny z kryterium Leibniza. Ponadto $f_n(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$ jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym. Mamy spełnione warunki kryterium Abela, więc nasz szereg jest zbiezny jednostajnie na $[0, +\infty)$.

Twierdzenie 28: Kryterium zbieżności Dirchleta

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$ oraz $\forall_{x\in A}\ f_n(x) \geqslant 0$. Dodatkowo niech ciąg $(f_n(x))$ będzie monotoniczny. Wówczas jeśli spełnione są jednocześnie oba poniższe warunki

1. sumy częściowe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ są wspólnie ograniczone,
2. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} 0$,

to $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na A. Za $g_n(x)$ możemy wziąć na przykład $\sin(nx)$, bo sumy częściowe $\sum_{n=0}^{N} g_n(x)$ są ograniczone.

Przykład 8: Douczki 2023

Zadanie 8. Czy szereg jest jednostajnie zbieżny na $[t, 2\pi - t]$ dla $t \in (0, \pi)$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)(x-t)^n}{\sqrt{x+n}(2\pi - 2t)^n}$$

Rozwiązanie Zadania 8. Weźmy

- $f_n(x) = \sin nx$
- $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}$
- $h_n(x) = \frac{(x-t)^n}{(2\pi-2t)^n}$

Wiemy że
$$\sum_{n=1}^{N} f_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\cos\frac{x}{2}+1}{2\sin\frac{x}{2}}$$
Więc sumy częsciowe $\sum f_n$ są ograniczone.
Dodatkowo, $g_n \rightrightarrows 0$ na zadanym przedziale. Tak więc na podstawie kryterium Dirichleta, szereg $\sum f_n g_n$ jest jednostajnie zbieżny.
Zauważmy teraz, że funkcje h_n są funkcjami ograniczonymi (wynika to z przedziału), więc szereg $\sum f_n g_n h_n$ jest szeregiem jednostajnie zbieżnym z kryterium Abela.

Twierdzenie 29: Ciągłość funkcji wyznaczonej przez szereg funkcyjny

Jeśli szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest

- zbieżny jednostajnie na $[a, b]$
- wszystkie funkcje f_n są ciągłe na $[a, b]$

to $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$.
UWAGA: Ciągłość na każdym przedziale $[a, b] \subseteq$ daje nam ciągłość $\mathbb{R}$.
Twierdzenie odwrotne nie musi być prawdziwe. Może być tak, że $f(x)$ jest ciągłe nawet jeśli nie ma jednostajnej zbieżności albo mamy jakieś funkcje nieciągłe f_n (co do ostatniego brak pewności). Każde zadanie najlepiej zacząć od zbadania jednostajnej zbieżności, a jakieś dodatkowe punkty ciągłości badać indywidualnie, sprawdzając choćby zbieżność punktową

Przykład 9

Zadanie 9. Wykaż, że funkcja
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5+n^5}$$
jest dobrze określona oraz jest klasy C^1 na przedziale $[0, \infty)$

Rozwiązanie Zadania 9.
Funkcja jest dobrze określona kiedy ten szereg jest zbieżny punktowy. My udowodnimy coś więcej, że jest zbieżny niemal jednostajnie. Rozważmy każdy przedział $[a, b] \subseteq [0, \infty)$. Wtedy prawdziwa jest nierówność:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5+n^5} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\max\{a^3, b^3\}}{n^5}$$
Szereg jest więc zbieżny niemal jednostajnie, czyli jest też zbieżny punktowo.
Aby udowodnić że funkcja jest klasy C^1 na $[0, \infty)$, musi być ona niemal jednostajnie zbieżna (to już mamy), oraz wszystkie funkcje f_n

Twierdzenie 30: Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie

Rozpatrzmy funkcję wyrażoną za pomocą szeregu funkcyjnego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Jeśli f_n są różniczkowalne na $(a, b)/[a, b]$ oraz

- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ jest niemal jednostajnie zbieżny/jednostajnie zbieżny
- $\underset{x_o \in (a,b)/[a,b]}{\exists}$ takie że $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_o)$ jest zbieżny (wystarczy tylko jeden taki punkt)

to funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest różniczkowalna na odpowiednich przedziałach i

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

W większości zadań nic więcej nie trzeba robić.

Przykład 10: Określoności szeregu funkcyjnego

Badanie określoności funkcji na danym przedziale sprowadza się do badania zbieżności punktowej na tym przedziale.

Zadanie 10. Pokaż że funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ jest określona na $[0, +\infty)$

Rozwiązanie Zadania 10. Zauważmy że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Szereg jest więc zbieżny jednostajnie na podstawie kryterium Weierstrassa, jest więc też zbieżny punktowo.

Przykład 11: Różniczkowalność szeregu funkcyjnego

Sprowadza się do to do sprawdzenia czy jest spełnione twierdzenie o różniczkowaniu wyraz po wyrazie, **pamiętajmy że wygląda to inaczej na przedziale otwartym i zamkniętym**.

Zadanie 11. Udowodnij że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Jest różniczkowalna na $[0, \infty)$.

Rozwiązanie Zadania 11.

Twierdzenie 31: Twierdzenie o granicy kątowej

Jeśli promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest równy 1 i szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Szereg Potęgowy

Definicja 20: Szereg Potęgowy

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_o \in$ i współczynnikach $a_n \in$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$. Oczywiście możemy rozpatrywać szereg o wyrazach rzeczywistych, ale należy znać twierdzenia odnoszące się do przypadku zespolonego.
.

Definicja 21: Promień Zbieżności

Promieniem zbieżności nazywamy liczbę $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Jeśli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, to $R = +\infty$, a jeśli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, to $R = 0$. Rozważmy dwa przypadki:

Należy wiedzieć także, że jeśli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$, to $a_n = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}$

Metoda 3: Promień Zbieżności - Przypadek Rzeczywisty

Dla szeregu potęgowego o promieniu zbieżności R i środku w punkcie x_o definiujemy **przedział zbieżności** jako przedział $(x_o - R,\ x_o + R)$. Na tym przedziale nasz szereg jest zbieżny punktowo (**niekoniecznie jednostajnie**), a na przedziale $[c, d] \subset (x_o - R,\ x_o + R)$ jest zbieżny jednostajnie (czyli cały szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na $(x_o - R,\ x_o + R)$) oraz bezwzględnie. Zbieżność dla $x_o = -R$ oraz $x_o = R$ należy sprawdzać oddzielnie. Zdarza się, że szereg potęgowy jest zbieżny dla $x_o = -R$, ale jest rozbieżny dla $x_o = R$ lub na odwrót. Czasami też jest zbieżny w obu tych punktach lub żadnym. Zbiorem zbieżności nazywamy przedział zbieżności z ewentualnie dołożonym punktem $-R$ lub R.

Jeśli dla pewnego $\zeta > 0$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - x_o)^n$ jest zbieżny, to dla $0 < \delta < \zeta$ jest on zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[x_o - \delta,\ x_o + \delta]$.

Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w jednym z brzegów (np. x_o+R), to jest on zbieżny jednostajnie na $[x_o, x_o + R]$ (w dowodzie używa się kryterium Abela i rozpatruje się sprytną postać szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x - x_o}{R}\right)^n$.

Metoda 4: Promień Zbieżności - Przypadek Zespolony

Wszystkie powyższe wnioski są w mocy z dokładnością do specyfiki liczb zespolonych. Zamiast o przedziale zbieżności będziemy mówić o kole zbieżności, czyli zbiorze$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < R\}$ Wewnątrz koła zbieżności, czyli na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| \leqslant \delta\}$, gdzie $\delta < R$, szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Kwestia zbieżności na brzegu koła zbieżności jest „niealgorytmiczna” - brak ogólnego sposobu na badanie tego.

Jeśli dla pewnego $\zeta \in \mathbb{C}, \zeta \neq 0$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z_o)^n$ jest zbieżny, to dla $0 < \delta < |\zeta|$ jest on zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na kole domkniętym o promieniu δ czyli na $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| \leqslant \delta\}$.

Twierdzenie 32: Ciągłość w promieniu zbieżnosci

Poza kołem domkniętym o promieniu R oraz zbiorem zbieżności szeregi potęgowe są rozbieżne. Funkcja wyznaczona przez szereg potęgowy jest ciągła wewnątrz koła zbieżności i ma w nim pochodne wszystkich rzędów. Jeśli szereg potęgowy o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny na którymś końcu zbioru zbieżności (załóżmy, że dla $x_o + R$), to funkcja wyznaczona przez ten szereg jest ciągła na $(x_o - R,\ x_o + R]$.

Twierdzenie 33

Niech $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Funkcję F można rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie y_0 dla dowolnego $y_0 \in K(x_0, R)$. Nowy szere jest postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(y-y_0)^n$$

jest na pewno zbieżny w każdym punkcie $|y-y_0| < R - |y_0 - x_0| = R_1$

Twierdzenie 34: Arzeli-Ascoliego

Niech $A \subset \mathbb{R}$-zbiór zwarty.

Rodzina $\mathcal{F} \in C(A)$ jest zwarta $\iff$ $\mathcal{F}$ jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła.

Całki

Twierdzenie 35: Podstawowe wzory całkowe

- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
- $\int -\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + c$

Twierdzenie 36: Całkowanie przez części całki nieoznaczonej

Niech $f, g \in C^1(I)$. Wówczas

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

Metoda 5: Całkowanie funkcji wymiernych

- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^k} \, dx = \frac{x^{1-k}}{1-k} + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$

Definicja 22: Ułamki proste

Ułamki proste I i II rodzaju

$$\frac{A}{(x-x_0)^k} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^k}, \qquad p^2 - 4q < 0$$

Metoda 6: Całkowanie ułamka prostego I rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = \begin{cases} k=1: & A\cdot\ln|x-x_0|+C \\ k>1: & \frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}}+C \end{cases}$$

Metoda 7: Całkowanie ułamka prostego II rodzaju

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^k}\,dx = \begin{cases} k=1: & \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C \\ k>1: & \text{Rekurencja}+C \end{cases}$$

Metoda 8: Całkowanie $R(\sin x, \cos x)$

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Metoda 9: Całkowanie $R(x,\sqrt{ax+b})$

$$\int R(x,\sqrt{ax+b})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a},t\right)\frac{2t}{a}\,dt$$

Metoda 10: Całkowanie $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

Rozważymy przypadki i będziemy stosować liniową zamianę zmiennych (lzz):

- $a<0, \Delta>0$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \overset{\text{lzz}}{=} \int R(y,\sqrt{1+y^2})\,dy\ \ y \overset{\text{lzz}}{=} \sinh x$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a},t\right)\frac{2t}{a}\,dt$$

Definicja 23: Całka Newtona

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ciągła
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ - jakakolwiek funkcja pierwotna f
Całką Newtona nazywamy wtedy:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b) = F(x)\Big|_a^b$$

Własności:

- Liniowość
$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$$
- Całkowanie przez podstawianie
Niech $g:[a,b]\to g([a,b])$ klasy C^1, $f:g([a,b])\to\mathbb{R}$ ciągła.
$$\int_a^b \alpha f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- Całkowanie przez części
  Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą klasy C^1, wtedy
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
- Monotoniczność całki
  Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągłe. Wtedy jeśli $f(x) \geqslant g(x)$ to
$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$$
  Jeżeli dodatkowo $f(x) > g(x)$ na (a, b), to
$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$
- Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła. Wtedy:
$$\min_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \max_{[a,b]} f$$
- Addytywność całki względem przedziału całkowania
  Niech P przedział, $f : P \to \mathbb{R}$ ciągła, $a, b, c \in P$. Wówczas
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$
- funkcja $|f|$ jest CWR oraz
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Przykład 12

Zadanie 12. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$$

Rozwiązanie Zadania 12.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \boxed{\begin{array}{l}\sqrt[6]{x}=t, \\ dx = 6t^5 dt\end{array}} = 6\int \frac{t^3}{1+t}dt$$

Przykład 13: Ograniczenia dla Całki

Zadanie 13. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}dx$$

Rozwiązanie Zadania 13. Zauważmy, że $f(x) = \frac{x}{x^5+1}$ jest malejąca dla $x > 1$, mamy więc:

$$\sup_{[n,n+1]} \frac{x}{x^5+1} = \frac{n}{n^5+1} \to 1 \qquad \inf_{[n,n+1]} \frac{x}{x^5+1} = \frac{n+1}{(n+1)^5+1} \to 1$$

Widać więc że nasza granica będzie równa 1

Twierdzenie 37: Zerowe Twierdzenie o Wartości Średniej

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągłe. Wtedy istnieje takie $c \in [a, b]$, takie że:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Twierdzenie 38: O sumie całkowej

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Twierdzenie 39: Własności całki jako funkcji górnej granicy całkowania

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie CWR, a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Wtedy

- F jest ciągła na każdym $[a, b]$
- jeśli f jest ciągła w $x_0 \in (a, b)$, to F jest różniczkowalna w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$
- jeśli f jest funkcją ciągłą, to F jest funkcją pierwotną dla f

UWAGA: domkniętość $[a, b]$ nie jest tutaj istotna, równie dobrze mógłby to być otwarty (a, b)

Przykład 14: Zerówka 2023

Zadanie 14.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Rozwiązanie Zadania 14.
Korzystamy z twierdzenia o sumie całkowej (w tym przypadku indeksowanie od 0 nic nie zmienia, pierwszy wyraz to i tak 0). Zauważmy że dla $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x\sqrt{2-x^2}$ mamy:

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Liczymy więc całkę:

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx=\boxed{\begin{array}{c}2-x^2=t,\\ -2xdx=dt\end{array}}=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

Przykład 15

Zadanie 15. Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}$$

Rozwiązanie Zadania 15.
Aby skorzystać tutaj z twierdzenia o sumie całkowej, przykładamy logarytm:

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Zauważmy że dla $f(x):[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x):\ln(1+x)$ mamy:

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Liczymy więc całkę

$$\int_0^1\ln(1+x)=\boxed{\begin{array}{r}x+1=t,\\ dx=dt\end{array}}=\int_1^2\ln(t)=(t\ln(t)-t)\Big|_1^2=2\ln(2)-1=\ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

Korzystając więc z ciągłości funkcji wykładniczej, granica naszej oryginalnej funkcji wynosi $\frac{4}{e}$

Twierdzenie 40: O przejściu granicznym pod znakiem całki

Załóżmy, że funkcje $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe i $f_n\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

Przykład 16

Zadanie 16. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \ln\left(x+\frac{x^5}{n}\right)dx$$

Rozwiązanie Zadania 16. Wiemy, że ciąg funkcyjny $\ln\left(x+\frac{x^5}{n}\right)$ jest jednostajnie zbieżny do $\ln(x)$ na $[1,2]$, więc możemy wejść z granica pod całkę, co daje

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \ln\left(x+\frac{x^5}{n}\right)dx = \int_1^2 \ln(x) = 2\ln 2 - 2 - 1\ln 1 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

Definicja 24: Całka Riemanna

Funkcje jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy

$$\underset{I\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{P}{\forall}\underset{\xi}{\forall}\,\delta(P)<\delta \implies |S(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$$

Wnioski:

- Funkcja CWR jest ograniczona
- Twierdzenia z całki Newtona dotyczące dodawania, mnożenia i przemnażania przez skalar całki przechodzą na Całkę Riemanna
- Jeśli funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest monotoniczna, to jest CWR.

Definicja 25: Miara Zewnętrzna Jordana

Niech I_j - odcinki domknięte niezdegenerowane do punktu takie że $A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Wtedy miara zewnętrzna A to

$$|A| = \inf\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|$$

INACZEJ: Pokrywamy A odcinkami, sumujemy ich długość i bierzemy infimum takich sum po wszystkich możliwych pokryciach.

Twierdzenie 41: Całkowalność Riemanna a miara zewnętrzna Jordana

NWSR:

- $f\in\mathcal{R}([a,b])$
- Miara zewnętrzna Jordana zbioru punktów nieciągłości f na $[a,b]$ jest równa zero

Twierdzenie 42: I Całkowe Twierdzenie o Wartości Średniej

Jeśli , $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f jest ciągła, g - CWR i nieujemna, to istnieje taka liczba $c\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Twierdzenie 43: Całkowalność Riemanna a funkcje ciągłe

Całki Newtona i Riemanna się pokrywają na funkcjach ciągłych.

Przykład 17: Egzamin 2023

Zadanie 17. Funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

(a) Znajdź wszystkie ekstrema lokalne oraz przedziały monotoniczności (maksymalne) funkcji g.

(b) Zbadaj czy g jest ograniczona.

Rozwiązanie Zadania 17.

(a) Niech $f(t) = e^{-t^2}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że f jest funkcją ciągłą, więc posiada funkcję pierwotną. Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $F' = f$. Skoro całki Newtona i Riemanna pokrywają się na funkcjach ciągłych otrzymujemy

$$g(x) = F(3x) - F(2x) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Widzimy, że funkcja g wyraża się jako różnica złożeń funkcji różniczkowalnych, więc sama też jest różniczkowalna. Ponadto

$$g'(x) = 3F'(3x) - 2F'(2x) = 3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Wyznaczamy punkty krytyczne

$$g'(x) = 0 \iff e^{-4x^2}\left(3e^{-5x^2} - 2\right) = 0 \iff e^{-5x^2} = \frac{3}{2} \iff x \in \left\{-\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{5}}, \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{5}}\right\}$$

Niech $x_1 = -\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{5}}$ oraz $x_2 = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{5}}$ Znak pochodnej zależy tylko od znaku wyrażenia $3e^{-5x^2} - 2$, które jest dodatnie dla $x \in (x_1, x_2)$ oraz ujemne dla $x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$. Stąd g jest malejąca na $(-\infty, x_1)$, rosnąca na (x_1, x_2) i znów malejąca na (x_2, ∞). Wnioskujemy, że w punkcie x_1 funkcja g ma minimum lokalne, a w x_2 maksimum lokalne. Są to jej jedyne ekstrema lokalne, bo g jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$ i nie ma więcej punktów krytycznych

(b) Wykażemy teraz, że g jest ograniczona. Zauważmy, że $g(-x) = -g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, tj. g jest nieparzysta. Wystarczy zatem pokazać, że g jest ograniczona na $[0, \infty)$. Wiemy już, że g jest różniczkowalna, a w szczególności ciągła, więc jest ograniczona na każdym zbiorze zwartym. Pokażemy, że $\lim\limits_{x\to\infty}$ g(x) = 0. Skoro $e^{-t^2} > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$, więc $g(x) > 0$ dla $x > 0$, dla którego mamy

$$0 \leqslant g(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt \leqslant \int_{2x}^{3x} \sup\left\{e^{-s^2} : s \in [2x, 3x]\right\} dt = xe^{-4x^2} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

Zatem

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

a stąd g jest ograniczona na $[0, \infty)$ co kończy też dowód ograniczoności na $\mathbb{R}$.

Przykład 18

Autor: Sławomir Kolasiński

Zadanie 18. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Wykazać, że prawdziwa jest nierówność:

$$3\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx \geqslant 2\int_0^1 f(x)dx$$

Rozwiązanie Zadania 18.

Równoważnie, rozważmy znak wyrażenia $3\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx - 2\int_0^1 f(x)dx$. Mamy:

$$\int_0^1 f(x)(3\sqrt{x}-2)dx$$

Zauważmy, że obie funkcje są całkowalne w sensie Riemanna, a wiemy że $f(x)$ jest monotoniczne, możemy więc skorzystać w II twierdzenia o wartości średniej, czyli istnieje takie $c \in [0,1]$, że:

$$\int_0^1 f(x)(3\sqrt{x}-2)dx = f(0)\int_0^c(3\sqrt{x}-2)+f(1)\int_c^1(3\sqrt{x}-2)dx = f(0)(2c^{\frac{3}{2}}-2c)+f(1)(-2c^{\frac{3}{2}}+2c) =$$

$$= 2(f(0)-f(1))(c^{\frac{3}{2}}-c)$$

$c \in [0,1] \implies c^{\frac{3}{2}} - c \leqslant 0$
$f(0) - f(1) \leqslant 0$
Tak więc ten iloczyn jest większy 0, co należało pokazać.

Twierdzenie 44: Długość Krzywej

Jesli $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą klasy C_1, tzn. $\underset{i}{\forall}\, \varphi^i : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest klasy C_1 to

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\varphi^i(x)]^2}dx$$

Twierdzenie 45: Długość Wykresu

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Twierdzenie 46: Objętość Bryły Obrotowej

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Twierdzenie 47: Pole Powierzchni Bryły Obrotowej

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

Przykład 19

Zadanie 19. Oblicz długość wykresu funkcji f, jeśli

$$f(x) = \int_2^{\sqrt{x}} t^2 \cdot \sqrt{2t^4 - 6} dt$$

w przedziale $[2, 7]$

Rozwiązanie Zadania 19. Korzystamy bezpośrednio ze wzoru na długość wykresu:

$$d(\varphi) = \int_2^7 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Wtedy

$$f'(x)^2 = \left(x \cdot \sqrt{2x^2 - 6} - 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 2^4 - 6}\right)^2 = x^2 \cdot (2x^2 - 6) - 8\sqrt{2x^2 - 6} \cdot \sqrt{26} + 16 \cdot 26 + 1$$

Twierdzenie 48: Twierdzenie o Całce Niewłaściwej

Niech $\underset{c<b}{\forall} f \in \mathcal{R}([a, c])$ oraz niech istnieje granica $\lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$
Wówczas powyższą granicę nazywamy całką niewłaściwą i oznaczamy:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Twierdzenie 49: Warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych

Całka niewłaściwa jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \underset{M>a}{\exists} \underset{y_2>y_1>M}{\forall} \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Twierdzenie 50

Mówimy, że całka z $f(x)$ jest zbieżna bezwzględnie, a funkcja $f(x)$ jest bezwzględnie całkowalna na $[a, +\infty)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

Twierdzenie 51

Niech $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie ciągła.
NWSR

- Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna
- dla każdego rosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_m) dążącego do $+\infty$ szereg

  $$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x)dx$$

  jest zbieżny

Twierdzenie 52

Niech $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, gdzie $a \geqslant 0$ oraz f będzie funkcją nierosnącą.
NWSR

- Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna

- Szereg

$$S = \sum_{n=[a+1]}^{\infty} f(n)$$

jest zbieżny

Twierdzenie 53: II Całkowe Twierdzenie o wartości średniej dla całki

1. Załóżmy, że f, h są CWR i $h \geqslant 0$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że

$$f(\xi) \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx$$

2. Załóżmy, że f, h są CWR, a ponadto g jest funkcją monotoniczną. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx$$

Twierdzenie 54: Asymptotyczne Kryterium Porównawcze

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$. Jeśli

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$$

To całki z $\int_a^{\infty} f(x)dx$ i $\int_a^{\infty} g(x)dx$ są albo jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne

Twierdzenie 55: Znane zbieżności i rozbieżności

1. Całka $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$
2. Całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$

Twierdzenie 56: Twierdzenie Dirichleta

Niech $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami że:

- Istnieje taka stała $K > 0$, że na każdym przedziale [a,b] funkcja f jest całkowalna oraz

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant K$$

- g - nierosnąca i $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

Wówczas całka niewłaściwa

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$$

jest zbieżna

Twierdzenie 57: kryterium Abela–Dirichleta dla całek

Niech $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ są ciągłe, a ponadto:

1. Funkcja g jest monotoniczna i ma granicę równą zero dla $x \to \infty$.

2. Istnieje taka liczba $M > 0$, że dla wszystkich $x_2 > x_1 \leqslant a$ jest

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < M$$

Wówczas całka $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ jest zbieżna.

Przykład 20: Egzamin zerowy 2023

Zadanie 20. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx$$

Rozwiązanie Zadania 20. Mamy

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx = \int_\pi^M \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx + \int_M^\infty \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx$$

Zauważmy że całka $\displaystyle\int_\pi^M \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx$ jest zbieżna, więc musimy się zająć tylko drugą:

$$\int_M^\infty \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}dx = \boxed{\begin{array}{l} x^2 = t, \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}} = \int_{\sqrt{M}}^\infty \sin(t)\frac{1}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{t-\pi^2}}dt$$

Dodatkowo, mamy spełnione że

1. $\frac{1}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{t-\pi^2}}$ zbiega monotoniczne do 0.
2. Istnieje taka liczba (a konkretnie 2) że dla wszystkich $x_1 < x_2 < \sqrt{M}$ jest spełnione

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin(t)dx\right| < 2$$

Tak więc całka jest zbieżna na podstawie kryterium Abela-Dirichleta zbieżności całek.