

Projekt

Równania różniczkowe zwyczajne z laboratorium, 2023/2024

Termin oddania zadania: 02.06.2024

Układ równań opisujący położenie (x, y) satelity (o pomijalnej, w porównaniu do ciał niebieskich, masie) na płaszczyźnie Ziemia-Księżyc wygląda następująco

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} - (1 - \mu)\frac{x+\mu}{A} - \mu\frac{x-1+\mu}{B}, \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - (1 - \mu)\frac{y}{A} - \mu\frac{y}{B}, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= ((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}, \\ B &= ((x - 1 + \mu)^2 + y^2)^{3/2}, \\ \mu &= 0.012277471. \end{aligned}$$

W tym układzie współrzędnych Ziemia znajduje się w punkcie $(-\mu, 0)$, zaś Księżyc w punkcie $(1 - \mu, 0)$. Można pokazać, że zagadnienie to ma rozwiązanie analityczne z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.994, & \dot{x}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= -2.00158510637908252240537862224, \end{aligned}$$

które jest okresowe, a jego okres w przybliżeniu wynosi

$$T_0 = 17.0652165601579625588917206249.$$

Zadanie 1.

Przedstaw przybliżone trajektorie satelity na opisanej płaszczyźnie uzyskane poprzez przybliżenia w krokach czasu $t_k = kh$:

1. schematem Eulera z krokiem $h = \frac{T_0}{24000}$, 24000 kroków;
2. schematem Rungego-Kutty 4. rzędu z krokiem $h = \frac{T_0}{6000}$, 6000 kroków.

Zadanie 2.

Zaimplementuj numeryczny schemat Dormanda-Prince'a zadany następującą tabelką Butchera:

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{55}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

Wypróbuj schemat numeryczny na wybranych, prostych przykładach z ćwiczeń i laboratorium. Zbadaj eksperymentalnie rząd tego schematu.

Zadanie 3.

Zastosuj schemat Dormanda-Prince'a do opisanego zagadnienia. Wypróbuj różne wartości kroku $h > 0$, dla wybranej samodzielnie wartości kroku h narysuj przybliżoną trajektorię satelity. Pamiętaj, aby w raporcie uzasadnić dobór kroku.

Zadanie 4.

Usprawnij schemat Dormanda-Prince'a poprzez implementację zmiany długości kroku. W tym celu wylicza się pewną dodatkową wartość:

$$\hat{x}_{k+1} := x_k + h \left(\frac{5179}{57600} K_1 + \frac{7571}{16695} K_3 + \frac{393}{640} K_4 - \frac{92097}{339200} K_5 + \frac{187}{2100} K_6 + \frac{1}{40} K_7 \right),$$

którą wykorzystuje się do modyfikacji kroku. Oznaczmy $\text{err} := |x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}|$, $\text{toll} := 10^{-4}$ oraz

$$\gamma := \left(\frac{\text{toll}}{\text{err}} \right)^{\frac{1}{p+1}},$$

gdzie p jest ustalonym rzędem schematu Dormanda-Prince'a. Nowy krok to wówczas γh . Intuicyjnie - krok zostaje zmniejszony w przypadku, kiedy oszacowany błąd jest większy od zadanej tolerancji lub zwiększony w przeciwnym przypadku. Dla wybranej w Zadaniu 3 wartości kroku początkowego porównaj usprawniony schemat z tym zastosowanym w Zadaniu 3.

Zadanie 5.

Wykorzystując uzyskane w Zadaniu 3. rozwiązanie, narysuj przybliżony wykres prezentujący odległość satelity od Ziemi oraz od Księżyca w zależności od czasu. Odległość wyraż w km (aby obliczyć, jak należy przeskalować jednostki zauważ, że odległość na tej

płaszczyźnie pomiędzy Ziemią i Księżycem wynosi 1; faktyczną odległość znajdź w odpowiednich źródłach).

Zadanie 6.

We wszystkich trzech metodach oblicz odległość pomiędzy punktem $(x(0), y(0))$, a punktem $(x(T_0), y(T_0))$, gdzie $(x(t), y(t))$ jest przybliżonym rozwiązaniem.

Rozwiązaniem są:

1. Treściwy raport w formacie PDF, zawierający omówienie sposobu rozwiązania poszczególnych zadań wchodzących w skład projektu, przedstawienie uzyskanych wyników (wraz z wykresami, o których mowa w zadaniach) oraz ich dyskusję. Ponadto raport powinien zawierać informacje, w jaki sposób uruchamiać poszczególne programy, aby uzyskać kolejne rozwiązania.
2. Zestaw skomentowanych plików źródłowych.