Michał Dudkiewicz *224290*
Marcjan Jędrzejczak *224312*

Rok akademicki *2018/19*
Poniedziałek, 16:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – *Aproksymacja funkcji wielomianami Legendre'a*

Opis rozwiązania

Aproksymacja średnio-kwadratowa ciągła wielomianami Legendre'a:

1.) Obliczenie wielomianów Legendre'a kolejnych stopni danych wzorem rekurencyjnym:

$P_1(x) = 1,$

$P_2(x) = x,$

$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k + 1)xP_k(x) – kP_{k-1}(x),\ k > 0$

2.) Obliczenie kolejnych współczynników wielomianu aproksymowanego oraz odpowiednich kwadratur Gaussa-Legendre'a:

$$C_i = \frac{\int_b^a f(x)P_i(x)}{\int_b^a P_i(x)^2}$$

3.) Obliczenie aproksymacji funkcji F(x):

$$F(x)=\sum_{i=0}^{k} C_i P_i(x)$$

4.) Obliczenie błędu aproksymacji:

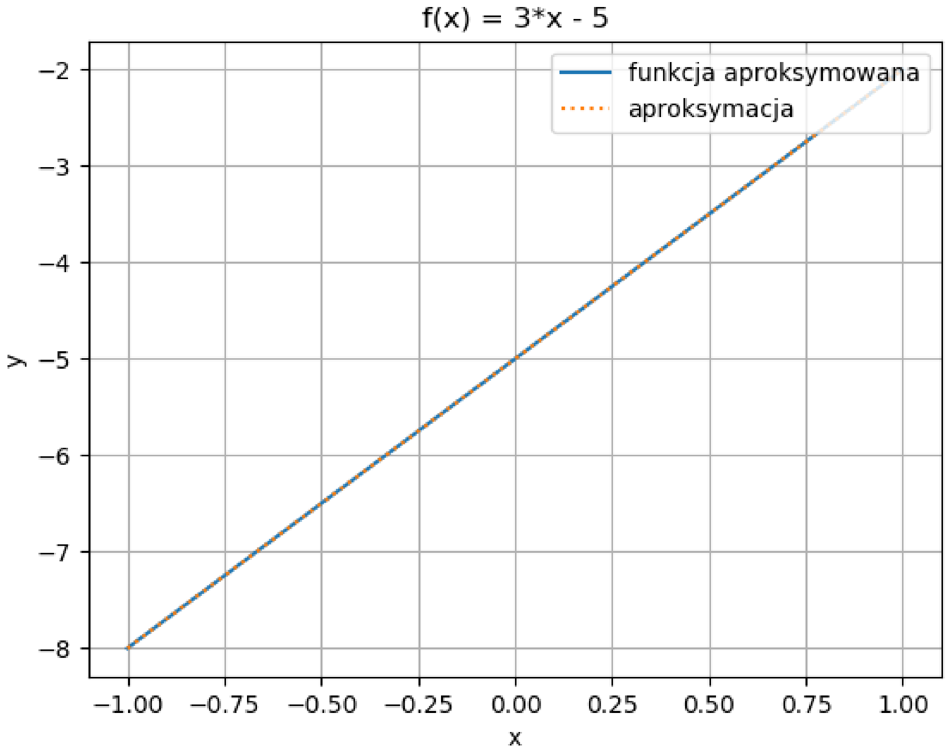
$$\| f-F \| = \int_a^b [f(x)-F(x)]^2\, dx$$

Wyniki

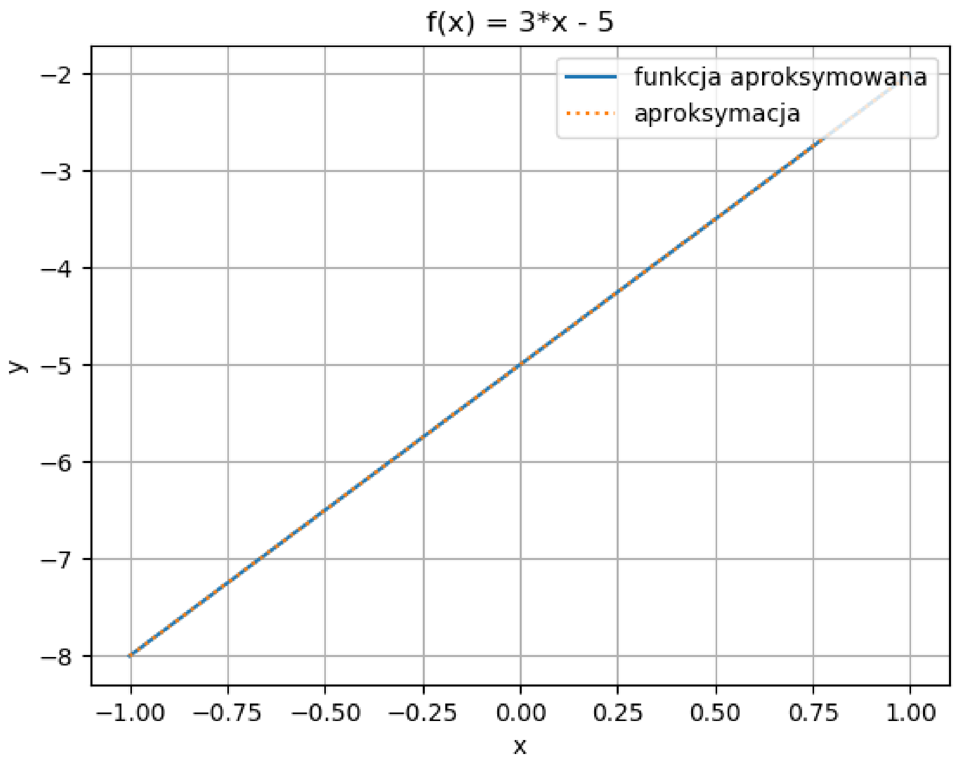
Liczba węzłów kwadratury Gaussa: 4.

1.) Funkcja liniowa f(x) = 3x – 5

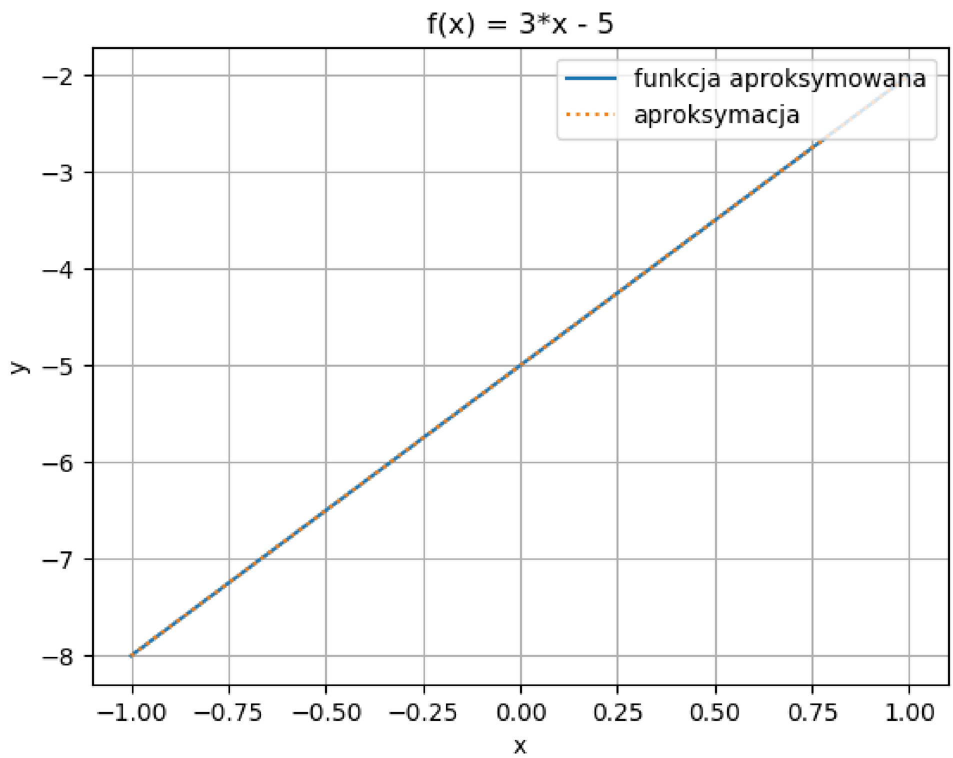
a) stopień wielomianu aproksymującego - 2,
błąd aproksymacji: ~0
wielomian aproksymujący: $4.089e\text{-}06\ x^2 + 2.999\ x - 4.999$



b) stopień wielomianu aproksymującego - 5
błąd aproksymacji: ~0
wielomian aproksymujący: -1.3390e-06 x^5 + 2.06e-05 x^4 − 6.97e-06 x^3 + 4.09e-06 x^2 + 2.999 x - 4.999

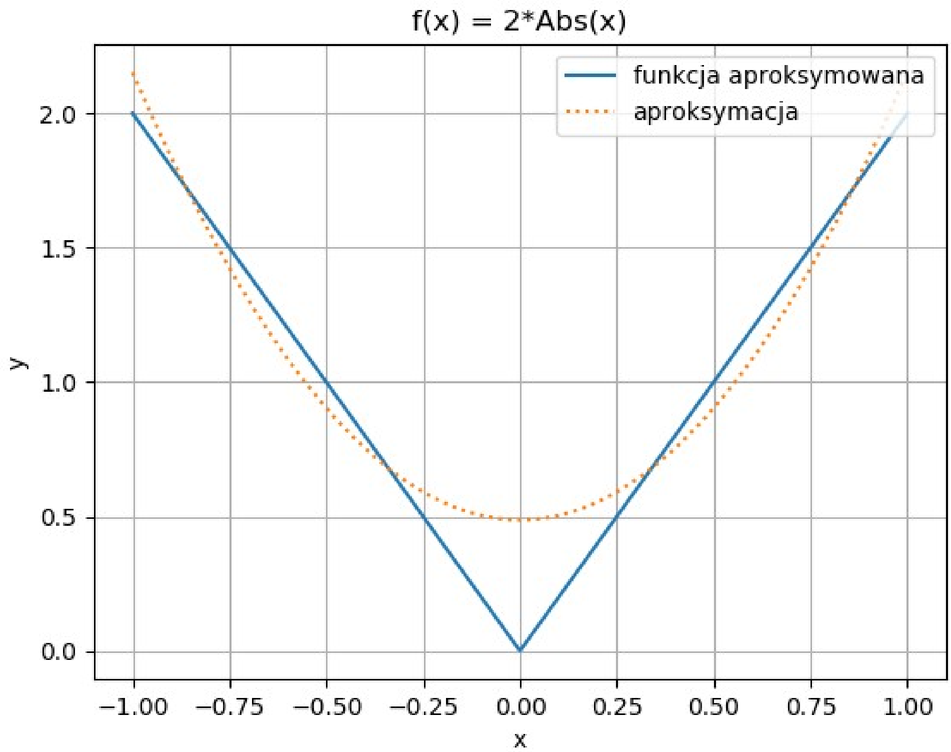


c) maksymalny błąd aproksymacji – 0.1,
błąd aproksymacji: ~0
wielomian aproksymujący: 2.999 x - 4.999

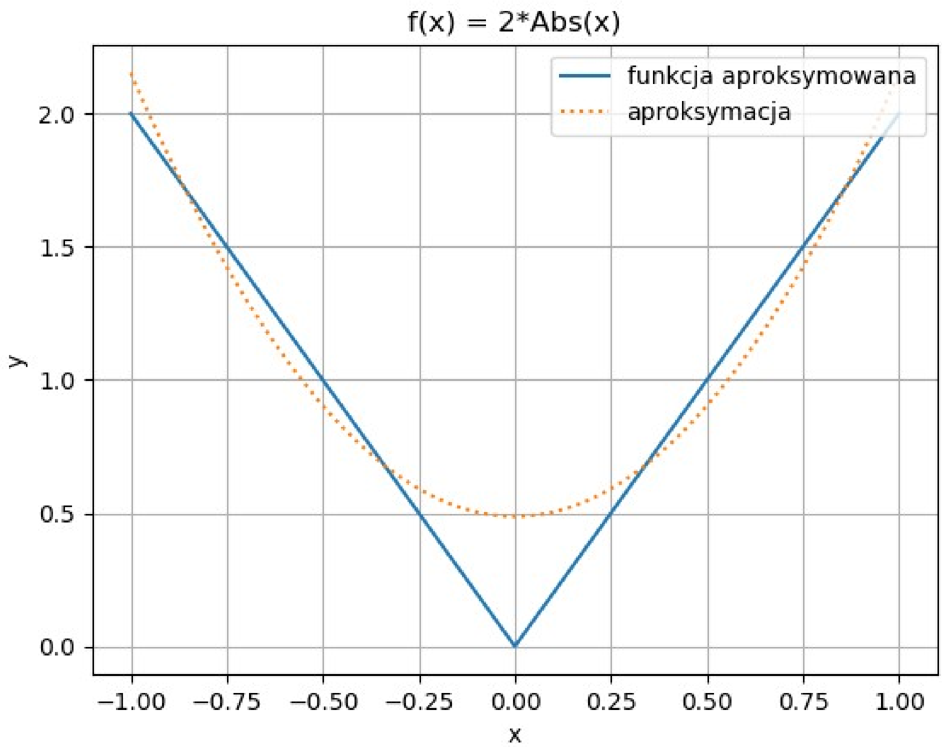


2.) Funkcja z wartością bezwzględną f(x) = |2x|
b) stopień wielomianu aproksymującego - 2
błąd aproksymacji: ~0

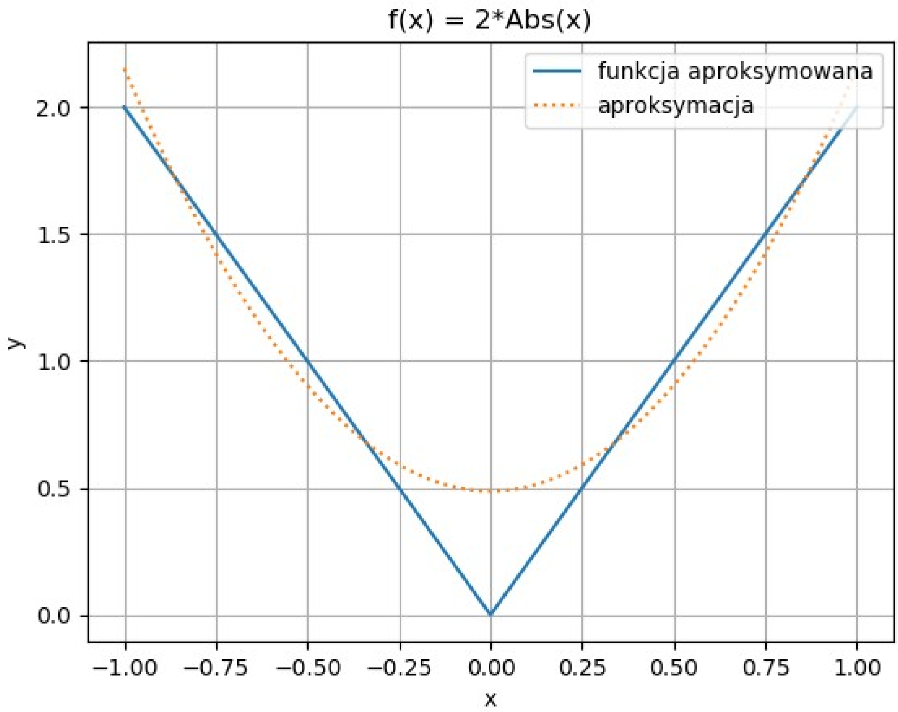
wielomian aproksymujący: 1.110 x^2 + 1.042



b) stopień wielomianu aproksymującego - 5
błąd aproksymacji: ~0
wielomian aproksymujący: -7.60e-06 x^4+1.110 x^2+1.042

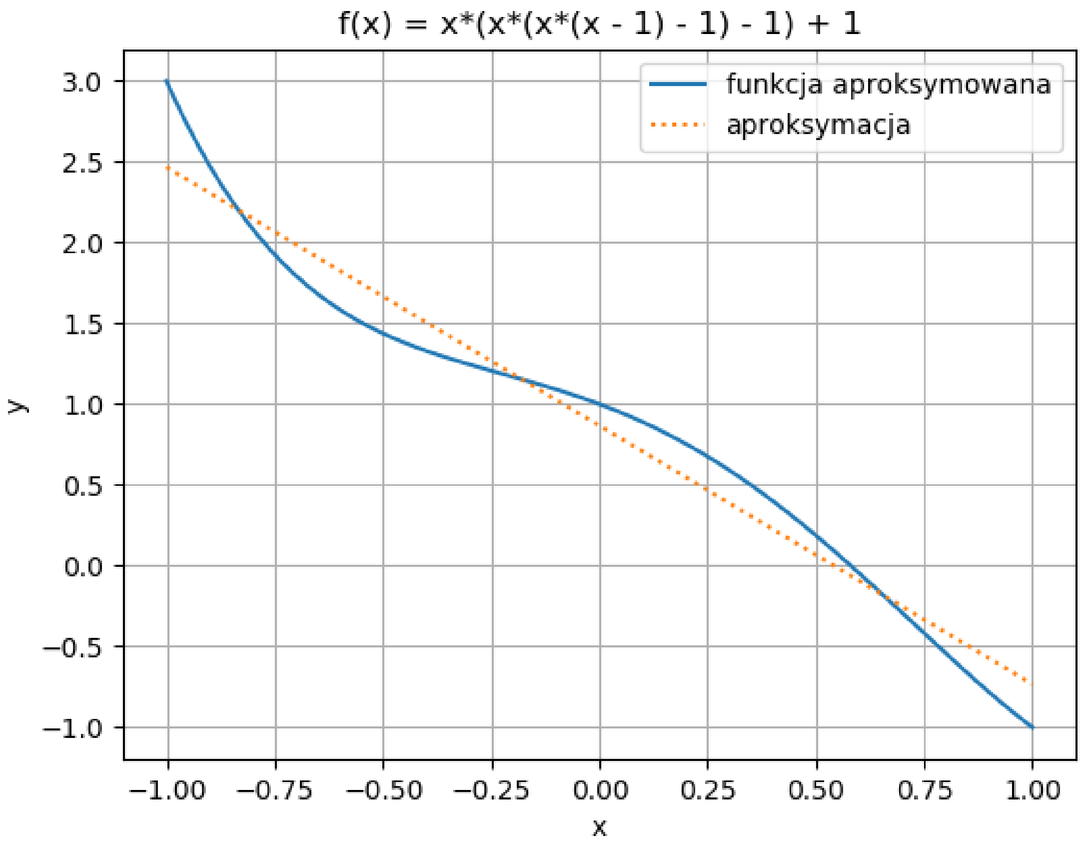


c) maksymalny błąd aproksymacji – 0.1,
błąd aproksymacji: ~0
wielomian aproksymujący: 1.110 x^2 + 1.042



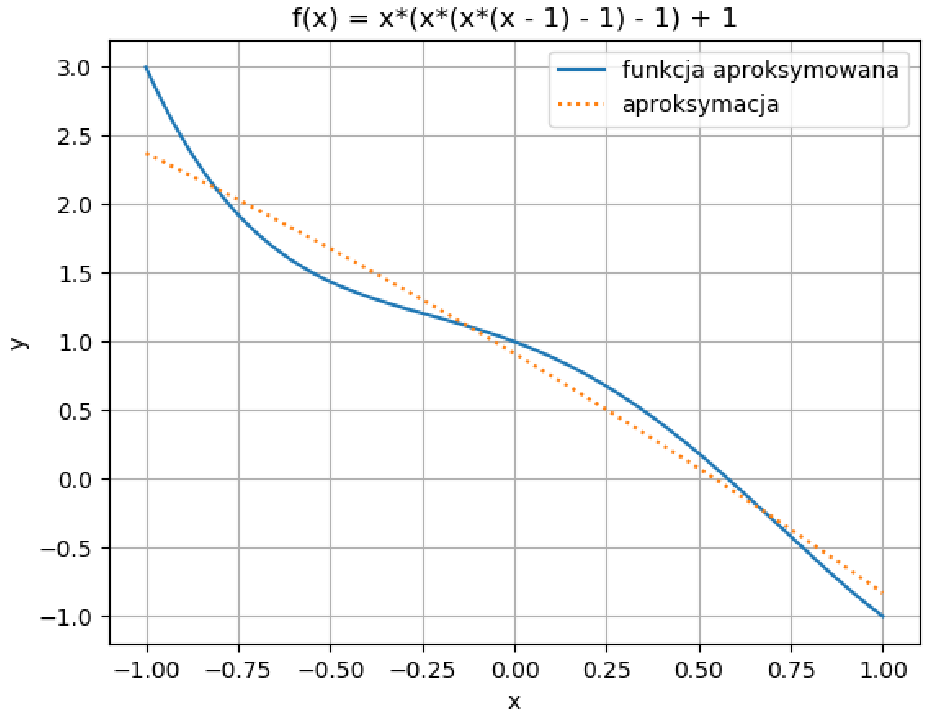
3.) Funkcja wielomian $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

a) stopień wielomianu aproksymującego - 1,
błąd aproksymacji: 0.049
wielomian aproksymujący: -1.599x^1+0.866

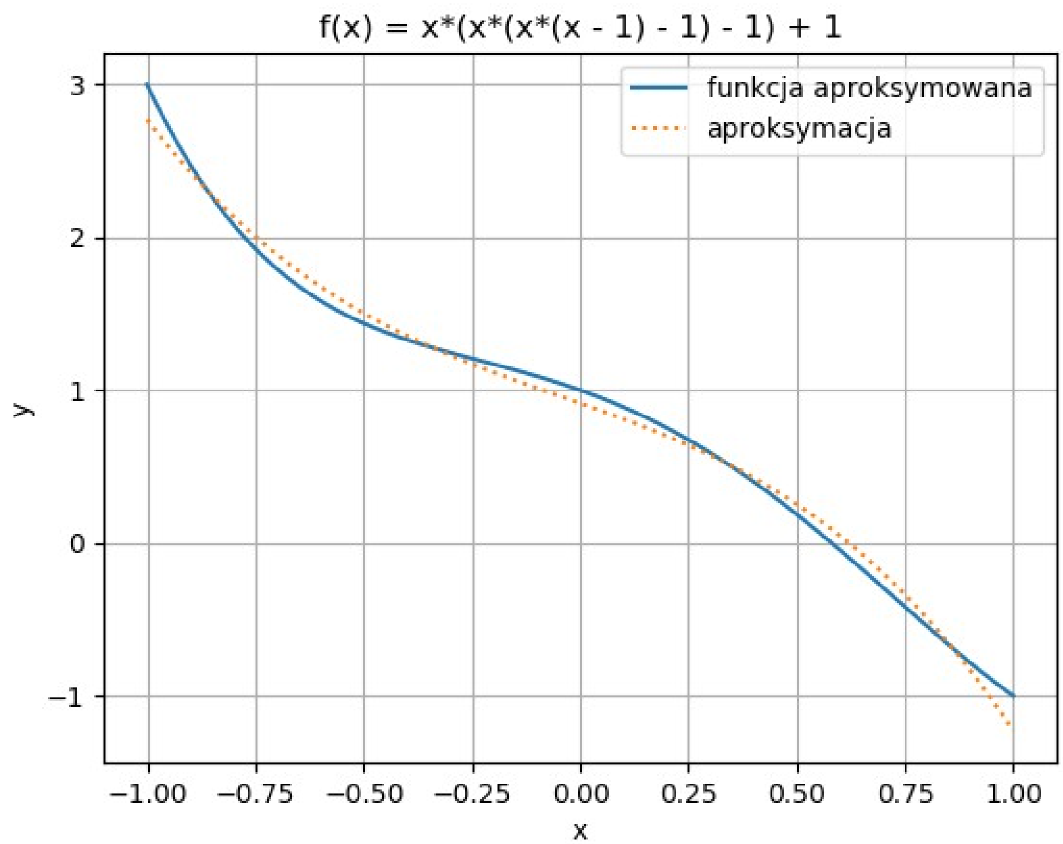


a) stopień wielomianu aproksymującego - 2,

błąd aproksymacji: 0.046
wielomian aproksymujący: -0.095 x^2 - 1.599 x + 0.866

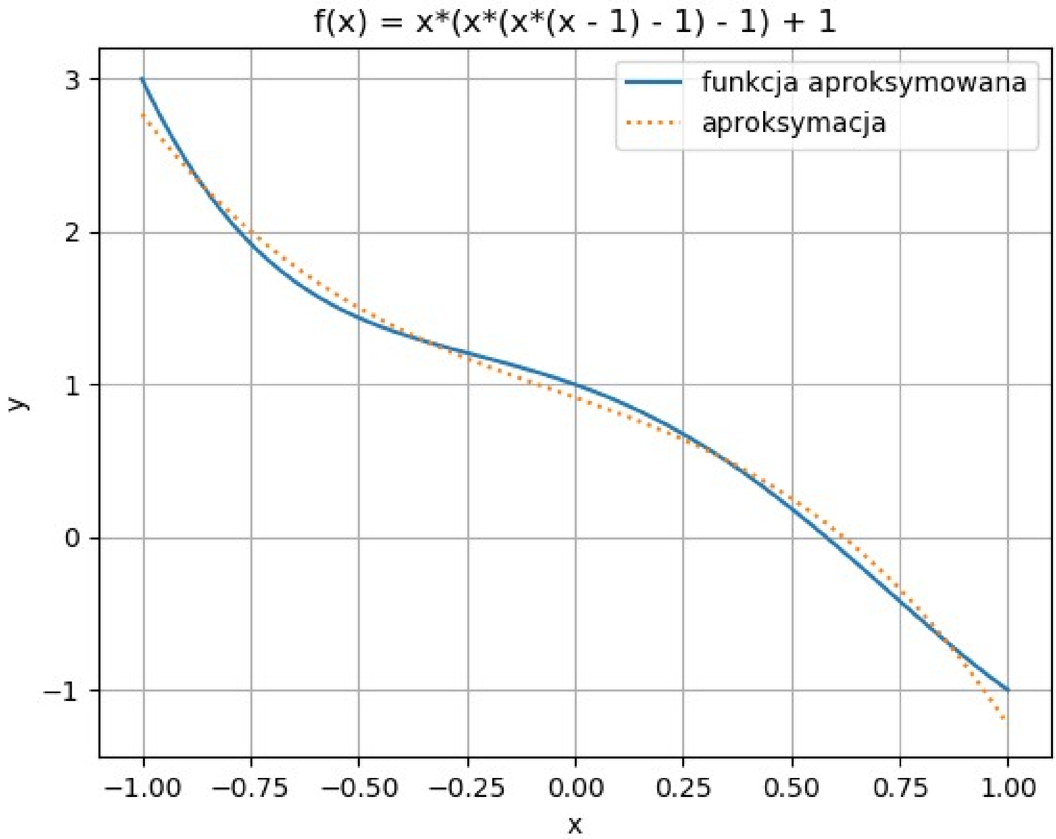


c) stopień wielomianu aproksymującego - 3,
błąd aproksymacji: 0
wielomian aproksymujący: -0.399x^3-0.095x^2-1.599x^1+0.866

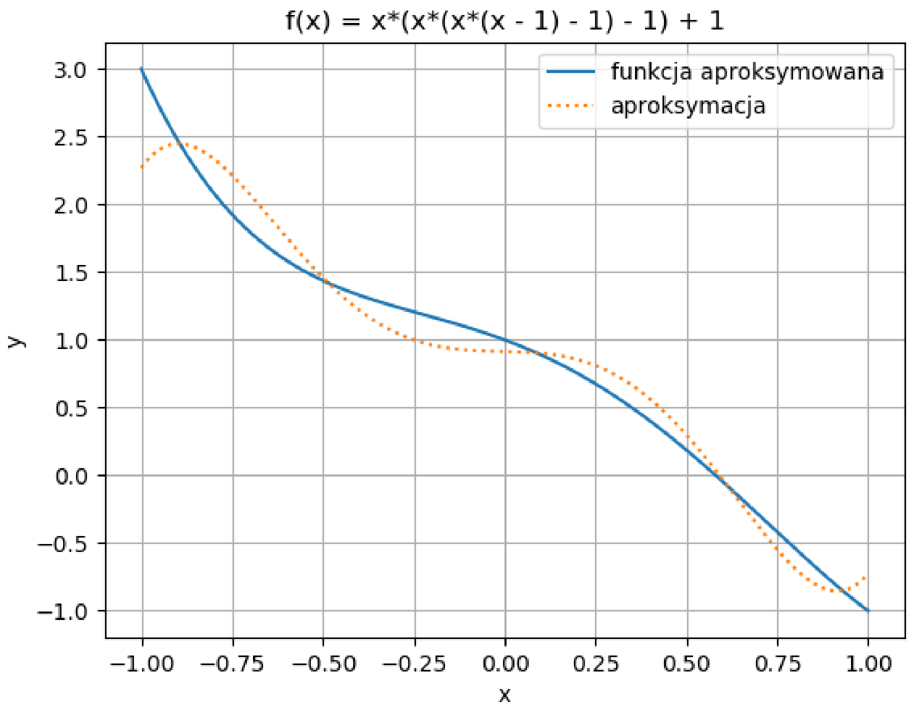


d) stopień wielomianu aproksymującego - 4,
błąd aproksymacji: 0

wielomian aproksymujący: -3.291e-06x^4-0.399x^3-0.095x^2-1.599x^1+0.866

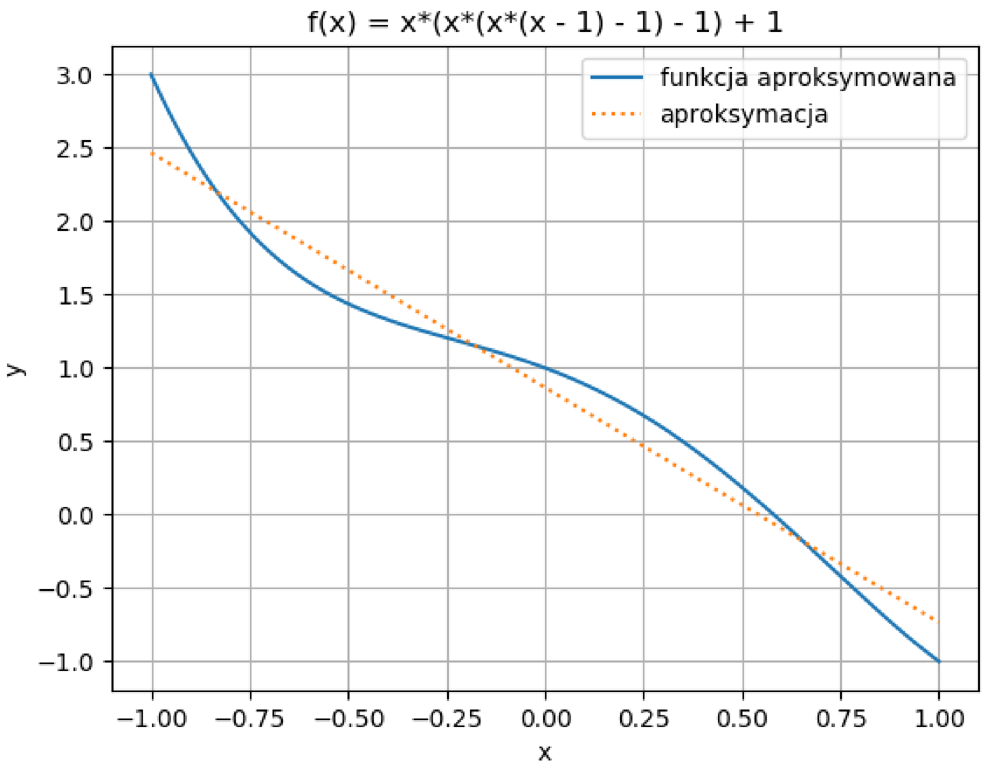


e) stopień wielomianu aproksymującego - 5,
błąd aproksymacji: 0.046
wielomian aproksymujący: 0.502 $x^5 -$ *3.29e-06* $x^4 -$ *0.399*$x^3 -$ *0.095*$x^2 -$ *1.599x + 0.866*



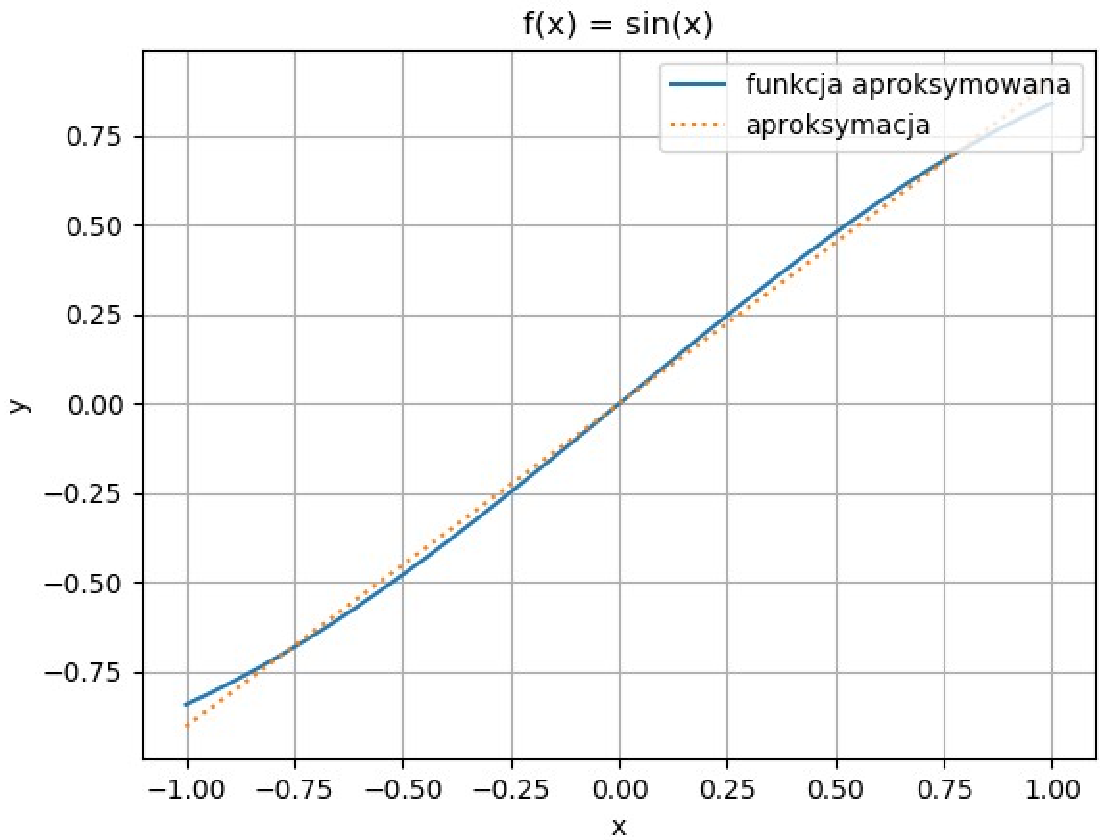
f) maksymalny błąd aproksymacji – 0.1,
błąd aproksymacji: 0.049

wielomian aproksymujący: -1.599 x + 0.866

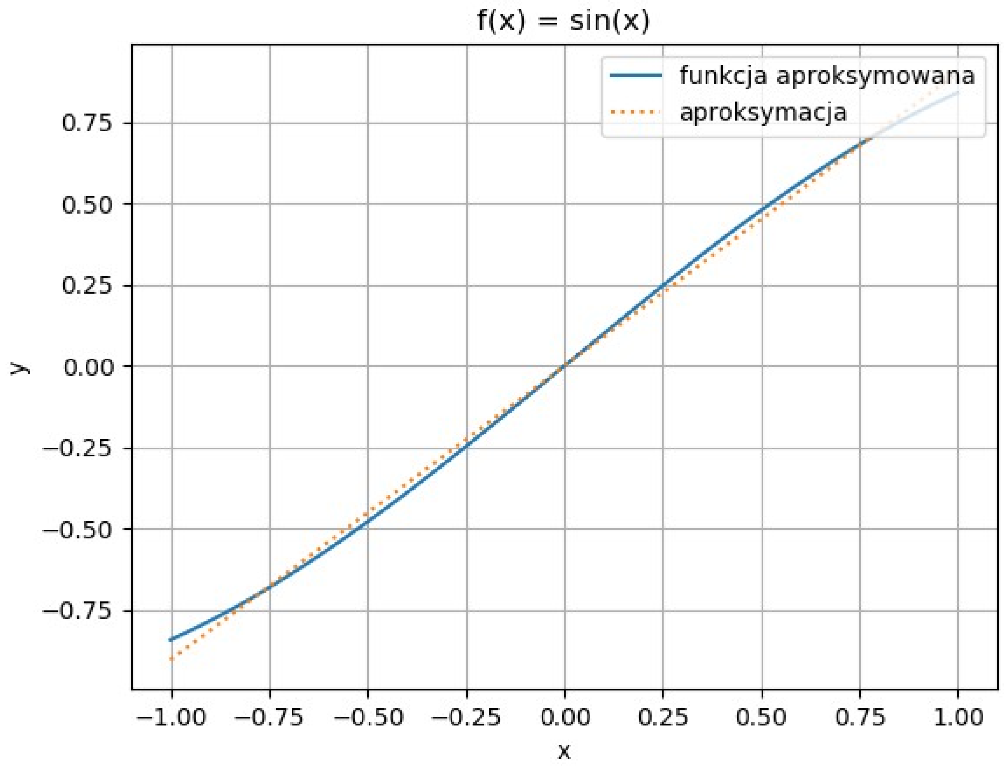


4.) Funkcja trygonometryczna f(x) = sin(x)

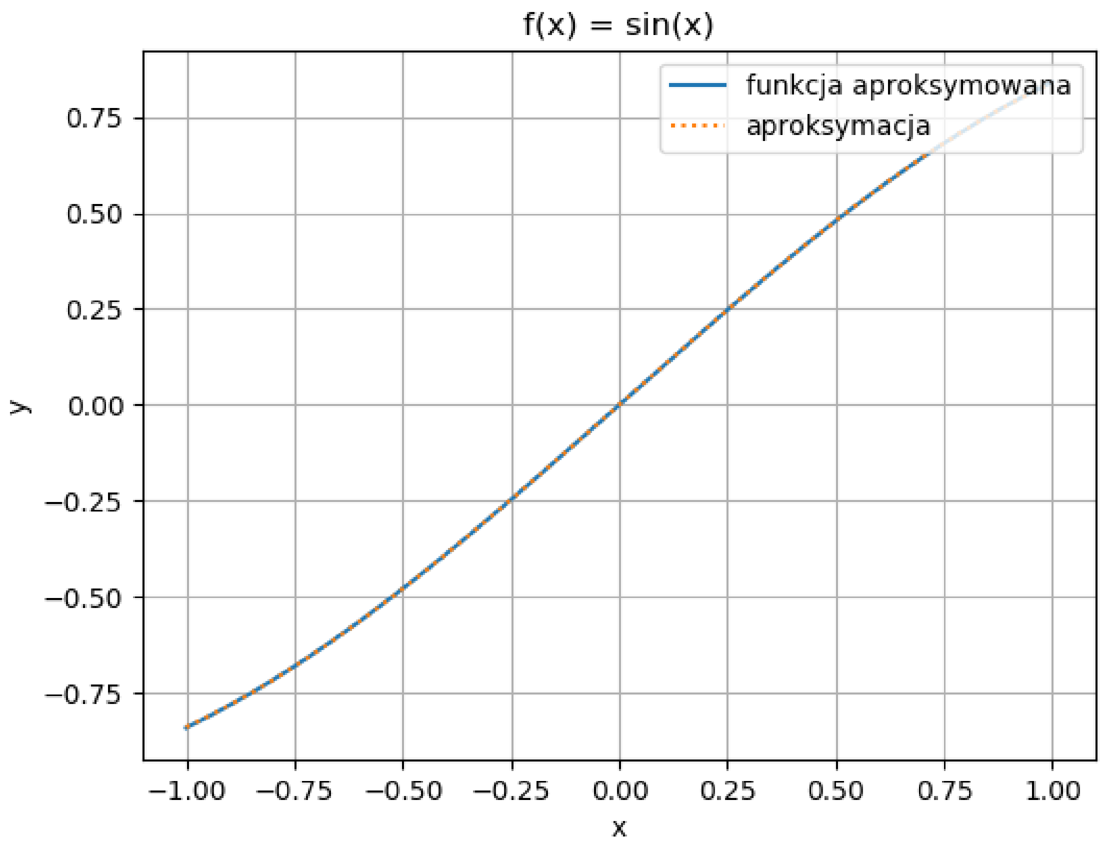
a) stopień wielomianu aproksymującego - 1,
błąd aproksymacji: 0.00116
wielomian aproksymujący: 0.903x^1



b) stopień wielomianu aproksymującego - 2,
błąd aproksymacji: 0.00116
wielomian aproksymujący: 0.904x

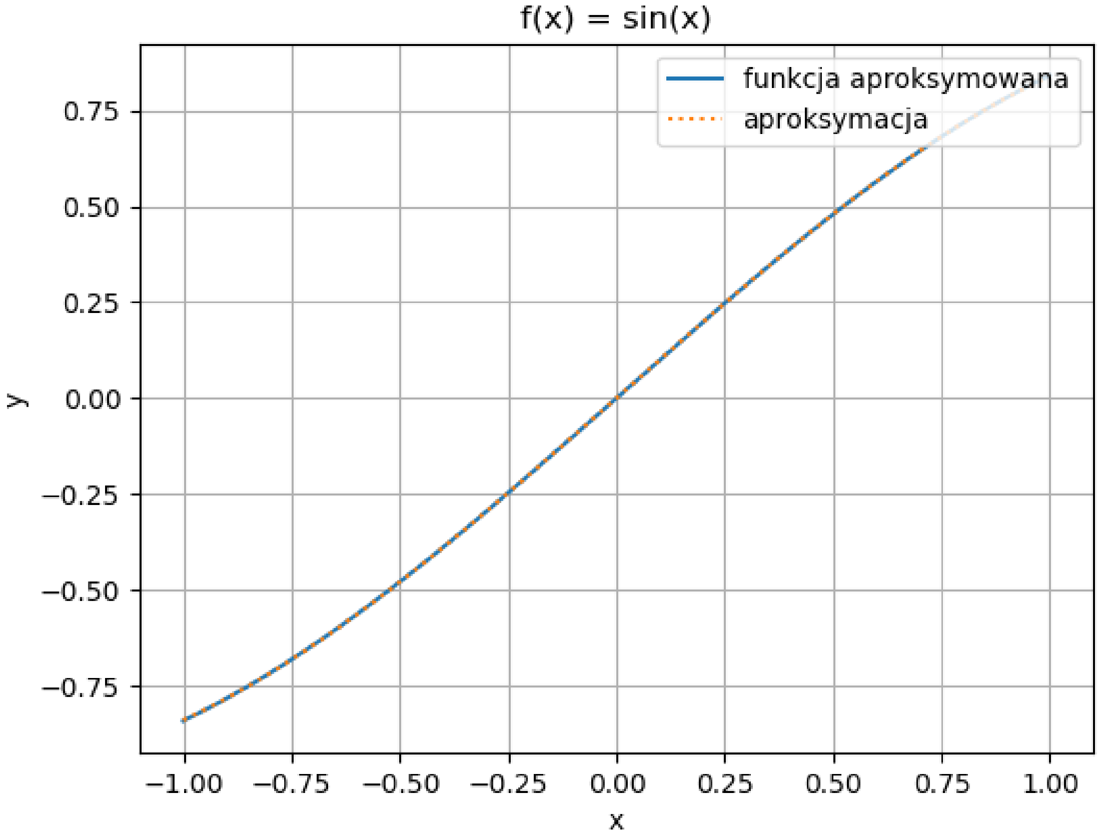


c) stopień wielomianu aproksymującego - 3,
błąd aproksymacji: 0

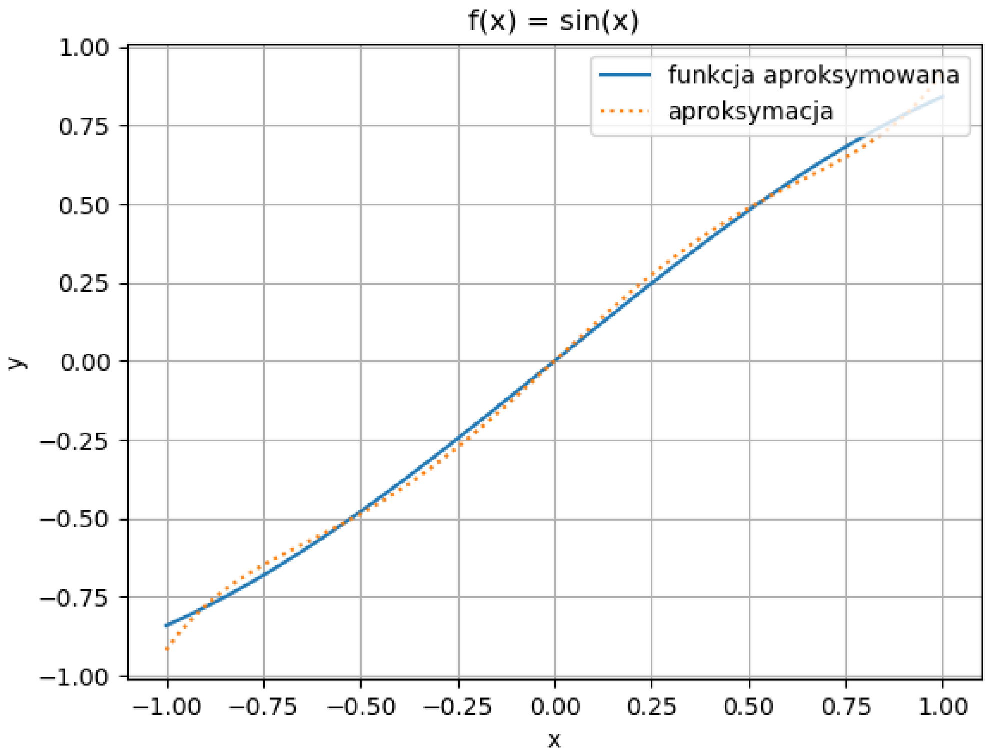


wielomian aproksymujący: -0.0638x^3+0.903x^1

d) stopień wielomianu aproksymującego - 4,
błąd aproksymacji: 0
wielomian aproksymujący: -0.0638x^3+0.903x^1

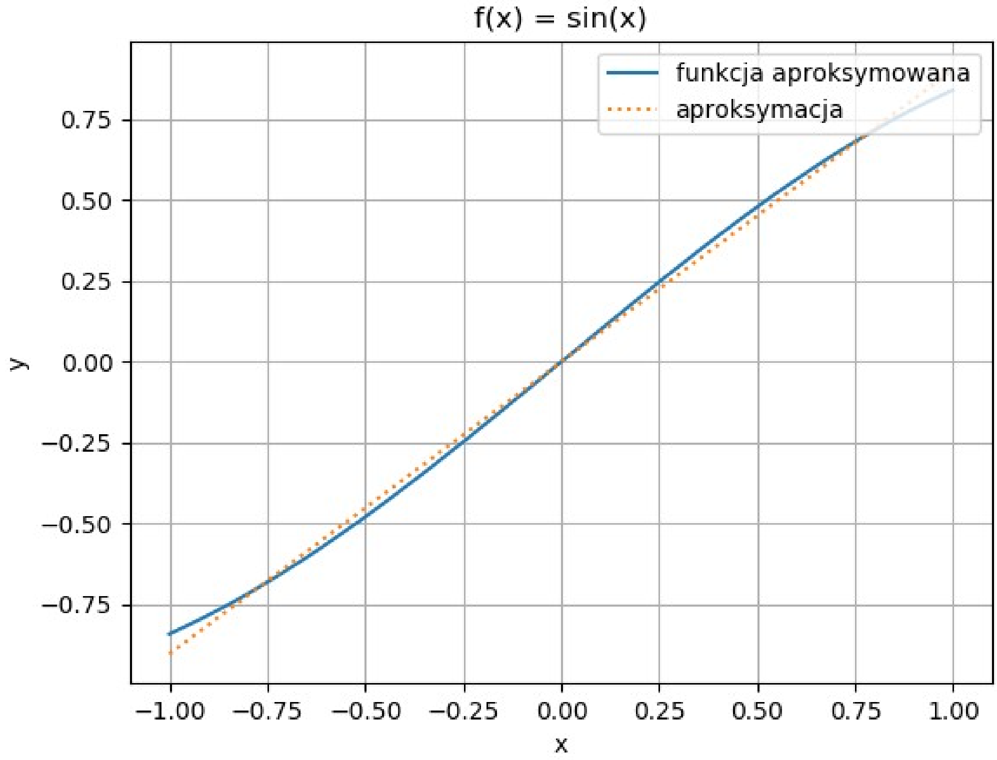


e) stopień wielomianu aproksymującego - 5,
błąd aproksymacji: 0.00117
wielomian aproksymujący: $0.080x^5$-$0.063x^3$+0.904x

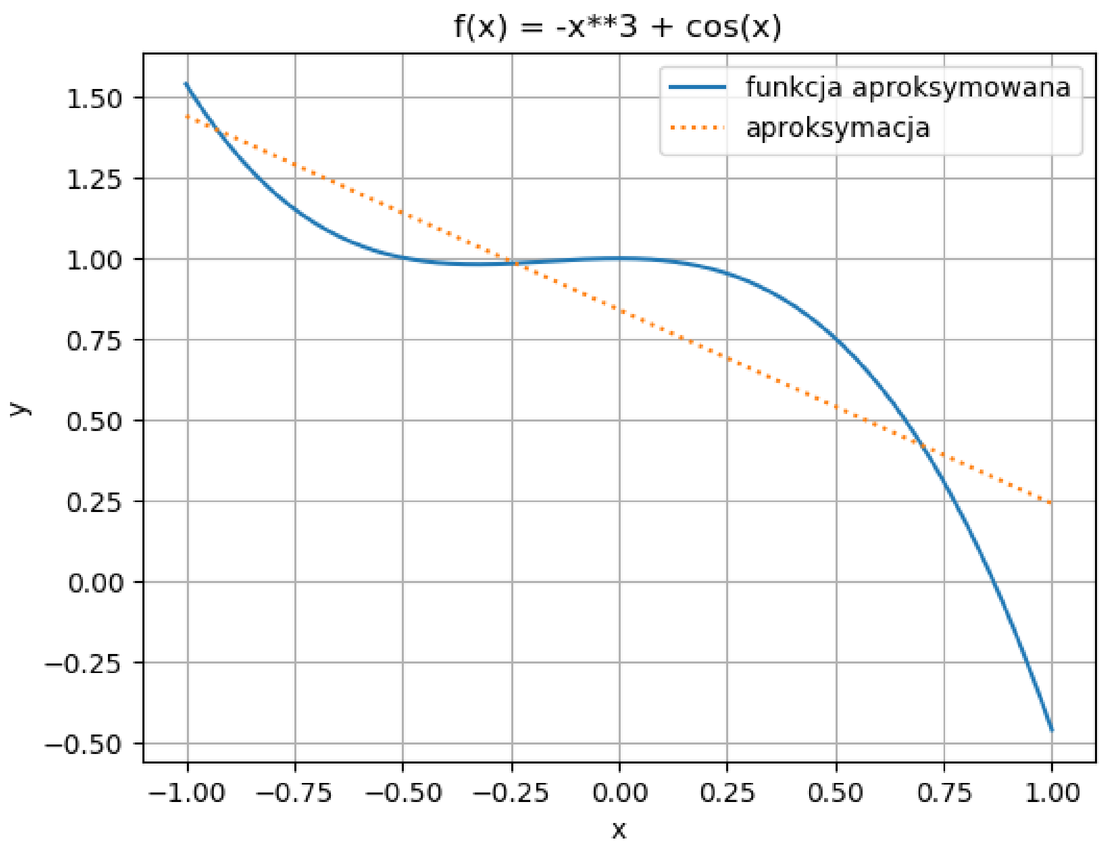


f) maksymalny błąd aproksymacji – 0.1,

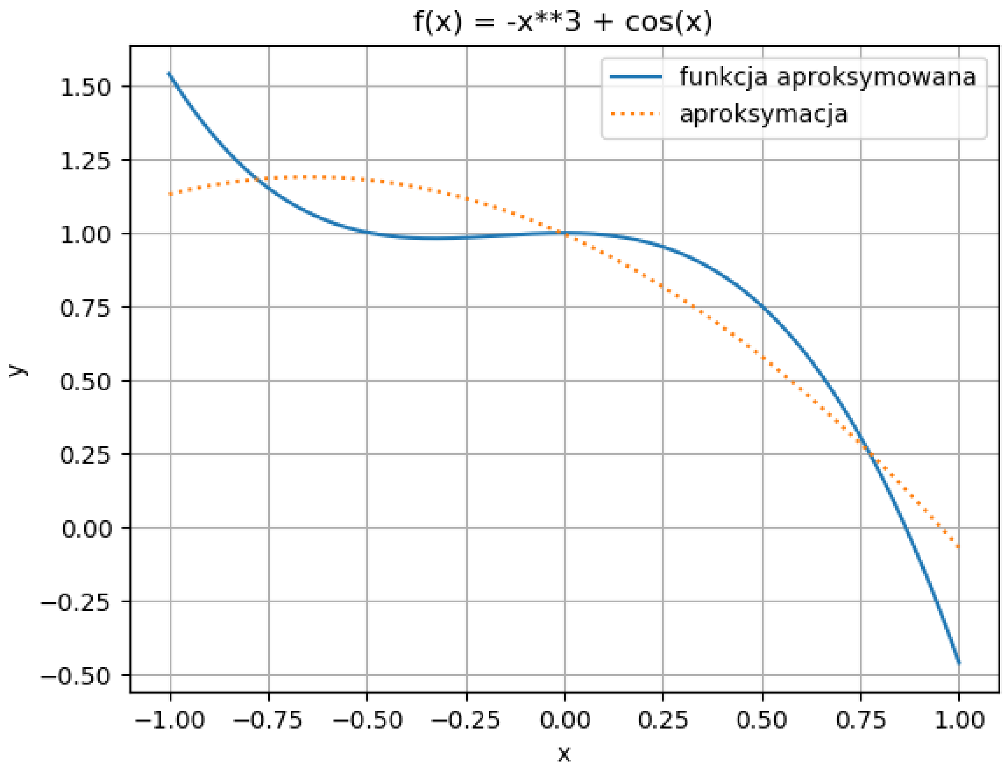
błąd aproksymacji: 0.00116
wielomian aproksymujący: 0.904x



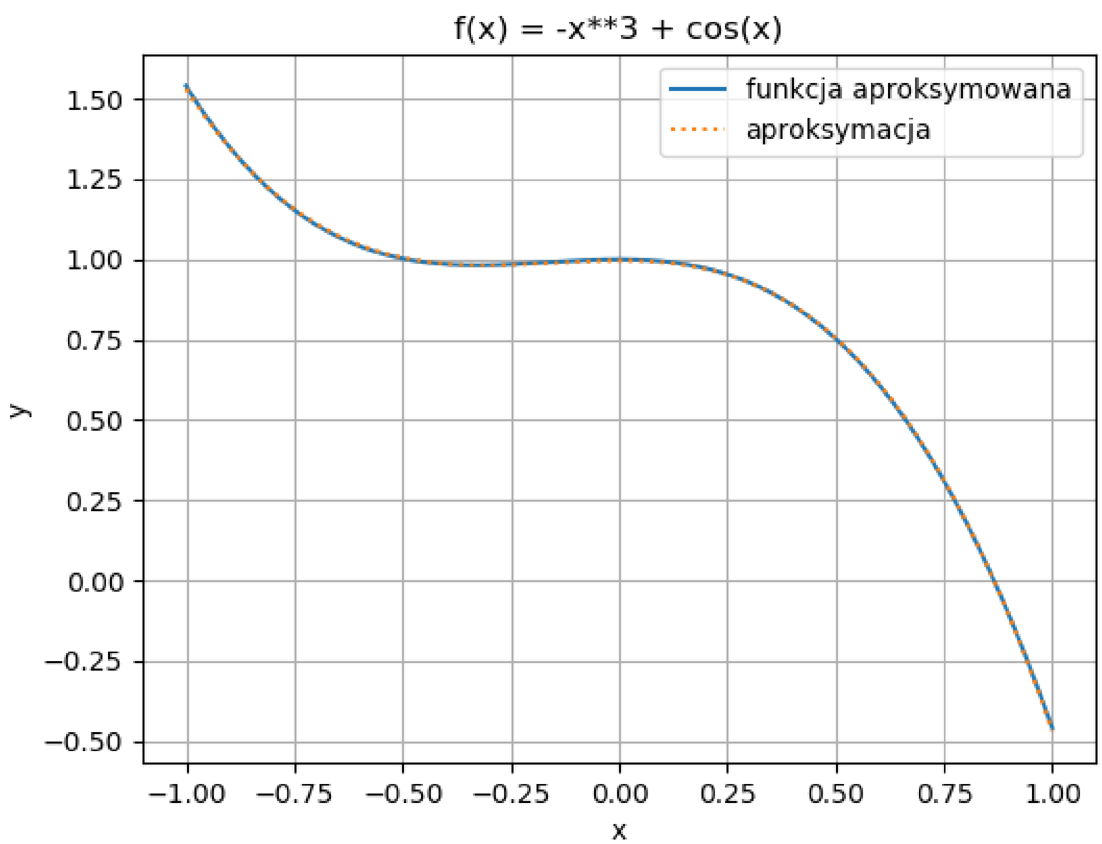
5.) *Funkcja złożona f(x) = cos(x) – x^3*
a) stopień wielomianu aproksymującego - 1,
błąd aproksymacji: 0.0841
wielomian aproksymujący: -0.599x^1+0.841



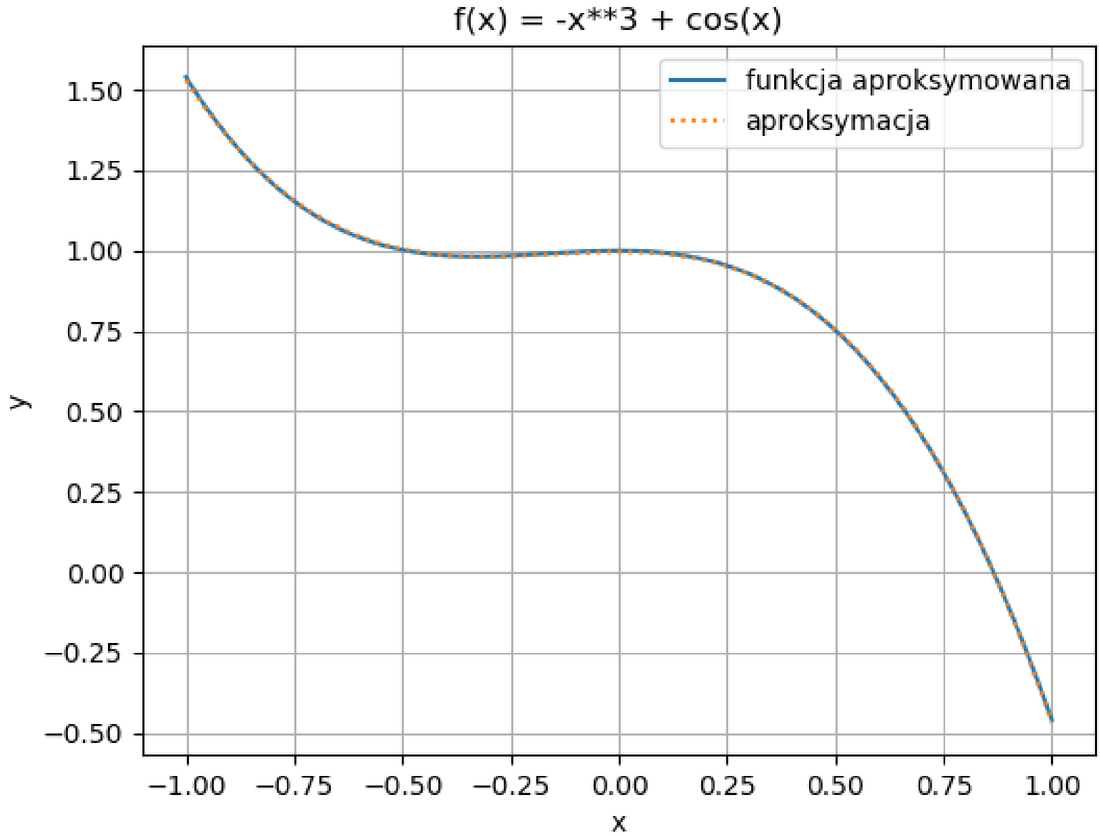
b) stopień wielomianu aproksymującego - 2,
błąd aproksymacji: 0.0457
wielomian aproksymujący: -0.310x^2*-0.599x+0.841*



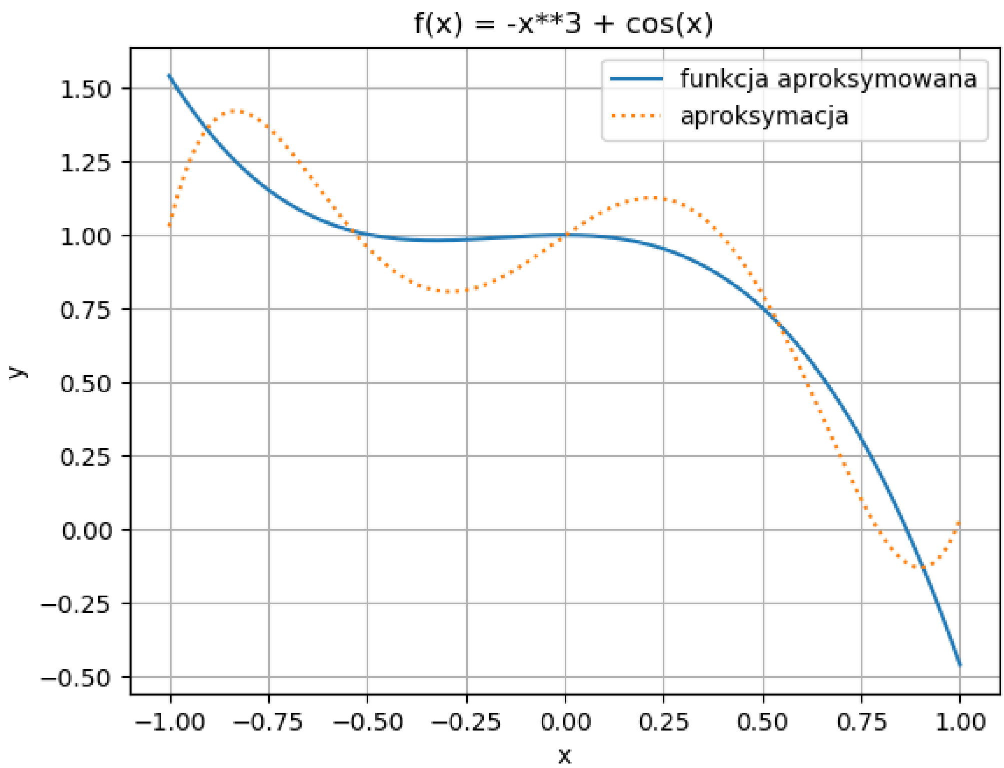
c) stopień wielomianu aproksymującego -3,
błąd aproksymacji: 0
wielomian aproksymujący: -0.399x^3-0.310x^2-0.599x^1+0.841



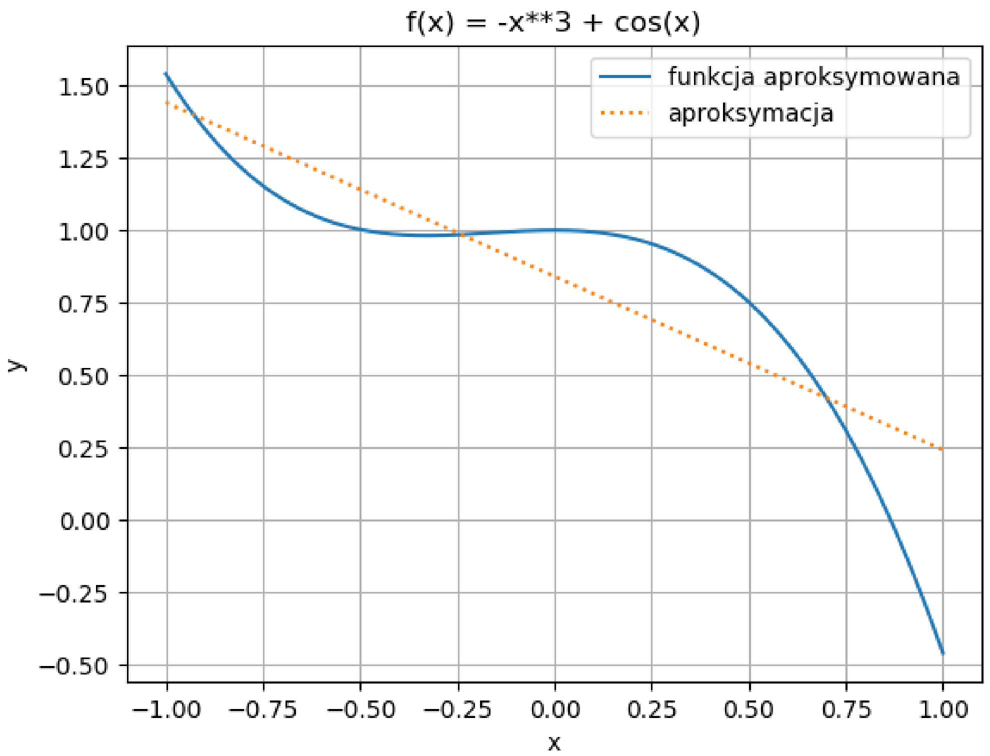
d) stopień wielomianu aproksymującego - 4,
błąd aproksymacji: 0
wielomian aproksymujący: -2.548e-06x^4-0.399x^3-0.310x^2-0.599x^1+0.841



e) stopień wielomianu aproksymującego - 5,
błąd aproksymacji: 0.0462
wielomian aproksymujący: $0.503x^5 - 2.55e\text{-}06x^4 - 0.399x^3 - 0.310x^2 - 0.599x + 0.841$



f) maksymalny błąd aproksymacji – 0.1,
błąd aproksymacji: 0.0842
wielomian aproksymujący: -0.599x + 0.841



Wnioski

1. Podnosząc stopień aproksymacji obserwujemy pewne naprzemienne zjawisko: wielomiany kolejnych stopni poprawiają dokładność co drugi stopień. Dla funkcji nieparzystych w danym przedziale- wielomiany stopni nieparzystych. Natomiast dla funkcji parzystych w danym przedziale- wielomiany stopni parzystych.
2. Jako, że przedział aproksymacji znajduje się po obu stronach zera, tak więc potęgi nieparzyste dla funkcji parzystych oraz parzyste dla funkcji nieparzystych są zredukowane niemal do zera.
3. Po osiągnięciu niemal doskonałego przybliżenia funkcji warto często zarzucić poszukiwanie wielomianu aproksymacyjnego wyższego stopnia. Wraz ze wzrostem bowiem potęg już w odległościach bliskich zera powoduje znacznie silniejsze uwzględnienie błędów numerycznych całkowania.
4. Aproksymacja wielomianami Legendre'a pozwala z dużą dokładnością obliczyć przybliżone wartości funkcji w przedziale ortogonalności wielomianów Legendre'a (-1:1)
5. W zależności od tego czy funkcja w danym przedziale (-1:1) ma przebieg bardziej zbliżony do funkcji parzystej czy nieparzystej najdokładniejszą aproksymację uzyskuje się maksymalnym stopniem wielomianu parzystym bądź nieparzystym nie większym od wielomianu aproksymowanego. Powyżej tego stopnia błąd aproksymacji wzrasta i pojawiają się oscylacje aproksymacji wynikające z wcześniej omówionych błędów numerycznych całkowania.
6. W celu doboru optymalnego stopnia aproksymacji należy przeanalizować przebieg funkcji w danym przedziale oraz wziąć pod uwagę stopień wielomianu aproksymowanego.
7. Wielomiany pozwalają przybliżać dowolną funkcję ciągłą. Dla dowolnej funkcji ciągłej istnieje ciąg wielomianów zbieżny do niej.
8. Im niższy stopień wielomianu tym łatwiej go aproksymować. Łatwiej jest również aproksymować wielomiany o przebiegu zbliżonym do funkcji parzystej w badanym przedziale jeśli ich stopień jest również parzysty. Podobnie wielomiany o zliżonym przebiegu do funkcji nieparzystej- jeśli ich stopień jest nieparzysty.