Marcjan Jędrzejczak *224312*
Michał Dudkiewicz *224290*

Rok akademicki *2018/19*
Poniedziałek, 16:15

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 – metody całkowania numerycznego

Opis rozwiązania
złożona kwadratura Newtona-Cotes'a (metoda Simpsona):
1. Podział przedziału całkowania (a,b) na n-1 podprzedziałów (n – liczba nieparzysta)
2. Obliczenie połowy długości każdego z podprzedziałów:

$$h=\frac{b-a}{n-1}$$

gdzie:
a - wartość początku przedziału
b – wartość końcowa przedziału
n – liczba podprzedziałów +1

3. Obliczenie pola każdego z podprzedziałów ze wzoru:

$$I_n=\frac{h*(f(a)+4*f(\frac{a+b}{2})+f(b))}{3}$$

4. Zsumowanie tak uzyskanych pól podprzedziałów

Kwadratura Gaussa-Laguerre'a:
1. Wartości węzłów (x_i) oraz wagi kwadratur (A_i) odczytano z odpowiedniej tabeli dla wielomianów Laguerre'a dla poszczególnych wartości n (n- liczba węzłów <2,5>)
2. Obliczenie kwadratury Gaussa, która jest przybliżoną wartością całki funkcji w postaci wielomianu Laguerre'a w granicach [0, + ∞]:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_0^n A_i f(x_i)$$

Wyniki

Wszystkie wyniki uzyskano dla dokładności obliczania kwadratur Newtona-Cotes'a 0,0001:

Liczba węzłów	Gauss-Laugerre wynik	Newton-Cotes wynik	Błąd (%) Gauss-Laugerre
$f(x)=e^{-x}*(x^4-x^3-x^2-x+1)$			
2	12.00003	15.99999	25.0
3	15.99967		0
4	12.30415		23.1
5	16.2019		1.26
$f(x)=e^{-x}*(\|x-5\|)$			
2	4.0	4.01346	0.34
3	4.0268		0.33
4	4.00377		0.24
5	4.01549		0.05

$f(x)=e^{-x}*(2^x)$			
2	2.84227	3.25865	12.78
3	3.12766		4.03
4	2.85834		12.29
5	3.30185		1.32
$f(x)=e^{-x}*\sin(x)$			
2	0.43246	0.50002	13.51
3	0.49603		0.79
4	0.50523		1.05
5	0.4989		0.22
$f(x)=e^{-x}*(\cos(x)-x^3)$			
2	-5.42981	-5.49994	1.28
3	-5.52342		0.43
4	-5.05755		8.04
5	-5.51695		0.31

Wnioski

1. Kwadratury Newtona-Cotes'a (metoda Simpsona) oparte są na przybliżeniu funkcji podcałkowej wielomianami stopnia stopnia drugiego
2. Kwadratury Gaussa polegają na wykorzystaniu wielomianów ortogonalnych i takim wyborze punktów xi oraz współczynników A_i, aby kwadratura była dokładna dla wszystkich wielomianów możliwie najwyższego stopnia
3. Współczynniki kwadratury A_i oraz węzły x_i są niezależne od funkcji podcałkowej f(x).
4. Węzły kwadratury Gaussa są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego
5. Kwadratury Gaussa przy niskiej złożoności obliczeniowej osiągają bardzo dobrą dokładność
6. Kwadratury Gaussa są dokładniejsze od kwadratur Newtona-Cotesa przy uwzględnieniu tej samej liczby węzłów
7. Kwadratura Gaussa oparta na n+1 punktach jest dokładna dla wielomianów: 1, x, x2, …, x^{2n+1}
8. Im wyższa liczba węzłów tym kwadratura Gaussa jest zazwyczaj dokładniejsza