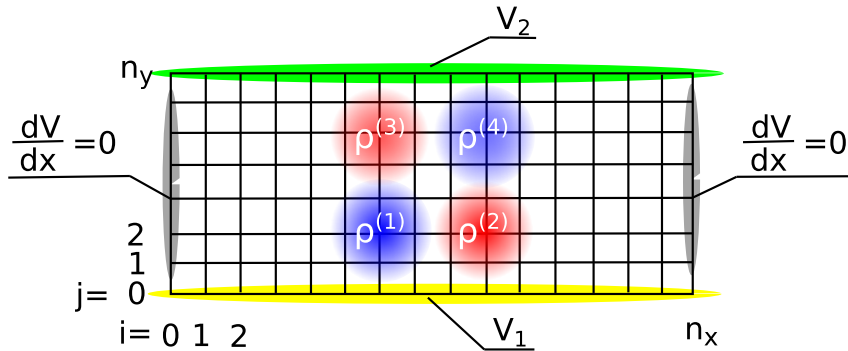


# Projekt 4: Równanie Poissona - relaksacja globalna i lokalna.

Tomasz Chwiej

12 listopada 2020

## 1 Wstęp



Rysunek 1: Geometria obszaru i siatki obliczeniowej, w którym rozwiązywane jest równanie Poissona. Dla  $j = 0$  oraz  $j = n_y$  nałożone są WB Dirichleta, natomiast dla  $i = 0$  oraz  $i = n_x$  WB są typu von Neumanna. W środku obszaru umieszczone są cztery gęstości ładunku  $\rho^{(1)}$ ,  $\rho^{(2)}$ ,  $\rho^{(3)}$  i  $\rho^{(4)}$ .

Na zajęciach wyznaczmy rozkład potencjału w obszarze pokazanym na rys.1 metodą relaksacji globalnej i lokalnej oraz sprawdzimy ich wydajność.

### 1.1 Dyskretyzacja

Punktem wyjścia jest równanie Poissona w 2D

$$\varepsilon \nabla^2 V = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\rho \quad (1)$$

Aby zdyskretyzować równanie wprowadzamy siatkę węzłów i określamy wielkości na siatce (zakładamy że w całym obszarze  $\varepsilon = \text{const}$ )

$$x \rightarrow x_i = \Delta x \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_x \quad (2)$$

$$y \rightarrow y_j = \Delta y \cdot j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n_y \quad (3)$$

$$V(x, y) \rightarrow V(x_i, y_j) = V_{i,j} \quad (4)$$

$$\rho(x, y) \rightarrow \rho(x_i, y_j) = \rho_{i,j} \quad (5)$$

Zakładamy

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \quad (6)$$

i dyskretyzujemy rów. Poissona stosując trójpunktowy symetryczny iloraz różnicowy dla każdego węzła siatki  $\left(\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}\right)$

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta^2} = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon} \quad (7)$$

Równanie (7) przekształcamy tak aby element  $V_{i,j}$  uzależnić od pozostałych

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \left( V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\Delta^2}{\varepsilon} \rho_{i,j} \right) \quad (8)$$

## 1.2 Relaksacja globalna

W relaksacji globalnej operacje wykonujemy na dwóch tablicach potencjału: starej  $V^s$  (elementy  $V_{i,j}^s$ ) i nowej  $V^n$  (elementy  $V_{i,j}^n$ ). Jedna iteracja w metodzie relaksacji globalnej składa się z 3 etapów. Najpierw wyznaczamy wszystkie elementy (poza brzegowymi) w nowej tablicy

$$V_{i,j}^n = \frac{1}{4} \left( V_{i+1,j}^s + V_{i-1,j}^s + V_{i,j+1}^s + V_{i,j-1}^s + \frac{\Delta^2}{\varepsilon} \rho_{i,j} \right), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n_x - 1 \\ j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \end{array} \quad (9)$$

następnie w  $V^n$  uwzględniamy WB Neumanna (WB Dirichleta uwzględniane są automatycznie)

$$V_{0,j}^n = V_{1,j}^n, \quad j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (10)$$

$$V_{n_x,j}^n = V_{n_x-1,j}^n, \quad j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (11)$$

i na końcu mieszamy ze sobą oba rozwiązania

$$V^s = (1 - \omega_G) \cdot V^s + \omega_G \cdot V^n, \quad \omega_G \in (0, 1] \quad (12)$$

po czym wykonujemy kolejne iteracje według powyższego opisu.

## 1.3 Relaksacja lokalna

W relaksacji lokalnej operujemy na jednej tablicy  $V$ , a postępowanie w jednej iteracji jest dwuetapowe. W pierwszym kroku modyfikujemy elementy

$$V_{i,j} = (1 - \omega_L) \cdot V_{i,j} + \frac{\omega_L}{4} \left( V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\Delta^2}{\varepsilon} \rho_{i,j} \right), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n_x - 1 \\ j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \end{array} \quad (13)$$

dla warunku  $\omega_L \in (0, 2)$ ,

a następnie uwzględniamy WB von Neumanna

$$V_{0,j} = V_{1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (14)$$

$$V_{n_x,j} = V_{n_x-1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (15)$$

## 1.4 Warunek stopu

Dla równania Poissona definiujemy całkę funkcjonalną

$$S = \iint dx dy \left( \frac{1}{2} \vec{E}^2 - \rho \cdot V \right) \quad (16)$$

której wartość osiąga minimum dla potencjału  $V$  będącego dokładnym rozwiązaniem tego równania. W wersji zdyskretyzowanej całkowanie zastępujemy sumowaniem po węzłach

$$S = \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \Delta^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta} \right)^2 - \rho_{i,j} \cdot V_{i,j} \right] \quad (17)$$

W relaksacji globalnej i lokalnej, zmiany potencjału w każdej iteracji będą zmieniać wartość  $S$  do chwili gdy rozkład przestrzenny potencjału ustabilizuje się (inaczej: zmiany będą niewielkie). Dlatego jako warunek stopu przyjmujemy spełnienie warunku

$$\left| \frac{S_{it} - S_{it-1}}{S_{it-1}} \right| < TOL \quad (18)$$

gdzie:  $it$  - numer iteracji,  $TOL$  - mała liczba.

## 2 Zadania do wykonania

1. Przyjmujemy następujące wartości parametrów:  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta = 0.1$ ,  $n_x = 150$ ,  $n_y = 100$ ,  $V_1 = 10$  (WB na dole),  $V_2 = 0$  (WB na górze),  $x_{max} = \Delta \cdot n_x$ ,  $y_{max} = \Delta \cdot n_y$ . Gęstość definiujemy następująco

$$\rho^{(1)}(x, y) = (+2) \cdot \exp \left[ -\frac{(x - 0.35 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.25 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \quad (19)$$

$$\rho^{(2)}(x, y) = (-2) \cdot \exp \left[ -\frac{(x - 0.65 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.25 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \quad (20)$$

$$\rho^{(3)}(x, y) = (-1) \cdot \exp \left[ -\frac{(x - 0.35 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.75 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \quad (21)$$

$$\rho^{(4)}(x, y) = (+1) \cdot \exp \left[ -\frac{(x - 0.65 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.75 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \quad (22)$$

oraz  $\sigma_x = 0.1 \cdot x_{max}$ ,  $\sigma_y = 0.1 \cdot y_{max}$ .

2. Rozwiązać równanie Poissona metodą relaksacji globalnej dla  $\omega_G = 0.6, 1.0$ . W obu przypadkach na starcie przyjąć  $V = 0$  w całym obszarze (poza górnym i dolnym brzegiem). Jako warunek stopu wykorzystać równania (17) i (18) z parametrem  $TOL = 10^{-8}$ . Na jednym rysunku umieścić wykresy zmian całki funkcjonalnej  $S = S(it)$  dla obu przypadków. (30 pkt) Narysować mapę zrelaksowanego potencjału  $V(x, y)$  oraz błędu rozwiązania  $\delta = \nabla^2 V(x, y) + \rho(x, y)/\varepsilon$ . (30 pkt)
3. Rozwiązać równanie Poissona metodą relaksacji lokalnej dla  $\omega_L = 1.0, 1.4, 1.8, 1.9$ . W każdym przypadku na starcie przyjąć  $V = 0$  w całym obszarze (poza górnym i dolnym brzegiem). Jako warunek stopu wykorzystać równania (17) i (18) z parametrem  $TOL = 10^{-8}$ . Na jednym rysunku umieścić wykresy zmian całki funkcjonalnej  $S = S(it)$  dla wszystkich rozwiązanych przypadków. (40 pkt)