Interpolacje - ciąg dalszy

Efekt Rungego - problemy interpolacja wielomianowej

In[4]:=
```
f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
```

In[5]:=
```
n = 16;

points = Table[{2 i/n - 1, f[2 i/n - 1]}, {i, 0, n}];
         tabela
```

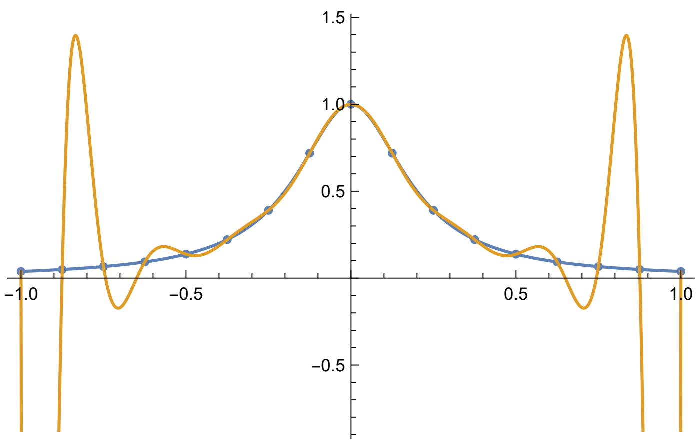
In[7]:=
```
Lagrange = Simplify[
           uprość
  Sum[points[[j, 2]] *
  sumowanie
   Product[If[m ≠ j, (x - points[[m, 1]])/(points[[j, 1]] - points[[m, 1]]), 1], {m, 1, n + 1}], {j, 1, n + 1}]]
   iloczyn operator warunkowy
```

Out[7]=

$$\left(170\,189\,292\,876\,156\,034 - 3\,876\,218\,985\,722\,260\,225\,x^2 + 59\,903\,899\,173\,085\,802\,500\,x^4 - 527\,646\,780\,474\,606\,000\,000\,x^6 + 2\,588\,025\,468\,896\,400\,000\,000\,x^8 - 7\,125\,820\,316\,160\,000\,000\,000\,x^{10} + 10\,848\,507\,904\,000\,000\,000\,000\,x^{12} - 8\,460\,697\,600\,000\,000\,000\,000\,x^{14} + 2\,621\,440\,000\,000\,000\,000\,000\,x^{16}\right) \Big/ 170\,189\,292\,876\,156\,034$$

In[8]:=
```
Show[{ListPlot[points], Plot[{f[x], Lagrange}, {x, -1, 1}]}, PlotRange → All]
pokaż wykres danych z listy  wykres                       zakres wykresu wszys
```

Out[8]=



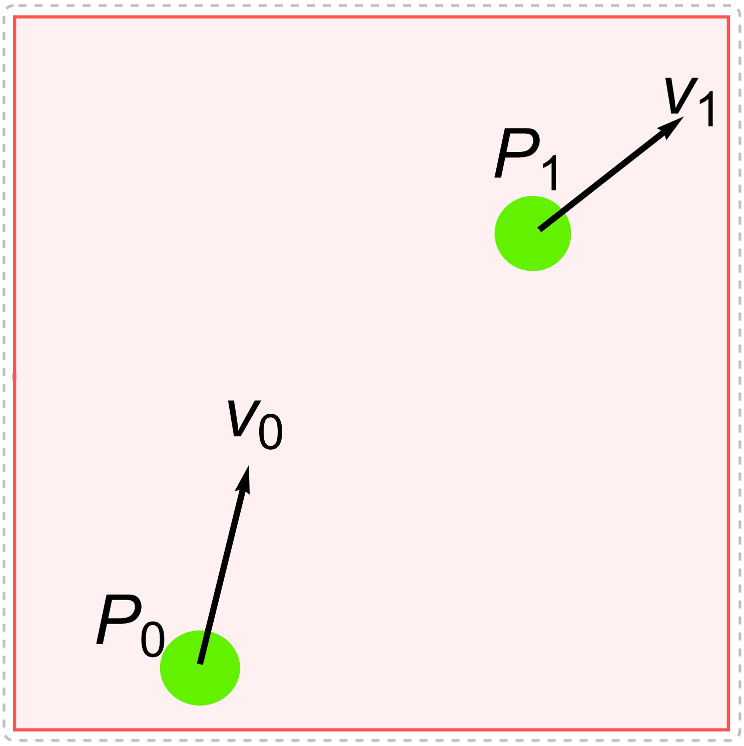
Zwiększenie ilości punktów użytych do interpolacji pogarsza (zwłaszcza na brzegach) jakość przybliżenia

Interpolacje - cubic Hermite spline

Spline - funkcja generująca krzywe

zbiór punktów -----> splines ---> krzywa

Problem: Mając dwa punkty oraz prędkości w tych punktach wyznacz trajektorię ruchu



Zakładamy, że trajektoria jest wielomianem 3 stopnia (zgodnie z nazwą "cubic Hermite spline"). Parametr $t \in [0,1]$ (analogicznie dla jak dla prostej, przechodzącej przez punkty P_p i P_k, którą możemy parametryzować przez $P_k\, t + (1 - t)\, P_p$)

In[9]:=
```
f[t_] := a t^3 + b t^2 + c t + d
```

Nasze warunki to:

In[10]:=
```
Solve[{
  f[0] == P0,
  f[1] == P1,
  f'[0] == v0,
  f'[1] == v1

 }, {a, b, c, d}]
```
rozwiąż równanie

Out[10]=

$\{\{a \to 2\,P0 - 2\,P1 + v0 + v1,\ b \to -3\,P0 + 3\,P1 - 2\,v0 - v1,\ c \to v0,\ d \to P0\}\}$

Wstawiając powyższe do funkcji f dostajemy krzywą spełniającą nasze warunki.
Nasz wynik możemy zapisać w postaci macierzowej:

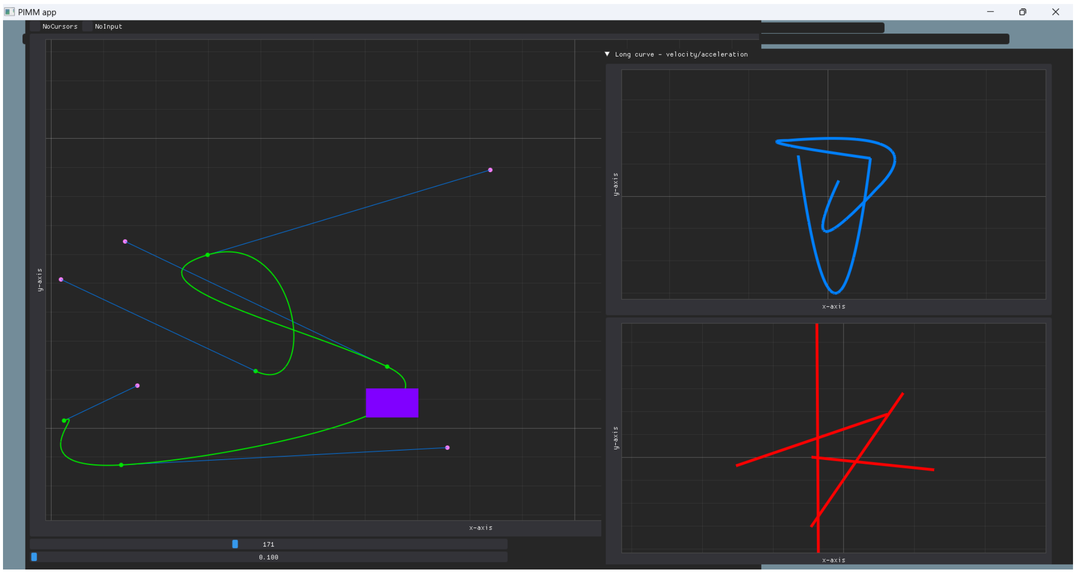
In[∘]:=
```
Clear[P0, P1]
```
wyczyść

$$\text{Collect}\left[\begin{pmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}P0\\ v0\\ P1\\ v1\end{pmatrix}, t\right]$$
pogrupuj według potęg

Out[∘]=

$\{\{P0 + t\,v0 + t^2\,(-3\,P0 + 3\,P1 - 2\,v0 - v1) + t^3\,(2\,P0 - 2\,P1 + v0 + v1)\}\}$

Dodatkowo, w załączonym programie można pobawić się krzywymi Hermite'a. W panelu po prawej pokazane są krzywe kreślone przez wektory prędkości i przyśpieszenia. W panelu dolnym pokazane są wykresy długości tych wektorów zależne od parametru t (tutaj jest on przeskalowany); Jak widać prędkość jest ciągła (wynika to z konstrukcji), a przyśpieszenie nie jest ciągłe.



Efekt Runge'go II

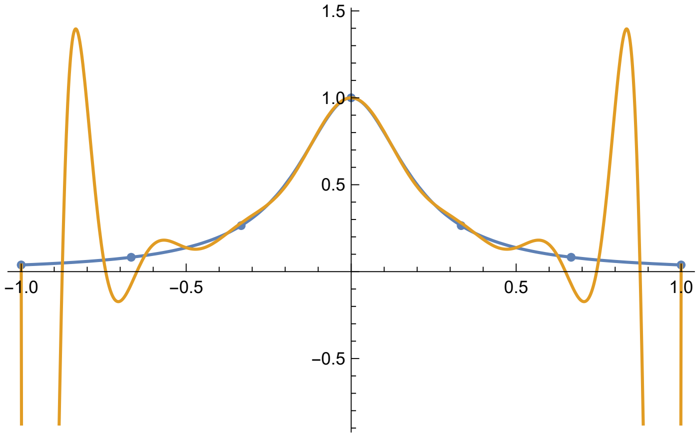
Poprzednio mieliśmy problem z interpolacją wielomianową:

In[11]:=
$$f[x\_] := \frac{1}{1 + 25\,x^2}$$

In[12]:=
```
n = 6;
```
$$\texttt{points} = \texttt{Table}\left[\left\{\frac{2\,i}{n} - 1,\ f\left[\frac{2\,i}{n} - 1\right]\right\},\ \{i, 0, n\}\right];$$
tabela

```
Show[{ListPlot[points], Plot[{f[x], Lagrange}, {x, -1, 1}]}, PlotRange → All]
```
pokaż wykres danych z listy wykres zakres wykresu wszys

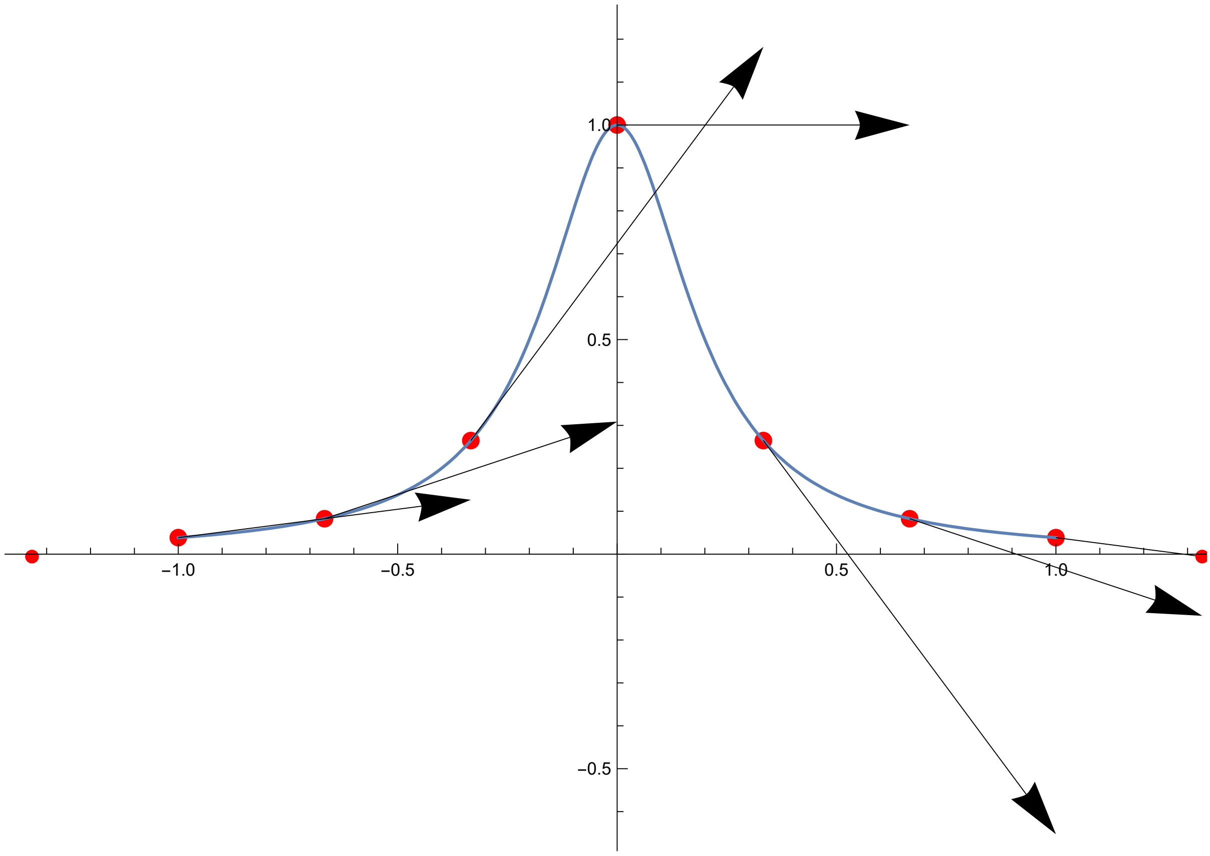
Out[14]=



Mając zestaw punktów (bez prędkości), nadal możemy zastosować interpolację Hermita pomiędzy punktami. Musimy tylko oszacować prędkości początkowe. Najprostszy sposób osiągnięcia tego jest wyznaczenie wektora łączącego sąsiadów danego punktu i "przyczepienie" go do danego punktu.

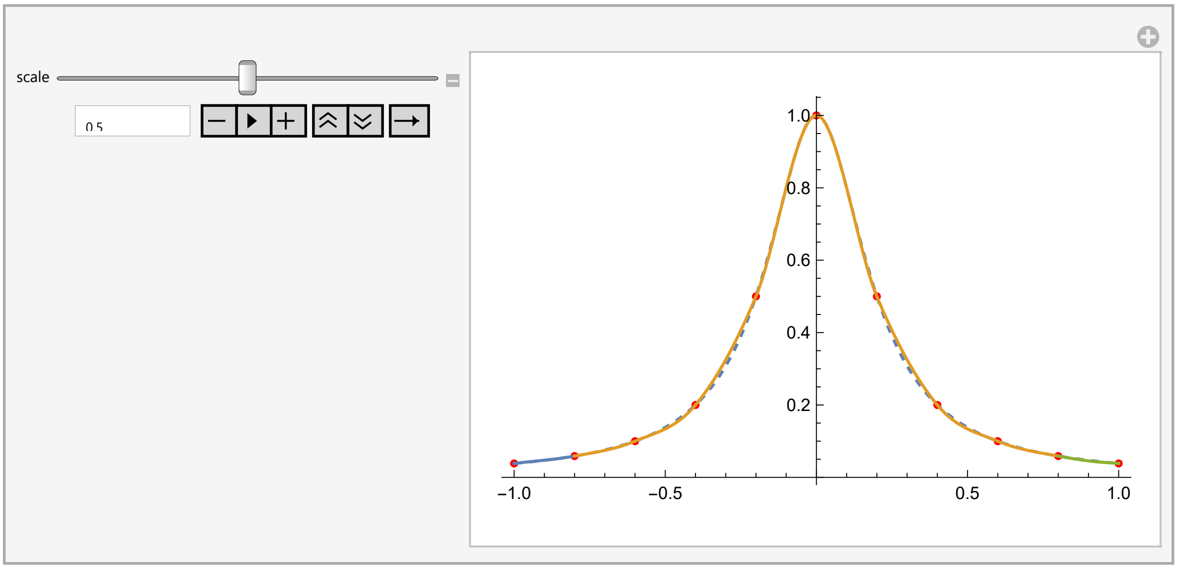
Problemem są tylko pierwszy i ostatni punkt (mają tylko po jednym sąsiedzie). Rozwiązaniem jest odbicie sąsiada względem punktu. Mając zestaw punktów i prędkości, możemy wyznaczyć krzywą Hermite'a pomiędzy każdą parą punktów.

Out[∘]=



Ostatnią modyfikacją jest wprowadzenie parametru (tutaj nazwanego “scale”), który skaluje wszystkie prędkości. Dla scale=1 mamy interpolację liniową. (Dla scale = 1/2 mamy tzw. Catmull-Rom spline)

Out[17]=



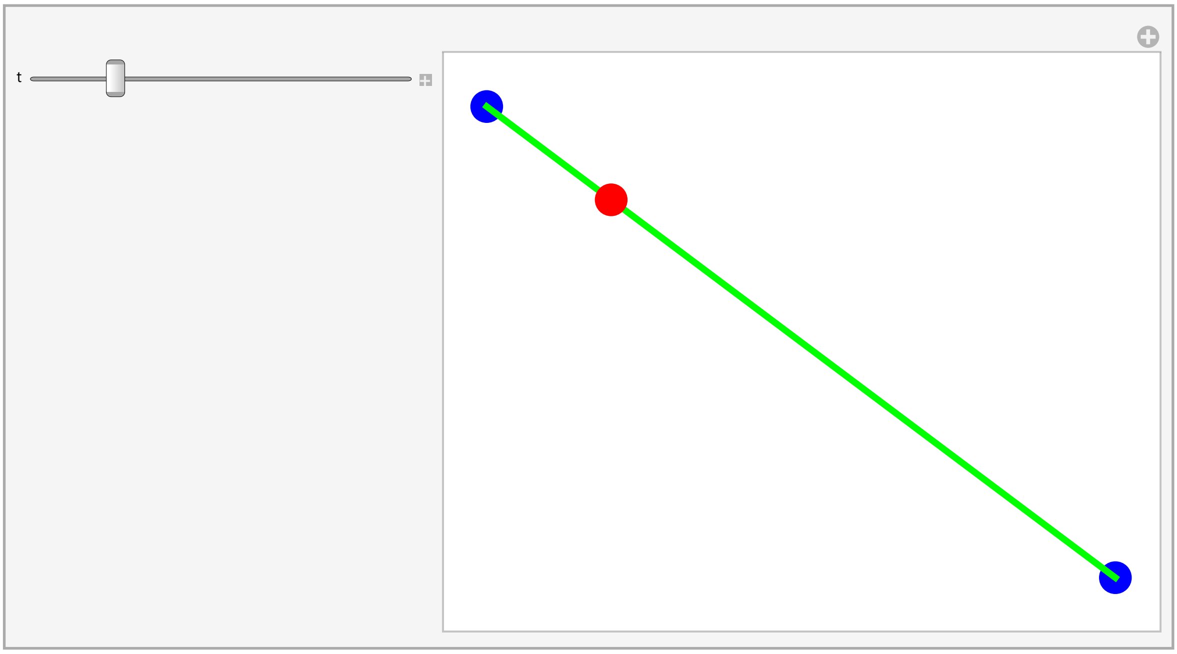
Krzywe Beziera

Ciekawym zastosowaniem interpolacji liniowej jest wyznaczanie krzywych Beziera (szeroko stosowanych w grafice komputerowej itp.)

In[18]:=
```
{x, y} = {{1, 3}, {5, 0}}
```

Out[18]=
```
{{1, 3}, {5, 0}}
```

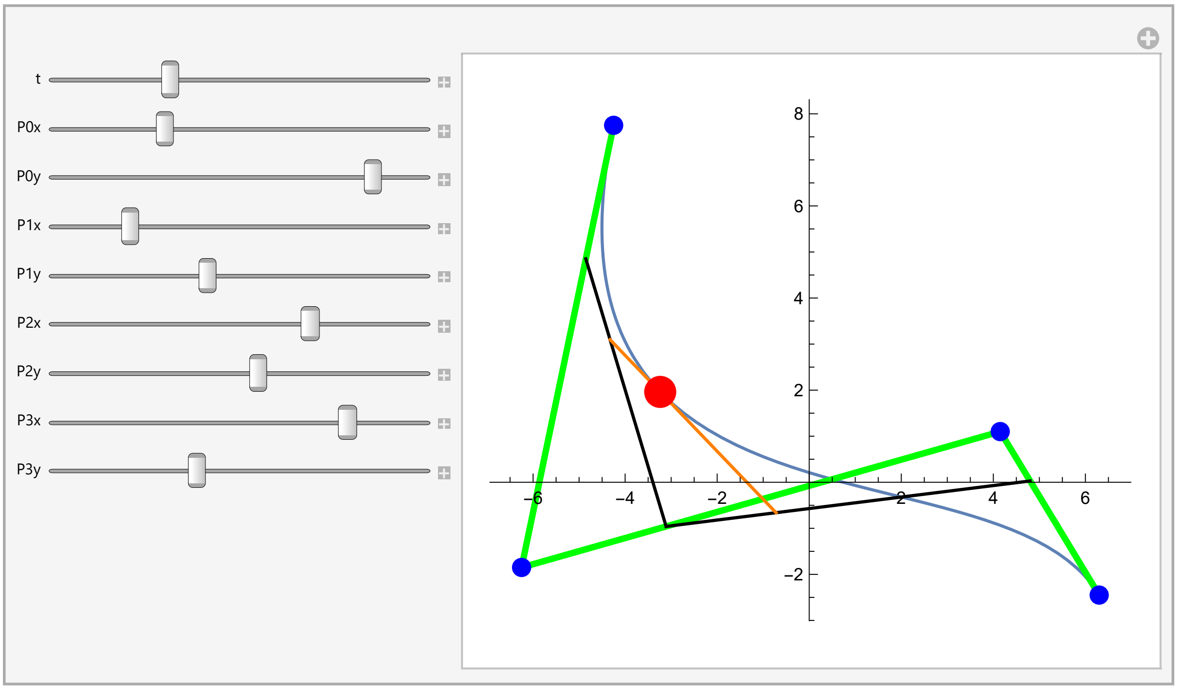
Out[•]=



In[19]:=
```
Lerp[t_, P0_, P1_] := t P1 + (1 - t) P0
```

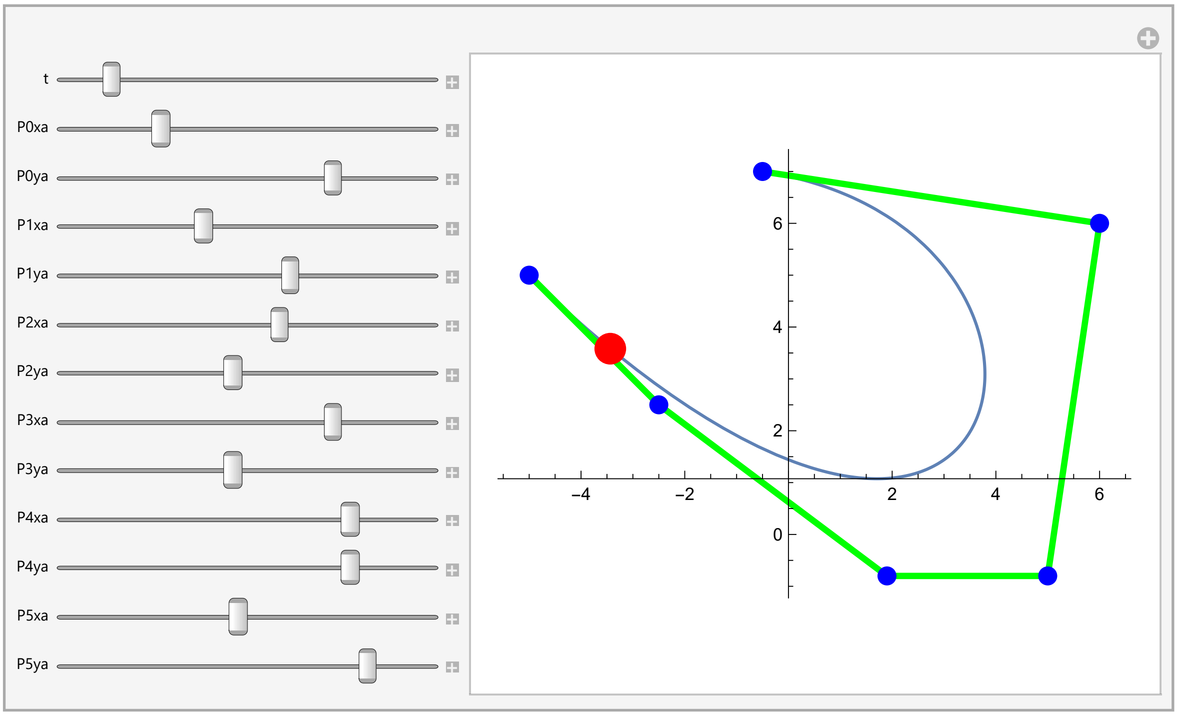
Powyżej mamy przykład zastosowania interpolacji linowej (t P_1+(1−t) P_0) do dwóch punktów. Poniżej mamy wyznaczoną krzywą Beziera (niebieska krzywa) daną przez 4 punkty. Krzywa ta powstaje przez interpolację pomiędzy kolejnymi punktami (zielone proste). Wszystkie te proste zależą od parametru t. Następnie stosujemy interpolację liniową pomiędzy otrzymanymi w poprzednim kroku punktami (czarne proste). Następnie stosujemy interpolację liniową na otrzymanych punktach (pomarańczowa prosta). Ruch punktu na tej prostej wyznacza krzywą Beziera stopnia 3. Powyższą strategię można nazwać: “interpoluj liniowo, dopóki nie skończą Ci się punkty do interpolowania”.

Out[•]=



Zauważmy, że użyliśmy 6 interpolowań liniowych. Dodając więcej punktów liczba ta rośnie. Np. dla 6 punktów musimy użyć 15 interpolowań. Poniżej: krzywa Beziera stopnia 5.

Out[•]=



Zauważmy, że krzywe Beziera przechodzą tylko przez punkt początkowy i końcowy, a reszta punktów kontroluje kształt krzywej.

Zauważmy, że stosujemy tu “rekurencyjną” metodę otrzymywania krzywej Bezier’a. Możemy jednak rozwinąć wyrażenie na krzywą i otrzymać postać wielomianową

In[◦]:=
```
Clear[P0, P1, P2, P3]
wyczyść
a = Lerp[t, P0, P1];
b = Lerp[t, P1, P2];
c = Lerp[t, P2, P3];
d = Lerp[t, a, b];
e = Lerp[t, b, c];
Collect[Lerp[t, d, e], t]
pogrupuj według potęg
```

Out[◦]=

$$P0 + (-3\,P0 + 3\,P1)\,t + (3\,P0 - 6\,P1 + 3\,P2)\,t^2 + (-P0 + 3\,P1 - 3\,P2 + P3)\,t^3$$

lub macierzową

In[◦]:=

$$\text{Collect}\left[\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P0 \\ P1 \\ P2 \\ P3 \end{pmatrix}, t\right]$$

pogrupuj według potęg

Out[◦]=

$$\{\{P0 + (-3\,P0 + 3\,P1)\,t + (3\,P0 - 6\,P1 + 3\,P2)\,t^2 + (-P0 + 3\,P1 - 3\,P2 + P3)\,t^3\}\}$$

W ogólności $B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i}\, t^i\, P_i$

W szczególności dla 4 punktów (liczymy od zera) mamy:

In[◦]:=

$$\text{Collect}\left[\sum_{i=0}^{3} \text{Binomial}[3, i]\,(1-t)^{3-i}\, t^i\, P_i, t\right]$$

pogrupuj według potęg | współczynnik dwumianowy

Out[◦]=

$$P_0 + t\,(-3\,P_0 + 3\,P_1) + t^2\,(3\,P_0 - 6\,P_1 + 3\,P_2) + t^3\,(-P_0 + 3\,P_1 - 3\,P_2 + P_3)$$

In[20]:=

$$P[t\_] := P0 + (-3\,P0 + 3\,P1)\,t + (3\,P0 - 6\,P1 + 3\,P2)\,t^2 + (-P0 + 3\,P1 - 3\,P2 + P3)\,t^3$$
$$R[t\_] := P4 + (-3\,P4 + 3\,P5)\,t + (3\,P4 - 6\,P5 + 3\,P6)\,t^2 + (-P4 + 3\,P5 - 3\,P6 + P7)\,t^3$$

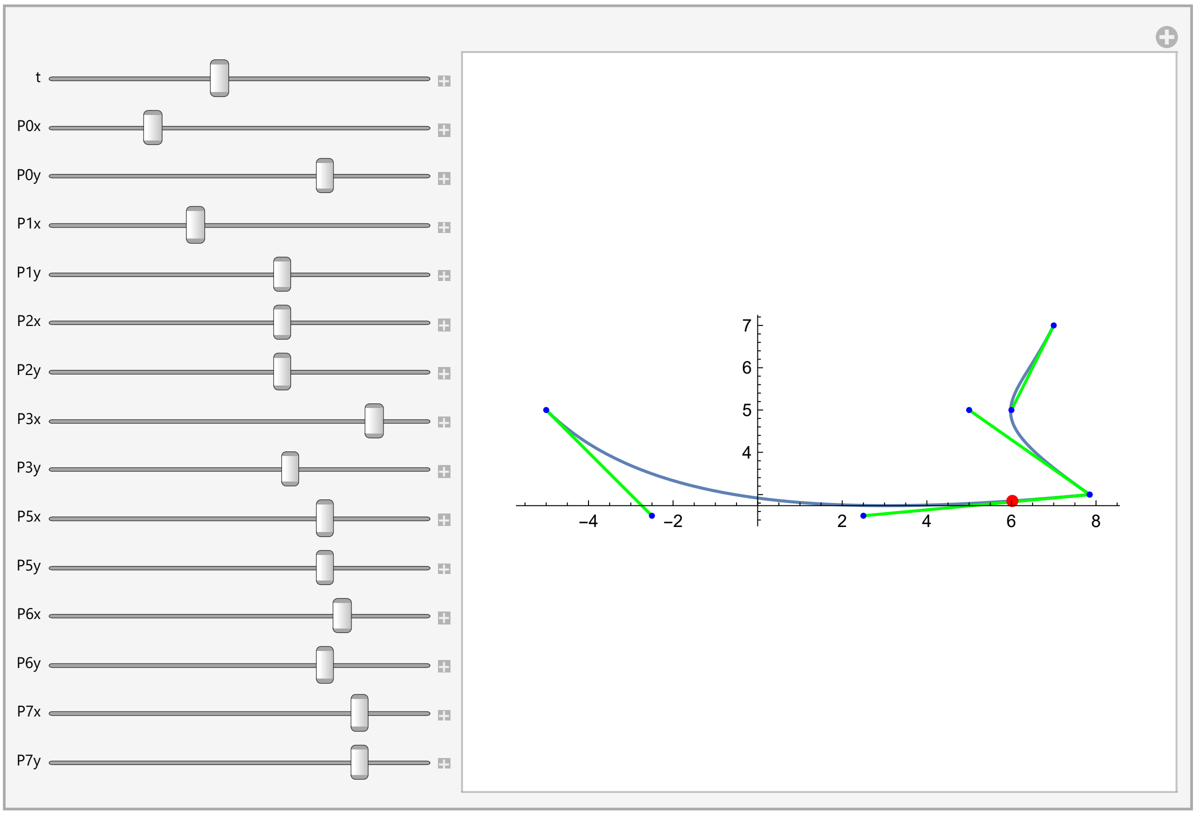
In[◦]:=
```
Clear[P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7]
wyczyść
Solve[{
rozwiąż równanie
   P[1] == R[0]
  }, P4]
```

Out[◦]=

$$\{\{P4 \to P3\}\}$$

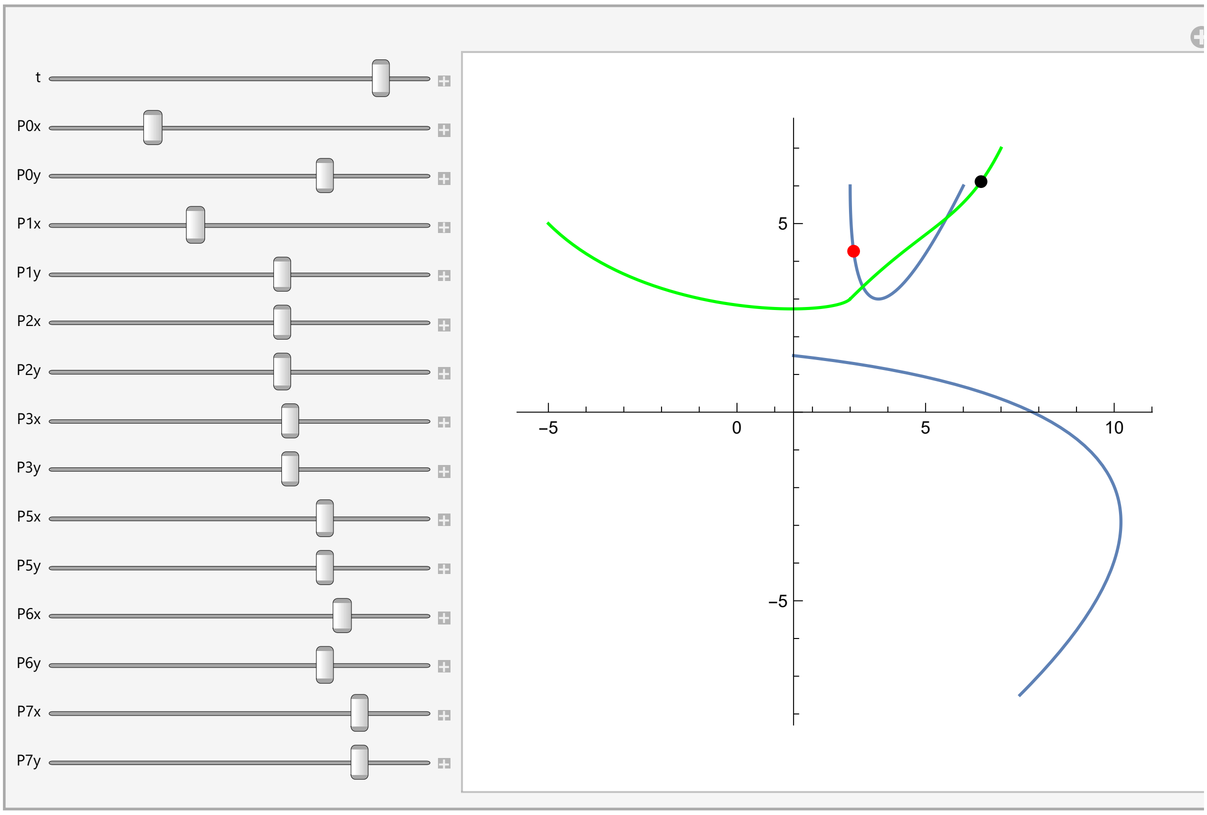
```
In[•]:= Manipulate[
        zmieniaj

  points2 = {P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7} = {{P0x, P0y}, {P1x, P1y},
     {P2x, P2y}, {P3x, P3y}, {P4x, P4y}, {P5x, P5y}, {P6x, P6y}, {P7x, P7y}};
  points2[[5]] = P3;
  P4 = P3;
  GraphicsColumn[{
  kolumna z grafikami
    Show[{
    pokaż
      ParametricPlot[P[t1], {t1, 0, 1}],
      wykres parametryczny
      ParametricPlot[R[t1], {t1, 0, 1}],
      wykres parametryczny
      Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[1]], points2[[2]]}]}],
      grafika    zielony  grubość            linia łamana
      Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[3]], points2[[4]]}]}],
      grafika    zielony  grubość            linia łamana
      Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[5]], points2[[6]]}]}],
      grafika    zielony  grubość            linia łamana
      Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[7]], points2[[8]]}]}],
      grafika    zielony  grubość            linia łamana
      Graphics[{Blue, Thickness[0.01], PointSize[0.01], Point[points2]}],
      grafika    niebi… grubość          rozmiar kropki   punkt

      Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{If[t < 1, P[t], R[t - 1]]}]}]
      grafika    cz… rozmiar kropki      punkt   operator warunkowy
    }, PlotRange → All]
       zakres wykresu wszystko

   }], {t, 0, 2},
  {{P0x, -5}, -10, 10}, {{P0y, 5}, -10, 10},
  {{P1x, -2.5}, -10, 10}, {{P1y, 2.5}, -10, 10},
  {{P2x, 2.5}, -10, 10}, {{P2y, 2.5}, -10, 10},
  {{P3x, 3}, -10, 10}, {{P3y, 3}, -10, 10},
  {{P5x, 5}, -10, 10}, {{P5y, 5}, -10, 10},
  {{P6x, 6}, -10, 10}, {{P6y, 5}, -10, 10},
  {{P7x, 7}, -10, 10}, {{P7y, 7}, -10, 10}]
```

Out[ ]=


t
P0x
P0y
P1x
P1y
P2x
P2y
P3x
P3y
P5x
P5y
P6x
P6y
P7x
P7y
7
6
5
4
-4
-2
2
4
6
8

```
In[•]:= Manipulate[
        zmieniaj

  points2 = {P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7} = {{P0x, P0y}, {P1x, P1y},
     {P2x, P2y}, {P3x, P3y}, {P4x, P4y}, {P5x, P5y}, {P6x, P6y}, {P7x, P7y}};
  points2[[5]] = P3;
  P4 = P3;
  GraphicsColumn[{
  kolumna z grafikami
    Show[{
    pokaż
      ParametricPlot[{P'[t1]}, {t1, 0, 1}],
      wykres parametryczny
      ParametricPlot[{R'[t1]}, {t1, 0, 1}],
      wykres parametryczny
      ParametricPlot[{P[t1], R[t1]}, {t1, 0, 1}, PlotStyle → Green],
      wykres parametryczny                          styl grafiki   zielony

      Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{If[t < 1, P'[t], R'[t - 1]]}]}],
      grafika   cz⋯  rozmiar kropki      punkt   operator warunkowy
      Graphics[{Black, PointSize[0.02], Point[{If[t < 1, P[t], R[t - 1]]}]}]
      grafika   czarny rozmiar kropki        punkt   operator warunkowy
    }, PlotRange → All]
       zakres wykresu wszystko

   }], {t, 0, 2},
  {{P0x, -5}, -10, 10}, {{P0y, 5}, -10, 10},
  {{P1x, -2.5}, -10, 10}, {{P1y, 2.5}, -10, 10},
  {{P2x, 2.5}, -10, 10}, {{P2y, 2.5}, -10, 10},
  {{P3x, 3}, -10, 10}, {{P3y, 3}, -10, 10},
  {{P5x, 5}, -10, 10}, {{P5y, 5}, -10, 10},
  {{P6x, 6}, -10, 10}, {{P6y, 5}, -10, 10},
  {{P7x, 7}, -10, 10}, {{P7y, 7}, -10, 10}]
```

Out[∘]=

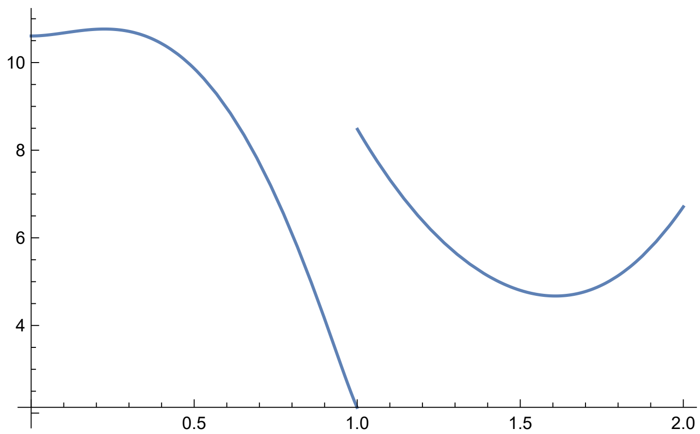


Zielona krzywa jest naszą krzywą Beziera. Niebieska krzywa pokazuje ruch wektora prędkości – widać nieciągłość. Poniższy wykres pokazuje normę wektora prędkości $\left(\sqrt{v^2}\right)$ od parametru afinicznego (czasu), gdzie także widać nieciągłość

In[∘]:=

```
Plot[If[t ≤ 1, Sqrt[P'[t][[1]]^2 + P'[t][[2]]^2],
wyk··· operator ··· pierwiastek kwadratowy
  Sqrt[R'[t - 1][[1]]^2 + R'[t - 1][[2]]^2]], {t, 0, 2}]
  pierwiastek kwadratowy
```

Out[∘]=



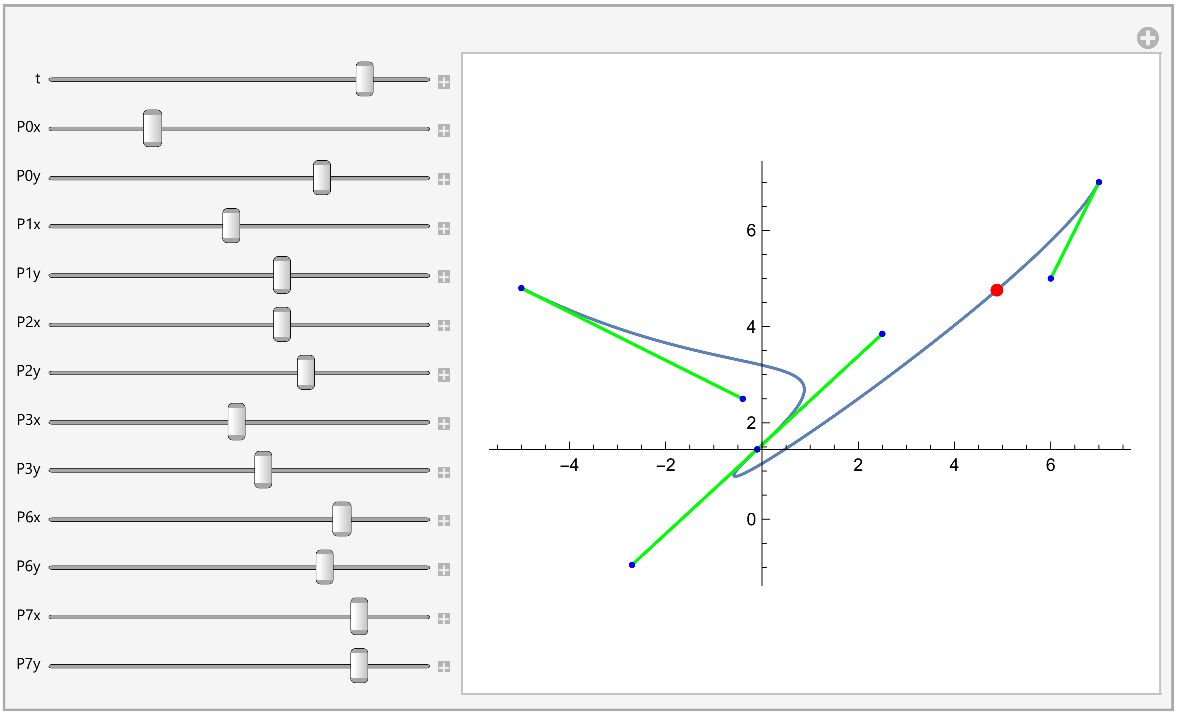
Możemy wymóc ciągłość prędkości:

In[ ]:=
```
Clear[P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7]
wyczyść

Solve[{
rozwiąż równanie
  P[1] == R[0],
  P'[1] == R'[0]
 }, {P4, P5}]
```

Out[ ]=

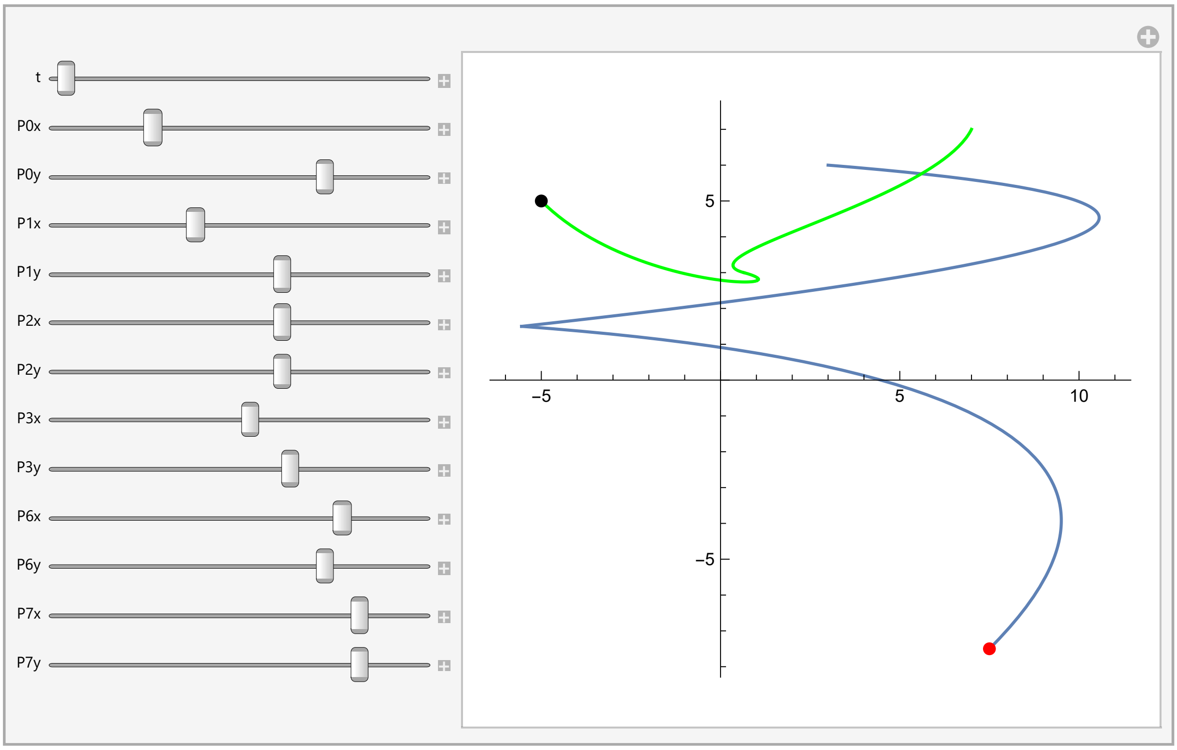
{{P4 → P3, P5 → - P2 + 2 P3}}

Out[ ]=



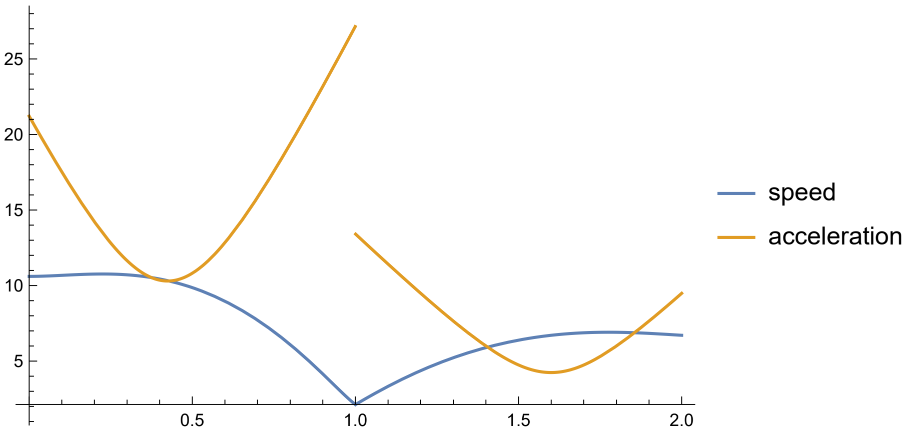
In[∘]:=
```
Manipulate[
zmieniaj
 points2 = {P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7} = {{P0x, P0y}, {P1x, P1y},
    {P2x, P2y}, {P3x, P3y}, {P4x, P4y}, {P5x, P5y}, {P6x, P6y}, {P7x, P7y}};
 points2[[5]] = P3;
 P4 = P3;
 points2[[6]] = -P2 + 2 P3;
 P5 = -P2 + 2 P3;

 Show[{
 pokaż
   ParametricPlot[P'[t1], {t1, 0, 1}],
   wykres parametryczny
   ParametricPlot[R'[t1], {t1, 0, 1}],
   wykres parametryczny
   ParametricPlot[{P[t1], R[t1]}, {t1, 0, 1}, PlotStyle → Green],
   wykres parametryczny                        styl grafiki  zielony
   Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{If[t < 1, P'[t], R'[t - 1]]}]}],
   grafika   cz⋯  rozmiar kropki   punkt  operator warunkowy
   Graphics[{Black, PointSize[0.02], Point[{If[t < 1, P[t], R[t - 1]]}]}]
   grafika   czarny  rozmiar kropki   punkt  operator warunkowy
  }, PlotRange → All], {t, 0, 2},
     zakres wykresu wszystko
 {{P0x, -5}, -10, 10}, {{P0y, 5}, -10, 10},
 {{P1x, -2.5}, -10, 10}, {{P1y, 2.5}, -10, 10},
 {{P2x, 2.5}, -10, 10}, {{P2y, 2.5}, -10, 10},
 {{P3x, 3}, -10, 10}, {{P3y, 3}, -10, 10},
 {{P6x, 6}, -10, 10}, {{P6y, 5}, -10, 10},
 {{P7x, 7}, -10, 10}, {{P7y, 7}, -10, 10}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Plot[{If[t ≤ 1, Sqrt[P'[t][[1]]^2 + P'[t][[2]]^2], Sqrt[R'[t - 1][[1]]^2 + R'[t - 1][[2]]^2]],
  If[t ≤ 1, Sqrt[P''[t][[1]]^2 + P''[t][[2]]^2], Sqrt[R''[t - 1][[1]]^2 + R''[t - 1][[2]]^2]]},
 {t, 0, 2}, PlotLegends → {"speed", "acceleration"}]
```
wykres, operator ⋯, pierwiastek kwadratowy, pierwiastek kwadratowy, operator ⋯, pierwiastek kwadratowy, pierwiastek kwadratowy, legenda dla grafik

Out[∘]=



Jak widać powyżej nasza krzywa stała się krzywą typu C^1 (ciągłość pierwszych pochodnych), ale drugie pochodne nie są ciągłe.

Możemy dodać kolejny warunek na ciągłość przyśpieszenia

```
Clear[P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7]
```
wyczyść

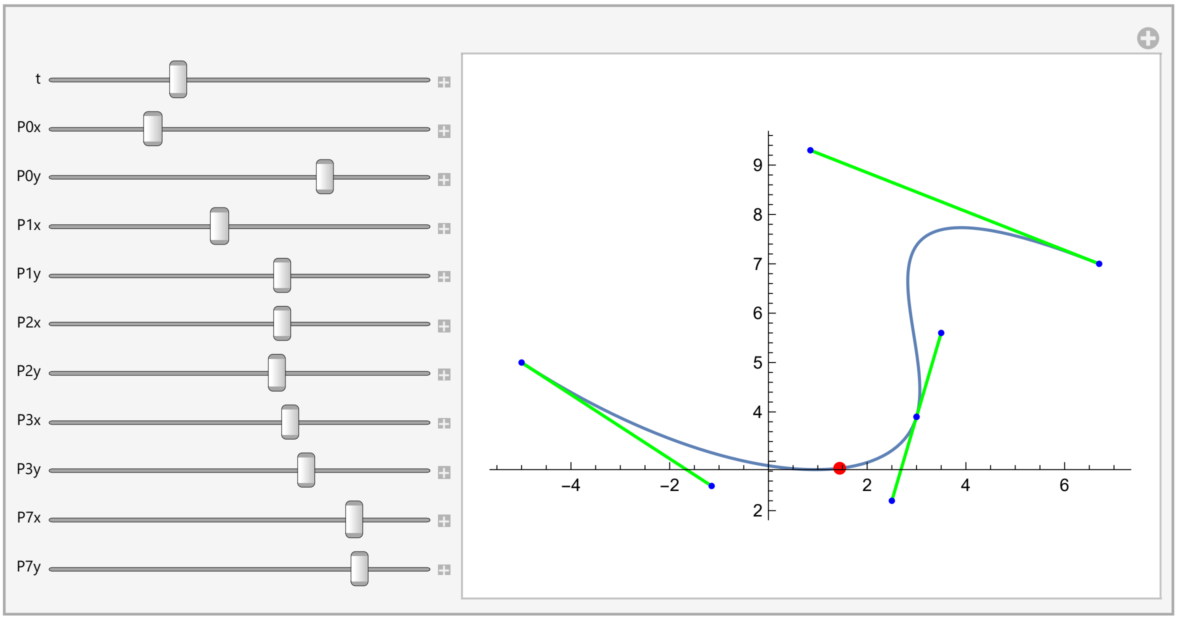
```
Solve[{
  P[1] == R[0],
  P'[1] == R'[0],
  P''[1] == R''[0]
 }, {P4, P5, P6}]
```
rozwiąż równanie

Out[∘]=

{{P4 → P3, P5 → -P2 + 2 P3, P6 → P1 - 4 P2 + 4 P3}}

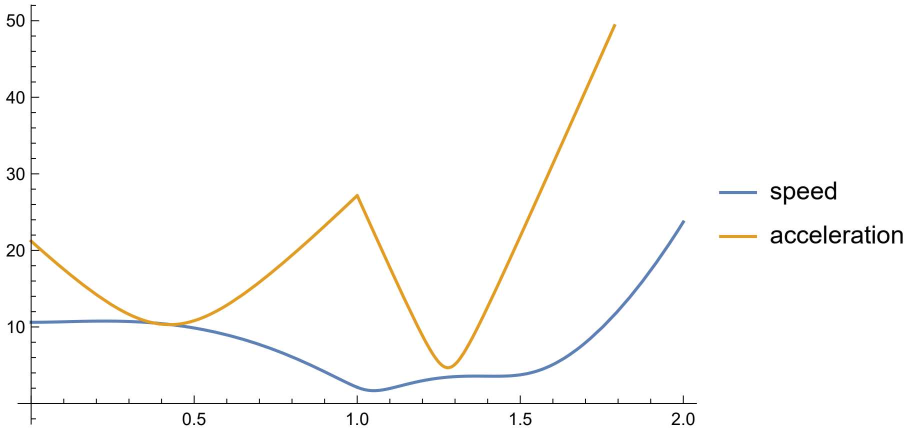
```
In[•]:= Manipulate[
        zmieniaj

  points2 = {P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7} = {{P0x, P0y}, {P1x, P1y},
     {P2x, P2y}, {P3x, P3y}, {P4x, P4y}, {P5x, P5y}, {P6x, P6y}, {P7x, P7y}};
  points2[[5]] = P3;
  P4 = P3;
  points2[[6]] = -P2 + 2 P3;
  P5 = -P2 + 2 P3;
  points2[[7]] = P1 - 4 P2 + 4 P3;
  P6 = P1 - 4 P2 + 4 P3;
  Show[{
  pokaż
    ParametricPlot[P[t1], {t1, 0, 1}],
    wykres parametryczny
    ParametricPlot[R[t1], {t1, 0, 1}],
    wykres parametryczny
    Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[1]], points2[[2]]}]}],
    grafika     zielony  grubość            linia łamana
    Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[3]], points2[[4]]}]}],
    grafika     zielony  grubość            linia łamana
    Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[5]], points2[[6]]}]}],
    grafika     zielony  grubość            linia łamana
    Graphics[{Green, Thickness[0.005], Line[{points2[[7]], points2[[8]]}]}],
    grafika     zielony  grubość            linia łamana
    Graphics[{Blue, Thickness[0.01], PointSize[0.01], Point[points2]}],
    grafika     niebi… grubość          rozmiar kropki    punkt

    Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{If[t ≤ 1, P[t], R[t - 1]]}]}]
    grafika     cz… rozmiar kropki      punkt   operator warunkowy
   }, PlotRange → All], {t, 0, 2},
      zakres wykresu wszystko
  {{P0x, -5}, -10, 10}, {{P0y, 5}, -10, 10},
  {{P1x, -2.5}, -10, 10}, {{P1y, 2.5}, -10, 10},
  {{P2x, 2.5}, -10, 10}, {{P2y, 2.5}, -10, 10},
  {{P3x, 3}, -10, 10}, {{P3y, 3}, -10, 10},
  {{P7x, 7}, -10, 10}, {{P7y, 7}, -10, 10}]
```

Out[•]=



Zwiększając gładkość krzywej tracimy lokalną kontrolę nad kształtem! Zmiana położenia punktu P_1 powoduje globalną zmianę na krzywej, a nie jak poprzednio tylko na pierwszym kawałku. Zazwyczaj C^1 jest wystarczająca.

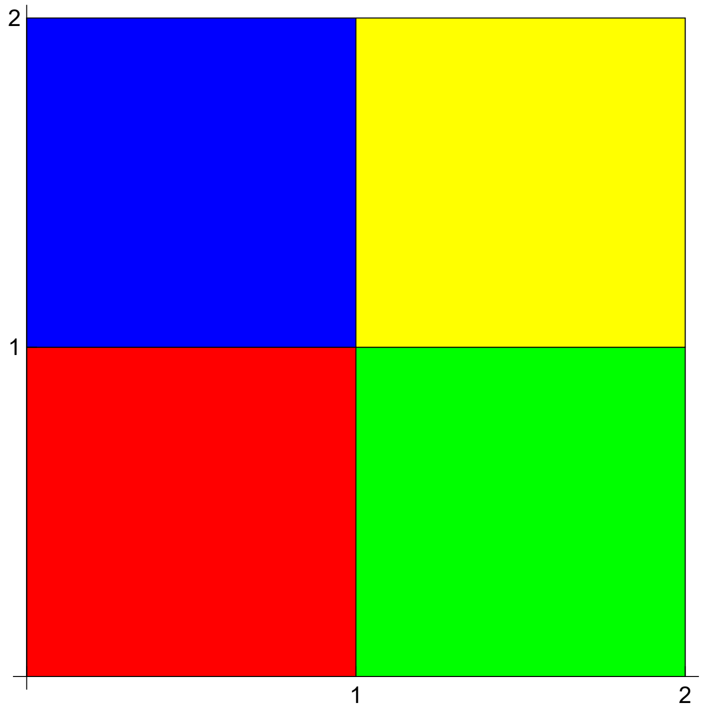
Out[•]=



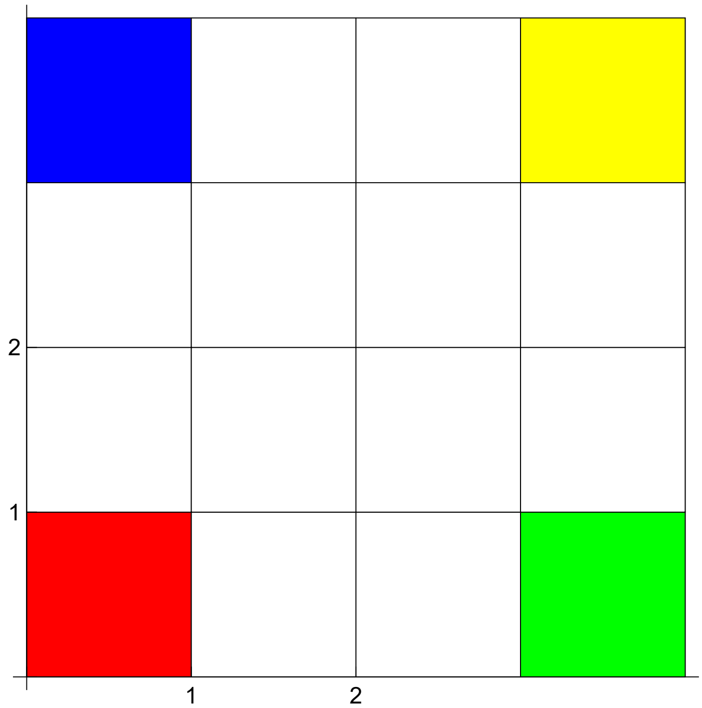
Zaawansowane przykłady interpolacji - DLSS (Deep learning super sampling)

- Super-rozdzielczość - renderuje klatkę w mniejszej rozdzielczości, a następnie zwiększa rozdzielczość obrazu przy użyciu AI

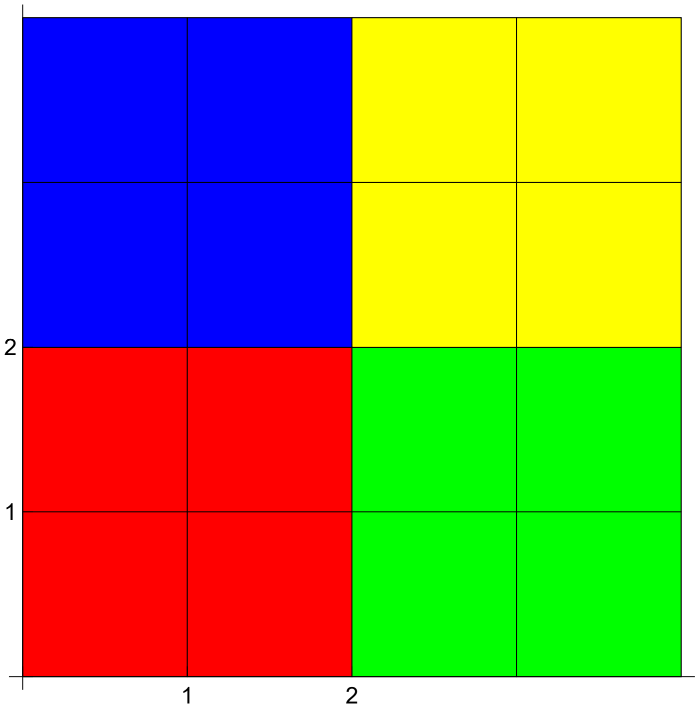
Out[ ]=



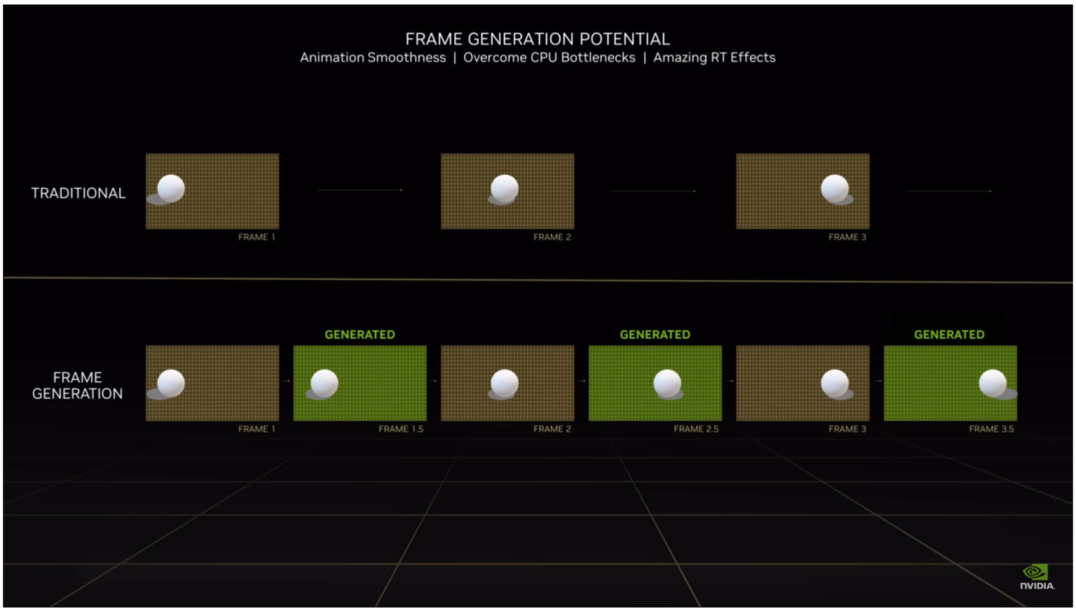
Out[ ]=



Out[ ]=



- Generowanie klatek – generowanie większej ilości klatek bez dużych strat na wydajności



In[ ]:=

```
Hyperlink["https://www.nvidia.com/pl-pl/geforce/technologies/dlss/"]
```

link

Rozwiązywanie równań nieliniowych

Problem: mając funkcję $f(x)$, znajdź jej miejsca zerowe tj. takie x_0, że $f(x_0) = 0$

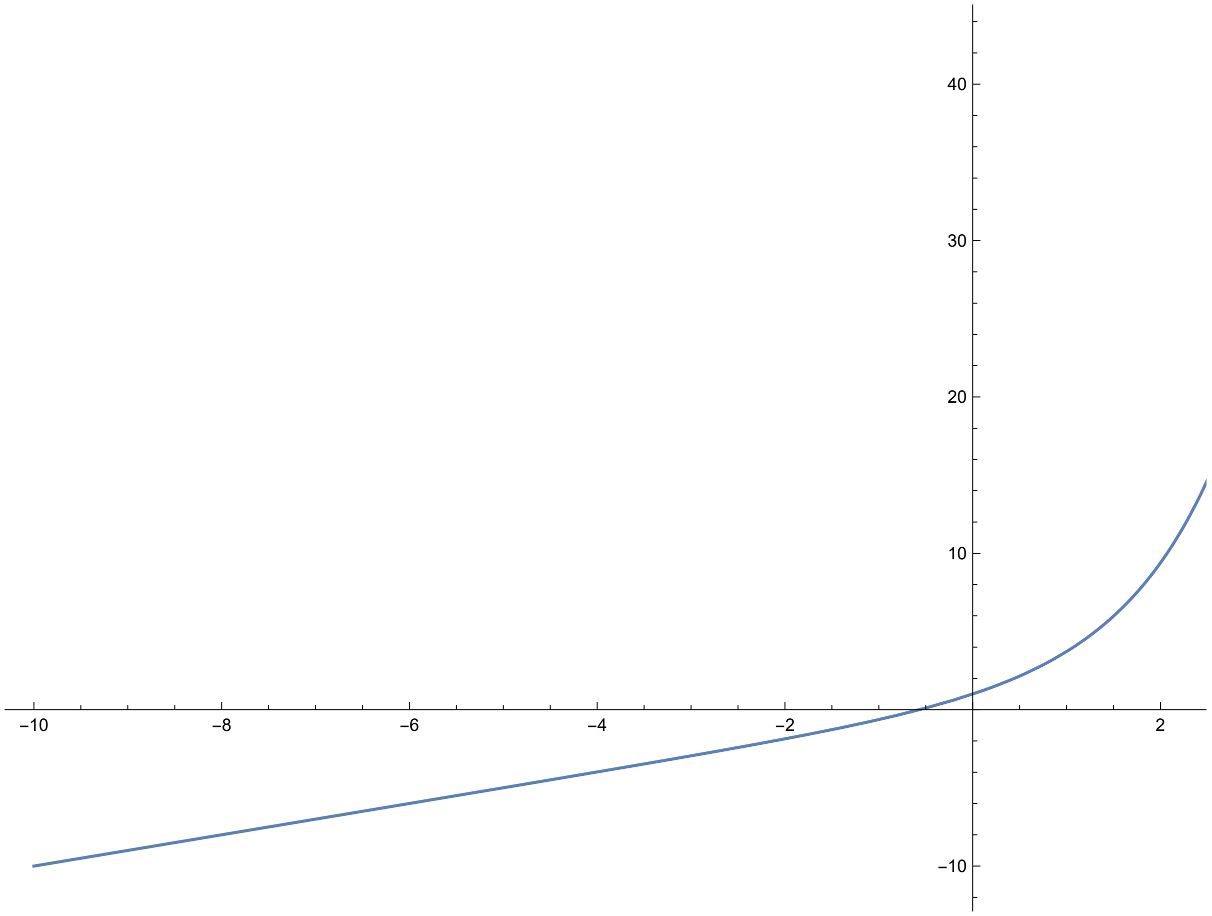
- Łatwe: $f(x) = x^2 + 5x - 4$
- Trudniejsze: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, $g(x) = \sin(2x-1) - \frac{\pi}{2}$
- Rozwiązywalne w szczególnym przypadku: $f(x) = -24 + 2x + 29x^2 - 3x^3 - 5x^4 + x^5$
- Brak rozwiązania analitycznego $f(x) = \text{Log}[6+x] - x^2$

Twierdzenie Darboux:

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz jeśli wartości funkcji na krańcach przedziału ($f(a)$ i $f(b)$) mają różne znaki, to istnieje punkt $x_0 \in]a, b[$, taki że $f(x_0) = 0$.

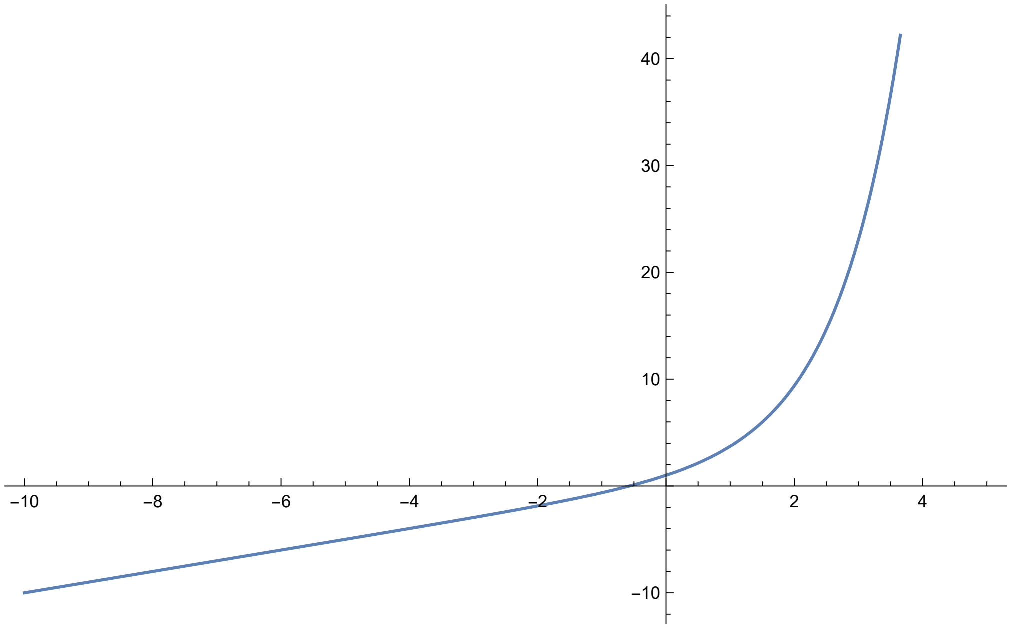
In[ ]:=
```
Plot[x + Exp[x], {x, -10, 5.}]
```
wykres funkcja eksponencjalna

Out[ ]=



Problem: Rozwiąż równanie $x + E^x = 0$

Out[ ]=



Z analizy funkcji $f(x) = x + E^x$ wiemy, że:

- f(x) jest ściśle rosnąca oraz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ więc równanie ma tylko jedno rozwiązanie
- f(0) = 1 > 0
- f(−2) = $-2 + \frac{1}{E^2} < 0$

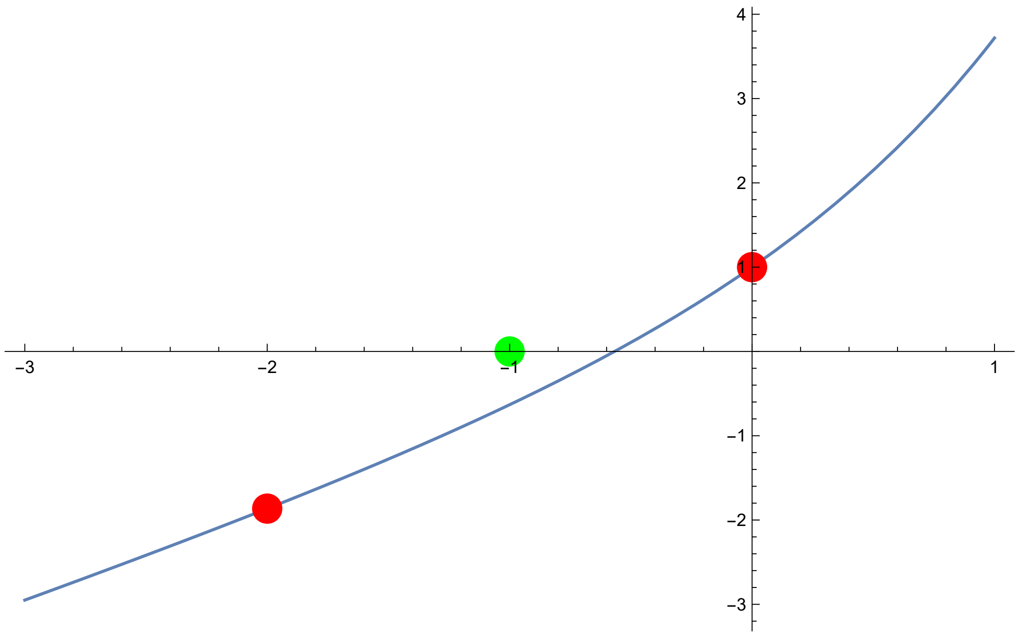
Zatem $f(x)$ ma miejsce zerowe na przedziale $]-2, 0[$

Metoda bisekcji

- Znajdź przedział [a, b] gdzie f(a) f(b) < 0
- oblicz punkt środkowy: $x_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}$
- oblicz $f(x_{\text{mid}})$; jeśli dokładność ($|f(x_{\text{mid}})| < \epsilon$ albo $|b-a| < \epsilon$) jest wystarczająca to przerwij algorytm, miejsce zerowe to $x_0 \simeq x_{\text{mid}}$
- skróć przedział [a, b]; w zależności od znaku $f(x_{\text{mid}})$, a = x_{mid} albo $b = x_{\text{mid}}$

In[◦]:=
```
f[x_] := x + Exp[x]
```
funkcja e

Out[◦]=



W naszym przypadku, a = −2 i b =0, więc w pierwszym przybliżeniu $x_0 \simeq -1$, ale dokładność przybliżenia jest słaba

In[◦]:=
```
N@f[-1]
```
przybliżenie numeryczne

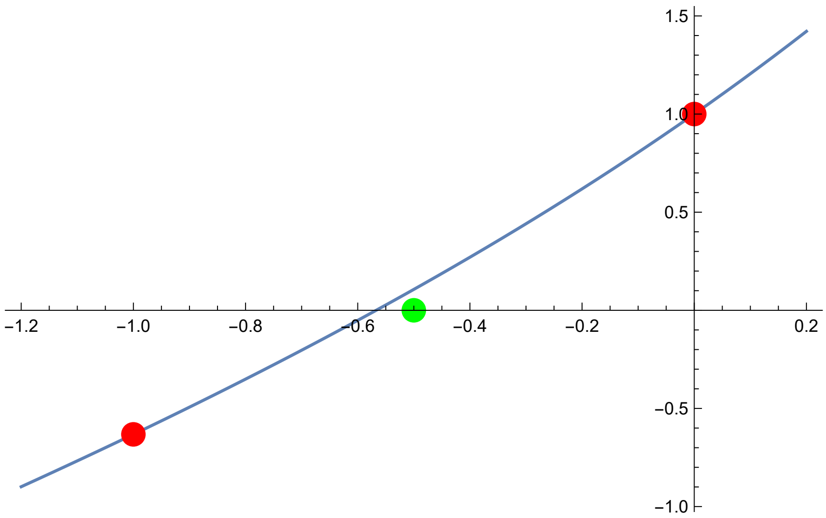
Out[◦]=
```
-0.632121
```

- Naszym zmniejszonym przedziałem musi być]−1, 0[ponieważ f(−1) * f(0) < 0
- Następne przybliżenie: $x_{\text{mid}} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$

In[◦]:=
```
N@f[-1 / 2]
```
przybliżenie numeryczne

Out[◦]=
```
0.106531
```

Out[ ]=



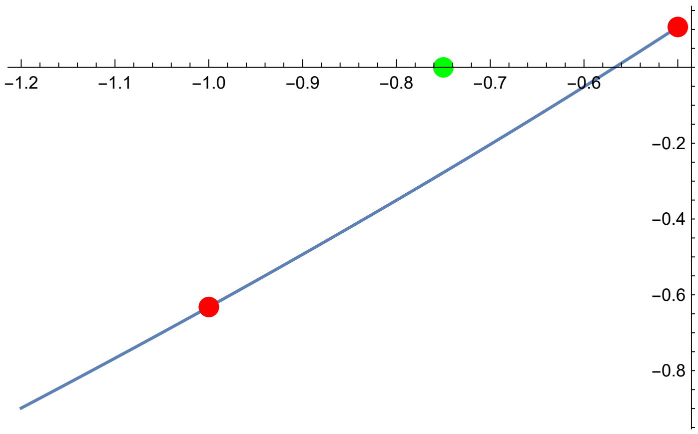
- Zmniejszamy przedział; tym razem f(−1/2) * f(−1)<0, więc nowy przedział to]−1, $\frac{-1}{2}$[
- $x_{\text{mid}} = \frac{-1+(-1/2)}{2} = -3/4$

In[ ]:=
```
N@f[-3 / 4]
```
przybliżenie numeryczne

Out[ ]=

-0.277633

Out[ ]=



In[∘]:=
```
Clear[a, b, c]
a = -2;
b = 0;
c = -1;
sol = {};
While[Abs[f[c]] > 0.0001,
  c = (b + a)/2;
  If[f[c] * f[a] < 0, b = c];
  If[f[c] * f[b] < 0, a = c];
  AppendTo[sol, c];
]
```
wyczyść
podc⋯ wartość bezwzględna
operator warunkowy
operator warunkowy
dołącz na końcu do wartości zmienne

In[∘]:=
```
N@c
N@f[c]
Length[sol]
N@sol
```
przybliżenie nur
przybliżenie nur
długość
przybliżenie nur

Out[∘]= -0.567139

Out[∘]= 7.23791×10^{-6}

Out[∘]= 13

Out[∘]= {-1., -0.5, -0.75, -0.625, -0.5625, -0.59375, -0.578125, -0.570313, -0.566406, -0.568359, -0.567383, -0.566895, -0.567139}

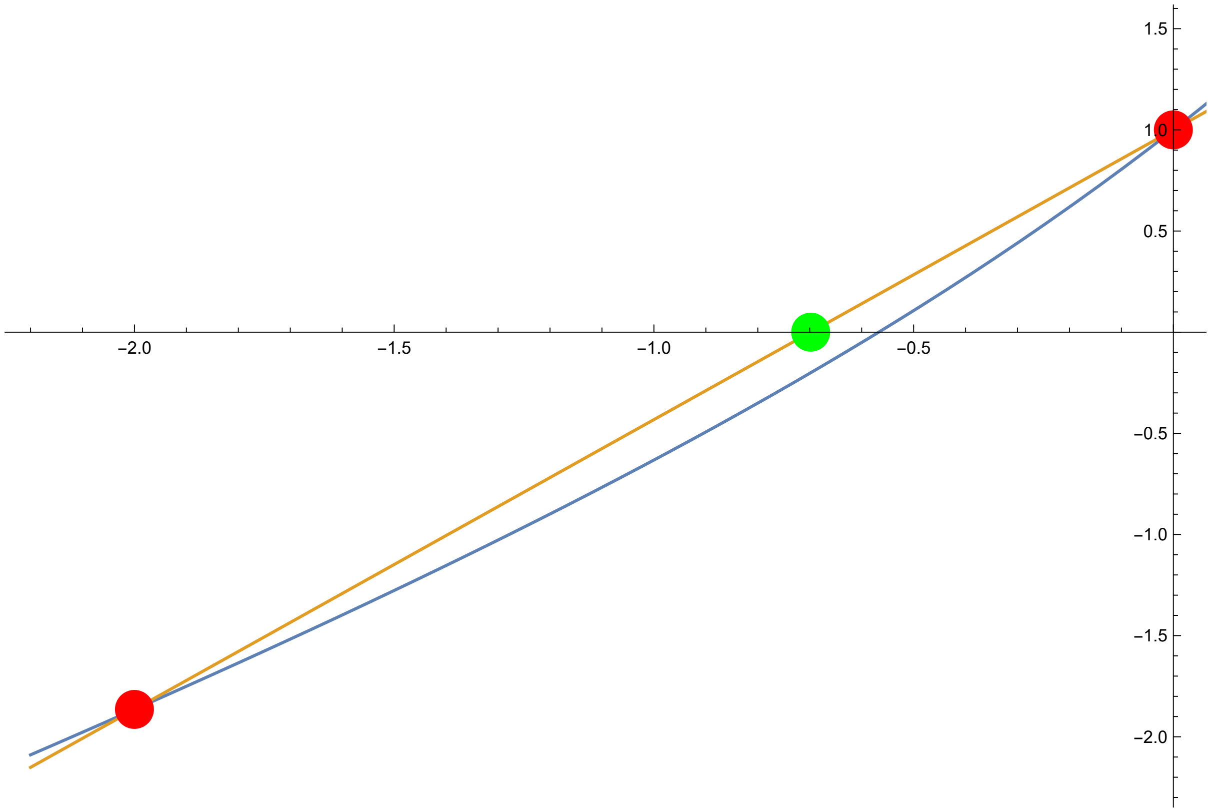
- Prosta i bezpieczna
- Wolna

Metoda falsi

- Znajdź przedział [a, b] gdzie f (a) f (b) < 0
- Interpoluj liniowo funkcję f między punktami a i b
  - Rozwiąż układ równań $\begin{cases} f(a) = A\,a + B \\ f(b) = A\,b + B \end{cases}$
  - funkcja interpolująca g(x) = $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}\,x - \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{a-b}$
- Znajdź miejsce zerowe x_{lin} otrzymanej funkcji liniowej
  - g(x)=0 => $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\,x_{\text{lin}} - \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{a-b} = 0 \Rightarrow x_{\text{lin}} = \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{f(a)-f(b)}$
- oblicz $f(x_{\text{lin}})$; jeśli dokładność ($|f(x_{\text{lin}})| < \epsilon$ albo $|b-a| < \epsilon$) jest wystarczająca to przerwij algorytm, miejsce zerowe to $x_0 \simeq x_{\text{mid}}$
- skróć przedział [a, b]; w zależności od znaku $f(x_{\text{lin}})$, a = x_{lin} albo $b = x_{\text{lin}}$

In[∘]:=
```
a = -2;
b = 0;
Show[{
  Plot[{x + Exp[x], (f[a] - f[b])/(a - b) x - (b f[a] - a f[b])/(a - b)}, {x, -2.2, 0.2}],
  Graphics[{Red, PointSize[0.03], Point[{{-2, f[-2]}, {0, f[0]}}]}],
  Graphics[{Green, PointSize[0.03], Point[{{(b f[a] - a f[b])/(f[a] - f[b]), 0}}]}]
}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
N@f[(b f[a] - a f[b])/(f[a] - f[b])]
```

Out[∘]=
```
-0.200663
```

- Skracanie przedziału działa tak jak w metodzie bisekcji; $f(x_{\text{lin}})\,f(0) < 0$ więc $a = x_{\text{lin}}$

In[◦]:=
```
Clear[a, b, c]
wyczyść
a = -2;
b = 0;
c = -2;
sol = {};
While[Abs[f[c]] > 0.0001,
podc··· wartość bezwzględna
  c = (b f[a] - a f[b])/(f[a] - f[b]);
  If[f[c] * f[a] < 0, b = c];
  operator warunkowy
  If[f[c] * f[b] < 0, a = c];
  operator warunkowy
  AppendTo[sol, c];
  dołącz na końcu do wartości zmienne
]
```

In[◦]:=
```
N@c
przybliżenie num
N@f[c]
przybliżenie num
Length[sol]
długość
N@sol
przybliżenie num
```

Out[◦]=

-0.567163

Out[◦]=

-0.0000308386

Out[◦]=

5

Out[◦]=

{-0.698162, -0.58148, -0.568735, -0.56732, -0.567163}

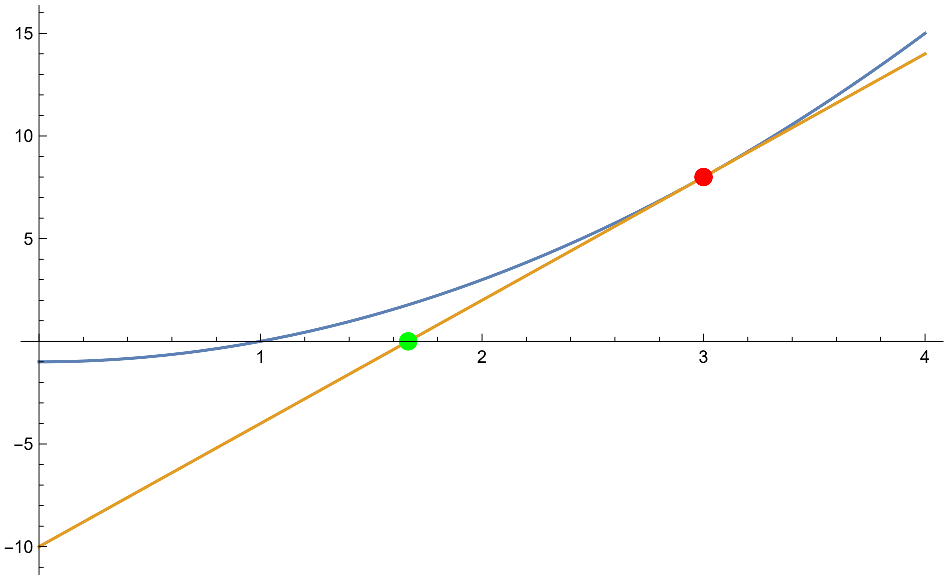
Metoda Newtona

- zgadnij początkowe miejsce zerowe x_0
- wyznacz styczną do funkcji f w punkcie x_0
- miejsce zerowe stycznej jest przybliżeniem miejsca zerowego funkcji f
  - $y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 \Rightarrow$
  - $0 = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  - $x_{n+1} = x_n - \frac{f[x_n]}{f'[x_n]}$

In[•]:=
```
x0 = 3
Show[{
  Plot[{x^2 - 1, 2 x0 x + x0^2 - 1 - x0 * 2 * x0}, {x, 0, 4}],
  Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{x0, x0^2 - 1}]}],
  Graphics[{Green, PointSize[0.02], Point[{x0 - (x0^2 - 1)/(2 x0), 0}]}]
}]
```

Out[•]= 3

Out[•]=



Wracamy do naszej funkcji f(x) = Exp[x] + x

In[∘]:=
```
x0 = 0;
sol = {};
While[Abs[f[x0]] > 0.0001,
 x0 = x0 - (Exp[x0] + x0)/(Exp[x0] + 1);
 AppendTo[sol, x0];
]
```
podc… | wartość bezwzględna | dołącz na końcu do wartości zmiennej

In[∘]:=
```
N@x0
N[Exp[x0] + x0]
Length[sol]
N@sol
```
przybliżenie numeryc | funkcja eksponen | długość | przybliżenie numeryc

Out[∘]=

-0.567143

Out[∘]=

1.9648×10^{-7}

Out[∘]=

3

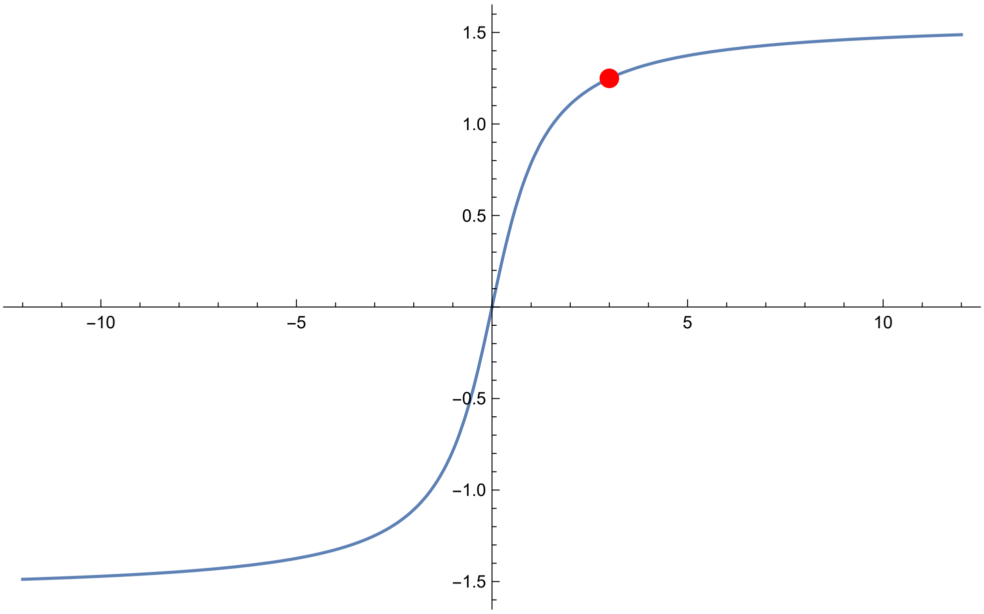
Out[∘]=

{-0.5, -0.566311, -0.567143}

- Szybka (zbieżność kwadratowa)
- Nie zawsze jest zbieżna (np. punkt początkowy blisko ekstremum lokalnego)
- Wymaga znajomości pochodnej

In[ ]:=
```
x0 = 3;
Show[{
pokaż
  Plot[ArcTan[x], {x, -12., 12.}],
  wyk··· arcus tangens
  Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{x0, ArcTan[x0]}]}]
  grafika  cz···  rozmiar kropki  punkt  arcus tangens
 }]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
sol = {};
n = 0;
While[n < 10,
podczas
 x0 = x0 - ArcTan[x0] / (1/(1+x0^2));
 AppendTo[sol, x0];
 dołącz na końcu do wartości zmi
 n++;
]
N@sol
przybliżenie numeryczne
```

Out[ ]=

$\{-9.49046, 124., -23905.9, 8.97653\times10^{8}, -1.26572\times10^{18}, 2.51648\times10^{36}, -9.94733\times10^{72}, 1.55429\times10^{146}, -3.79477\times10^{292}, 2.261988093610309\times10^{585}\}$

Fast Inverse Square Root

Problem: jak szybko obliczyć $\frac{1}{\sqrt{x}}$

```
//  Quake III Arena
float Q_rsqrt (float number)
{
           long i;
           float x2, y;
           const float threehalfs = 1.5 F;
           x2 = number*0.5 F;
           y = number;
           i = *(long*) & y; // evil floating point bit level hacking
           i = 0x5f3759df - (i >> 1); // what the fuck?
           y = *(float*) & i;

           y = y*(threehalfs - (x2*y*y)); // 1 st iteration
      //y =   y*(threehalfs - (x2*y*y)); // 2 nd iteration, this can be removed return y;
      }
```

Out[•]=

https://www.youtube.com/watch?v=p8u_k2LIZyo

Różniczkowanie

Definicja :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Najprostsze rozwiązanie:

$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,   h – mała liczba

- Jaki jest błąd przybliżenia?
  Korzystamy z szeregu Taylor'a:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [x, x+h]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{1}{2} h f''(\xi), \quad \xi \in [x, x+h]$$

Przykład: f(x) = Log[x], h = 0.001, $x_0 = 2$

In[∘]:=
```
h = 0.001;
x0 = 2;
(Log[x0 + h] - Log[x0]) / h
```
Out[∘]=
```
0.499875
```

In[∘]:=
```
D[Log[x], x] /. {x → x0}
```
logarytm

Out[∘]=

$\frac{1}{2}$

- Błąd: $\left|\frac{1}{2} h f''(x0)\right| < \left|\frac{1}{2} h f''(\xi)\right| < \left|\frac{1}{2} h f''(x0+h)\right|$

In[∘]:=
```
Abs[1/2 h D[Log[x], x, x] /. {x → 2}]
```
wartość··· logarytm

```
Abs[1/2 h D[Log[x], x, x] /. {x → 2.001}]
```
wartość··· logarytm

Out[∘]=
```
0.000125
```
Out[∘]=
```
0.000124875
```

- Uwaga na numerykę!
  Przykład: f(x) = arctg(x) w $x_0 = \sqrt{2}$
  - $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}$

```
arctan(sqrt(2)) 0.955317 h = 0.0001 derivative 0.33319
arctan(sqrt(2)) 0.955317 h = 1e-05 derivative 0.333786
arctan(sqrt(2)) 0.955317 h = 1e-06 derivative 0.298023
arctan(sqrt(2)) 0.955317 h = 1e-07 derivative 0.596046
arctan(sqrt(2)) 0.955317 h = 1e-08 derivative 0
```

```
#include<cmath>
#include <iostream>

float f(float x) {
    return std::atan(x);
}

float diff(float x, float (*fptr) (float), float h = 0.001) {
    return (fptr(x + h) - fptr(x)) / h;

}

int main(){


    std::cout << " h = " << 0.0001 << " " << diff(sqrtf(2), f, 0.0001) << std::endl;
    std::cout << " h = " << 0.00001 << " derivative " << diff(sqrtf(2), f, 0.00001) <<
std::endl;

    std::cout << " h = " << 0.000001 << " derivative " << diff(sqrtf(2), f, 0.000001) <<
std::endl;

    std::cout << " h = " << 0.0000001 << " derivative " << diff(sqrtf(2), f, 0.0000001) <<
std::endl;

    std::cout << " h = " << 0.00000001 << " derivative " << diff(sqrtf(2), f, 0.00000001) <<
std::endl;

}
```

Metoda “central difference”

$$f'_+(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

$$f'_-(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

$$f'(x) \approx \frac{f'_+(x) + f'_-(x)}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Błąd:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_+)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) - \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_-)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_+) - f(x) + h f'(x) - \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_-)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2 h f'(x) + \frac{1}{6} h^3 (f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-))$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 h} + \frac{1}{12} h^2 (f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-))$$

Pochodne wyższego rzędu

- Szereg Tylor’a:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x)$$

$$f''(x) = \frac{2}{h^2} (f(x+h) - f(x) - h f'(x))$$

$$f''(x) = \frac{2}{h^2} \left(f(x+h) - f(x) - h \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 h}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (2 f(x+h) - 2 f(x) - f(x+h) + f(x-h))$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (f(x+h) - 2 f(x) + f(x-h)) + O\left(h^2\right)$$