Michał Maszkowski 421428

Zakładam że dla $k \notin \mathbb{Z}$ $P(X=k)=0$.

1) Tak X - jest zmienną dyskretną bo:

$$\sum_{k\in\mathbb{R}} P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X=k) = P(X=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=-k) =$$

przeliczalna suma

// dla $k>0$: $\frac{1}{4|-k|\cdot(|-k|+1)} = \frac{1}{4k\cdot(k+1)}$

$$= \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k\cdot(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1 \text{ ok}$$

Dlatego że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \overset{\text{teleskop}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

bo $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

2) $$EX = \sum_{k\in\mathbb{R}} x\, P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, P(X=k) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \frac{1}{(k+1)k\cdot 4} + \sum_{k=1}^{\infty} -k \cdot \frac{1}{4k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot +\infty - \infty = \text{??}$$ cokolwiek

czyli ~~ta suma~~ wartość oczekiwana nie istnieje, bo ta suma nie jest absolutnie zbieżna.

To może dać cokolwiek w zależności od uporządkowania wyrazów

Rozwiązanie nad F_X:

$k<0$:

$$\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x|+1}\right)+\left(\frac{1}{|x|-1}-\frac{1}{|x|}\right)+\left(\frac{1}{|x|-2}-\frac{1}{|x|-1}\right)+\ldots+\frac{1}{|k|}-\frac{1}{|k|+1}$$

czyli "częściowa" suma $\sum_{j=x}^{k}\frac{1}{|j|(|j|+1)}=\frac{1}{|k|}-\frac{1}{|x|+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|k|}-\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{|k|}$$

$k>0$: $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}$$

zatem

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{4(k+1)}$$

$$F_X(k)=\begin{cases}\frac{1}{4\cdot|k|} & \text{dla } k<0\\ \frac{3}{4} & \text{dla } k=0\\ 1-\frac{1}{4(k+1)} & \text{dla } k>0\end{cases}$$

← dla $k\in\mathbb{Z}$; dla $k\notin\mathbb{Z}$ $F_X(k)=F_X(\lfloor k\rfloor)$

bo rozkład dyskretny

ponieważ X dyskretna to korzystam z:

$$Q_X(p)=\inf\{k: p\leq F_X(k)\}$$

~~dla~~ ~~...~~ gdzie

dla $y\in\mathbb{R}$

$$\inf\{k\in\mathbb{Z}: k\geq y\}=\lceil y\rceil$$

$k\in\mathbb{Z}$ tutaj bo tylko dla $k\in\mathbb{Z}$ $P(X=k)>0$ więc tylko wtedy F_X "się zwiększa"

$Q_X(p)$: $F_X(0) = 3/4$ więc przypadki ~~$p < 3/4$; $3/4 \le p < 7/8$; $p \ge 7/8$~~

~~$p \ge 3/4$~~ $F_X(-1) = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$ 1° $p \le 1/4$; 2° $1/4 < p \le 3/4$; $p > \frac{3}{4}$

1° $p \le \frac{1}{4}$: $(k<0)$

najmn. k t.ż.: $\frac{1}{4|k|} \ge p \iff \frac{1}{4p} \ge |k|$ $k<0$ więc: $\iff -k \le \frac{1}{4p} \iff k \ge \frac{-1}{4 \cdot p}$

więc $Q_X(p) = \left\lceil \frac{-1}{4 \cdot p} \right\rceil$ w tym przypadku

2° $\frac{1}{4} < p \le \frac{3}{4}$: $Q_X(p) = 0$

3° $p > \frac{3}{4}$ $(k>0)$

najmniejsze k t.ż.:

$$1 - \frac{1}{4(k+1)} \ge p \iff \frac{1}{4(k+1)} \le 1-p \iff k+1 \ge \frac{1}{4(1-p)} \iff k \ge \frac{1}{4(1-p)} - 1$$

czyli $F_X(p) = \left\lceil \frac{1}{4(1-p)} - 1 \right\rceil$ w tym przypadku

Podsumowując:

dla $p=0$ nieokreślone więc wtedy trzeba by podać bardzo dużą liczbę $\cdot(-1)$

ale ponieważ $p=0$ jest bardzo mało prawd. (prawie niemożliwe) to można dać $\left\lceil \frac{-1}{4} \right\rceil = 0$

$$Q_X(p) = \begin{cases} \left\lceil \frac{-1}{4p} \right\rceil & \text{dla } p \le \frac{1}{4} \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{4} < p \le \frac{3}{4} \\ \left\lceil \frac{1}{4(1-p)} - 1 \right\rceil & \text{dla } p > \frac{3}{4} \end{cases}$$

~~z przez definicję Q_X jako inf wynik będzie trochę przesunięty w bok~~

na szczęście losując z rand $p \in [0,1)$ więc nie ma 0 w mianowniku