Přednáška 3 – interpolace & spliny

mám (x_i, f_i) $i = 0, \dots, n$ kde $x_0, \dots, x_n \in (a,b)$

chci $p_f(x)$ pro $x \in (a,b)$

Lagrangeova interpolace:

- $l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
- $p_f(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$ (*)

Teorie – odhad chyby

Nechť $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \leq \dots \leq x_n \in (a,b)$. Mějme $f_i := f(x_i)$ a $p_f(x)$ jako v (*).

Pak $\forall x \in (a,b) \ \exists \xi \in (a,b)$ t.ž.

(**) $$f(x) - p_f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

a tedy

$$\max_{x \in (a,b)} |f(x) - p_f(x)| \leq \frac{\max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)|$$

Důkaz → vynecháme, pro nás nepřináší „hlubší vhled"

V (**) je rovnost ⇝ lze odvodit/pochopit Rungeho jev z minule?

→ spočítáme derivace: $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f^{(2)} = \dots$, $f^{(7)} = \underbrace{-40320 \cdot \frac{x(x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 1)}{(1+x^2)^8}}_{|\cdot| \leq 4392 \ \forall x \in [-6,6] \ \& \text{ nabývá se pro } x^* \approx 0.14}$

$\Rightarrow$ chyba $\sim \frac{4392}{7!} \cdot \underbrace{3424}_{(x^* - x_0) \cdot \ldots \cdot (x^* - x_n)} \sim 2984 \gg 0$

- téměř v žádné aplikaci nelze změnit/ovlivnit $\underline{f}$ $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ člen $\max_{\xi \in (a,b)} |f^{(n+1)}(\xi)|$ je mimo náš dosah

- člen $1/(n+1)!$ je fajn, ten nám pomáhá & ukazuje, že „chyba aproximace může klesat až exponenciálně" $\left(\lim \frac{2^n}{n!} = 0\right)$

- člen $|(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)|$ je někdy pod naší kontrolou $\to$
  $\to$ u některých aplikací si můžeme vybrat body měření/pozorování
  $\Rightarrow$ lze mít $x_0, \ldots, x_n \in (a,b)$ t.ž. minimalizují tento člen?

$\rightsquigarrow$ ano! tzv. Chebyshevovy body
- složité na definici $\to$ kořeny tzv. Chebyshevových polynomů
- „husté u krajů, řídké uprostřed" (předmět Teorie aproximace)

Věta: Mějme $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ a $p_f(x)$ odpovídající Lagrange interpolaci v Cheb. bodech.
Pak $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_f(x)| \xrightarrow{\deg(p_f) \to +\infty} 0$.

Python demos

- Vandermonde & jeho nepoužitelnost
- Lagrange
  - chyba se vyvíjí dle odhadu (*) $(\cos(x))$
  - chyba se chová úplně jinak & roste $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ (lze spočítat derivaci $\rightsquigarrow$ moc velká)
    - proč? Lze spravit Cheb. body?
- vzorce ekvivalentní s papírem & tužkou (Vandermond & & Lagrange) se nechovají stejně v PC $\rightsquigarrow$ proč?
- Chyba interpolace neklesá pod 10^{-16} $\to$ proč?

$\to$ tomu je třeba porozumět $\rightsquigarrow$ příští týden

Tuhle přednášku skončíme tím, že si všimneme, že problémy nastávají pouze pro $\underline{n}$ velké.

→ Co kdybychom použili „rozděl a panuj" – výpočty s malým $\underline{n}$ hodněkrát za sebou.

Pozorování 1: Naivní způsob → $[a,b] \equiv [x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,x_3]\cup\dots\cup[x_{n-1},x_n]$ & interpolujeme s $\underline{n}$ malým na každém $[x_i,x_{i+1}]$ nezávisle

Nevýhoda: výsledná aproximace už bude pouze spojitá (nikoliv $C^\infty([a,b])$ jako $P_f(x)$)

Tuhle nevýhodu řeší tzv. spliny: $s_f(x): [a,b]\to\mathbb{R}$ t. ž.
- $\forall i: \boxed{s_f(x_i)=f_i}$ • $s_f(x)$ má co možná nejvyšší hladkost
- & $\forall i: s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]}$ je polynom stupně $\underline{n}$

Lineární spline ≡ $s_f(x)$ je polynom stupně 1 na každém $[x_i,x_{i+1}]$

⇒ $s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\cdot x$ ⇒ máme 2 parametry na každém $[x_i,x_{i+1}]$. Požadavek na okrajích $[x_i,x_{i+1}]$ už jednoznačně určí $\alpha_0^{(i)},\alpha_1^{(i)}$

⇒ lineární spline je pouze spojitý, vyšší hladkosti nelze dosáhnout.

Věta: Mějme $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f\in C^2([a,b])$, $N\in\mathbb{N}$. Vezmeme si $x_0=a$, $x_1=a+\frac{b-a}{N}$, $x_2=a+2\cdot\frac{b-a}{N}$, …, $x_N=b$ & označíme $h:=\frac{b-a}{N}$. Pak pro lineární spline $s_f(x)$ procházející body $\{x_0,f(x_0)\},\dots,\{x_N,f(x_N)\}$ platí $\forall x\in[a,b]:\ |s_f(x)-f(x)| \le 1/8\cdot h^2\cdot \max_{\xi\in[a,b]}|f^{(2)}(\xi)|$

Kubický spline ≡ $s_f(x)$ je polynom stupně 3 na každém $[x_i,x_{i+1}]$

⇒ $s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\cdot x + \alpha_2^{(i)}\cdot x^2 + \alpha_3^{(i)}\cdot x^3$ ⇒ máme 4 parametry na každém $[x_i,x_{i+1}]$. Požadavky na okrajích $[x_i,x_{i+1}]$ nám dají 2 podmínky ⇒ máme ještě 2 „volné parametry". Dohromady máme $4n$ parametrů $\{\alpha_0^{(i)},\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\alpha_3^{(i)}\}_{i=1}^n$

- $2n$ podmínek je dáno
- přidáme $n-1$ podmínek aby $s_f\in C^1([a,b])$: $\forall i: \lim_{x\to x_{i-}} s_f'(x) = \lim_{x\to x_{i+}} s_f'(x)$
- přidáme $n-1$ podmínek aby $s_f\in C^2([a,b])$: $\forall i: \lim_{x\to x_{i-}} s_f''(x) = \lim_{x\to x_{i+}} s_f''(x)$
- přidáme 2 podmínky „vlastní" → klasicky $s_f'(a)=0$ & $s_f'(b)=0$

Tedy použitím polynomů 3. stupně lokálně (= na podintervalech) už zvládneme zajistit $s_f\in C^2$. Ale tím přirozeně propojujeme hodnoty na $[x_i,x_{i+1}]$ se všemi ostatními podintervaly → změna $f(x_i)$ ovlivní celý spline (narozdíl od lineárního splinu)

Věta: Mějme $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f\in C^4([a,b])$, $N\in\mathbb{N}$. Vezmeme si $x_0=a$, $x_1=a+\frac{b-a}{n}$, $x_2=a+2\cdot\frac{b-a}{n}$, …, $x_n=b$ & označíme $h:=\frac{b-a}{n}$. Pak pro kubický spline $s_f(x)$ procházející body $\{x_0,f(x_0)\},\dots,\{x_n,f(x_n)\}$ platí $\forall x\in[a,b]:\ |s_f^{(j)}(x)-f^{(j)}(x)| \le 3/8\cdot h^{(4-j)}\cdot \max_{\xi\in[a,b]}|f^{(j)}(\xi)|$ $\quad j=0,1,2,3$