

Prednáška 9 - Diferenciálne rovnice

algebraické
≡ dávame do rovnosti
algebraické operácie $(+, -, \cdot, /, \sqrt{}, \dots)$ nezmenej

Rovnice

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}, \quad \log(3x) + \sqrt[3]{x^3} = 8, \dots$$

diferenciálne
≡ dávame do rovnosti algebraické & diferenciálne
operácie $(\frac{d}{dx}, \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial t}, \dots)$.

Diferenciálne \Rightarrow objekty v týchto rovnostiach sú fce

obyčajné $\rightarrow 3t \cdot y(t) + y'(t) = \sin(t) \quad \forall t \in (a, b)$

parciálne $\rightarrow \partial_{xx} u(x, y) + \partial_{yy} u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in (0, 1)^2$

stochastické $\rightarrow dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$

Prečo je potrebné?

Pro reálny svet umíme väčšinou popísať pouze jak se
věci mění/vyvíjejí. Změna/Vývoj \equiv derivace

změnu teploty v čase popisuje fce $f(x, t)$))

(($\Rightarrow \frac{d}{dt} u(x, t) = f(x, t)$

Obvyčejné diferenciální rovnice

- nejvíce použitelné na modelování složitých jevů
- nejlepší na budování intuice

ODR : • neznáma je funkce jedné proměnné ... $y(t)$

• Harmonický oscilátor $y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(t)$
 $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

• Lotka-Volterra $x'(t) = \alpha \cdot x(t) - x(t) \cdot y(t) \quad x(0) = x_0$
 $y'(t) = -\beta y(t) + \delta \cdot x(t) \cdot y(t) \quad y(0) = y_0$

• SIR model $S(t) = -\beta I(t) S(t) \quad S(0) = S_0$
 $I(t) = \beta I(t) S(t) - \gamma I(t) \quad I(0) = I_0$
 $R(t) = \gamma I(t) \quad R(0) = R_0$

• Lorenzův systém $x'(t) = \sigma(y - x) \quad x(0) = x_0$
 $y'(t) = x \cdot (\rho - z) - y \quad y(0) = y_0$
 $z'(t) = xy - \beta \cdot z \quad z(0) = z_0$

→ stejně jako u algebraických rovnic můžeme mít systémy ODR

Nás zajímá jak řešit systémy \Rightarrow metody & stabilita (& podmíněnost)

Python demos :
• (ne)stabilita metod
expl. & impl. Euler
• podmíněnost ODR

Numerické metody řešení ODR

začneme se skalárním příkladem $y'(t) = f(t, y(t))$

Odvození I „derivace je limita“

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} = f(t, y(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(t+\tau, y(t+\tau))$$

\Rightarrow pro $\tau > 0$ malé aproximuje jako:

- $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot f(t, y(t))$ ---- explicit Euler
- $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot f(t+\tau, y(t+\tau))$ ---- implicit Euler

Odvození II „inverze derivace je integrál“

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_t^{t+\tau} y'(\sigma) d\sigma = \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma)) d\sigma \Rightarrow y(t+\tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} f(\sigma, y(\sigma)) d\sigma$$

Aproximaci integrálů (\approx kvadratura) umíme \Rightarrow

- $\int_a^b g(x) dx \approx (b-a) \cdot g(a) \Rightarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f(t, y(t))$... expl. Euler
- $\int_a^b g(x) dx \approx (b-a) \cdot g(b) \Rightarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f(t+\tau, y(t+\tau))$... impl. Euler
- $\int_a^b g(x) dx \approx (b-a) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow y(t+\tau) \approx y(t) + \tau f\left(t+\frac{\tau}{2}, y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right) \approx \dots$
aprox. $y(t+\frac{\tau}{2})$ pomocí expl. Euler
 $\approx y(t) + \tau f\left(t+\frac{\tau}{2}, y(t) + \frac{\tau}{2} f(t, y(t))\right)$... Rungeho metoda

Odvození III „Taylorův rozvoj“

$$y(t+\tau) = y(t) + \underset{\uparrow}{y'(t)} \cdot (t+\tau - t) + \frac{y^{(2)}(t)}{2} \tau^2 + \frac{y^{(3)}(t)}{3!} \tau^3 + \dots$$

- $y(t+\tau) \approx y(t) + \tau \cdot f(t, y(t))$
expl. Euler

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \cdot y'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)) \end{aligned}$$

\nwarrow lze rozvíjet analogicky

$y(t+\tau)$ je explicitní funkce $y(t) \Rightarrow$ tzv. explicitní metody

$y(t+\tau)$ je implicitní funkce $y(t)$,

tj. aby dom získali $y(t+\tau)$ na základě $y(t)$ tak musíme vyřešit rovnici (možná nelineární nebo možná soustavu rovnic)
 \Rightarrow tzv. implicitní metody

Příklad: $y' = -y + \cos(t)$, $y(0) = y_0$

expl. Euler: $y(\tau) \approx y_1 = y_0 + \tau \cdot (y_0 + \cos(0)) = y_0 + \tau \cdot y_0 + \tau$

$$y(2\tau) \approx y_2 = y_1 + \tau (y_1 + \cos(\tau))$$

impl. Euler: $y(\tau) \approx y_1$ & $y_1 = y_0 + \tau \cdot (y_1 + \cos(\tau))$

musíme vyřešit:

$$y_1 = \tau y_1 = y_0 + \tau$$
$$y_1 = \frac{y_0 + \tau}{1 - \tau}$$

$$y(2\tau) \approx y_2 \quad \& \quad y_2 = y_1 + \tau (y_2 + \cos(2\tau))$$

musíme vyřešit: $y_2 = \frac{y_1 + \tau \cdot \cos(2\tau)}{1 - \tau}$

V praxi implicitní metody vyžadují spouštění nějakého řešiče pro (soustavu) rovnice

$$y_{k+1} = y_k + \tau \cdot f(t_k + \tau, y_{k+1})$$

ale zpravidla jsou výrazně „stabilnější“

