Přednáška 12 - algebraické rovnice

→ viděli jsme, že implicitní R-K metody potřebují řešit soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t+c_1\tau, y(t)+\tau\sum_1^s a_{1,j}k_j) \\ \vdots \\ f(t+c_s\tau, y(t)+\tau\sum_1^s a_{s,j}k_j) \end{bmatrix} \leftrightarrow \vec{k} = G(\vec{k}) \leftrightarrow F(\vec{k}) = \vec{b}$$

„pravá strana nezávislá na $\vec{k}$"

.... tzv. soustava algebraických rovnic.

F je nelineární (tj. neplatí, že $F(\alpha v+\beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w)$)

$\Rightarrow$ nelineární alg. rce

F je lineární (tj. $\forall \alpha,\beta \,\forall v,w : F(\alpha v+\beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w)$)

$\Rightarrow$ lineární alg. rce

Např.:

lineární: $ax - b = 0$ ... nebo systém $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

⇝ pro známé a_{ij} & b_i

nelineární: $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4x = 12$ nebo systém $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - 5 + x_2 \\ \sin(x_1 \cdot x_2) \\ x_1^3 - e^{x_3} \end{bmatrix}$

Jaké systémy rovnic „víme" jak řešit?

- lineární
- pro jednu proměnnou existuje formule pro řešení kvadratické & kubické rovnice (a i 4. stupně)
- Abel-Galois: neexistuje explicitní formulka na kořeny polynomů stupně ≥ 5.
- složitější & složené funkce → bez šance

Co s tím? aproximujeme náš systém „lineárním" a vyřešíme ten lineární

Dobrá idea, ale lineární aproximace (tj. aprox. funkce pomocí přímky) je většinou dost nepřesná. Např. u Taylora víme, že je přesná jen lokálně.

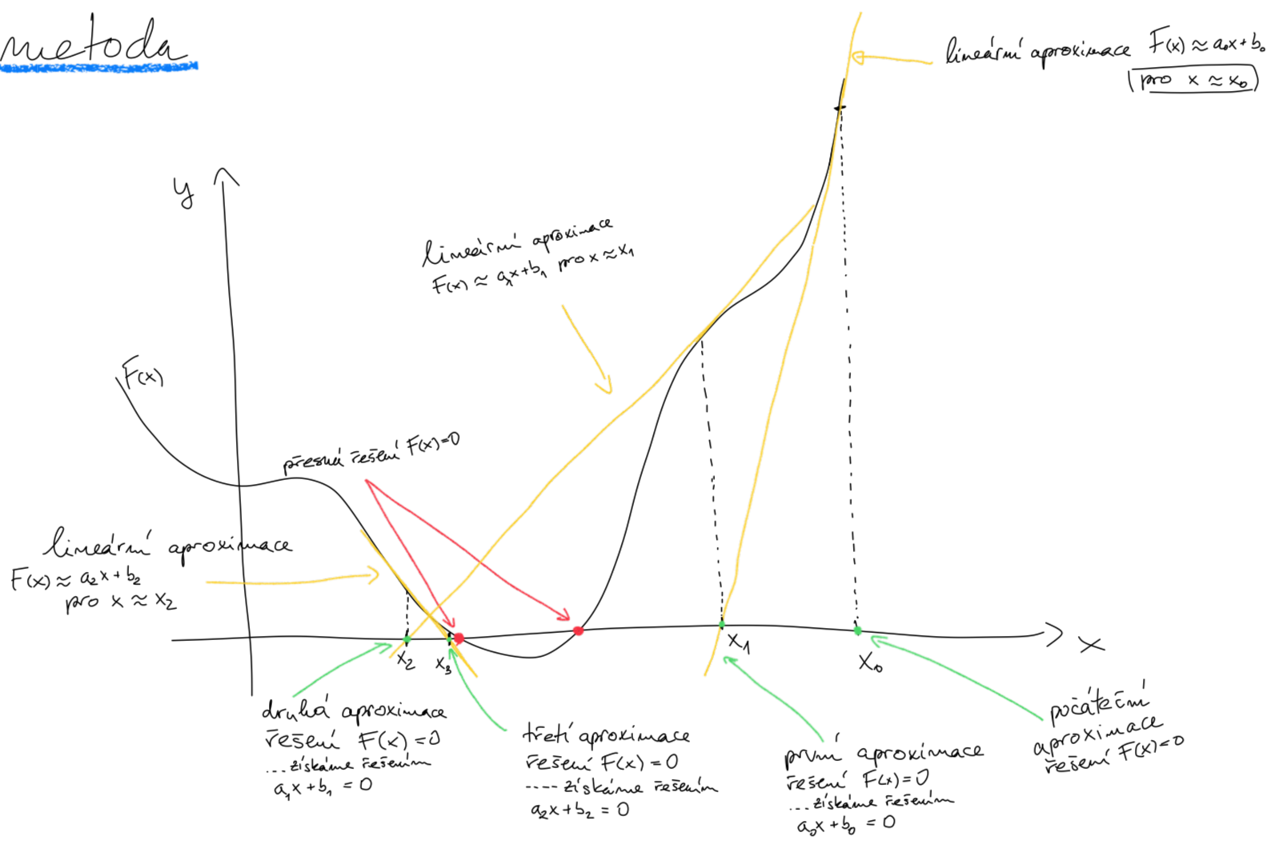
Tudíž nelze očekávat, že takto získaná aproximace je dobrá/přesná, pokud jsem tu nelineární rovnici neaproximoval „náhodou" už blízko přesného řešení $F(x)=0$.

$\Rightarrow$ idea č. 2: budeme postupovat iterativně.

tj. aproximuju $F(\cdot)$ okolo nějakého bodu x_0 jako $a_0 \cdot x + b_0$ ($\equiv$ lineární aprox.) a najdu aprox. kořene $F(\cdot)$ jako $x_1 := \frac{-b_0}{a_0}$. Pak aproximuju $F(\cdot)$ okolo x_1 jako $a_1 x + b_1$ a najdu 2. aprox. kořene $F(\cdot)$ jako $x_2 := \frac{-b_1}{a_1}$. A takhle pokračujeme.

Newtonova metoda

obrázek 8
& postup
pro algebr.
rovnici pro
jednu proměnnou
$F(x) = 0$



$\rightsquigarrow$ $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ konvergují k jednomu z řešení $F(x)=0$

Matematické odvození obrázku výše:

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{d}{dx}F\right)(x_0)\cdot(x_0 - x) + \mathcal{O}\left(\|x_0 - x\|^2\right)_{x\to x_0} \quad \text{---- Taylorův rozvoj}$$

pokud $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ pak

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_d(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad \text{a tedy} \quad \left(\frac{d}{d\vec{x}}F\right)(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_d}{\partial x_d}(x) \end{bmatrix}}_{=:\, J(x) \equiv J_x} \quad \text{.... „Jacobian mtrx of } F\text{"}$$

Jakobiánská matice F

a tedy místo $F(x) = 0$

budeme řešit $F(x_0) + J_{x_0}\cdot(x_0 - x) = 0 \iff$

$$\iff J_{x_0} x = J_{x_0} x_0 - F(x_0) \iff \boxed{J_{x_0} x = b_0}$$

soustava lineárních rovnic pro neznámé x

$\rightsquigarrow x_1 :=$ řešení této soustavy

Pak x_2 beru jako řešení soustavy $J_{x_1} x = b_1$ atd. .... x_k jako řešení $J_{x_{k-1}} x = b_{k-1}$

$b_{k-1} = J_{x_{k-1}} x_{k-1} - F(x_k)$

Jak analyzovat konvergenci?

mějme kořen x^*, tj. $F(x^*) = 0$. Pak v k-tém kroku Newtonovy metody platí:

z definice $J_{x_k} x_{k+1} = F(x_k) + J_{x_k} x_k$, tj. $J_{x_k}^{-1} F(x_k) = x_{k+1} - x_k$

$$0 = F(x^*) \overset{\text{Taylor}}{=} F(x_k) + J_{x_k}(x^* - x_k) + \mathcal{O}\left(\|x^* - x_k\|^2\right)_{x_{k-1}} \iff x^* - x_k = J_{x_k}^{-1}\cdot F(x_k) + \mathcal{O}\left(\|x^* - x_k\|^2\right)$$

$$\iff x^* - x_k = x_{k+1} - x_k + \mathcal{O}\left(\|x^* - x_k\|^2\right)$$

$$\iff \|x^* - x_{k+1}\| = \mathcal{O}\left(\|x^* - x_k\|^2\right)_{x_k \to x^*}$$

$$\iff \exists C \neq 0 : \lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^* - x_{k+1}\|}{\|x^* - x_k\|^2} = C$$

$\rightsquigarrow$ tzv. kvadratická konvergence

$\to$ 1 iterace zmenší chybu kvadraticky (např. $0.1 \to 0.01 \to 0.0001 \to 10^{-8} \to 10^{-16}$)

Kdy to může selhat?

- když J_{x_k} je singulární $\rightsquigarrow$ pak x_{k+1} nemusí existovat
- může se stát, že dostaneme posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$ která nekonverguje

Praxe:

jak získat J_{x_k}?

jak vyřešit ten lineární systém $J_{x_k} x = b_k$?

co když nekonvergujeme?