Přednáška 11 - Runge-Kutta & stabilita

opáčko:

- implicit./explicit. Euler & jejich chyba
- použití kvadratur na odvození Runge-Kutta metod

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot b_i$$

$$k_1 = f(t, y(t)) \qquad \approx y'(t)$$

$$k_2 = f(t + c_2\tau, y(t) + \tau \cdot a_{2,1} \cdot k_1) \qquad \approx y'(t + c_1\tau)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f\left(t + c_s\tau, y(t) + \tau \sum_{1}^{s-1} a_{s,j} \cdot k_j\right) \approx y'(t + c_s\tau)$$

tzv. s-stupňové (s-stage) explicitní RK metody.

Lze ukázat, že pro $f(t,y)$ dostatečně hladké platí

- $$|y(t+\tau) - y^{RK}(t+\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p+1})_{\tau \to 0}$$
- $$\max_{n=1,\dots,N} |y(t_0+n\tau) - y^{RK}(t_0+n\tau)| = \mathcal{O}(\tau^{p})_{\tau \to 0}$$

pro nějaké $p \in \mathbb{N}$, $p \leq s$, kde

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \& \quad y(t_0) = y_0$$

funkce $y^{RK}(t+n\tau)$ odpovídá nějaké konkrétní explicitní Runge-Kutta metodě s nejvýše s stupni (s-stages) kde jsme začali s $y^{RK}(t_0) = y_0$

Neboli explicitní s-stage RK metody jsou řádu nejvýše $p \leq s$.

Python demo: (ne)stabilita expl. RK

$\hookrightarrow$ vidíme, že pro některé (systémy) ODR se v řešení objevují oscilace – speciálně pokud nemáme dostatečně malý krok τ

Zjednodušený model – tzv. Dahlquistova rovnice
(aka test eqtn.)

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \text{.... řešení} \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

.... asi nejjednodušší netriviální ODR

- explicit. Euler: $y(t+\tau) = y(t) + \tau \cdot \lambda \cdot y(t) = (1+\tau\lambda)\cdot y(t)$

$\Rightarrow y(t+n\tau) = (1+\tau\lambda)^n y(t)$ .... z linearity

$\rightsquigarrow$ pokud
- $1+\tau\lambda < 0$ pak numerické řešení osciluje
- $|1+\tau\lambda| > 1$ pak numerické řešení diverguje

$\Rightarrow$ pokud $\lambda < 0$ & $\tau \gtrsim \frac{2}{|\lambda|}$ $\Rightarrow$ máme problém

.... říkáme, že expl. Euler je tzv. podmíněně stabilní

tj. stabilní pokud $\tau < \frac{2}{|\lambda|}$ pro $\lambda < 0$.

$\rightarrow$ jak zobecnit pro s-stage expl. Runge-Kutta metody?

musím spočítat (tužka+papír) jak vypadá $y(t+\tau)$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ obecně dostanu $y(t+\tau) = R(\tau\lambda)\cdot y(t)$ pro nějakou funkci $R(z)$.

- s-stage expl. Runge-Kutta: $y(t+\tau) = R(\tau\cdot\lambda)\cdot y(t)$

pro studium stability pak stačí zkoumat jak vypadá množina $\{z \text{ t. že } |R(z)| \le 1\}$ ⇝ protože $z = \tau\cdot\lambda$ & $\forall \underbrace{\lambda \in \mathbb{C}^-}$ máme přesné řešení omezené ($y(t) = e^{\lambda t}$)

tj. λ t. že $Re(\lambda) \le 0$

tj. ne pouze podmíněně stabilní

⇒ metoda může být stabilní pouze pokud

$$|R(z)| \le 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}^-, \text{ tj. } \mathbb{C}^- \subseteq \{z \text{ t. že } |R(z)| \le 1\}$$

Lze ukázat, že toho nelze dosáhnout pro explicitní metody

⇒ explicitní metody jsou vždy přinejlepším podmíněně stabilní.

- implicit Euler $y(t+\tau) = y(t) + \tau\cdot\lambda\cdot y(t+\tau) = \frac{1}{1-\tau\cdot\lambda}\, y(t)$

⇒ $y(t+n\tau) = \left(\frac{1}{1-\lambda\cdot\tau}\right)^n y(t)$ ⇒ pokud $\lambda\in\mathbb{C}^-$ pak $\left|\frac{1}{1-\tau\cdot\lambda}\right| < 1$

a tedy dostáváme nepodmíněně stabilní metodu.

⇝ to že v impl. Eulerovy máme „rovnici" a ne „předpis" nám pomáhá se stabilitou ⇝ dává smysl zkusit tohle adaptovat i pro Runge-Kutta:

explicitní	implicitní
$k_1 = f(t, y(t))$	$k_1 = f(t+c_1\tau, y(t) + \tau\cdot\sum_{j=1}^{s} a_{1,j}\cdot k_j)$
$k_2 = f(t+c_2\tau, y(t) + \tau\cdot a_{2,1}\cdot k_2)$	$k_2 = f(t+c_2\tau, y(t) + \tau\cdot\sum_{j=1}^{s} a_{2,j}\cdot k_j)$
$\vdots$	$\vdots$
$k_s = f(t+c_2\tau, y(t) + \tau\cdot\sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}\cdot k_j)$	$k_s = f(t+c_s\tau, y(t) + \tau\cdot\sum_{j=1}^{s} a_{s,j}\cdot k_j)$
explicitní „předpisy"	implicitní „rovnice"

(*)

A lze ukázat, že pro správné volby $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$ lze získat implicitní Runge-Kutta metody, pro které:

- $\left| y(t+\tau) - y^{RK}(t+\tau) \right| = \mathcal{O}\left(\tau^{p+1}\right)_{\tau \to 0}$
- $\max\limits_{n=1,\dots,N} \left| y(t+n\tau) - y^{RK}(t+n\tau) \right| = \mathcal{O}\left(\tau^{p}\right)_{\tau \to 0}$

$\Big\}\ p \leq 2 \cdot s$

- tyto metody jsou nepodmíněně stabilní

Kde funkce $y^{RK}(t)$ má stejný smysl jako výše.

Tedy za tu práci navíc ($\equiv$ řešení té soustavy rovnic (*) pro získání $k_1, \dots, k_s$) získáme stabilitu & & až dvojnásobný řád konvergence.

V praxi musím nejprve zjistit jestli moje ODR „produkuje ty oscilace"

$\xrightarrow{\text{NE}}$ použijeme expl. metodu

$\xrightarrow{\text{ANO}}$ použijeme impl. metodu

takovým ODR se říká „stiff problems"

V praxi zároveň často používáme adaptivní τ $\rightsquigarrow$ tj. zkoušíme brát τ co největší to jde a podle nějakých ukazatelů odhadujeme jestli konkrétní τ není moc velké (může např. být tak velké, že by úplně ztratilo část řešení nebo např. může být tak velké, že naše metoda přestane být stabilní)

V praxi je také spousta metod, které se specializují na konkrétní typ problémů, např. při modelování periodického pohybu planet sluneční soustavy bychom rádi, aby se po určitém čase každá planeta vrátila $\rightsquigarrow$ tzv. symplektické metody (zachovávají geometrii)