

# Přednáška 3 - interpolace & spliny

mám  $(x_i, f_i)$   $i=0, \dots, n$  kde  $x_0, \dots, x_n \in (a, b)$

chci  $P_f(x)$  pro  $x \in (a, b)$

Lagrangeova interpolace:  $\bullet$   $l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$\bullet P_f(x) := \sum_{i=0}^n l_i(x) \cdot f(x_i) \quad (*)$$

## Teorie - odhad chyby

Nechť  $f \in C^{n+1}(a, b)$ ,  $x_0 \leq \dots \leq x_n \in (a, b)$ . Pějme  $f_i := f(x_i)$  a  $P_f(x)$  jako v  $(*)$ .

Pak  $\forall x \in (a, b) \exists \xi \in (a, b)$  t. z.

$$(**) \quad f(x) - P_f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

a tedy

$$\max_{x \in (a, b)} |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{\max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0) \dots (x - x_n)|$$

Důkaz  $\rightarrow$  vynecháme, pro nás nepřináší „hlubší vhléd“

✓  $(**)$  je rovnost  $\rightarrow$  lze odvodit/podopít Rungeho jev z minule?

$$\rightarrow \text{spočítáme derivace: } f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, f^{(2)} = \dots, f^{(7)} = \underbrace{-40320 \cdot \frac{x(x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 1)}{(1+x^2)^8}}_{1 \cdot 1 \leq 4392}$$

$$\Rightarrow \text{chyba} \sim \frac{4392}{7!} \cdot \underbrace{3424}_{(x^*-x_0) \dots (x^*-x_n)} \sim 2984 \gg 0$$

$\forall x \in [-6, 6]$   
& nabývá se pro  $x^* \approx 0.14$

- téměř v žádné aplikaci nelze změnit/ovlivnit  $f \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  člen  $\max_{\xi \in (a,b)} |f^{(n+1)}(\xi)|$  je mimo náš dosah
- člen  $1/(n+1)!$  je fajn, ten nám pomáhá & ukazuje,  
 že „chyba aproximace může klesat až exponenciálně“ ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ )
- člen  $|(x-x_0) \cdots (x-x_n)|$  je někdy pod naší kontrolou  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  u některých aplikací si můžeme vybrat body měření/pozorování  
 $\Rightarrow$  lze najít  $x_0, \dots, x_n \in (a,b)$  t.č., minimalizují tento člen?

mně ano! tzv. Chebyshevovy body

- složitě na definici  $\rightarrow$  kořeny tzv. Chebyshevových polynomů
- „husté u krajů, řídké uprostřed“ (předmět Teorie aproximace)

Věta: Mějme  $f \in C^1[a,b]$  a  $P_f(x)$  odpovídající Lagrange interpolaci v Cheb. bodech.  
 Pak  $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_f(x)| \xrightarrow{\deg(P_f) \rightarrow +\infty} 0$ .

## Python demos

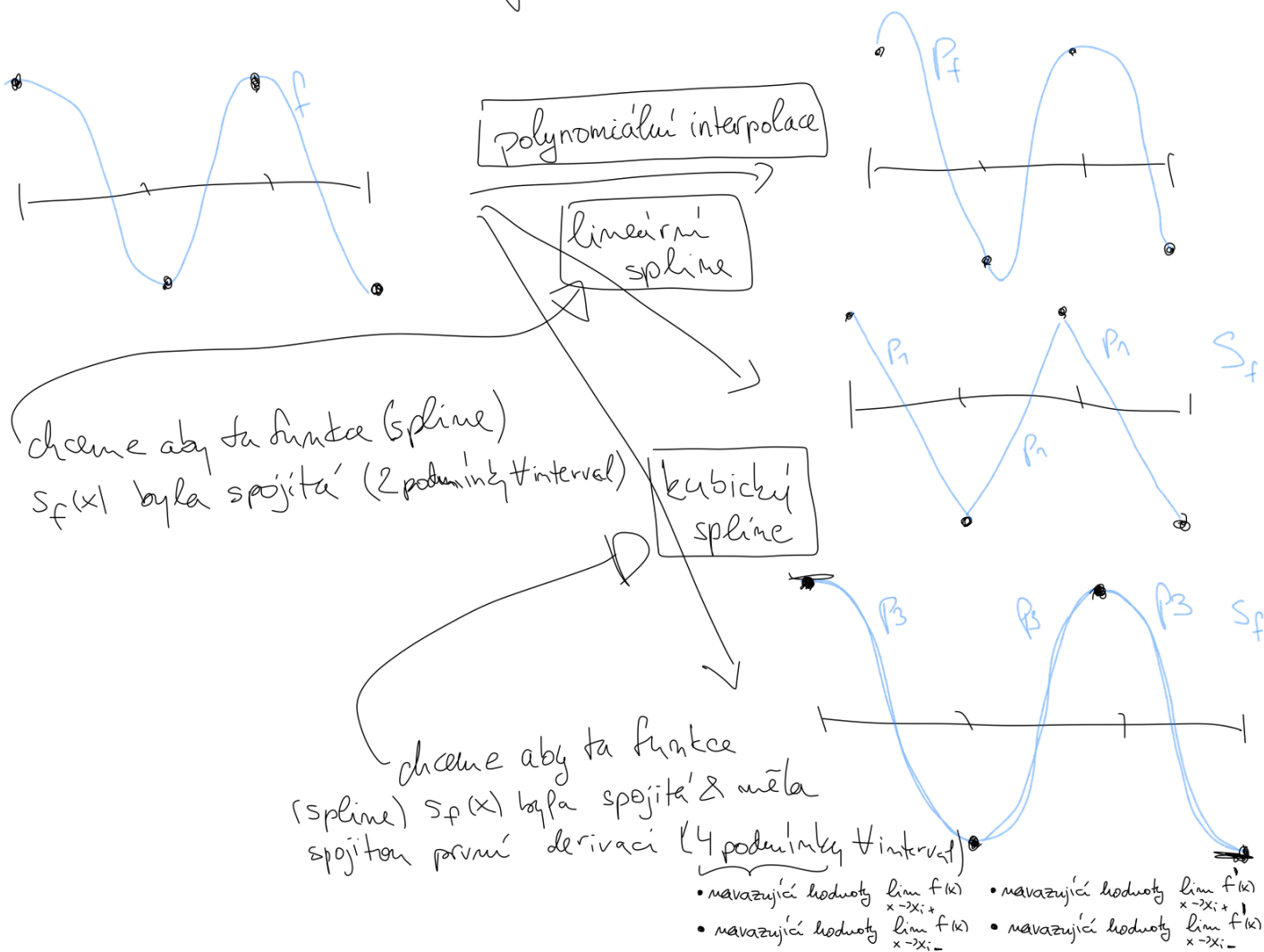
- Vandermonde & jeho nepronžitelnost
- Lagrange  $\begin{cases} \text{chyba se vyvíjí dle odhadu (*) } (\cos(x)) \\ \text{chyba se chová úplně jinak & \text{roste } (\frac{1}{1+x^2}) \\ \text{(lze spočítat derivaci \(\rightarrow\) max velkosti)} \end{cases}$
- proč? Lze spravit Cheb. body?
- vzorce ekvivalentní s papírem & tužkou (Vandermonde & Lagrange)  
 se neobávají stejně v PC  $\rightarrow$  proč?
- Chyba interpolace neklesá pod  $10^{-16}$   $\rightarrow$  proč?

$\rightarrow$  tomu je třeba porozumět  $\rightarrow$  příští týden

Dneske skončime tím, že si všimneme, že ty problémy se objevují pro velké  $n$ .

$\Rightarrow$  co kdybychom měli  $n$  „malé“ ale hodněkrát?   
 ( $\equiv$  rozděl a panuj)

$\leadsto$  tzv. splíny, tj. funkce počastých polynomiálních:



Věta: Nejméně  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , dělení  $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots, x_n = b = a+nh$

•  $f \in C^2$  &  $S_f$  je lineární spline  $\Rightarrow |f(x) - S_f(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \cdot \max_{\xi \in (a, b)} |f''(\xi)|$

•  $f \in C^4$  &  $S_f$  je kubický spline  $\Rightarrow |f(x) - S_f(x)| \leq \frac{3}{8} h^4 \cdot \max_{\xi \in (a, b)} |f^{(4)}(\xi)|$

Python demo ve 2D  $\rightarrow$  „splíny v trojúhelníci“   
  $\rightarrow$  reálné používání

