

Přednáška 6: numerická integrace

problém: chceme spočítat/aproximovat

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

motivace: option pricing

option: Máme Alici a Boba. Bob má zlatou cihličku.
Alice by si ji chtěla koupit, ale až za týden.
Ale Bob raději na Alici jen tak čeká.

Tak Alice & Bob uzavřou smlouvu:

- Alice Bobovi zaplatí XYZ Kč
- Bob bude mít povinnost nabídnout Alici tu zlatou cihličku.
- cenu té cihličky si domluví teď
- Alice tu cihličku může & nemusí koupit, ale Bob ji musí za smluvnou cenu prodat, pokud Alice bude chtít koupit.

→ tzv. call option → film Big Short

Ta smlouva jako taková - ta option - má nějakou hodnotu \leadsto cena zlata za týden - cena zlata dneska

Kdyby Bob & Alice měli křišťálovou kouli, tak by Alice musela Bobovi zaplatit přesně tenhle rozdíl cen za to, že uzavřou tuhle "option" (smlouvu).

V praxi nastane otázka \rightarrow kolik by Alice měla za tu option (smlouvu) zaplatit?

\rightarrow odpověď je založená na matematickém výpočtu a v podstatě odpovídá výpočtu integrálu z funkcí, které popisovaly dosavadní vývoj ceny zlata.

cena (value)
tj smlouvy \rightarrow

$$V_T(K) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-rT} \mathbb{E} \left(\overbrace{S_T - K}^{= \max\{0, S_T - K\}} \right)^+ = \dots = e^{-rT} \int_{\log(K)}^{+\infty} \left(e^x - e^{\log(K)} \right) q_T(x) dx$$

- K ... stanovená cena za odkup (ciblicky) zlata
- S_T ... cena zlata na trhu v čase T
- e^{-rT} ... "discounting factor" ... zhodnocení peněz skrze "společá účty"
- $q_T(x)$ = hustota pravděpodobnosti vývoje $\log(S_T)$

$$\leadsto \mathbb{P}(k_1 \leq \log(S_T) \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} q_T(x) dx$$

$\leadsto q_T(x)$ jsme schopni aproximovat / předpovědět na základě předchozího vývoje S ... Black-Scholes eqn.

Numerická integrace na základě aproximace:

$$p_f(x) \approx f(x) \text{ pro } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_f(x) dx$$

• Polynomiální interpolace

$$p_f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \Rightarrow \int_a^b p_f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \int_a^b l_i(x) dx$$

$\Rightarrow w_i := \int_a^b l_i(x) dx$ jsou tzv. kvadraturní váhy

$$\text{a máme } \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

\Rightarrow Víme, že volba $x_i = \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot i$... ekvidistantní ... je špatná pro interpolaci.

Pro integraci je to stejné \Rightarrow tzv. Newton-Cotes kvadratura

\Rightarrow Existují dvě lepší volby:

- bereme x_i jako tzv. Chebyshevovy body (jako u interp.)
 \Rightarrow tzv. Clenshaw-Curtiss kvadratura

- bereme x_i jako tzv. Legendreovy body
 \Rightarrow tzv. Gaussova kvadratura

lepší: $\forall q(x)$ polynom stupně $\leq n$: Newton-Cotes zintegruje $q(x)$ přesně

$\forall q(x)$ polynom stupně $\leq 2n$: Gauss zintegruje $q(x)$ přesně

$\forall q(x)$ polynom stupně $\leq n$: Clenshaw-Curtis zintegruje $q(x)$ přesně
 \triangle ... tzv. řád kvadratury

lepší:

$$\left| \int_a^b f dx - \int_a^b P_f dx \right| \leq \int_a^b |P_f(x) - f(x)| dx \leq \max_{\xi \in (a,b)} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \underbrace{\int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \right| dx}$$

Po částech polynomiální interp.

$$f(x) \approx S_f(x) \text{ na } (a,b)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b S_f(x) dx$$

→ malé pro Cheb. body
≡ Clenshaw-Curtis

→ velké pro ekvidist. body
≡ Newton-Cotes

Stejně jako výše získáme odhad chyby kvadratury na základě odhadu chyby interpolace, např.

$S_f(x)$ je kubický spline na (a,b) v bodech x_0, \dots, x_n

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_f(x) dx \right| \leq C \cdot \max_{\xi \in (a,b)} |f^{(4)}(\xi)| \cdot \underbrace{h^4}_{h = (b-a)/n} \cdot (b-a)$$

Pokud máme $f: [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{50}, b_{50}] \rightarrow \mathbb{R}$

pak lze „přirozeně zobecnit“, ale potřebujeme

$\left. \begin{array}{l} x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} \dots \text{kvadraturní body v } [a_1, b_1] \\ x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)} \dots \text{kvadraturní body v } [a_2, b_2] \\ \vdots \\ x_1^{(50)}, \dots, x_n^{(50)} \dots \text{v } [a_{50}, b_{50}] \end{array} \right\} \rightarrow$

→ pro $n=3$ bychom měli $3^{50} \approx 8 \cdot 10^{23}$ bodů

$(10^{25} \approx \# \text{ atomů na Zemi } \sqrt{10^{50}} = 10^{25})$

