Přednáška 6: numerická integrace

problém: chceme spočítat/aproximovat

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,\quad \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n\dots dx_1$$

<u>motivace</u>: option pricing

<u>option</u>: Máme Alici a Boba. Bob má zlatou cihličku.
Alice by si ji chtěla koupit, ale až za týden.
Ale Bob nechce na Alici jen tak čekat.

Tak Alice & Bob uzavřou smlouvu:
- Alice Bobovi zaplatí XYZ Kč
- Bob bude mít povinnost nabídnout Alici tu zlatou cihličku.
- cenu té cihličky si domluví teď
- Alice tu cihličku může & nemusí koupit, ale Bob ji musí za smluvenou cenu prodat, pokud Alice bude chtít koupit.

→ tzv. call option ⟶ film Big Short

Ta smlouva jako taková – ta option – má nějakou hodnotu ⇝ cena zlata za týden – cena zlata dnes

Kdyby Bob & Alice měli křišťálovou kouli, tak by Alice musela Bobovi zaplatit přesně tenhle rozdíl cen za to, že uzavřou tuhle „option" (smlouvu).

V praxi nastane otázka → $\boxed{\text{kolik by Alice měla za tu option (smlouvu) zaplatit?}}$

→ odpověď je založená na matematickém výpočtu a v podstatě odpovídá výpočtu integrálu z funkcí, které popisovaly dosavadní vývoj ceny zlata.

cena (value) té smlouvy

$$V_T(K) \overset{\text{def.}}{=} e^{-rT}\,\mathbb{E}\,\overbrace{\left(S_T-K\right)^+}^{=\max\{0,\,S_T-K\}} = \dots = e^{-rT}\int_{\log(K)}^{+\infty}\left(e^{x}-e^{\log(K)}\right)q_T(x)\,dx$$

- K … stanovená cena za odkup (cihličky) zlata
- S_T … cena zlata na trhu v čase T
- e^{-rT} … „discounting factor" … zhodnocení peněz skrze „spořicí účty"
- $q_T(x)$ = hustota pravděpodobnosti vývoje $\log(S_T)$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}\left(k_1 \le \log(S_T) \le k_2\right) = \int_{k_1}^{k_2} q_T(x)\,dx$$

⇝ $q_T(x)$ jsme schopni aproximovat/předpovědět na základě předchozího vývoje S … Black-Scholes eqn.

Numerická integrace na základě aproximace:

$p_f(x) \approx f(x)$ pro $x \in (a,b)$ „$\Rightarrow$" $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_f(x)\,dx$

- Polynomiální interpolace

$$p_f(x) = \sum_{0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \implies \int_a^b p_f(x)\,dx = \sum_{0}^{n} f(x_i) \cdot \int_a^b l_i(x)\,dx$$

$\leadsto$ $w_i := \int_a^b l_i(x)\,dx$ jsou tzv. kvadraturní váhy

a máme $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{0}^{n} f(x_i)\, w_i$

$\leadsto$ Víme, že volba $x_i = \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot i$ ... ekvidistantní ... je špatná pro interpolaci.

Pro integraci je to stejné $\leadsto$ tzv. Newton-Cotes kvadratura

$\leadsto$ Existují dvě lepší volby:

- bereme x_i jako tzv. Legendreovy body (kořeny tzv. Legendrových polyn.)
  $\leadsto$ tzv. Gaussova kvadratura
- založíme výpočet na Chebyshevových polynomech (podobně jako u interpolace na Chebyshevových bodech)
  $\leadsto$ tzv. Clenshaw-Curtis kvadratura

lepší:
$\forall\, q(x)$ polynom stupně $\leq n$: Newton-Cotes zintegruje $q(x)$ přesně

$\forall\, q(x)$ polynom stupně $\leq 2n$: Gauss zintegruje $q(x)$ přesně

$\forall\, q(x)$ polynom stupně $\leq n$: Clenshaw-Curtis zintegruje $q(x)$ přesně

tzv. řád kvadratury

lepší:

$$\left|\int_a^b f\,dx - \int_a^b p_f\,dx\right| \le \int_a^b |p_f(x)-f(x)|\,dx \le \max_{\xi\in(a,b)} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \underbrace{\int_a^b \left|\prod_0^n (x-x_i)\right| dx}$$

malé pro Cheb. body ⇝ vede na Clenshaw-Curtis
velké pro ekvidist. ⇝ pro Newton-Cotes

Po částech polynomiální interp.

$f(x) \approx s_f(x)$ na (a,b)

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b s_f(x)\,dx$$

$$\boxed{\text{⇝ Gauss \& Clenshaw-Curtis jsou „lepší" v jiném slova smyslu \& obě jsou ve svém slova smyslu optimální}}$$

V praxi dávají obě kvadratury „skoro" stejně přesné aproximace.

Odhad chyby: stejně jako výše - na základě odhadu chyby interpolace.
odhadu chyby interpolace, např.

$s_f(x)$ je kubický spline na (a,b) v bodech $x_0,\dots,x_n$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b s_f(x)\,dx\right| \le C \cdot \max_{\xi\in(a,b)} |f^{(4)}(\xi)| \cdot h^4 \cdot |b-a|$$

$h = (b-a)/n$

Pokud máme $f: [a_1,b_1]\times\dots\times[a_{50},b_{50}] \longrightarrow \mathbb{R}$
pak lze „přirozeně zobecnit", ale potřebujeme

$x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}$ … kvadraturní body v $[a_1,b_1]$
$x_1^{(2)},\dots,x_n^{(2)}$ … kvadraturní body v $[a_2,b_2]$
⋮
$x_1^{(50)},\dots,x_n^{(50)}$ … —— n —— v $[a_n,b_n]$

$\longrightarrow$ pro $n=3$ bychom měli $3^{50} \simeq 8\cdot 10^{23}$ bodů

($10^{50} \simeq$ # atomů na Zemi $\sqrt{10^{50}} = 10^{25}$)