

Přednáška 16 - Gaussova el. & LU II.

opět: $A\vec{x} = \vec{b}$ soustava n lineárních algebr. rovnic

Řešení pomocí G.E.:

- $A\vec{x} = \vec{b}$ (G.E.) $MAx = Mb$, kde $M = M^{(n-1)} \dots M^{(1)}$
→ M sestavujeme, ale postupně aplikujeme $M^{(k)}$ na A i \vec{b}
a dostaneme $MA = A^{(n-1)} = U$ & $Mb = \vec{b}^{(n-1)}$
- Vyřešíme $U\vec{x} = \vec{b}^{(n-1)}$

Řešení pomocí LU faktORIZACE:

- stejnou procedurou jako G.E. počítáme $U = A^{(n-1)}$, ale ukládáme si koeficienty definující $M^{(k)} = I - \vec{m}^{(k)} \vec{e}_k^T$.

$$\text{Pak } U = \underbrace{M^{(n-1)} \dots M^{(1)}}_M A \text{ tj. } A = M^{-1}U \equiv LU$$

- vyřešíme $L\vec{y} = \vec{b}$
- vyřešíme $U\vec{x} = \vec{y}$

Porovnání: při použití LU vlastně «mavic» sestavujeme $L = M^{-1}$ (díky tomu, že umíme explicitně vyjádřit $(M^{(k)})^{-1}$ jde oprávněně o «sestavování») místo abychom tu matici rovnou aplikovali na \vec{b} .

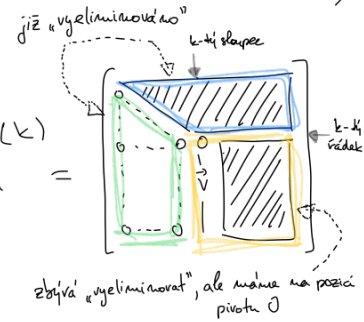
→ užitečné, pokud budeme řešit mnoho systémů $A\vec{x} = \vec{b}_k$ pro různé vektory b_1, b_2, \dots , které ještě nemáme. Např. impl. Euler/Dunge-Kutta
Pak můžeme využít faktorů opakovaně

→ pokud máme pouze 1 systém (nebo posloupnost, kde se mění i matice A)
→ je rychlejší nepočítat & neukládat $L = M^{-1}$ a rovnou použít Gaussovu eliminaci

Kdy lze takto počítat? Pokud máme neunlové pivoty, tj. pokud $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad \forall k=1, \dots, n-1$ ($a_{11}^{(0)} = a_{11}$). Tuto vlastnost mají tzv. silně regulární matice.

(definice: A je silně regulární \Leftrightarrow všechny „diagonální“ podmatice jsou regulární, tj.  černá, žlutá, zelená a modrá jsou regulární)

Co když máme pouze regulární matici (tj. $\forall \vec{b} \exists! \vec{x} \text{ t. j. } A\vec{x} = \vec{b}$), ale pro nějaké $k \leq n-1$ $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ nebo ≈ 0 ?



Tak uvažt takové k máme & rozepíšeme si $A^{(k)} =$

Protože A je regulární $\Rightarrow \vec{v} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists l \in \{k, \dots, n\} : v_l \neq 0$.

Vezmeme si $l \leq n : |v_l| = \max_{i \leq n} |v_i|$ & prohodíme řádky k & l v $A^{(k)}$:

$\tilde{A}^{(k)} = P_k A^{(k)}$ \rightsquigarrow můžeme algoritmicky počítat dále s $\tilde{A}^{(k)}$ místo $A^{(k)}$.
 \rightsquigarrow tzv. partial pivoting (částečná pivotace)

Obecně tedy máme: $A^{(k)} = M^{(k)} \tilde{A}^{(k-1)} = M^{(k)} P_{k-1} A^{(k-1)} \dots P_1$ je identita pokud neprobíráme řádky
je permutační matice pokud probíráme

Pozorování: $A^{(n-1)} = U = M^{(n-1)} P_{n-2} \dots M^{(3)} P_2 M^{(2)} P_1 M^{(1)} P_0 A$

& $P_k M^{(k)} = P_k (I - \tilde{m}^{(k)} \vec{e}_k^T) = P_k - \underbrace{P_k \tilde{m}^{(k)}}_{=: \tilde{m}^{(k)}} \vec{e}_k^T = P_k - \tilde{m}^{(k)} \vec{e}_k^T P_k = (I - \tilde{m}^{(k)} \vec{e}_k^T) P_k$
 \nearrow odpovídá výpočtu s $\tilde{A}^{(k)}$ \nwarrow P_k permutuje po k -tém kroku \Rightarrow pouze probíráme (může)
řádky od $k+1$ do $n \Rightarrow P_k \vec{e}_k = \vec{e}_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow \vec{e}_k^T = (P_k \vec{e}_k)^T = \vec{e}_k^T P_k^T = \vec{e}_k^T P_k$
 \nwarrow zejména $P_k^T = P_k$... rozmyslet

Tedy: $A^{(n-1)} = U = M^{(n-1)} \tilde{M}^{(n-2)} \dots \tilde{M}^{(1)} \underbrace{P_{n-2} P_{n-1} \dots P_1 P_0}_{=: P} A$

tj. $PA = LU$... LU faktorizace s částečnou pivotací

$A\vec{x} = \vec{b}$ & $PA = LU \rightsquigarrow$ • vyřešíme $L\vec{y} = P^T \vec{b}$
• vyřešíme $U\vec{x} = \vec{y}$

\rightsquigarrow existují i jiné pivotace \rightsquigarrow my zde vynecháme

Pozorování: A je regulární $\Rightarrow \exists$ matice P, L, U t. i. $PA = LU$
 \uparrow \uparrow \uparrow
 permutace dolní horní

Jednoznačnost závisí na volbě pivotací strategie. Pro částečnou pivotaci jsou P, L, U jednoznačné.

Věta (Wilkinson)

Nechť A je regulární a má LU-faktorizaci s částečnou pivotací $PA = LU$.

Označme $\hat{P}, \hat{L}, \hat{U}$ matice získané počítačovým výpočtem v konečné aritmetice s machine-precision ϵ_{mach} . Pak platí:

$$\frac{\max_{i,j} |(\hat{L}\hat{U})_{ij} - (\hat{P}A)_{ij}|}{\max_{i,j} |(\hat{P}A)_{ij}|} \stackrel{(*)}{\leq} \underbrace{C}_{\text{malá konstanta}} \cdot \underbrace{\frac{\max_{i,j,k} |\hat{a}_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |(\hat{P}A)_{ij}|}}_{\text{velikost systému}} \cdot \underbrace{n}_{\text{velikost systému}} \cdot \underbrace{\epsilon_{\text{mach}}}_{\text{zobrouhlovací přesnost}} + O(\epsilon_{\text{mach}}^2)$$

relativní chyba numerického výpočtu za pomoci G.E. s částečnou pivotací

\uparrow tzv. růstový faktor... musíme monitorovat během výpočtu \rightarrow pokud nebude příliš velký, tak víme, že se mi zobrouhlovací chyby příliš neakumulují

$$\frac{\max_{i,j,k} |\hat{a}_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |(\hat{P}A)_{ij}|} \lesssim \frac{\max_{i,j} |\hat{L}_{ij}| \cdot \max_{i,j} |\hat{U}_{ij}|}{\max_{i,j} |(\hat{P}A)_{ij}|}$$

Z toho nám plyne:

Gaussova eliminace s částečnou pivotací není vždy stabilní

říkáme, že je tzv. podmínečně stabilní.

protože pro některé matice můžou limity PC aritmetiky (např. zobrouhlování) zcela dominovat výpočet.

Ale v praxi se GE přesto běžně používá a pro mnoho konkrétních problémů lze stabilitu zaručit za využití dalších vlastností A .

Například pokud je A symetrická a pozitivně definitní (SPD)

Pak lze ukázat, že $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ a tedy není třeba pivotace.

Když si vezmeme LU-faktORIZACI $A=LU$ pak $A=A^T$, ale ta faktORIZACE sama o sobě symetrická není, tj. $L \neq U^T$.

Ovšem pokud napíšeme $A = L \cdot \text{diag}(U) \cdot \overbrace{\text{diag}(U)^{-1} \cdot U}^R = LDR$

pak lze snadno ukázat, že $R^T = L$ & $D > 0$

Pro A SPD tedy můžeme provést LU-faktORIZACI symetricky \rightarrow

\rightarrow když získáme $A^{(n-1)} = U$ pak automaticky $L = (\text{diag}(U)^{-1} U)^T$.

Klasicky se místo toho volí $L = (\text{diag}(U)^{-1/2} U)$ a dostáváme

tv. Choleského faktORIZACI: $A = LL^T$.

Pro výpočet Choleského faktORIZACE lze ukázat:

$$\boxed{\frac{\max_{i,j} |(\hat{L}\hat{L}^T)_{ij} - a_{ij}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}} \quad (*) \leq$$

relativní chyba numerického
výpočtu Choleského faktORIZACE

$$2 \cdot \underbrace{n}_{\text{velikost systému}} \cdot \underbrace{\sum_{\text{mach}}^{\text{zakrouhlení přesnost}} + O(\sum_{\text{mach}}^2)}$$

\triangleright ten růstový faktor lze odhadnout 2 \Rightarrow
 \rightarrow zakrouhlovací chyby se neakumulují

\Rightarrow pro A SPD je Gaussova eliminace stabilní

