

Přednáška 5 - podmíněnost & stabilita

Opáčko: práce s čísly na PC je nepřesná

→ $0.3 = 2.9...91$, $1/3$, $\sqrt{2}$, π , e , ...

⇒ musíme počítat s chybami → minimálně na úrovni ϵ_{mach}

⇒ klíčová otázka: Kdy lze vypočteným výsledkům věřit?

Krok 1: Vlastnost problému - podmíněnost

Řekneme, že problém $\mathcal{P}: \text{input} \mapsto \text{output}$ má podmíněnost $\kappa > 0$, pokud

$$\forall \text{input}, \forall \epsilon \text{ (perturbace)}: \frac{\|\mathcal{P}(\text{input} + \epsilon) - \mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} = \kappa \cdot \frac{\|\text{input} + \epsilon - \text{input}\|}{\|\text{input}\|} + o(\|\epsilon\|)$$

Slovy: Problém \mathcal{P} má podmíněnost κ , pokud pro malé perturbace vstupních dat platí, že výstup se zmenší nejvýše κ -krát více než je velikost perturbace.

Pozorování: definice dost připomíná derivaci a opravdu tam „je“.

$$\frac{\|\mathcal{P}(\text{input} + \epsilon) - \mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\text{input} + \epsilon - \text{input}\|} = \kappa \cdot \frac{\|\mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\text{input}\|} + o(\|\epsilon\|) \xrightarrow{\|\epsilon\| \rightarrow 0} \kappa = \|\mathcal{P}'(\text{input})\| \cdot \frac{\|\mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\text{input}\|}$$

Krok 2: Vlastnost algoritmu - stabilita

Řekneme, že algoritmus $\mathcal{A}: \text{input} \mapsto \text{output}$ je stabilní (\equiv zpětně stabilní), pokud

$$\exists C > 0: \forall \text{input} \exists \text{input}_p: \begin{aligned} &\bullet \mathcal{A}(\text{input}) = \mathcal{P}(\text{input}_p) \\ &\bullet \frac{\|\text{input}_p - \text{input}\|}{\|\text{input}\|} \leq C \cdot \epsilon_{mach} \end{aligned}$$

Krok 3: Kdy lze výpočtem věřit?

$$\frac{\|\mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{A}(\text{input})\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} = \frac{\|\mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{P}(\text{input}_p)\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\text{input} - \text{input}_p\|}{\|\text{input}\|} \leq C \cdot \kappa \cdot \epsilon_{mach}$$

Lze jim věřit pokud $C \cdot \kappa \ll \epsilon_{mach} \rightarrow$ důvěřujeme pouze stabilním algoritmům použitým pro dobře podmíněné problémy

Demo 1: Polynomy v monické bázi & jejich kořeny

Vezmeme si tzv. Wilkinson polynom:

$$P_{\delta}(x) := (x-1) \cdot \dots \cdot (x-20) + \delta x^{19} = x^{20} + (\alpha_{19} + \delta) \cdot x^{19} + \alpha_{18} x^{18} + \dots + \alpha_0$$

s kořeny $r_1 \equiv r_1(\delta)$, $r_2 \equiv r_2(\delta)$, ..., $r_{20} \equiv r_{20}(\delta)$... přirozeně závisí na δ .

Pro $\delta=0$: $r_1(0) = 1$, ..., $r_{20} = 20$

Pokud chceme s $P_{\delta=0}(x)$ počítat v PC, je možné, že některé z koeficientů α_i budou nepřesné \rightarrow δ použijeme jako simulaci této nepřesnosti \rightarrow místo α_{19} máme $\alpha_{19} + \delta$.

Jak velký vliv má malá nepřesnost (např. $\delta = 10^{-7}$) na $r_1(\delta), \dots, r_{20}(\delta)$?
(aka jaká je podmíněnost kořenů $P_{\delta=0}(x)$ vzhledem k δ ?) \Rightarrow $\underbrace{r_1(\delta), \dots, r_{20}(\delta)}_{\text{output}}$
 \Rightarrow "input" je δ & output jsou

$$\frac{|r_i(\delta) - r_i(0)|}{|r_i(0)|} = \mathcal{K}_i \delta + o(\delta) \rightarrow \mathcal{K}_i \approx |r_i(0)| \cdot \frac{d}{d\delta} (r_i(\delta)|_{\delta=0})$$

... zjevně každý kořen $r_i(\delta)$ může být jinak citlivý na změny α_{19} (a všech ostatních α_j).
místo slova podmíněnost (=conditioning) se někdy používá slovo citlivost (sensitivity).

Otázka tedy je jak velká je derivace $\frac{d}{d\delta} (r_i(\delta)|_{\delta=0})$ pro $i=1, \dots, 20$.

Přesný výpočet máš čekat na cvikách,
kde si odvodíme

$$\left. \frac{d}{d\delta} r(\delta) \right|_{\delta=0} = \frac{-r_i(0)^{19}}{P_0'(r_i(0))} = - \frac{r_i(0)^{19}}{\prod_{j \neq i} (r_i - r_j)}$$

velmi malá změna δ může výrazně změnit r_{20}, \dots, r_{10} ... ale nikoliv r_1

Demo 2: polynomiální interpolace

Máme data která chceme interpolovat $\rightarrow (x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$.

Lagrangeova interpolace: $P_f(x) := \sum_{i=0}^n l_i(x) \cdot f_i$

Co když jsme při měření udělali chyby a „skutečná“ přesná data f_i jsou trochu jiná ... označíme si $(x_0, g_0), \dots, (x_n, g_n)$

přesná Lagrangeova interpolace: $P_g(x) := \sum_{i=0}^n l_i(x) \cdot g_i$

chyba pouze v měření $\Rightarrow P_f(x) - P_g(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) (f_i - g_i)$

$$\max_{x \in [a,b]} |P_f(x) - P_g(x)| \leq \underbrace{\max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{i=0}^n l_i(x) \right|}_{=: \Delta_n(x_0, \dots, x_n)} \cdot \max_i |f_i - g_i|$$

lze najít f_i, g_i kde platí rovnost *tzv. Lebesgueova konstanta*

Bez odvození:
pro $(a,b) \equiv (-1,1)$:

$$\Delta_n(\text{ekvidistantní}) \approx 2^{n+1} / n \cdot \log(n) \cdot e$$
$$\Delta_n(\text{Chebyshev.}) \approx \frac{2}{\pi} \log(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\max_{x \in (a,b)} |P_f(x) - P_g(x)|}{\max_{x \in (a,b)} |P_f(x)|} \leq \Delta_n(x_0, \dots, x_n) \cdot \frac{\max_i |f_i - g_i|}{\max_i |f_i|}$$

pro Chebyshevovy body

$$n \leq 20\,000$$

$$\Delta_n \sim \frac{2}{\pi} \cdot 10 \sim 6.4$$

\Rightarrow dobře podmíněný problém

pro ekvidistantní body

$$n \geq 60$$

$$\Delta_n \geq \frac{1}{60 \log(60)} \cdot 10^{16}$$

\Rightarrow špatně podmíněný problém

Demo 3: Lineární soustavy rovnic

problém:
$$\begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 & 5/10 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 1/100 & 3/100 & 5/100 - 10^{-13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 9/2 \\ 9/100 - 10^{-13} \end{bmatrix}$$

→ přesný výpočet nám dá $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Linegebra 1: Kramerovo pravidlo: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$

kde $A_i =$ "vezmu matici A a vyměním"
"i-tý sloupec za \vec{b} "

- $\hat{x}_1 = \dots$ Kramerovo pravidlo na PC = 0.99991905...
- $\hat{x}_2 = \dots$ Kramerovo pravidlo na PC = 0.99977449...
- $\hat{x}_3 = \dots$ Kramerovo pravidlo na PC = 1.00009252...

⇒ Kramerovo pravidlo: $\vec{x}_{kp} =$

⇒ pokud si definujeme $\tilde{\vec{b}} = A \cdot \vec{x}_{kp} = \begin{bmatrix} 0.69997... \\ 4.49997... \\ 0.09997... \end{bmatrix}$

pak lze Kramerovo pravidlo vnímat jako
"přesný řešič" ale pro perturbovaný problém.

Tato perturbace je velikosti $\approx 10^{-4}$

⇒ Kramerovo pravidlo bychom neměli nazvat stabilní.

