Přednáška 5 – podmíněnost & stabilita

<u>Opáčko:</u> práce s čísly na PC je nepřesná

$$\rightarrow \quad 0.3 = 2.9\ldots 91, \quad 1/3, \ \sqrt{2}, \ \pi, \ e, \ \ldots$$

⇒ musíme počítat s chybami ⇝ minimálně na úrovni ε_{mach}

⇒ klíčová otázka: **Kdy lze vypočteným výsledkům věřit?**

Krok 1: Vlastnost problému – podmíněnost

Řekneme, že problém $\mathcal{P}$: input $\mapsto$ output má podmíněnost $\kappa > 0$, pokud

$$\boxed{\forall \text{input}, \ \forall \varepsilon \text{ (perturbaci)}: \quad \frac{\|\mathcal{P}(\text{input}+\varepsilon) - \mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} = \kappa \cdot \frac{\|\text{input}+\varepsilon-\text{input}\|}{\|\text{input}\|} + o(\|\varepsilon\|)}$$

<u>Slovy:</u> Problém $\mathcal{P}$ má podmíněnost κ, pokud pro malé perturbace vstupních dat platí, že výstup se změní nejvýše κ-krát více než je velikost perturbace.

<u>Pozorování:</u> definice dost připomíná derivaci a opravdu tam „je":

$$\frac{\|\mathcal{P}(\text{input}+\varepsilon) - \mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\text{input}+\varepsilon-\text{input}\|} = \kappa \cdot \frac{\|\mathcal{P}(\text{input})\|}{\|\text{input}\|} + o(\|\varepsilon\|) \quad \overset{\|\varepsilon\|\to 0}{\rightsquigarrow} \quad \kappa = \|\mathcal{P}'(\text{input})\| \cdot \frac{\|\text{input}\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|}$$

Krok 2: Vlastnost algoritmu – stabilita

Řekneme, že algoritmus $\mathcal{A}$: input $\longrightarrow$ output je stabilní (≡ zpětně stabilní), pokud

$$\boxed{\exists C>0 : \forall \text{input} \ \exists \text{input}_{\mathcal{P}} : \quad \bullet \ \mathcal{A}(\text{input}) = \mathcal{P}(\text{input}_{\mathcal{P}}) \ \ \& \ \ \bullet \ \frac{\|\text{input}_{\mathcal{P}} - \text{input}\|}{\|\text{input}\|} \leq C \cdot \varepsilon_{mach}}$$

Krok 3: Kdy lze výpočtům věřit?

$$\frac{\|\mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{A}(\text{input})\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} = \frac{\|\mathcal{P}(\text{input}) - \mathcal{P}(\text{input}_{\mathcal{P}})\|}{\|\mathcal{P}(\text{input})\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\text{input} - \text{input}_{\mathcal{P}}\|}{\|\text{input}\|} \leq C \cdot \kappa \cdot \varepsilon_{mach}$$

Lze jim věřit pokud $C \cdot \kappa << \varepsilon_{mach}$ → důvěřujeme pouze stabilním algoritmům použitým pro dobře podmíněné problémy

Demo 1: Polynomy v monické bázi & jejich kořeny

Vezmeme si tzv. Wilkinson polynom:

$$p_\delta(x) := (x-1)\cdot\ldots\cdot(x-20) + \delta x^{19} \equiv x^{20} + (\alpha_{19}+\delta)\cdot x^{19} + \alpha_{18}x^{18} + \ldots + \alpha_0$$

s kořeny $r_1 \equiv r_1(\delta), r_2 \equiv r_2(\delta), \ldots, r_{20} \equiv r_{20}(\delta)$ .... přirozeně závisí na δ.

Pro $\delta = 0$: $r_1(0) = 1, \ldots, r_{20} = 20$

Pokud chceme s $p_{\delta=0}(x)$ počítat v PC, je možné, že některé z koeficientů α_i budou nepřesné $\to$ δ použijeme jako simulaci této nepřesnosti $\leadsto$ místo α_{19} máme $\alpha_{19}+\delta$.

Jak velký vliv má malá nepřesnost (např. $\delta = 10^{-7}$) na $\underbrace{r_1(\delta), \ldots, r_{20}(\delta)}$?
(aka jaká je podmíněnost kořenů $p_{\delta=0}(x)$ vzhledem k δ?) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ „input" je δ & output jsou

$$\frac{|r_i(\delta) - r_i(0)|}{|r_i(0)|} = \kappa_i \delta + o(\delta) \to \kappa_i \approx |r_i(0)| \cdot \frac{d}{d\delta}\left(r_i(\delta)\Big|_{\delta=0}\right)$$

... zjevně každý kořen $r_i(\delta)$ může být jinak citlivý na změny α_{19} (a všech ostatních α_j).
místo slova podmíněnost (= conditioning) se někdy používá slovo citlivost (sensitivity).

Otázka tedy je jak velká je derivace $\frac{d}{d\delta}\left(r_i(\delta)\Big|_{\delta=0}\right)$ pro $i = 1, \ldots, 20$.

Přesný výpočet nás čeká na cvikách, kde si odvodíme

může být $\ggg 1$

$$\frac{d}{d\delta} r(\delta)\Bigg|_{\delta=0} = \frac{-r_i(0)^{19}}{p_0'(r_i(0))} = -\frac{i^{19}}{\prod_{j\neq i}(i-j)}$$

velmi malá změna δ může výrazně změnit $r_{20}, \ldots, r_{10}$ ... ale nikoliv r_1

Demo 2: polynomiální interpolace

Máme data která chceme interpolovat $\to (x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$.

Lagrangeova interpolace: $p_f(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f_i$

Co když jsme při měření udělali chyby a „skutečná" přesná data f_i jsou trochu jiná ... označíme si $(x_0, g_0), \dots, (x_n, g_n)$

přesná Lagrangeova interpolace: $p_g(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot g_i$

chyba pouze v měření $\Rightarrow$ $p_f(x) - p_g(x) = \sum_{0}^{n} l_i(x)(f_i - g_i)$

$$\max_{x \in [a,b]} |p_f(x) - p_g(x)| \leq \underbrace{\max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{0}^{n} l_i(x) \right|}_{=: \Lambda_n(x_0, \dots, x_n)} \cdot \max_i |f_i - g_i|$$

lze najít f, g kde platí rovnost

$=: \Lambda_n(x_0, \dots, x_n)$ ... tzv. Lebesgueova konstanta

Bez odvození pro $(a,b) \cong (-1,1)$:

$$\Lambda_n(\text{ekvidistantní}) \approx 2^{n+1} / n \cdot \log(n) \cdot e$$

$$\Lambda_n(\text{Chebyshev.}) \approx \frac{2}{\pi} \log(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\max_{x \in (a,b)} |p_f(x) - p_g(x)|}{\max_{x \in (a,b)} |p_g(x)|} \leq \Lambda_n(x_0, \dots, x_n) \cdot \frac{\max_i |f_i - g_i|}{\max_i |g_i|}$$

ve skutečnosti sem patří $\max_x |p_g(x)| \geq \max_i |g_i| \to$

$\to$ tohle je jen další odhad

pro Chebyshevovy body

$n \leq 20\,000$

$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \cdot 10 \sim 6.4$

$\leadsto$ dobře podmíněný problém

pro ekvidistantní body

$n \geq 60$

$\Lambda_n \geq \frac{1}{60 \log(60)} \cdot 10^{16}$

$\leadsto$ špatně podmíněný problém

Demo 3: Lineární soustavy rovnic

problém: $\begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 & 5/10 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 1/100 & 3/100 & 5/100 - 10^{-13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 9/2 \\ 9/100 - 10^{-13} \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ přesný výpočet nám dá $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lingebra 1: Kramerovo pravidlo: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

kde A_i = „vezmu matici A & vyměním i-tý sloupec za $\vec{b}$"

- $\hat{x}_1$ = … Kramerovo pravidlo na PC = 0.99991905…
- $\hat{x}_2$ = … Kramerovo pravidlo na PC = 0.99977449…
- $\hat{x}_3$ = … Kramerovo pravidlo na PC = 1.00009252…

$\Rightarrow$ Kramero pravidlo: $\vec{x}_{KP}$ =

$\rightsquigarrow$ pokud si definujeme $\tilde{b} = A \cdot \vec{x}_{KP} = \begin{bmatrix} 0.69997\ldots \\ 4.4997\ldots \\ 0.089995\ldots \end{bmatrix}$

pak lze Kramerovo pravidlo vnímat jako „přesný řešič" ale pro perturbovaný problém.

Tato perturbace je velikosti $\approx 10^{-4}$

$\rightsquigarrow$ Kramerovo pravidlo bychom nenazvali stabilní.