Přednáška 5 – podmíněnost & & stabilita

Opáčko z minule:

- PC a výpočty na něm jsou nepřesné →
  → $0.3 \neq 2.9\ldots 91$, $1/3$, $\sqrt{2}$, π, e, ...

⟹ musíme počítat s chybami a to poukazuje na 2 problémy ve výpočtech:

- Problém 1: efekt motýlích křídel
  tzv. podmíněnost našeho probl.
  ⇝ jak moc ovlivní nepřesnost vstupních dat náš výsledek
  ⇝ „papír & tužka vlastnost" tj. nezávisí na výpočetním postupu – je to vlastnost problému

- Problém 2: akumulace chyb během výpočtu
  tzv. stabilita našeho algoritmu
  ⇝ když zadám do algoritmu nepřesná vstupní data, jak moc se bude výsledek algoritmu lišit od přesného řešení pro ta nepřesná vstupní data

Demo 1: kořeny polynomů

- $p_\delta(x) := \prod_{i=1}^{20}(x-i) + \delta \cdot x^{19}$

$\rightarrow$ pro $p_0(x) = \prod_{i=1}^{20}(x-i)$ máme kořeny

$$r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ \dots,\ r_{20} = 20$$

- ale co když přidáme malou chybu k jednomu z koeficientů $\rightarrow$ výpočet / měření / reprezentace v PC

$\rightsquigarrow r_1(\delta) = ?,\ r_2(\delta) = ?$

nezáv. na δ

$$r_i(\delta) \overset{?}{\approx} r_i(0) \rightsquigarrow \left|\frac{r_i(\delta) - r_i(0)}{|r_i(0)|}\right| \overset{?}{\leq} C \cdot \delta$$

$$\left(\rightsquigarrow\right) \underbrace{\left|\frac{r_i(\delta) - r_i(0)}{|\delta|}\right|}_{\equiv \frac{d}{d\delta} r_i(\delta)} \overset{?}{\leq} C \cdot |r_i(0)|$$

$\Rightarrow$ podmíněnost $\equiv$ |derivace řešení podle perturb. inputů|

(někdy se mluví o citlivosti)

- $p_\delta(r_i(\delta)) = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\delta}\left(p_\delta(r_i(\delta))\right) = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{d}{d\delta}\left(p_0(r_i(\delta))\right) + \frac{d}{d\delta}\left(\delta \cdot (r_i(\delta))^{19}\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\delta} r_i(\delta) \cdot p_0'(r_i(\delta)) + (r_i(\delta))^{19} + \delta \cdot 19 \cdot (r_i(\delta))^{18} \cdot \frac{d}{d\delta}(r_i(\delta)) = 0$$

pro $\delta = 0$:

může být $\gg 1$

$$\left.\frac{d}{d\delta} r_i(\delta)\right|_{\delta=0} = \frac{-r_i(0)^{19}}{p_0'(r_i(0))} = -\frac{i^{19}}{\prod_{j \neq i}(i-j)}$$

Demo 2: polynomial interpolation

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i) =: p_f(x)$$

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, g(x_i) =: p_g(x)$$

$$\longrightarrow \quad p_f(x) - p_g(x) = \sum_{0}^{n} l_i(x)\left(f(x_i) - g(x_i)\right)$$

$$\max_{x\in[a,b]} |p_f - p_g| \le \underbrace{\max_{x\in[a,b]} \left|\sum_{0}^{n} l_i(x)\right|}_{=: \Delta_n(x_0,\dots,x_n)} \cdot \max_i |f(x_i) - g(x_i)|$$

bez odvození pro $[-1,1]$:

$$\Delta_n(\text{ekvidistantní}) \approx 2^{n+1} / n \cdot \log(n) \cdot e$$

$$\Delta_n(\text{Chebyshev.}) \approx \frac{2}{\pi} \log(n+1)$$

skoro optimální

v principu lze najít f,g pro které platí rovnost

$$\Rightarrow \quad \frac{\max_{x\in[a,b]} |p_f(x) - p_g(x)|}{\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|} \le \Delta_n(x_0,\dots,x_n)$$

pro Chebyshev. body

pro $n \le 20\,000$

$\Delta_n \sim \frac{2}{\pi} \cdot 10 \sim 6.4$

$\rightsquigarrow$ dobře podmíněné

pro ekvidistantní body

pro $n \ge 60$

$\Delta_n \ge \frac{1}{60 \log(60)} \cdot 10^{16}$

$\rightsquigarrow$ špatně podmíněné

Demo 3: Lineární soustavy rovnic

problém: $\begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 & 5/10 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 1/100 & 3/100 & 5/100 - 10^{-13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 9/2 \\ 9/100 - 10^{-13} \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ přesný výpočet nám dá $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lingebra 1: Kramerovo pravidlo: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

kde A_i = „vezmu matici A & vyměním i-tý sloupec za $\vec{b}$"

- $\hat{x}_1 = \ldots$ Kramerovo pravidlo na PC $= 0.99991905\ldots$
- $\hat{x}_2 = \ldots$ Kramerovo pravidlo na PC $= 0.99977449\ldots$
- $\hat{x}_3 = \ldots$ Kramerovo pravidlo na PC $= 1.00009252\ldots$

$\Longrightarrow$ Kramero pravidlo: $\vec{x}_{KP} =$

$\rightsquigarrow$ pokud si definujeme $\tilde{b} = A \cdot \vec{x}_{KP} = \begin{bmatrix} 0.69997\ldots \\ 4.4997\ldots \\ 0.089995\ldots \end{bmatrix}$

pak lze Kramerovo pravidlo vnímat jako „přesný řešič" ale pro perturbovaný problém.

Tato perturbace je velikosti $\approx 10^{-4}$

$\rightsquigarrow$ Kramerovo pravidlo bychom nenazvali stabilní.