Přednáška 3 – interpolace & spliny

mám (x_i, f_i) $i = 0, \dots, n$ kde $x_0, \dots, x_n \in (a,b)$

chci $P_f(x)$ pro $x \in (a,b)$

Lagrangeova interpolace:
- $l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
- $P_f(x) := \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$ (*)

Teorie – odhad chyby

Mějme $f \in C\left([a,b]\right)$, $x_0 \leq \dots \leq x_n \in (a,b)$. Mějme $f_i := f(x_i)$ a $P_f(x)$ jako v (*).
Pak $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$:

$$(**) \quad f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

a tedy

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - P_f(x) \right| \leq \max_{\xi \in [a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Důkaz → „sporem" & založeno na Taylorovy se zbytkem
→ vynecháme, pro nás nepřináší „hlubší vhled"

V (**) je rovnost ⇝ lze odvodit/pochopit Rungeho jev z minule?

→ spočítáme derivace: $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f'' = \dots$, $f^{(7)} = \underbrace{-40320 \cdot \frac{x(x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 1)}{(1+x^2)^8}}_{1 \cdot 1 \leq 4392}$

$\forall x \in [-6,6]$
& nabývá se pro $x^* \approx 0.14$

$$\Rightarrow \text{chyba} \sim \frac{4392}{7!} \cdot \underbrace{3424}_{(x^* - x_0) \cdot \dots \cdot (x^* - x_n)} \sim 2984 \gg 0$$

- Funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ v drtivé většině aplikací nelze ovlivnit $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ člen $\max_{\xi \in [a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$ je většinou mimo náš dosah.

  $\to$ člen $1/(n+1)!$ je super! Vidíme, že chyba „má potenciál" klesat velmi rychle k nule

- Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ ve kterých interpolujeme si u mnoha aplikací můžeme vybrat dopředu $\Rightarrow$ člen $\max_{x \in [a,b]} |(x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)|$ můžeme často kontrolovat/ovlivnit.

  Lze najít $x_0, \dots, x_n$ tak, aby minimalizovali $\max_{x \in [a,b]} |(x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)|$?

  $\to$ ANO! tzv. Chebyshevovy body

  - pro $[a,b] = [-1,1]$ odpovídají $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)} \pi\right)$, $i = 0, \dots, n$
  - optimální volba (= nejde lépe)
  - „husté na krajích & řídké uprostřed"

<u>Věta</u>: Mějme $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ a vezměme $p_f^{(n)}(x)$ jako Lagrangeovu interpolaci f na $[a,b]$ stupně <u>n</u> v Chebyshevových bodech. Pak $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

Python demos

- Vandermond & použitelnost
- Lagrange & použitelnost

$\to$ matematicky (= papír-a-tužka) jsou ekvivalentní.

$\to$ při výpočtu na PC ne!

$\leadsto$ proč?

$\to$ Věta tvrdí, že chyba má jít k 0, ale na PC nejde

$\leadsto$ proč?

Tomu je zapotřebí porozumět $\to$ příští týden.

Tuhle přednášku skončíme tím, že si všimneme, že problémy nastávají pouze pro $\underline{n}$ velké.

-> Co kdybychom použili „rozděl a panuj" – výpočty s malým $\underline{n}$ hodněkrát za sebou.

Pozorování 1: Naivní způsob -> $[a,b] \equiv [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup [x_2,x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1},x_n]$ & interpolujeme s $\underline{n}$ malým na každém $[x_i,x_{i+1}]$ nezávisle

Nevýhoda: výsledná aproximace už bude pouze spojitá (nikoliv $\mathcal{C}^\infty([a,b])$ jako $P_f(x)$)

Tuhle nevýhodu řeší tzv. spliny: $s_f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ t., že
- $\forall i$: $\boxed{s_f(x_i) = f_i}$ &
- $\forall i$: $s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]}$ je polynom stupně $\underline{n}$
- $s_f(x)$ má co možná nejvyšší hladkost

Lineární spline $\equiv$ $s_f(x)$ je polynom stupně 1 na každém $[x_i,x_{i+1}]$

$\Rightarrow s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \cdot x \Rightarrow$ máme 2 parametry na každém $[x_i,x_{i+1}]$. Požadavek ● na okrajích $[x_i,x_{i+1}]$ už jednoznačně určí $\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}$

$\Rightarrow$ lineární spline je pouze spojitý, vyšší hladkosti nelze dosáhnout.

Věta Mějme $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $N \in \mathbb{N}$. Vezmeme si $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{N}$, $x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{N}$, $\dots$, $x_N = b$ & označíme $h := \frac{b-a}{N}$. Pak pro lineární spline $s_f(x)$ procházející body $\{x_0, f(x_0)\}, \dots, \{x_N, f(x_N)\}$ platí $\forall x \in [a,b]$: $|s_f(x) - f(x)| \leq 1/8 \cdot h^2 \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(2)}(\xi)|$

Kubický spline $\equiv$ $s_f(x)$ je polynom stupně 3 na každém $[x_i,x_{i+1}]$

$\Rightarrow s_f(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \cdot x + \alpha_2^{(i)} \cdot x^2 + \alpha_3^{(i)} \cdot x^3 \Rightarrow$ máme 4 parametry na každém $[x_i,x_{i+1}]$. Požadavky ● na okrajích $[x_i,x_{i+1}]$ nám dají 2 podmínky $\Rightarrow$ máme ještě 2 „volné parametry". Dohromady máme $4n$ parametrů $\{\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}\}_{i=1}^n$

- $2n$ podmínek je dáno ●
- přidáme $n-1$ podmínek aby $s_f \in \mathcal{C}^1([a,b])$: $\forall i$: $\lim_{x \to x_i-} s_f'(x) = \lim_{x \to x_i+} s_f'(x)$
- přidáme $n-1$ podmínek aby $s_f \in \mathcal{C}^2([a,b])$: $\forall i$: $\lim_{x \to x_i-} s_f''(x) = \lim_{x \to x_i+} s_f''(x)$
- přidáme 2 podmínky „vlastní" -> klasicky $s_f'(a) = 0$ & $s_f'(b) = 0$

Tedy použitím polynomů 3. stupně lokálně (= na podintervalech) už zvládneme zajistit $s_f \in \mathcal{C}^2$. Ale tím přirozeně propojujeme hodnoty na $[x_i,x_{i+1}]$ se všemi ostatními podintervaly -> změna $f(x_i)$ ovlivní celý spline (narozdíl od lineárního splinu)

Věta Mějme $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $N \in \mathbb{N}$. Vezmeme si $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}$, $\dots$, $x_n = b$ & označíme $h := \frac{b-a}{n}$. Pak pro kubický spline $s_f(x)$ procházející body $\{x_0, f(x_0)\}, \dots, \{x_n, f(x_n)\}$ platí $\forall x \in [a,b]$: $|s_f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \leq 3/8 \cdot h^{(4-j)} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(j)}(\xi)|$ $\quad j = 0,1,2,3$