

Ćwiczenia 14

- 10.1 (a) Niech G będzie grafem $n + 1$ wierzchołkowym, $n > 4$, w którym jeden wierzchołek jest połączony ze wszystkimi innymi, a podgraf rozpięty na pozostałych n wierzchołkach jest cyklem elementarnym. Ile jest różnych drzew przeszukiwania w głąb w grafie G — dwa drzewa się różnią, jeśli istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych rodziców. Opisz sposób obliczania tej liczby.
- (b) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwuspójnym o co najmniej trzech wierzchołkach, a u jego wyróżnionym wierzchołkiem. Dobrą orientacją grafu G z wierzchołka u nazywamy graf skierowany otrzymany z G w następujący sposób: uruchomiamy algorytm przeszukiwania w głąb z wierzchołka u , a następnie orientujemy krawędzie drzewa przeszukiwania od ojca do syna, a krawędzie nie drzewowe od potomka do przodka.
Dany jest graf zorientowany H z wyróżnionym wierzchołkiem u . Zaproponuj algorytm, który stwierdzi, czy H jest dobrą orientacją pewnego grafu G z wierzchołka u .
- 11.1 Dany jest (przez listy sąsiedztwa) graf $G = (V, E)$ z wyróżnionym wierzchołkiem s . Dodatkowo każdemu wierzchołkowi przypisano dodatnią liczbę całkowitą. Zaprojektuj wydajny algorytm, który znajdzie w G najdłuższą ścieżkę o początku w s , na której liczby przypisane wierzchołkom tworzą ściśle malejący ciąg.
- 11.3 Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 2 i niech J będzie rodziną co najwyżej n różnych, domkniętych przedziałów liczb całkowitych zawartych w przedziale $[1, n]$. Grafem $G(n, J)$ nazywamy graf $(\{1, 2, \dots, n\}, i - j: \text{istnieje przedział w } J, \text{ do którego wpadają obie liczby (wierzchołki) } i \text{ oraz } j)$.
- (a) Ile jest różnych drzew BFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(8, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6], [5, 8]\}$?
- (b) Ile jest różnych drzew DFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(6, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6]\}$?
- (c) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$ obliczy wysokość BFS drzewa w grafie $G(n, J)$ o korzeniu w wierzchołku 1.
- (d) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$, obliczy liczbę dwuspójnych składowych w grafie $G(n, J)$.
- Uwaga:* na potrzeby tego zadania dwa drzewa przeszukiwania różnią się wtedy, gdy istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych ojców.
- 11.4 Zaprojektuj wydajny algorytm, który sprawdzi, czy w danym silnie spójnym grafie istnieje zamknięta (zorientowana) marszruta o nieparzystej długości. Jeżeli odpowiedzią jest TAK, znajdź jedną z takich marszrut.

Do samodzielnej pracy

11.2 Skierowany graf $G = (\{1, 2, \dots, n\}, E)$ nazywamy grafem przedziałowym, jeśli dla każdego wierzchołka v zbiór (numerów) wierzchołków, do których prowadzą krawędzie z v , jest przedziałem domkniętym $[l[v], r[v]]$, dla pewnych $1 \leq l[v] \leq r[v] \leq n$. W grafie mogą być pętle. Jeśli żadna krawędź nie wychodzi z v wówczas $l[v] = r[v] = 0$. Liczbę n i ciąg par $l[v], r[v]$ nazywamy zwartą reprezentacją G , a liczbę n rozmiarem tej reprezentacji.

Dana jest zwarta reprezentacja pewnego grafu G .

- (a) Zaprojektuj algorytm, który sprawdzi, czy graf G po usunięciu wszystkich pętli jest drzewem z korzeniem o krawędziach zorientowanych od korzenia do liści.
- (b) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest słabo spójny (po usunięciu orientacji na krawędziach graf jest spójny).
- (c) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest eulerowski.

11.5 Dany jest n -kąt wypukły W , którego wierzchołki są ponumerowane $1, 2, \dots, n$ w kolejności ich występowania na obwodzie, $n > 2$. Ponadto danych jest k przekątnych w wielokącie W . Zaprojektuj wydajny algorytm, które sprawdza, czy istnieje para przecinających się przekątnych we wnętrzu wielokąta.