2017/2018, kolokwium 1, zadanie 1

a) * oznaczmy elementy przez a_1, a_2, a_3, a_4 (w tej kolejności występują w ciągu)

* jeśli ciąg ma co najwyżej jedno ekstremum, to jego elementy muszą być powiązane którąś z poniższych relacji:

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

(2) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$

(3) $a_1 < a_2 > a_3 > a_4$

(4) $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$

(5) $a_1 > a_2 < a_3 < a_4$

(6) $a_1 > a_2 > a_3 < a_4$

* zliczamy możliwe permutacje a_1, a_2, a_3, a_4, które pasują do powyższych relacji

* przypadek (1) dokładnie wyznacza permutację (a_1, a_2, a_3, a_4), podobnie (2) (tylko w odwrotnej kolejności)

* przypadki (3) – (6) są symetryczne
* spójrzmy na pierwszy z nich:

$$a_1 < a_2 > a_3 > a_4$$

* odpowiadają mu 3 permutacje (bo nie znamy relacji a_1 z a_3 i a_4):

$$(a_1, a_4, a_3, a_2),\ (a_4, a_1, a_3, a_2),\ (a_4, a_3, a_1, a_2)$$

* Łącznie mamy zatem $2 + 4 \cdot 3 = 14$ permutacji, które spełniają założenia zadania
* stąd, każdy algorytm sortujący przez porównania w pesymistycznym przypadku będzie musiał wykonać $\geq \lceil \log 14 \rceil = 4$ porównania (aby zdecydować, którą permutację dostał na wejściu)

b) * zauważmy, że relacje (1) – (6) możemy podzielić na dwa rodzaje ze względu na relację między trzema pierwszymi elementami - albo jest to ciąg monotoniczny, albo element środkowy jest ekstremum

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

(2) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$

(3) $a_1 < a_2 > a_3 > a_4$

(4) $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$

(5) $a_1 > a_2 < a_3 < a_4$

(6) $a_1 > a_2 > a_3 < a_4$

w przypadku wnioskujemy, że ciąg a_2, a_3, a_4 jest monotoniczny

* dlatego pierwsze dwa porównania używamy dla par (a_1, a_2) i (a_2, a_3)
* jeśli zachodzi , wsortowujemy a_4 między a_1 i a_2, a dla - a_1 między a_3 i a_4
* w obu przypadkach dwa dodatkowe porównania wystarczą (stąd łącznie 4 porównania)