Zadanie 5.5 a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Dla danej macienzy A chcemy znaleźć bazy czterech fundamentalnych przestrzeni z nia zwiazanych. Say nimi: 1) przestrzeń zerowa macierzy A N(A) 2 przestneń wierszy macienzy A $C(A^T)$ 3 dualna priestrień zerowa macierny A N(AT) 4 przestneń kolumn macienzy A <(A)Zaczynamy od D - prestnenia, zerowa macierny A jest przestneń, do której należą wszysthie wektory x, tahie że Ax = 0, czyli iloczyn Ax daje weltor zer. U nas $x = [x_1 x_2 x_3 x_4]$ a $0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, bo A jest maciena, 3×4 . Łatuo to zobaczyć, gdy zapiszemy iloczyn graficznie: $\begin{bmatrix} \times_1 \\ \times_2 \\ \times_3 \\ \times_4 \end{bmatrix} = \times$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = Ax$ Stad, aby znaleźć X, wystarczy nozwiązać uhład námaň, htóry reprezentuje Ax=0. Najpien schadujeny macien A (po takim dziataniu dostajemy ultad námoważny). W tym procesie otrymujemy holejno
 1
 2
 3
 3

 0
 0
 -2
 0

 0
 0
 -2
 2
 U2 - 3W1 W3-6W1

Pamietamy jednak, że caty czas odpowiada to whitadowi nównań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \omega_2 \\ \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_4 - \omega_2 \\ \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_4 - \omega_2 \\ \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_4 - \omega_2 \\ \omega_5 - \omega_4 \\ \omega_6 - \omega_6 \\ \omega_6 - \omega_6 \\ \omega_6 - \omega_6 \\ \omega_7 - \omega_8 \\ \omega_8 - \omega_6 \\ \omega_8 - \omega_8 \\ \omega_8 - \omega_8$$

Stud pierusze upraszcza się do $x_1 + 2x_2 = 0$ co implihuje X1 = -2x2. Zmienna X1 jest tutaj zmienna, zwiazana, (stoi przy wartości wiodacej), podczas gdy X2 jest zmienną wolną. Za X2 możemy więc wstawić dowolną wastość dER. Ogólna postać nozviazania utiadu Ax = O to 20 tem $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-21, 1, 0, 0), L \in \mathbb{R}$. Jah wyznaczyć z ogólnej postaci / bazę przestrzeni wszysthich nozwiązań? W ogólności będziemy mieli po jednym vehtoze na hażda, zmienną wolna. Tuonymy go prez podstavienie za ta, zmienna, jedynhi, a za wszysthie inne zmienne wolne - zer. U nas jest jedna zmienna volna, x2, czyli w bazie bedzie jeden wehter: (-2, 1, 0, 0) Przechodziny teraz do wyznaczenia drugiej przestrzeni.

Proestrem @ wierszy macierny A to proestrem, do której należą webitory będace wierszami A oraz uszysthie ich możliwe kombinaje. U nas: czyli do przestrzeni wierszy należa wektory
 1
 3

 2
 6

 3
 42

 46
 42

 3
 7

 3
 9

 20
 20
 Oraz uszysthie inne postaci

gdzie 2, B, & sa dowolnymi likabami neczywistymi.

Baze tahiej przestrzeni znajdujemy przez schodkowanie macieny A i wzięcie niezenowych wierszy. My już poschodkowaliśmy A i dostaliśmy:
 1
 2
 3
 3

 0
 0
 -2
 0

 0
 0
 0
 2
 czyli bazą przestrzeni wierszy A sa, np. weltony:
 1
 0

 2
 0

 3
 -2

 0
 0

 2
 0
 Aby uznaczyć bazy przestneni 3 i 4,

wykonujemy te same dziatania, tylho dla macierzy transponowanej A^{T} . Zaczynamy od 3 dualnej przestrzeni zerowej A, ν której są takie wektory ν , że λ

Many:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 16 \\ 3 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Szuhavny zatem tahich
$$x_1$$
 że
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix}$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = A^{T} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tah jah poprzednio, musimy teraz rozwiązać powyższy ultad równań, czyli najpierw schodkujemy macierz AT

 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

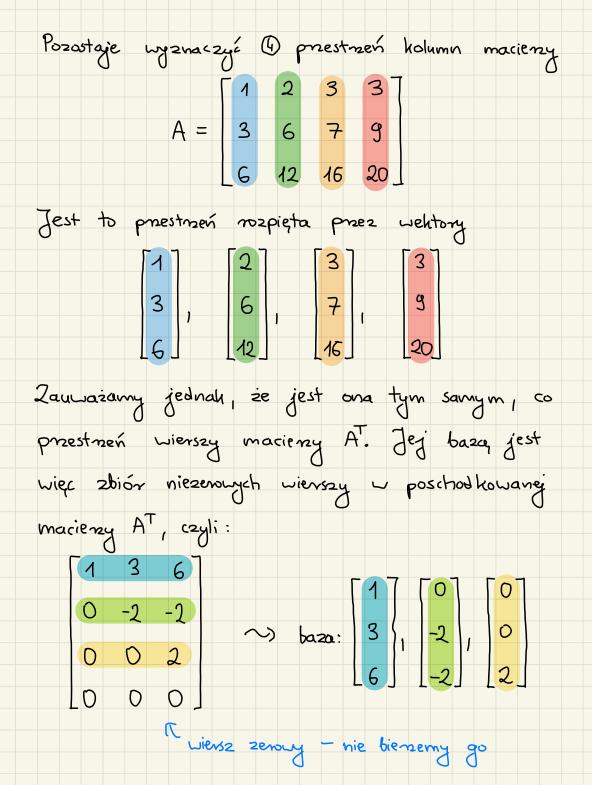
UhTad uyglada zatem następująco: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $2x_3 = 0$

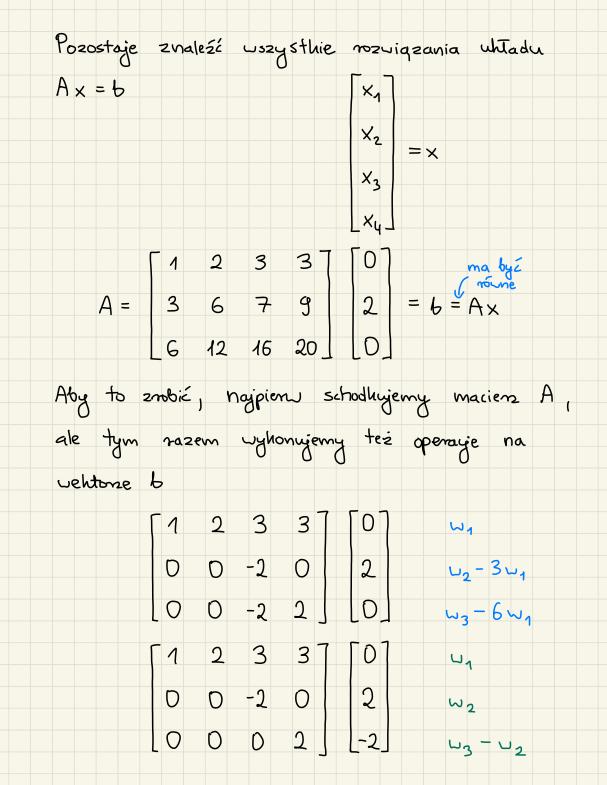
zatem, vyznaczając zmienne od końca, dostajemy: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Stad v dualnej

przestrzeni zerouej macierny A jest tylho wehtor

zerony [0 0 0]T, czyli jest to

podprzestneń zerowa 183.





Dostajemy zatem uhlad nownań $\int x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$ $\begin{array}{cccc}
-2 \times_3 & = 2 \\
2 \times_4 & = -2
\end{array}$ Stad, idac od dotu dostajemy $x_4 = -1$ i $x_3 = -1$ co po podstavieniu do pieruszego nównania daje $x_1 + 2x_2 - 3 - 3 = 0$ $x_1 = -2x_2 + 6$ Jednym z nozwiejzań Ax = 6 jest wiec wehtor X równy (x, x2, x3, x4) = (4, 1, -1, -1), które dostajemy po podstavieniu 1 za zmienna wolna, x2. Wszysthie nozwiązania Ax=b można zapisać jaho $\times + N(A) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ LER