Ćwiczenia 14

10.1 (a) Niech G będzie grafem $n+1$ wierzchołkowym, $n > 4$, w którym jeden wierzchołek jest połączony ze wszystkimi innymi, a podgraf rozpięty na pozostałych n wierzchołkach jest cyklem elementarnym. Ile jest różnych drzew przeszukiwania w głąb w grafie G — dwa drzewa się różnią, jeśli istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych rodziców. Opisz sposób obliczania tej liczby.

(b) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwuspójnym o co najmniej trzech wierzchołkach, a u jego wyróżnionym wierzchołkiem. Dobrą orientacją grafu G z wierzchołka u nazywamy graf skierowany otrzymany z G w następujący sposób: uruchomiamy algorytm przeszukiwania w głąb z wierzchołka u, a następnie orientujemy krawędzie drzewa przeszukiwania od ojca do syna, a krawędzie nie drzewowe od potomka do przodka.
Dany jest graf zorientowany H z wyróżnionym wierzchołkiem u. Zaproponuj algorytm, który stwierdzi, czy H jest dobrą orientacją pewnego grafu G z wierzchołka u.

11.1 Dany jest (przez listy sąsiedztwa) graf $G = (V, E)$ z wyróżnionym wierzchołkiem s. Dodatkowo każdemu wierzchołkowi przypisano dodatnią liczbę całkowitą. Zaprojektuj wydajny algorytm, który znajdzie w G najdłuższą ścieżkę o początku w s, na której liczby przypisane wierzchołkom tworzą ściśle malejący ciąg.

11.3 Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 2 i niech J będzie rodziną co najwyżej n różnych, domkniętych przedziałów liczb całkowitych zawartych w przedziale $[1, n]$. Grafem $G(n, J)$ nazywamy graf $(\{1, 2, \ldots, n\}, i - j$: istnieje przedział w J, do którego wpadają obie liczby (wierzchołki) i oraz $j)$.

(a) Ile jest różnych drzew BFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(8, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6], [5, 8]\}$?

(b) Ile jest różnych drzew DFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(6, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6]\}$?

(c) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$ obliczy wysokość BFS drzewa w grafie $G(n, J)$ o korzeniu w wierzchołku 1.

(d) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$, obliczy liczbę dwuspójnych składowych w grafie $G(n, J)$.

Uwaga: na potrzeby tego zadania dwa drzewa przeszukiwania różnią się wtedy, gdy istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych ojców.

11.4 Zaprojektuj wydajny algorytm, który sprawdzi, czy w danym silnie spójnym grafie istnieje zamknięta (zorientowana) marszruta o nieparzystej długości. Jeżeli odpowiedzią jest TAK, znajdź jedną z takich marszrut.

11.5 Dany jest n-kąt wypukły W, którego wierzchołki są ponumerowane 1, 2, ..., n w kolejności ich występowania na obwodzie, $n > 2$. Ponadto danych jest k przekątnych w wielokącie W. Zaprojektuj wydajny algorytm, które sprawdza, czy istnieje para przecinających się przekątnych we wnętrzu wielokąta.

Do samodzielnej pracy

11.2 Skierowany graf $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$ nazywamy grafem przedziałowym, jeśli dla każdego wierzchołka v zbiór (numerów) wierzchołków, do których prowadzą krawędzie z v, jest przedziałem domkniętym $[l[v], r[v]]$, dla pewnych $1 \leqslant l[v] \leqslant r[v] \leqslant n$. W grafie mogą być pętle. Jeśli żadna krawędź nie wychodzi z v wówczas $l[v] = r[v] = 0$. Liczbę n i ciąg par $l[v]$, $r[v]$ nazywamy zwartą reprezentacją G, a liczbę n rozmiarem tej reprezentacji.
Dana jest zwarta reprezentacja pewnego grafu G.

(a) Zaprojektuj algorytm, który sprawdzi, czy graf G po usunięciu wszystkich pętli jest drzewem z korzeniem o krawędziach zorientowanych od korzenia do liści.

(b) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest słabo spójny (po usunięciu orientacji na krawędziach graf jest spójny).

(c) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest eulerowski.