

2017/2018, kolokwium 1, zadanie 1

a) * oznaczmy elementy przez a_1, a_2, a_3, a_4
(w tej kolejności występują w ciągu)

* jeśli ciąg ma co najwyżej jedno ekstremum,
to jego elementy muszą być powiązane
którąś z poniższych relacji:

$$(1) \quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

$$(2) \quad a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

$$(3) \quad a_1 < a_2 > a_3 > a_4$$

$$(4) \quad a_1 < a_2 < a_3 > a_4$$

$$(5) \quad a_1 > a_2 < a_3 < a_4$$

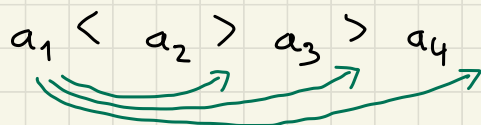
$$(6) \quad a_1 > a_2 > a_3 < a_4$$

* zliczamy możliwe permutacje a_1, a_2, a_3, a_4 ,
które pasują do powyższych relacji

* przypadek (1) dokładnie wyznacza permutację
 (a_1, a_2, a_3, a_4) , podobnie (2) (tylko w
odwrotnej kolejności)

* przypadki (3) - (6) są symetryczne

* spójrzmy na pierwszy z nich:



* odpowiadają mu 3 permutacje (bo nie znamy relacji a_1 z a_3 i a_4):

$$(a_1, a_4, a_3, a_2), (a_4, a_1, a_3, a_2), (a_4, a_3, a_1, a_2)$$

* Łącznie mamy zatem $2 + 4 \cdot 3 = 14$ permutacji, które spełniają założenia zadania

* stąd, każdy algorytm sortujący przez porównania w pesymistycznym przypadku będzie musiał wykonać $\geq \lceil \log 14 \rceil = 4$ porównania (aby zdecydować, którą permutację dostał na wejściu)

b) * zauważmy, że relacje (1) - (6) możemy podzielić na dwa rodzaje ze względu na relację między trzema pierwszymi elementami - albo jest to ciąg monotoniczny, albo element środkowy jest ekstremum

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

(2) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$

(3) $a_1 < a_2 > a_3 > a_4$

(4) $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$

(5) $a_1 > a_2 < a_3 < a_4$

(6) $a_1 > a_2 > a_3 < a_4$

w przypadku
wnioskujemy, że
ciąg a_2, a_3, a_4
jest monotoniczny

* dlatego pierwsze dwa porównania używamy dla par (a_1, a_2) i (a_2, a_3)

* jeśli zachodzi , wstawiamy a_4 między a_1 i a_2 , a dla - a_4 między a_3 i a_4

* w obu przypadkach dwa dodatkowe porównania wystarczą (stałby się 4 porównania)