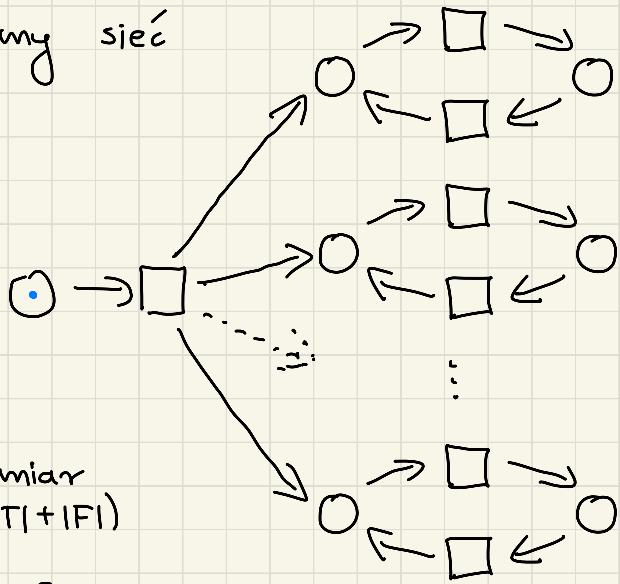
Ćwiczenia 2 17.10

1. Czy graf konfiguracji elementarnej sieci Petriego może mieć rozmiar wykładniczy?

* weźmy sieć



rozmiar
$(|P| + |T| + |F|)$

$9k+3$

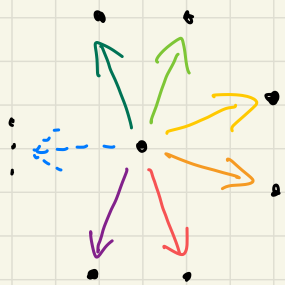
k takich par miejsc

* dla każdej pary mamy dwie możliwości położenia żetonu (lewe albo prawe miejsce), czyli łącznie liczba możliwych konfiguracji wynosi

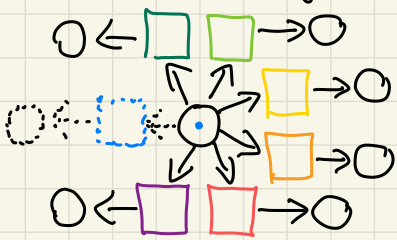
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k \text{ razy}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konfiguracja} \\ \text{początkowa}}}{1} = 2^k + 1$$

2. Czy sieć regionów może mieć rozmiar wykładniczy?

* wystarczy wziąć graf skierowany i przydzielić każdej krawędzi inną etykietę, np. dla gwiazdy mamy kolorowanie

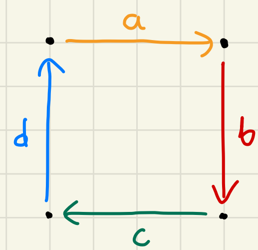


* każdy podzbiór wierzchołków jest tutaj regionem, więc mamy ich wykładniczo wiele
* grafowi temu odpowiada jednak też sieć:



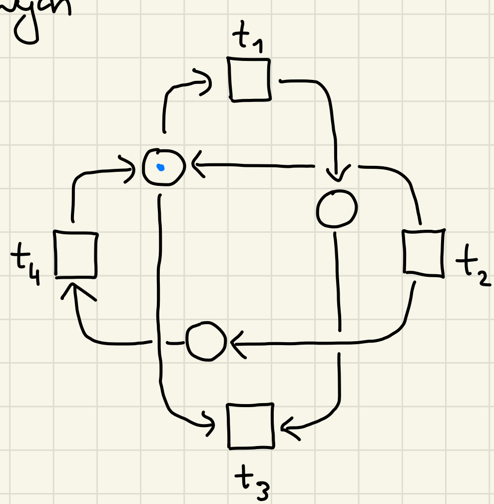
* analogicznie można też rozważyć cykl, o czym mowa w następnym zadaniu

3. Rozważ cykl skierowany G o czterech wierzchołkach i czterech krawędziach etykietowanych kolejno literami a, b, c, d. Skonstruuj sieć o mniej niż czterech miejscach, której graf konfiguracji jest izomorficzny z G.



* pomysł: pracujemy z sieciami elementarnymi, więc jedną z konfiguracji może być konfiguracja pełna (po żetonie na każdym miejscu); jedyną aktywną tranzycją może być wtedy taka bez miejsc wyjściowych

* przykładowa sieć:



odpala cyklicznie

t_1, t_2, t_3, t_4

4. Czy sieć regionów skonstruowana z grafu konfiguracji sieci S może być podwójnie wykładnicza względem S?

* zastanówmy się, jakie są zależności między kolejnymi przejściami

sieć Petriego		graf konfiguracji	sieć regionów
$\lvert P\rvert = n$		$\lvert V\rvert \leq 2^n$	$\lvert P'\rvert \leq ?$
$\lvert T\rvert = m$		$\lvert E\rvert \leq \binom{2^n}{2}$	$\lvert T'\rvert = m$
	etykiety (labels)	$\lvert L\rvert = m$	

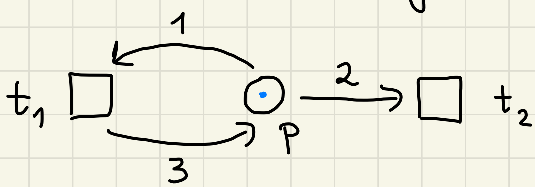
* pozostaje oszacować liczbę miejsc $\lvert P'\rvert$ w sieci regionów – wystarczy sprawdzić ile jest możliwych typów miejsc w tej sieci (bo redundantne miejsca można usunąć)

* sieć regionów ma m tranzycji, a dla dowolnej tranzycji t miejsce p może być wejściowe ($p \in {}^\bullet t$), wyjściowe ($p \in t^\bullet$) lub niezwiązane, więc $\lvert P'\rvert \leq 3^m$

* stąd nie będzie przejścia podwójnie wykładniczego

5. Czy żywotność jest monotoniczna w ogólnych sieciach Petriego?

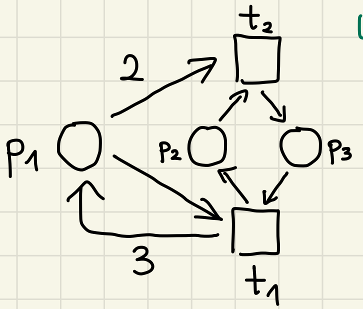
Nie, można pokazać kontrprzykład. Pomysł na jego utworzenie: niech sieć z konfiguracją ma dwie wykonywane na zmianę sekwencje tranzycji s_1 i s_2, przy czym s_2 wymaga więcej żetonów do rozpoczęcia. Jeśli mniejsza konfiguracja M wymusza rozpoczęcie od s_1, wszystko idzie w porządku, ale gdy weźmiemy $M' > M$, możliwe jest zaczęcie od s_2 i sieć się blokuje. Na przykład:



← sieć nieograniczona

Gdy na miejscu p jest jeden żeton, to odpalanie t_1 lub t_2 nie zmienia parzystości na p – zawsze będzie tam co najmniej 1 żeton. Jeśli na miejsce p położymy 2 żetony, to zablokujemy sieć, odpalając t_2.

Inny kontrprzykład:



p_2 i p_3 przełączają „tryb" działania sieci

$$M(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 1)$$

$$\wedge$$

$$M'(p_1, p_2, p_3) = (2, 1, 1)$$

* konfiguracja M jest żywa – jedyny możliwy bieg to odpalanie na zmianę t_1 i t_2

* konfiguracja M' nie jest żywa – blokuje się po odpaleniu t_2

* M jest 3-ograniczone, M' – 4-ograniczone

M:

$$\begin{tikzcd} (1,0,1) \arrow[r, bend left, "t_1"] & (3,1,0) \arrow[l, bend left, "t_2"] \end{tikzcd}$$

M':

$$\begin{tikzcd} & (0,0,2) \\ (2,1,1) \arrow[ur, "t_2"] \arrow[r, "t_1"] & (4,2,0) \arrow[l, bend left, "t_2"] \end{tikzcd}$$

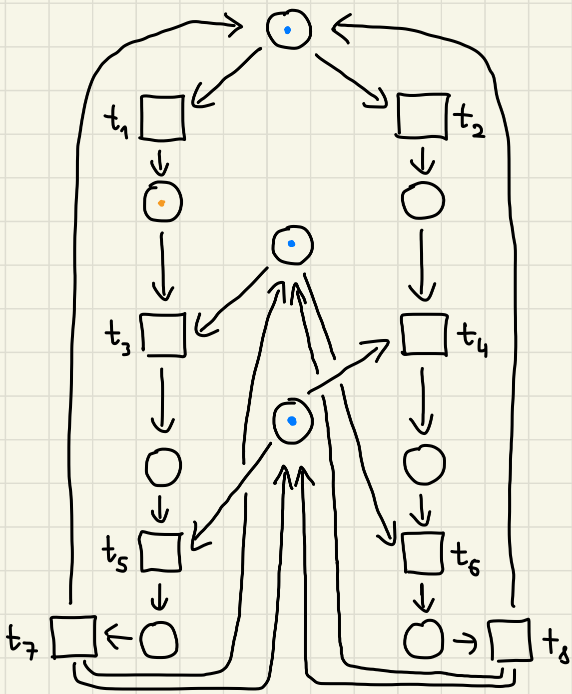
* czy istnieje przykład z M 1-ograniczonym?
czy M' ma wtedy szansę być 1-ograniczone?

6. Niech N będzie spójną ogólną siecią Petriego, dla której konfiguracja M jest 1-ograniczona i żywa. Udowodnij, że dowolna żywa konfiguracja $M' > M$ sieci N nie może być 1-ograniczona.

* jeśli dla pewnego miejsca p zachodzi $M'(p) > 1$, to nowa konfiguracja nie jest 1-ograniczona
* w przeciwnym przypadku niech p będzie takim miejscem, że $M(p) = 0$ i $M'(p) = 1$
* miejsce p nie jest odizolowane, zatem bez straty ogólności możemy wziąć t, takie że $p \in {}^\bullet t$
* skoro M jest żywa, to istnieje sekwencja s tranzycji, dla której $M \xrightarrow{s} M'' \xrightarrow{t}$, czyli w szczególności $M''(p) = 1$
* stąd $M' \xrightarrow{s} M'''$ i $M'''(p) = 2$, co dowodzi, że M' nie jest 1-ograniczona

7. Czy istnieje ogólna sieć Petriego N oraz dwie konfiguracje M i M', M' > M, takie że M jest żywa i 1-ograniczona, a M' nie jest żywa?

* spójrzmy na sieć rozdzielania dwóch zasobów:

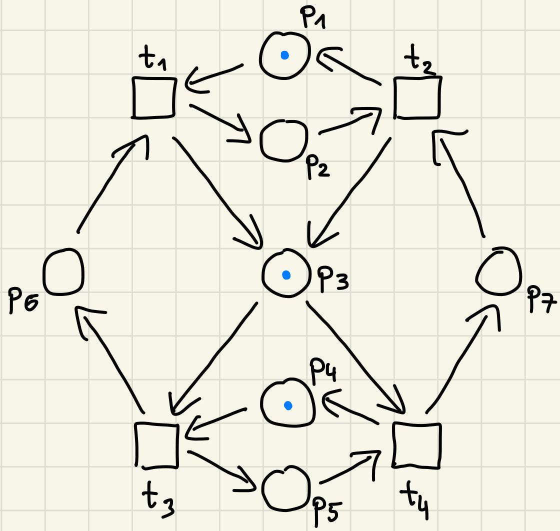


* konfiguracja niebieska jest żywa i 1-ograniczona, bo sieć za każdym razem „idzie w lewo albo prawo"

* po dołożeniu pomarańczowego żetonu i pójściu w prawo sieć może się zablokować po odpaleniu t_2, t_3, t_4

Inny kontrprzykład:

N:



$M(N) = (1,0,1,1,0,0,0)$ $M'(N) = (1,0,1,2,0,0,0)$

* konfiguracja M jest żywa i 1-ograniczona, bo odpala cyklicznie:

$t_3 \to t_1 \to t_4 \to t_2 \to t_3 \to \dots$

* konfiguracja M' osiąga blokadę po odpaleniu

$t_3 \to t_1 \to t_3$

w ogólności jest jednak 2-ograniczona

8. Zaproponuj transformację n-VASSu do równoważnego $(n+s)$-VASu. Jak małe może być s?

zadanie do pomyślenia w domu (nieobowiązkowe)