

Egzamin AL (31.1.2024)

(za każde zadanie można zdobyć 12pkt)

Zadanie 1

Znajdź objętość czworościanu o wierzchołkach:

$$A = (2, 2, -3), B = (2, 2, 2), C = (-1, -2, -3), D = (6, -1, -3)$$

oraz oblicz cosinus kąta między ścianami ABC a ABD .

Zadanie 2

Znajdź ortonormalną bazę, stosując ortogonalizację Grama-Schmidta do bazy:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3

Dane jest następująca macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdź wzór na A^k .

Zadanie 4

Czy istnieje macierz przeprowadzająca wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ na (odpowiednio) wektory $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}$?

Jeśli tak: czy istnieje tylko jedna taka macierz?

Zadanie 5

Udowodnij, że wartości własne macierzy A oraz A^T są takie same. Czy ich wektory własne są również takie same? Jeśli nie – to czy chociaż maksymalna liczba wektorów własnych liniowo niezależnych jest taka sama w obu przypadkach? Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.