Párování (Matching)

Definice:
Párování v grafu G je taková množina hran $M \subseteq E(G)$, že žádné dvě hrany z M nemají společný vrchol (nejsou incidentní).

Definice:
Vrchol $u \in V(G)$ je nasycen v párování M, jestliže existuje v párování M hrana s ním incidentní.

Definice:
Perfektní párování je takové, že nasycuje všechny vrcholy grafu.

Definice:
Maximální párování je takové, že obsahuje největší počet hran, je nejpočetnější, ze všech párování grafu (pokud existuje perfektní párování, tak je i maximálním).

Definice:
Je-li dán graf G a párování M v grafu G, pak střídavá (alternující) cesta vzhledem k párování M je taková neorientovaná cesta, že její hrany střídavě leží v M a neleží v M. Je-li krajní vrchol cesty nasycen v párování M, pak hrana, která jej nasycuje, je částí cesty. Střídavá kružnice vzhledem k párování M je kružnice, která má sudou délku a jejíž hrany střídavě leží a neleží v párování M.

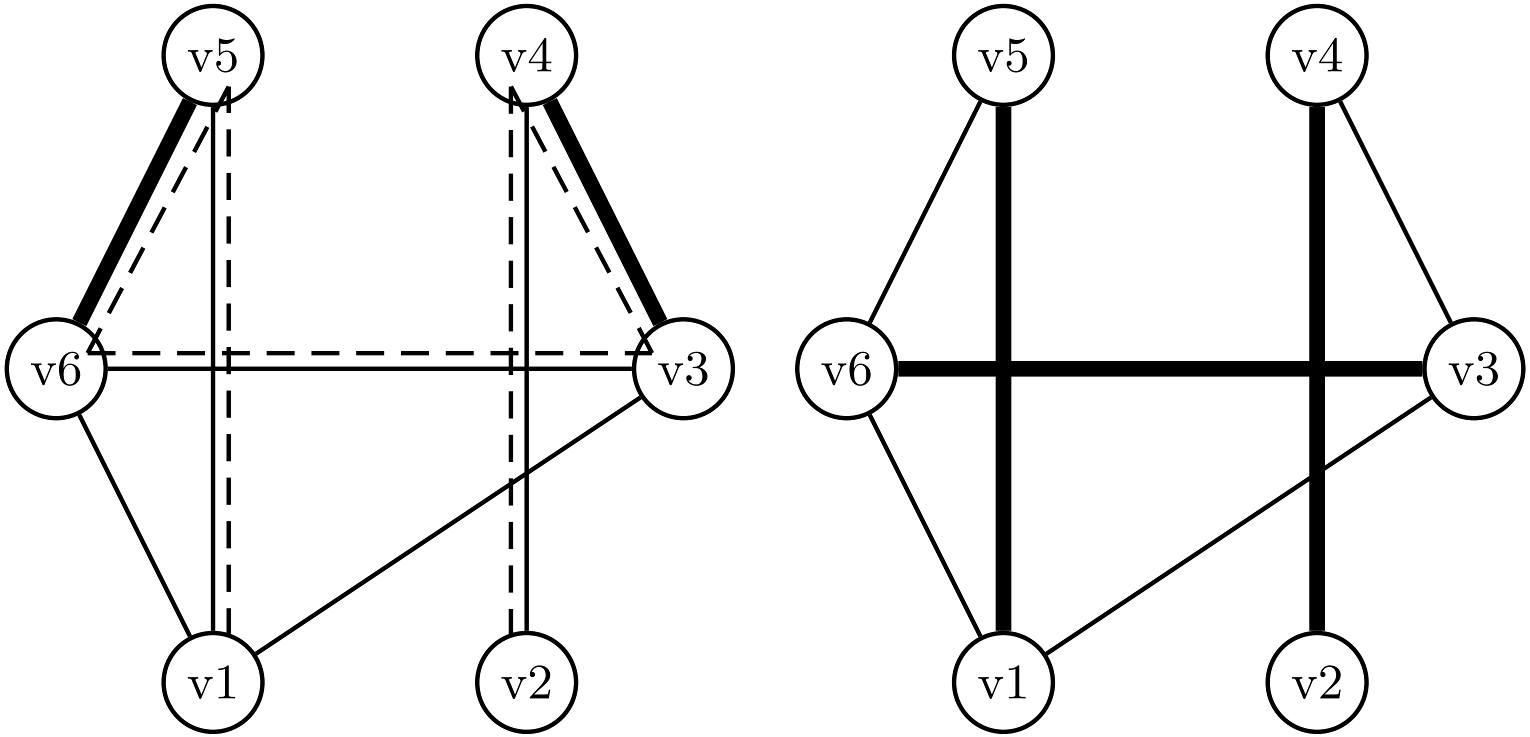
Definice:
Máme-li ohodnocený graf G s párováním M a vzhledem k němu střídavou cestu, popř. kružnici. Množinu hran této cesty. popř. kružnice označme H. Pak cena střídavé cesty, popř. kružnice je definována jako

$$C = \sum_{e \in H - M} c(e) - \sum_{e \in H \cap M} c(e)$$

Věta:
Věta. Nechť graf G má párování M_1. Pro každé jiné párování M_2 lze v grafu G najít soustavu střídavých cesta a kružnic vzhledem k párování M_1 s vlastnostmi:

1. Střídavé kružnice a cesty jsou vrcholově disjunktní.
2. Změnou příslušnosti hran k párování (hrany, které do párování patřily, nyní nebudou patřit a naopak hrany, které do párování nepatřily, nyní budou patřit) v nich lze z párování M_1 získat párování M_2.

Věta:
Párování M v grafu G je maximální právě tehdy, když v grafu G neexistuje vzhledem k párování M střídavá cesta spojující dva nenasycené vrcholy.


v5
v4
v6
v3
v1
v2
v5
v4
v6
v3
v1
v2

1. Algoritmus pro nalezení maximálního párování

Algoritmus:

1. Je dán graf G, ve kterém hledáme maximální párování, graf není diskrétní. Množina hran párování M je na začátku prázdná.

2. Průběžný krok.
   V grafu najdeme vrchol v, který není izolovaný (má stupeň aspoň 1). Vezmeme libovolnou hranu s ním incidentní a začneme od vrcholu v vytvářet střídavou cestu. Vrchol v bude nenasyceným vrcholem střídavé cesty. Cestu vytváříme tak dlouho, dokud k ní lze přidávat nějaké hrany. Pokud již nelze cestu prodloužit, zjistíme, zda i její druhý koncový vrchol je nenasycený. Pokud ano, provedeme v cestě záměnu příslušnosti hran k párování (počet hran patřících k párování se zvýší o 1). Hrany na střídavé cestě, které přísluší k párování, přidáme k množině M. Následně z grafu G odstraníme všechny uzly patřící k hranám právě přidaným k množině M.

3. Krok 2. opakujeme tak dlouho, dokud v grafu zbývají ještě nějaké hrany. Po ukončení je množina M maximálním párováním v původním grafu G.

Maximální párování v bipartitním grafu

Algoritmus: *(pro označování vrcholů)*
Nechť G je bipartitní graf s partitami X a Y. Potom následující algoritmus se použije pro značení vrcholů při hledání střídavé cesty nebo zjištění, že dané párování je již maximální.

1. Označíme všechny nenasycené vrcholy z množiny X
2. Je-li označen některý nenasycený vrchol z množiny Y, značení končí. Je nalezena střídavá cesta s nenasycenými krajními vrcholy a lze zvětšit počet hran v párování (podél této střídavé cesty). Změníme párování a přejdeme k bodu 5.
3. Existuje-li hrana $h \notin M$ vedoucí z označeného vrcholu $x \in X$ do neoznačeného vrcholu $y \in Y$, pak označíme vrchol y a pokračujeme bodem 2. Neexistuje-li taková hrana, pokračujeme bodem 4.

4. Jestliže existuje hrana $h \in M$ vedoucí z označeného vrcholu $y \in Y$ do neoznačeného vrcholu $x \in X$, pak označíme vrchol x a pokračujeme podle bodu 3. Neexistuje-li taková hrana, značící procedura končí, stávající párování je maximální, bod 5

5. Konec označování vrcholů.

Algoritmus: *(maximální párování v bipartitním grafu)*

1. Provedeme výše uvedený algoritmus pro značení vrcholů. Pokud zjistíme, že stávající párování je maximální pokračujeme bodem 2. Jinak pokračujeme bodem 1.

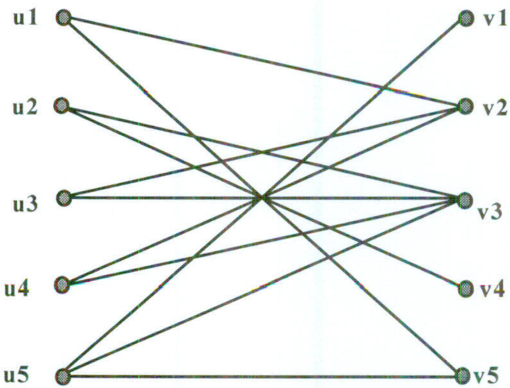
2. Konec.

Věta: *(Hallova)*
Nechť G je bipartitní graf s partitami X a Y. V grafu G existuje párování, které nasycuje množinu X právě tehdy, když pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $|A| \leq |V_G(A)|$ (kde $V_G(A)$ je množina všech vrcholů spojených hranou s některým z vrcholů z množiny A).

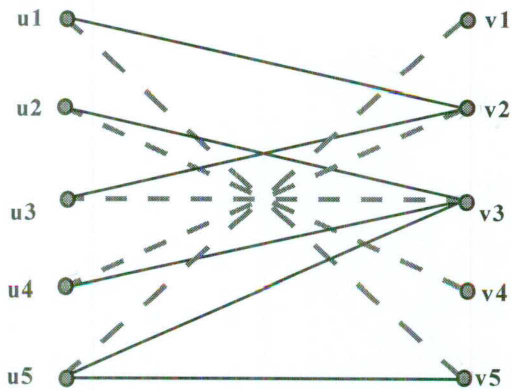
Věta:
Jestliže v bipartitním grafu G s partitami X a Y platí $min\ d(x) \geq max\ d(y), x \in X, y \in Y$, pak v G existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy z množiny X.

Věta:
V každém bipartitním grafu G existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy s maximálním stupněm.

Ilustrativní příklad:



Bipartitní graf G



Maximální párování v grafu G

reprezentace bipartitního grafu:
u1 - v2, v5
u2 - v3, v4
u3 - v2, v3
u4 - v2, v3
u5 - v1, v5

1. Označíme u1, u2, u3, u4, u5 a hledáme rozšiřitelné cesty z označených vrcholů.
   Existuje rozšiřitelná střídavá cesta u1 - v2 (označíme v2). Změníme podél ní párování.
   P: u1 = v2
2. Označíme u2, u3, u4, u5. Střídavá cesta u2 - v3 (ozn.v3). Změníme podél ní párování.
   P: u1 = v2, u2 = v3
3. Označíme u3, u4, u5. Střídavá cesta u3 - v2 = u1 - v5. Změníme podél ní párování.
   P: u1 = v5, u2 = v3, u3 = v2
4. Označíme u4, u5. Střídavá cesta u4 - v2 = u3 - v3=- u2 - v4. Změníme podél ní párování.
   P: u1 = v5, u2 = v4, u3 = v3, u4 = v2
5. Označíme u5. Střídavá cesta u5 - v1. Změníme podél ní párování.
   P: u1 = v5, u2 = v4, u3 = v3, u4 = v2, u5 = v1
6. Neexistuje vrchol nenasycený v párování. Nalezli jsme maximální párování, které je i perfektní.

Nejlevnější maximální párování v bipartitním grafu

Poznámka:
Přiřazovací úloha: mějme n pracovníků, každému z nich chceme přidělit právě jeden úkol z množin n pracovních úkolů. Pro každou dvojici pracovník - úkol známe dobu potřebnou pro splnění úkolu. Jak přiřadit každému pracovníkovi úkol tak, aby součet časů potřebných pro splnění všech úkolů byl minimální?

Tuto úlohu vyřešíme nalezením nejlevnějšího perfektního (ev. maximálního) párování v úplném hranově ohodnoceném bipartitním grafu $K_{n,n}$.

Algoritmus: *(Maďarský)*

1. Počáteční přípustné ohodnocení vrcholů:
   Pro $\forall i$ položíme: $p_i := min\{c_{ij}; j \in V\}$.
   Pro $\forall j$ položíme: $p_j := min\{c_{ij} - p_i; i \in V\}$.

2. Sestrojíme graf rovnosti G^p takový, že:
   $E(G^p) = \{(u_i, v_j); c_{ij} - p_i - p_j = 0\}$ a $V(G^p) = V(G)$.

3. Sestrojíme maximální párování v grafu G^p. Je-li toto párování perfektní, výpočet končí, výsledné perfektní párování je nejlevnější.

4. Není-li maximální párování perfektní, nalezneme množinu $A \subseteq X$ takovou, že $|A| > |V_{G^p}(A)|$, vypočteme
   $d = min\{c_{ij} - p_i - p_j; i \in A, j \notin V_{G^p}(A)\}$ a změníme přípustné ohodnocení vrcholů takto:
   $p_i := p_i + d \; pro \; \forall i \in A$ a $p_j := p_j - d \; pro \; \forall j \in V_{G^p}(A)$.
   Pokračujeme bodem 2.

Poznámka:
Množina Z jsou vrcholy označené při hledání maximálního párování v grafu G^p. Množina $A = Z \cap X$ a $V_{G^p}(A)$ je množina všech vrcholů spojených hranou s některým z vrcholů z množiny A.

Věta:
Jestliže graf rovnosti G_p určený přípustným ohodnocením vrcholů p obsahuje prefektní párování P, pak párování P je optimálním řešením přiřazovací úlohy.

Příklad: graf $K_{6,6}$ je dán maticí cen C. jednotlivé grafy rovnosti najdete v elektronických skriptech.

$$C = \begin{matrix} 5 & 3 & 7 & 4 & 5 & 4 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 8 & 3 \\ 18 & 7 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 \end{matrix}$$

$$C_r = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 7 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 16 & 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 2 & 6 & 3 \end{array}$$

$$C^1 = \begin{array}{c|cccccc} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 14 & 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 2 & 6 & 3 \end{array}$$

$$C^2 = \begin{array}{c|cccccc} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 1 & 0 & 8 & 11 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

$$C^3 = \begin{array}{c|cccccc} & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 1 & 0 & 8 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

Matice cen

2	8	3	6	4
9	6	5	2	8
3	6	6	12	4
3	3	4	6	7
3	5	12	2	5

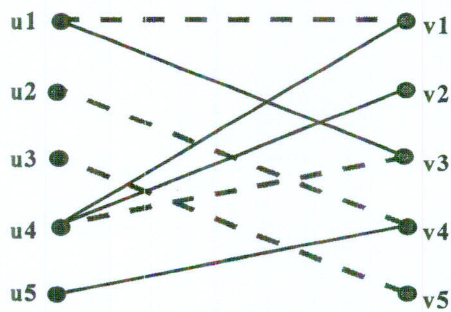
Řádková minima (transformace) $c'(i,j)=c(i,j)-p(i)$

p1=2	0	6	1	4	2
p2=2	7	4	3	0	6
p3=3	0	3	3	9	1
p4=3	0	0	1	3	4
p5=2	1	3	10	0	3

Transformovaná matice cen:
$c_p(i,j)=c(i,j)-p(i)-p(j)$

	0	0	1	0	1
p1=2	0	6	0	4	1
p2=2	7	4	2	0	5
p3=3	0	3	2	9	0
p4=3	0	0	0	3	3
p5=2	1	3	9	0	2

A={u2,u5}; V_{Gp1}={v4}
d=min{$c_p(i,j)$, i∈{2,5}, j∈{1,2,3,5}}=1
p(i)=p(i)+d pro i∈{2,5}
p(j)=p(j)-d pro j=4

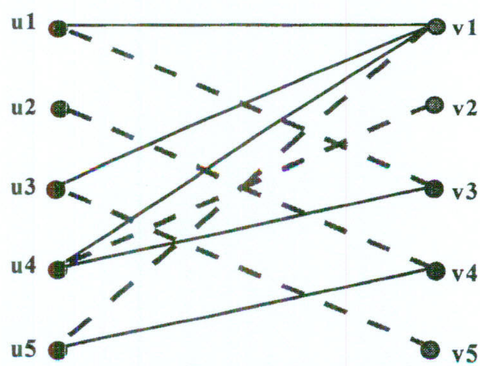


Graf rovnosti Gp1 s maximálním párováním

Nová transformace matice cen:

	0	0	1	-1	1
2	0	6	0	5	1
3	6	3	1	0	4
3	0	3	2	10	0
3	0	0	0	4	3
3	0	2	8	0	1

Nalezené párování je již perfektní. Cena nejlevnějšího maximálního párování v původním grafu (zadaném maticí cen) je 15.



Graf rovnosti Gp2 s maximálním (zde již perfektním) párováním

Maximální párování v obecném grafu

Máme výchozí párování. Značením vrcholů najdeme zvětšující se cestu a párování M podél ní zvětšíme. Značení provádíme následujícím způsobem:

Na začátku dostanou všechny volné vrcholy u (nenasycené v párování) značku $S : 0$.

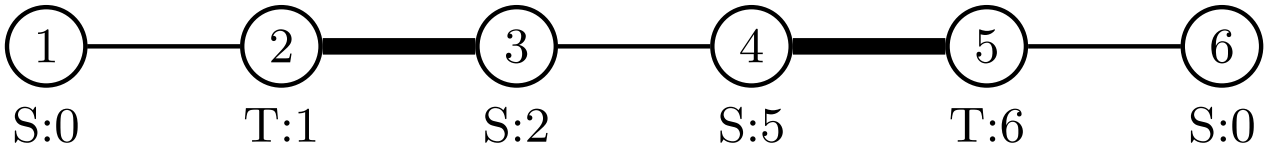
Obecně, nechť už některé vrcholy mají značku. Každý označený vrchol i má značku tvaru $S : k$, resp. $T : k$. Což znamená, že existuje střídavá cesta $u - i$ začínající v nějakém volném vrcholu u, vedoucí do vrcholu i a její předposlední vrchol je k. Vrchol u se nazývá kořen pro i.

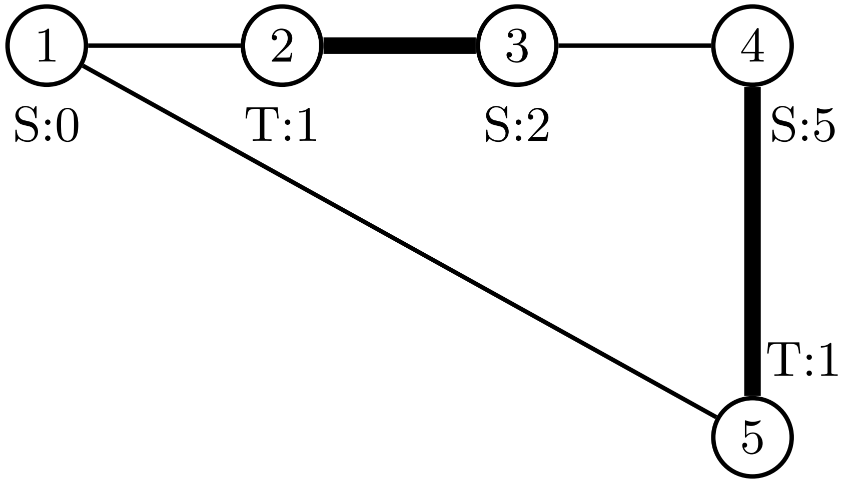
Označený, ale dosud neprozkoumaný vrchol i prozkoumáme takto:

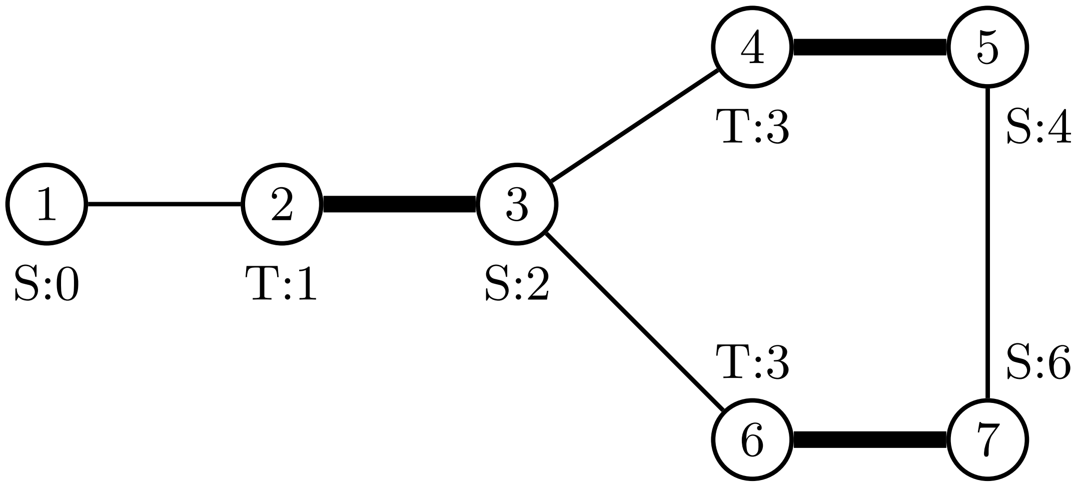
1. Jestliže i má značku S, tak každý neoznačený vrchol j takový, že $ij \in E(G) - M$, dostane značku $T : i$.

2. Jestliže i má značku T, $ij \in M$ a vrchol j je neoznačený, tak j dostane značku $S : i$.

Problémy, kterou mohou nastat v případě, že vrchol j už značku má:




1
2
3
4
5
S:0
T:1
S:2
S:5
T:1


1
2
3
4
5
6
7
S:0
T:1
S:2
T:3
S:4
T:3
S:6

V uvedených případech mají i a j stejné značky (S nebo T). My vyhledáme jejich kořeny (tj. volné vrcholy ui a uj, z kterých vychází značení pro i, resp. pro j) pomocí druhých složek vrcholů - postupujeme zpětně od i a j. Najdeme alternující $ui - i$ cestu P_i a alternující cestu P_j.

Jestliže $ui \neq uj$, pak zřejmě je $P_i - P_j^{-1}$ rozšiřitelná střídavá $ui - uj$ cesta.

Jestliže $ui = uj = u$, tak $P_i - P_j^{-1}$ vytváří podgraf, který se skládá ze střídavé $u - v$ cesty P a střídavého $v - v$ cyklu Z liché délky, přičemž obě hrany cyklu incidentní s v jsou nenasycené v párování. Cyklus Z se nazývá květ, cesta P stopka (květu Z) a v je báze (květu Z).

Květ Z stáhneme do jediného vrcholu, který budeme nazývat pseudovrcholem. Dáme mu značku, kterou měla báze květu Z, přičemž vzniklý pseudovrchol považujeme za neprozkoumaný. Potom pokračujeme ve značení v novém grafu G' při odpovídajícím párování M'. V dalším značení můžeme objevit nový květ Z' v G'. Po jeho stáhnutí pokračujeme ve značení v novém grafu G'' při párování M'' atd.

V nějakém G^k buď

1. objevíme rozšiřitelnou cestu, nebo
2. značení skončí prozkoumáním všech označených vrcholů a bez objevení rozšiřitelné cesty.

V prvním případě můžeme párování M^k (a tedy i párování M) zvětšit. V druhém případě tvoří sjednocení všech alternujících cest, přes které jsme označili jednotlivé vrcholy, tzv. maďarský les (v tomto lese pro každou hranu grafu platí: jestliže jeden její kraj má značku S, tak druhý patří také do lesu a má značku T). Párování M je již maximální.

Věta:
Nechť Z je květ objevený v grafu G při značkování vzhledem k párování M. Dále nechť po stažení Z na vrchol Z' vznikne z grafu G graf G' a nechť z párování M vznikne párování M'. Potom v G' existuje zlepšující cesta pro M' právě tehdy když v G existuje zvětšující cesta pro M.

Algoritmus: *(Edmondsův)*

1. Najdeme nějaké (např. prázdné nebo maximální) párování M v grafu G. žádný vrchol není označený.

2. Značení:

   (a) Každému volnému vrcholu (nenasycenému v párování) přiřadíme značku $S : 0$. Všechny vrcholy jsou neprozkoumané.

   (b) Jestliže jsou všechny označené vrcholy prozkoumané, jdeme na bod 4. Jinak zvolíme libovolný neprozkoumaný vrchol i z označených uzlů. Jestliže i má značku S, jdeme na bod 2c. Jestliže i má značku T, jdeme na bod 2d.

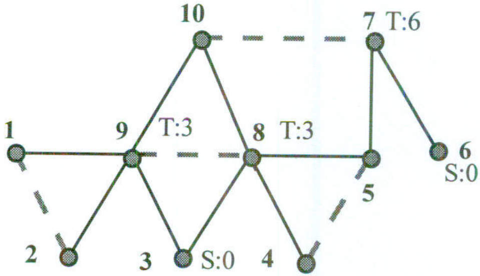
(c) Pro každou hranu $ij \notin M$ provedeme:
Jestliže vrchol j má značku S, tak podle druhých složek značek najdeme kořen pro střídavé cesty začínající v i a j. Jestliže $ui \neq uj$, pak bod 3. Jestliže $ui = uj$ (cesty mají společný kořen), tak jsme objevili květ, který stáhneme na jediný vrchol se značkou báze květu; považujeme ho za neprozkoumaný a přejdeme na bod 2b.
Jestliže vrchol j má značku T, tak ji necháme a jestliže nemá žádnou značku, tak mu přiřadíme $T : i$. Tímto je vrchol i prozkoumaný a přejdeme k bodu 2b

(d) Pro jedinou hranu $ij \in M$ provedeme:
Jestliže vrchol j má značku T, tak podle druhých složek značek najdeme kořen pro střídavé cesty začínající v i a j. Jestliže $ui \neq uj$, pak bod 3. Jestliže $ui = uj$ (cesty mají společný kořen), tak jsme objevili květ, který stáhneme na jediný vrchol se značkou báze květu; považujeme ho za neprozkoumaný a přejdeme na bod 2b.
Jestliže vrcholj j má značku S, tak ji necháme a jestliže nemá žádnou značku, tak mu přiřadíme $S : i$. Tímto je vrchol i prozkoumaný a přejdeme k bodu 2b

3. Pomocí nalezené rozšiřitelné cesty v aktuálním grafu G' najdeme rozšiřitelnou cestu v původním grafu G a párování M zvětšíme. Všechny značky setřeme a přejdeme k bodu 2a.

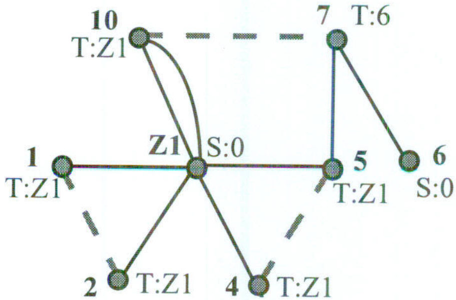
4. Žádná rozšiřitelná cesta neexistuje a tedy párování je nejpočetnější. Konec.

Ilustrativní pøíklad:



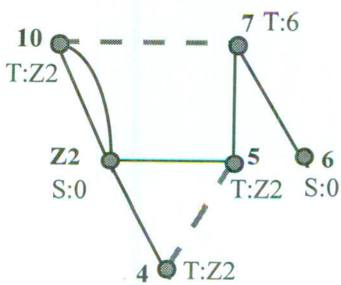
Dané poèáteèní párování - M: 1=2, 4=5, 8=9, 7=10

1. Vrcholy typu S:0 - 3, 6
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - nejsou
   Vrcholy typu T:3 - 8, 9
   Vrcholy typu T:6 - 7
3. Test sousedních vrcholù stejného typu - 8=9
   Hledání zaèátku støídavé cesty : 3-8=9-3
   Stejný zaèátek - kvìt Z1



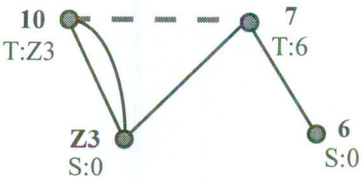
M: 1=2, 4=5, 7=10

1. Vrcholy typu S:0 - Z1, 6
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - nejsou
   Vrcholy typu T:Z1 - 1, 2, 4, 5, 10
   Vrcholy typu T:6 - 7
3. Test sousedních vrcholù stejného typu - 1=2
   Hledání zaèátku støídavé cesty : Z1-1=2-Z1
   Stejný zaèátek - kvìt Z2



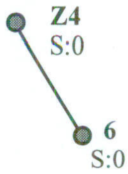
M: 4=5, 7=10

1. Vrcholy typu S:0 - Z2, 6
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - nejsou
   Vrcholy typu T:Z2 - 4, 5, 10
   Vrcholy typu T:6 - 7
3. Test sousedních vrcholù stejného typu - 4=5
   Hledání zaèátku støídavé cesty : Z2-4=5-Z2
   Stejný zaèátek - kvìt Z3



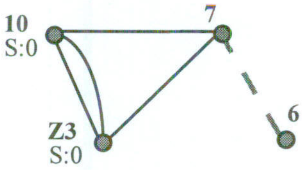
M: 7=10

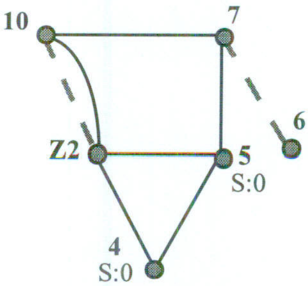
1. Vrcholy typu S:0 - Z3, 6
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - nejsou
   Vrcholy typu T:Z3 - 7, 10
   Vrcholy typu T:6 -
3. Test sousedních vrcholù stejného typu - 7=10
   Hledání zaèátku støídavé cesty : Z3-7=10-Z3
   Stejný zaèátek - kvìt Z4



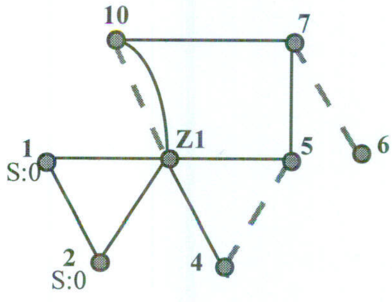
1. Vrcholy typu S:0 - Z4, 6
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - Z4 - 6
   Existuje støídavá rozšiøitelná cesta,
   podél které mùžeme zmìnit párování.
   M: Z4=6

1. Vrcholy typu S:0 - Z3, 10
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - Z3 - 10
   Existuje støídavá rozšiøitelná cesta,
   podél které mùžeme zmìnit párování.
   M: 7=6, Z3=10

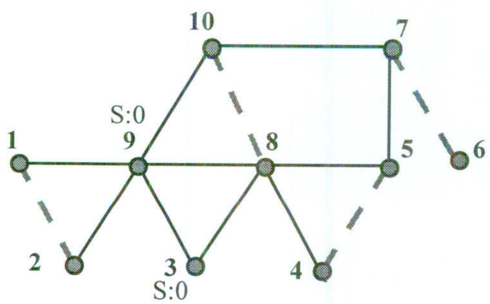




1. Vrcholy typu S:0 - 4, 5
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - 4 - 5
   Existuje støídavá rozšiøitelná cesta,
   podél které mùžeme zmìnit párování.
   M: 7=6, Z2=10, 4=5



1. Vrcholy typu S:0 - 1, 2
2. Test sousedních vrcholù stejného typu - 1 - 2
   Existuje støídavá rozšiøitelná cesta,
   podél které mùžeme zmìnit párování.
   M: 7=6, Z1=10, 4=5, 1=2



1. Vrcholy typu S:0 - 3, 9
2. Test sousedních vrcholù stejného typu -3 - 9
   Existuje støídavá rozšiøitelná cesta,
   podél které mùžeme zmìnit párování.
   M: 7=6, 8=10, 4=5, 1=2, 3=9
   Èímž jsme získali maximální párování.