CN.1 Velikosti množin.

CN.1.1. Velikosti množin a kardinální čísla.

Množina x je *subvalentní* ($\preccurlyeq$) resp. *ekvivalentní* ($\approx$) množině y, existuje-li prosté zobrazení x do y resp. navíc na y; subvalencí a ekvivalencí je dáno porovnávání množin co do velikosti. Zřejmě jsou $\preccurlyeq, \approx$ reflexivní a tranzitivní vztahy. Platí dále:

Cantor-Bernsteinova věta. *$x \preccurlyeq y$ a $y \preccurlyeq x \Rightarrow x \approx y$.*
Cantorova věta. *$x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$ a $x \not\approx \mathcal{P}(x)$. ($x$ je ostře subvalentní $\mathcal{P}(x)$.)*

Kardinální čísla čili kardinály představují velikosti množin podobně jako přirozená čísla představují velikosti konečných množin; přirozená čísla jsou konečné kardinály. Třída všech kardinálu se značí **Cn** a kardinály κ, λ, μ. Velikost čili kardinalita množiny x je jediný kardinál κ ekvivalentní s x; značí se $|x|$. Říká se též, že množina x je $|x|$ prvková. Takovýto pojem je běžně znám pro velikost konečnou: konečná množina má velikost $n \in \mathbb{N}$, přičemž $n = \{0, 1, \dots n-1\}$, je-li $n \approx x$, tj. lze-li x prostě „očíslovat“ prvky $0, 1, \dots n-1$. Je ovšem $|\kappa| = \kappa$. Kardinalita množiny $\mathbb{R}$ se nazývá *kontinuum* a značí se $\mathfrak{c}$. Z axiomu výběru plyne následující důležitá věta:

Věta o existenci kardinality. *Každá množina má kardinalitu.*

Na **Cn** je dáno dobré uspořádání $\leq$ a podobně jako pro přirozená čísel platí i pro všechny kardinály $\kappa < \lambda \Leftrightarrow \kappa \in \lambda \Leftrightarrow \kappa \subsetneq \lambda$. Navíc pro množinu $x \subseteq \mathbf{Cn}$ je $\bigcup x$ supremum x v tomto uspořádání. $\mathbb{N}$ je počáteční úsek uspořádání $\leq$. První kardinál z $\mathbf{Cn} - \mathbb{N}$ je nejmenší nekonečný kardinál; představuje spočetnou velikost, značí se ω a je $\omega = \mathbb{N}$. Nejmenší kardinál větší než κ se nazývá *následník* κ a značí se κ^+. Definujeme indukcí: $\omega_0 = \omega$, $\omega_{n+1} = (\omega_n)^+$. Dále ω_ω je nejmenší kardinál větší než každé ω_n s $n < \omega$. Místo ω_i se píše také $\aleph_i$ pro $i \leq \omega$. Třída **Cn** není množina, neboť jinak by pro supremum κ množiny **Cn** bylo $|\mathcal{P}(\kappa)| \leq \kappa$. Zápis $\kappa < \omega$ značí, že $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq \omega$ pak, že κ je nekonečný kardinál.

Aritmetika **Cn**. Na **Cn** je definováno $+$, $\cdot$ a mocnina, přičemž tyto operace rozšiřují analogické na $\mathbb{N}$. Máme tedy:

$$\kappa + \lambda \approx \kappa \uplus \lambda, \qquad \kappa \cdot \lambda \approx \kappa \times \lambda, \qquad \kappa^\lambda \approx {}^\lambda\kappa. \tag{1}$$

Přitom $x \uplus y$ je disjunktní sjednocení $(\{0\} \times x) \cup (\{1\} \times y)$.

ZNAČENÍ. Množina všech podmnožin $u \subseteq x$ s $|u| = \lambda$ resp. s $|u| < \lambda$ se značí

$$[x]^\lambda \quad \text{resp.} \quad [x]^{<\lambda}.$$

Speciálně $[x]^{<\omega}$ je množina všech konečných podmnožin množiny x.

Tvrzení o počítání s kardinalitami a kardinály.

C1) a) $|x \cup y| \leq |x| + |y|$. b) $|\bigcup_{i \in I} x_i| \leq |I| \cdot \lambda$, je-li $|x_i| \leq \lambda$ pro každé $i \in I$.
C2) a) $|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|} = |{}^x 2|$. b) $\mathfrak{c} = 2^\omega =$ kardinalita Cantorovy množiny.
C3) Pro $+, \cdot$ platí obvyklá komutativita, asociativita a distributivita.
Platí obvyklé vzorce o mocnině: $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
Dále: když $\kappa \leq \kappa_0, \lambda \leq \lambda_0$, tak

$$\kappa + \lambda \leq \kappa_0 + \lambda_0, \qquad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa_0 \cdot \lambda_0, \qquad 0 < \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa_0^{\lambda_0}.$$

C4) Je-li alespoň jeden kardinál κ, λ nekonečný a oba jsou nenulové, platí

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

Speciálně: Je-li x nekonečná, $y \subseteq x$ a $|y| < |x|$, tak $|x - y| = |x|$.
C5) Pro $\kappa \geq \omega$ a $0 < n \in \mathbb{N}$ platí:
a) $\kappa^n \approx \kappa$. b) $\lambda \leq \kappa \Rightarrow [\kappa]^\lambda = \kappa^\lambda$.
c) $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$. d) $2 \leq \lambda \leq \kappa \Rightarrow 2^\kappa = \lambda^\kappa$.

Tedy např: $\omega = \omega + 1 = \omega + \omega = \omega \cdot \omega = \omega \cdot \omega + 5 = \omega^7 < \omega^\omega = 2^\omega = (2^\omega)^\omega$.

CN.1.2. Velikosti některých množin.

1. Pro nekonečnou množinu x platí:
a) $x^* \approx x$.
b) $[x]^{|x|} \approx \mathcal{P}(x)$. Speciálně $[\mathbb{N}]^\omega \approx \mathbb{R}$. Může být $[x]^\omega \approx x$; např. $[\mathbb{R}]^\omega \approx \mathbb{R}$.
c) x lze rozložit na $|x|$ disjunktních množin, z nichž každá má kardinalitu $|x|$.

Důkaz. a) Je $x^* = \bigcup_{i<\omega} {}^n x$. Tedy $x \preccurlyeq x^* \preccurlyeq \omega \cdot |x| \approx x$ a odtud $x \approx x^*$. Přitom jsme užili C1) b), C4), C5) a).

b) Prvá $\approx$ plyne ihned z C2) a) a C5) b), d). Speciálně $[\mathbb{N}]^\omega \approx [\omega]^\omega \approx \mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$; poslední $\approx$ je dle C2 b). Konečně $[\mathbb{R}]^\omega \approx (2^\omega)^\omega \approx 2^{\omega\cdot\omega} \approx 2^\omega \approx \mathbb{R}$. Užili jsme C2) b), C5) b), C3), C4), C2 b).

c) Buď $\kappa = |x|$; $\{\{i\} \times \kappa;\, i \in \kappa\}$ je rozklad $\kappa \times \kappa$ na κ disjunktních množin majících každá kardinalitu κ; díky $\kappa \times \kappa \approx \kappa$ platí dokazované. □

2. Všech relací resp. operací v x, které mají konečné četnosti, je

a) ω, pokud $2 \le |x| < \omega$, b) $2^{|x|}$, pokud $|x| \ge \omega$.

Důkaz. a) Je $2 \le |x| < \omega$. Pak množina všech uvažovaných relací je $\bigcup_{0<n<\omega} \mathcal{P}(x^n)$, což je spočetné sjednocení disjuntních neprázdných konečných množin a tedy to je množina spočetná. Množina všech uvažovaných operací je $\bigcup_{n<\omega} {}^{x^n}x$, což je spočetné sjednocení disjuntních neprázdných konečných množin a tedy to je množina spočetná.

b) Relací $R \subseteq x^n$ s $0 < n < \omega$ je $|\mathcal{P}(x^n)| = 2^{|x|}$, neboť $|x^n| = |x|$ dle C5) a). Množina všech uvažovaných relací je tedy spočetné sjednocení disjunktních množin kardinality $|x|$, což je množina kardinality $|x|$ dle 1) b) (neboť je alespoň kardinality $|x|$). Podobně je tomu s operacemi $F : x^n \to x$. □

3. Buď $\kappa > 0$.
a) Pro $U, U' \subseteq \kappa$ je
$$\langle \kappa, U\rangle \cong \langle \kappa, U'\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \langle |U|, |\kappa - U|\rangle = \langle |U'|, |\kappa - U'|\rangle.$$
b) Všech dvojic $\langle |U|, |\kappa - U|\rangle$ s $U \subseteq \kappa$ je právě $|\mathbf{Cn} \cap \kappa^+|$.

Důkaz. a) je jasné. b) Pro $\kappa < \omega$ to platí, neboť $|\kappa - U|$ je jednoznačně určeno $|U|$. Buď $\kappa \ge \omega$. Všech uvažovaných dvojic s $|U| < \kappa$ je $|\mathbf{Cn} \cap \kappa|$ a těch, pro které $|U| = \kappa$, je právě $|\mathbf{Cn} \cap \kappa^+|$ (neboť $|\kappa - U|$ je libovolné $\lambda \le \kappa$); celkem jich tedy je právě $|\mathbf{Cn} \cap \kappa^+|$. □

CN.1.3. Rozklady, ekvivalence a jejich počet.

Počet rozkladů lze užít k zjištění počtu neizomorfních modelů pro některé jazyky.

1. *Rozklad* množiny x je množina $W \subseteq \mathcal{P}(x)$ neprázdných po dvou disjunktních množin taková, že $\bigcup W = x$. Takové W je *uniformní*, když $|u| = |x|$ pro každé $u \in W$. Rozklad W množiny x určuje ekvivalenci E_W na x tak, že
$$\langle a, b\rangle \in E_W \Leftrightarrow \text{existuje } u \in W \text{ tak, že } \{a, b\} \subseteq u;$$
pak tedy $W = \{E_W[a];\, a \in x\}$. Naopak ekvivalence E na x určuje rozklad $W = \{E[a];\, a \in x\}$ množiny x; platí pak $E_W = E$. Rozklady a ekvivalence na x jsou tak ve vzájemně jednoznačném vztahu. Speciálně pro x nekonečné je počet rozkladů x nejvýše $|\mathcal{P}(x \times x)| = 2^{|x|}$.

2. Je-li E ekvivalence na x, a $a \in x$ nazývá se $E[a]$ *třída (ekvivalence) E určená* a, také *faktor (ekvivalence) E určený* a, též *E-faktor* a. Značí se
$$x/E = \{E[a];\, a \in x\}.$$
Faktor $E[a]$ se také může značit a/E.

Buď x nekonečná množina a $|x| = \kappa$. Pak platí:
a) Pro $0 < \lambda \le \kappa$ existuje uniformní λ-prvkový rozklad x.
b) Pro $2 \le \lambda \le \kappa$ je všech uniformních λ-prvkových rozkladů x právě 2^κ.

Důkaz. a) Buď $x' = \bigcup_{i\in\lambda}\{i\}\times x$; je $x' \approx \lambda\cdot\kappa = \kappa$ dle C1) b), Cantor-Bernsteinovy věty a C4). Přitom $\{\{i\}\times x;\ i\in\lambda\}$ je uniformní rozklad x'.

b) Buď $\{u,v,w\}$ uniformní tříprvkový rozklad x. Pro $z\subseteq w$ je $W_z = \{u\cup z, v\cup(w-z)\}$ uniformní dvouprvkový rozklad x a pro $z\neq z'\subseteq w$ je $W_z\neq W_{z'}$; tedy uniformních dvouprvkových rozkladů x je alespoň 2^κ, tedy právě 2^κ.

Buď $3\leq\lambda\leq\kappa$. Buď $\{u,v\}$ uniformní dvouprvkový rozklad x. Nechť W je uniformní rozklad v kardinality λ', kde λ' je $\lambda-2$, je-li $\lambda<\omega$ a $\lambda'=\lambda$ jinak. Každý uniformní dvouprvkový rozklad u rozšiřme o W do rozkladu x kardinality λ; tím získáme požadovaných 2^κ uniformních λ-prvkových rozkladů x. □

CN.1.4. Důkazy některých tvrzení.

Důkaz Cantorovy věty. Je $x\preccurlyeq\mathcal{P}(x)$ díky tomu, že zobrazení $f: x\to\mathcal{P}(x)$ takové, že $f(a)=\{a\}$, je prosté. Neexistuje zobrazení x na $\mathcal{P}(x)$. Je-li totiž $g: x\to\mathcal{P}(x)$ zobrazení na $\mathcal{P}(x)$, pak pro $u=\{a\in x;\ a\notin g(a)\}$ existuje b s $g(b)=u$. Platí $b\in u\Leftrightarrow b\in g(b)\Leftrightarrow b\notin u$ a máme spor. Tedy není $x\approx\mathcal{P}(x)$.

Důkaz tvrzení o počítání s kardinalitami a kardinály.

C1) a) Díky $x\cup y\preccurlyeq x\uplus y$. b) Pro $i\in I$ buď $f_i: x_i\to\lambda$ prosté. Pak je prosté zobrazení $f:\bigcup_{i\in I}(\{i\}\times x_i)\to I\times\lambda$, kde $f(\langle i,x\rangle)=\langle i,f_i(x)\rangle$ pro každé $x\in x_i$ s $i\in I$. Tedy $|\bigcup_{i\in I}(\{i\}\times x_i)|\leq|I|\cdot\lambda$. Jelikož lze sestrojit prosté zobrazení $\bigcup_{i\in I}x_i$ do „disjunktního“ sjednocení $\bigcup_{i\in I}(\{i\}\times x_i)$, platí dokazovaná nerovnost.

C2) a) plyne ihned z definic a $\mathcal{P}(x)\approx{}^{x}2$. b) Zobrazení $f:{}^{\omega}2\to[0,1]$, kde $f(s)=\sum_{i\in\mathbb{N}}2s(i)/3^{i+1}$ je prosté na Cantorovu množinu, tedy ${}^{\omega}2\preccurlyeq[0,1]$. Pomocí dvojkových rozvojů získáme $[0,1]\preccurlyeq{}^{\omega}2$ a z Cantor-Bernsteinovy věty ${}^{\omega}2\approx[0,1]$. Snadno sestrojíme prosté zobrazení $\mathbb{R}$ na $[0,1]$. Tudíž $2^\omega=|\mathbb{R}|$ a $\mathfrak{c}=|\mathbb{R}|$. □

C3) neuvádíme; není však obtížný.

C4) Stačí dokázat $\kappa\times\kappa\approx\kappa$ pro $\kappa\geq\omega$. Případ $\omega\times\omega\approx\omega$ je snadý. Dále je výhodné užít transfinitní indukci na ordinálních číslech; to neuvádíme. Speciální tvrzení plyne ihned sporem.

C5) a) Indukcí přes n. Pro $n=1$ to platí. $\kappa^{n+1}\approx\kappa^n\times\kappa\approx\kappa\times\kappa\approx\kappa$ užitím indukčního předpokladu a C4).

b) i) Dokážeme $[\kappa]^\lambda\preccurlyeq{}^{\lambda}\kappa$. Pro $u\subseteq\kappa$ kardinality λ buď $f(u)$ prosté zobrazení λ na u, tedy $f(u)\in{}^{\lambda}\kappa$ a zobrazení $f:[\kappa]^\lambda\to{}^{\lambda}\kappa$ je jasně prosté. ii) Dokážeme ${}^{\lambda}\kappa\preccurlyeq[\kappa]^\lambda$. Pro $\lambda=0$ to platí; buď dále $\lambda\neq0$. Pro $g\in{}^{\lambda}\kappa$ je $g\in[\lambda\times\kappa]^\lambda$, tedy ${}^{\lambda}\kappa\subseteq[\lambda\times\kappa]^\lambda\preccurlyeq[\kappa]^\lambda$ díky $\lambda\times\kappa\approx\kappa$, což plyne z C4).

c) Dokážeme $|[\kappa]^{<\omega}|=\kappa$. Máme $|[\kappa]^{<\omega}|=|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\kappa]^n|\leq|\mathbb{N}|\cdot\kappa=\kappa$ díky C1) b), neboť $|[\kappa]^n|=\kappa$ pro $n>0$. Nerovnost $\geq$ plyne z $\kappa\approx[\kappa]^1\preccurlyeq[\kappa]^{<\omega}$. □

d) Pro $2\leq\lambda\leq\kappa$ je $2^\kappa\leq\lambda^\kappa\leq\kappa^\kappa\leq2^\kappa$; první dvě $\leq$ plynou z C3), třetí díky $[\kappa]^\kappa\subseteq\mathcal{P}(\kappa)\approx2^\kappa$. □

POZNÁMKY CN.1.5.

1. Můžeme zapsat začátek kardinální škály:

$$0<1<2<\cdots<n<n+1<\cdots<\omega<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_\omega<(\omega_\omega)^+<\cdots.$$

2. Rovnost $\mathfrak{c}=\omega_1$ se nazývá *hypotéza kontinua* a značí se (CH). Z axiomů obvyklé, tj. Zermelo-Fraenkelovy teorie množin s axiomem výběru ZFC, nelze hypotézu kontinua ani dokázat ani vyvrátit. Je to jedno z nejznámějších nezávislých tvrzení teorie množin. Je-li teorie ZFC bezesporná, je bezesporná i s (CH), ale např. i s $\mathfrak{c}=\omega_5$.