# Přednáška 12

- pravidla pro počítání s mocninnými řadami
- derivování a integrování mocninných řad
- Taylorova řada
- rozvoj funkce v Taylorovu řadu

# Mocninné řady - vlastnosti (1)

**Věta (O stejnoměrné konvergenci mocninných řad):**
*Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ poloměr konvergence $R > 0$, potom konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ s vlastností*

$$\langle a, b\rangle \subset (x_0 - R, x_0 + R).$$

**Věta (O spojitosti mocninných řad):**
*Součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ je funkce $s(x)$ spojitá v každém vnitřním bodě oboru konvergence $I^*$. Konverguje-li navíc tato řada v levém, resp. pravém krajním bodě intervalu $I^*$, pak je funkce $s(x)$ spojitá v tomto bodě zprava, resp. zleva, tj. platí*

$$\lim_{x\to(x_0-R)+} s(x) = \lim_{x\to(x_0-R)+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{x\to(x_0-R)+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$$

$$\lim_{x\to(x_0+R)-} s(x) = \lim_{x\to(x_0+R)-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{x\to(x_0+R)-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

# Mocninné řady - vlastnosti (2)

**Definice (Derivace řady člen po členu):**
*Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Říkáme, že řada*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

*vznikla z původní řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ derivováním člen po členu.*
*Obecně, je-li $p \in \mathbb{N}$ říkáme, že řada*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n(x-x_0)^{n-p}$$

*vznikla z původní řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ $p$-násobným derivováním člen po členu.*

**Věta (O derivování mocninných řad):**
*Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R>0$ a součet $s(x)$. Pak platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1},$$

*přičemž mocninná řada na pravé straně má tentýž poloměr konvergence $R$.*

# Mocninné řady - vlastnosti (3)

**Věta (Derivace vyšších řádů mocninných řad):**
*Součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ je funkce $s(x)$, která má na intervalu $(x_0-R, x_0+R)$ derivaci libovolného řádu, kde $R>0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Navíc platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right)^{(p)} = s^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} p!\binom{n}{p} a_n(x-x_0)^{n-p}.$$

**Příklad:** *Pomocí věty o derivování mocninných řad odvoďte vztahy pro součty řad:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x\in(-1,1).$$

# Mocninné řady - vlastnosti (4)

**Definice (Integrace řady člen po členu):**
*Nechť je dána mocninná řada* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. *Říkáme, že řada*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \boldsymbol{R}$$

*vznikla z původní řady* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *integrací člen po členu.*

**Věta (O integrování mocninných řad):**
*Nechť mocninná řada* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* $R>0$ *a součet* $s(x)$. *Pak platí*

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=a}^{b} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(a-x_0)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

*pro libovolný interval* $\langle a, b\rangle \subset (x_0-R, x_0+R)$, *přičemž číselná řada na pravé straně konverguje absolutně.*

# Mocninné řady - vlastnosti (5)

**Příklad:** *Pomocí věty o integrování mocninných řad odvoďte vztahy pro součty řad:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad x \in \langle -1,1).$$

Upozorněme, že se při derivování a integrování mocninné řady zachovává poloměr konvergence, nikoliv však nutně konvergence v krajních bodech oboru konvergence $I^*$. Případnou konvergenci je třeba vždy prověřit přímým dosazením do řady.

Za zmínku stojí, že odvozené řady vystupující v předcházejících 2 příkladech nejsou již řady geometrické. Dosazením libovolného $x \in I^*$ do tohoto vztahu lze tak získat vzorec pro součet negeometrické číselné řady.

# Taylorovy řady (1)

**Definice (Rozvoj funkce v mocninnou řadu):**
*Nechť je funkce $f$ definovaná na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $x \in U(x_0)$ platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

*pak říkáme, že funkci $f$ lze na $U(x_0)$ rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě $x_0$.*

**Definice (Taylorova řada):**
*Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ derivace všech řádů. Potom mocninnou řadu tvaru*

$$T_{x_0}^f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

*nazývámé Taylorovou řadou funkce $f$ v bodě $x_0$.*
*Je-li $x_0 = 0$, pak se tato řada nazývá Maclaurinova řada funkce $f$ a má tvar*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Taylorovu řadu lze napsat vždy, pokud má funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ derivace všech řádů. Není však zaručeno, že tato řada má za součet skutečně funkci $f(x)$.

## Taylorovy řady (2)

**Věta (O rovnosti funkce a její Taylorovy řady):**
*Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu $I$ derivace všech řádů a nechť $x_0 \in I$ je vnitřním bodem $I$. Potom v tomto intervalu platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

*právě tehdy, když pro posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ platí*

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in I,$$

K praktickému ověření výše uvedené limity lze použít tzv. Lagrangeův tvar zbytku $R_n(x)$ ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + (x - x_0)\vartheta),$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$ je blíže neurčené číslo.

Taylorova řada $T^f_{x_0}(x)$ konverguje vždy (když ji lze napsat) v bodě $x_0$ a má tam součet $f(x_0)$.

Existence derivací $f^{(n)}(x_0)$ pro všechna $n \geq 0$ nezaručuje rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

v žádném bodě $x \neq x_0$.

# Taylorovy rozvoje elementárních funkcí (1)

Při určování rozvojů funkcí do mocninných řad lze rozlišit metody přímé a nepřímé. Přímé metody se používají se v případě, lze-li vyjádřit $f^{(n)}(x_0)$ pro libovolné $n \in \boldsymbol{N}$. Bez újmy na obecnosti ve všech dále uvedených případech volíme $x_0 = 0$.

Postup (přímá metoda):

- odvodíme vztah pro $f^{(n)}(0) \quad \forall\, n \in \boldsymbol{N}$
- ověříme, že $lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{R}$

## Funkce $e^x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

neboť

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}.$$

# Taylorovy rozvoje elementárních funkcí (2)

## Funkce $\sin x$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

neboť

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n \\ f^{(2n)}(x) &= (\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin(0) = 0 \end{aligned}$$

## Funkce $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

neboť

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \sin(0) = 0 \\ f^{(2n)}(x) &= (\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n \end{aligned}$$

# Taylorovy rozvoje elementárních funkcí (3)

## Funkce $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad x \in (-1,1),$$

neboť

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1) = 0 \\ f^{(n+1)}(x) &= (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^n \frac{(n)!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n! \end{aligned}$$

## Funkce $(1+x)^r,\ r \in \boldsymbol{R}$

$$(1+x)^r = 1 + rx + r(r-1)x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r}{n} x^n \qquad x \in (-1,1),$$

neboť

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= ((1+x)^r)^{(n)} = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} \Rightarrow \\ f^{(n)}(0) &= r(r-1)\cdots(r-n+1), \\ \binom{r}{n} &= \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}, \quad r \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}. \end{aligned}$$