Cvičení MAI 3 - Konvergence řad funkcí I.

Stručný přehled teorie:

Definice: $f, f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $(M \neq \emptyset)$, $n \in N$

symbol $\sum_1^\infty f_n$ chápeme jako způsob zápisu limity posloupnosti částečných součtů $\{s_k\} = \{\sum_{n=1}^{k} f_n\}$ řady $\sum_1^\infty f_n$

1. $\sum_1^\infty f_n \to f$ na $M$ (bodová konvergence), když $s_n \to f$ na $M$ (bodově)
2. $\sum_1^\infty f_n \rightrightarrows f$ na $M$ (stejnoměrná konvergence), když $s_n \rightrightarrows f$ na $M$ (stejnoměrně)
3. $\sum_1^\infty f_n \overset{lk}{\rightrightarrows} f$ na $M$ (lokálně stejnoměrně), když $s_n \overset{lk}{\rightrightarrows} f$ na $M$ (lok. stejn. k.)

Limita, spojitost, integrování a derivování řad funkcí

(při stejnoměrné konvergenci lze s nekonečnými řadami „zacházet" jako s konečnými součty)

1. záměna pořadí limity a sumace:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \ f_n : P(x_0,\delta) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \\ \forall n \ \text{ex.} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R} \\ \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows \text{ na } P(x_0,\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ex.} \lim\limits_{x\to x_0} \sum_1^\infty f_n(x) \in \mathbb{R}, \ \sum_1^\infty \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \text{ konverg.} \\ \text{a platí} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \sum_1^\infty f_n(x) = \sum_1^\infty \lim f_n(x) \end{array}$$

Důsledek:
$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^\infty f_n \overset{lk}{\rightrightarrows} \text{ na } (a,b) \\ f_n : (a,b) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ jsou spojité } (n \in N) \text{ na } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n(x) \text{ je spojitá fce na } (a,b)$$

2. záměna pořadí sumace a integrování:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \ f_n \in R(\langle a,b\rangle) \\ \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows \text{ na } \langle a,b\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_1^\infty f_n \in R(\langle a,b\rangle) \text{ a platí} \\ \int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum_1^\infty \int_a^b f_n \end{array}$$

3. záměna pořadí sumace a derivování

$f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, ex. $f_n' \in \mathbb{R}$ na $(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, $(a,b)$ – omezený interval
$\sum f_n' \overset{lr}{\rightrightarrows} g$ na $(a,b)$
číselná řada $\sum_1^\infty f_n(x_0)$ konverguje aspoň pro jeden bod $x_0 \in (a,b)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty f_n \overset{lr}{\rightrightarrows} f$ na $(a,b)$ pro nějakou fci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a platí
$f' = g$ na $(a,b)$, tj. $\left(\sum_1^\infty f_n\right)' = \sum_1^\infty f_n'$.

Vyšetřování konvergence řad funkcí $\sum_1^\infty f_n$

1. bodová konvergence na $M$ – viz vyšetřování konvergence číselných řad

2. stejnoměrná konvergence na $M$

(i) nutná podmínka stejnoměrné konvergence:

$\sum f_n \rightrightarrows$ na $M$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows 0$ na $M$

tj.: $\sum f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $M$, pokud $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $M$

(ii) postačující podmínky pro stejnoměrnou konvergenci

1. (Weierstrass)

$f_n : M \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$,
$\sum_1^\infty \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ konverg. $\Big\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na $M$ (a také absolutně k.)

nebo také: $|f_n(x)| \le a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in M$
$\sum_1^\infty a_n$ konverg. $\Big\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na $M$ (a také absolutně k.)

2. (Dini) – viz přednáška

3. <u>(Abel a Dirichlet)</u> (neabsolutní stejn. konvergence)

$f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$, pak $\sum f_n g_n \rightrightarrows$ na $M$, když jsou splněny podmínky (i) nebo (ii)

(i) (Abel) $\sum\limits_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na $M$ a posloupnost $\{g_n\}$ je na $M$ stejně omezená a pro každé $x \in M$ je $\{g_n(x)\}$ monotonní

(ii) (Dirichlet)
$\sum\limits_1^\infty f_n$ má na $M$ stejně omezené částečné součty,
$g_n \rightrightarrows 0$ na $M$ a pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotonní

(iii) <u>nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence</u>

Bolzano – Cauchyova (stejnoměrná) podmínka:

$f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\sum\limits_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na $M$ $\iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p \in N\ \forall x \in M: \quad \left| \sum\limits_{n_0}^{n_0+p} f_n \right| < \varepsilon$

3. <u>lokálně stejnoměrná konvergence</u>

(i) $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\sum\limits_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na každém int. $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b) \Rightarrow \sum\limits_1^\infty f_n \overset{lok}{\rightrightarrows}$ na $(a,b)$

(ii) $\sum f_n \overset{lok}{\rightrightarrows}$ na $(a,b) \Rightarrow \sum f_n \rightrightarrows$ na každém int. $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$

Příklady řešené

(1.) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ( základní příklad – na základní postupy )

(i) bodová konvergence:

$\sum_1^{\infty} x^n$ konv. (i abs.) $\Leftrightarrow |x|<1$ (geom. řada) a

$\sum_1^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ , $x \in (-1,1)$

(ii) stejnoměrná konvergence v $(-1,1)$:

$x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(-1,1)$ ( viz příkl. na konvergenci posloupností fcí )

( $\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1 \not\to 0$ )

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$

(iii) lokálně stejnoměrná konvergence v $(-1,1)$

$|x| \leq a < 1$ ($a>0$). $|x^n| \leq a^n$, $\sum_1^{\infty} a^n$ konv. $\Rightarrow$ (Weierstrass)

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} x^n \rightrightarrows$ v každém int. $\langle -a,a \rangle$ $(0<a<1)$, tedy

$\sum_1^{\infty} x^n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$

Poznámka: $\sum_1^{\infty} x^n$ nekonverguje na žádném okolí bodu 1 ( $\rightrightarrows$ na žádném int. $(\varepsilon,1)$ (stačí $0<\varepsilon<1$) ;

sporem: kdyby $\sum_1^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $(\varepsilon,1)$, pak, protože tj. $\lim_{x\to 1-} x^n = 1$, by musela konvergovat i řada

$\sum_1^{\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = \sum_1^{\infty} 1$ – spor

( viz věta o záměně sumace a limity ) (stejně pro int $(-1,-\varepsilon)$ )

## (2) Jednoduché příklady na užití Weierstrassova kritéria

(i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ : bodově konverguje v $\langle -1,1\rangle$, jinde diverguje (viz vyšetřování číselných řad):
v $\langle -1,1\rangle$ konverguje absolutně

(*) srovnávací krit.: $x\in\langle -1,1\rangle$: $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ k. $\Rightarrow$

$\sum \frac{x^n}{n^2}$ k. ab. v $\langle -1,1\rangle$

pro $|x|>1$ $\frac{x^n}{n^2}$ nemají limitu 0, tedy $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ diverguje

stejnoměrná konvergence na $\langle -1,1\rangle$ plyne též z (*) (Weierstrass)

(ii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^2} \rightrightarrows$ v $R$:

$0 \le \frac{1}{x^4+n^2} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall x\in R$, $\sum \frac{1}{n^2}$ k. $\Rightarrow \sum \rightrightarrows$ v $R$
(Weierstrass jako v (i))

(iii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows$ v $R$:

$\forall x\in R$: $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ k. $\xRightarrow{\text{(Weierstrass)}}$ $\sum \frac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows$ v $R$

## (3) Lokálně stejnoměrná konvergence

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ : obor konvergence ... $\langle -1,1)$:

pro $|x|<1$ je $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le |x|^n$, $\sum |x^n|$ konverguje pro $|x|<1$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konv. ab. v $(-1,1)$

$x = 1$ .. $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, $x=-1$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ k. (Leibniz)

pro $|x|>1$ není limita posl. $\{\frac{x^n}{n}\}$ nula - tedy ř. div.

lok. stejnoměrná konvergence:

pro $|x| \leq a < 1$ ... $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{a^n}{n}$, $\sum \frac{a^n}{n}$ konverguje $\Big\}$ Weier. $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \rightrightarrows$ v každém int. $\langle -a, a \rangle$, $0 < a < 1$

tedy, $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \overset{lok}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$

stejnoměrná konvergence (*) $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$ pro v. $x \in (-1,1)$, ale

řada nekonverguje stejnoměrně v žádném okolí bodu 1,

(i když $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ v $(-1,1)$ - není podmínka postačující pro stejnoměrnou konvergenci $\Sigma$ )
(z (*))

neboť: (sporem) kdyby $\Sigma \rightrightarrows$ v okolí bodu 1 ... $(\varepsilon, 1)$, $0<\varepsilon<1$,
pak by konvergovala i $\sum_1^\infty \lim_{x\to 1-} \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ - spor

ale konverguje stejnoměrně na int. $(-1,-\varepsilon)$ $(\varepsilon \in (0,1))$

abelovo kritérium: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$ (číselná řada, tedy na $(-1,-\varepsilon)$ konvergence je stejn.)

$a_n(x) = (-x)^n < 1$, tedy $\{(-x)^n\}$ je stejně
$(0<-x<1)$ omezená na $(-1,-\varepsilon)$

a $a_n(x) = (-x)^n$ je klesající na $(-1,-\varepsilon)$,

tedy $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-x)^n = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \rightrightarrows$ na $(-1,-\varepsilon)$

odtud: záměna sumace a limity (viz příslušná věta)

$$\lim_{x\to -1+} \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \lim_{x \to -1+} \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \quad (= -\ln 2 \text{ - později})$$

tedy součet řady je fce spojitá na int. $\langle -1, 1)$ (uvnitř spojitá dle věty o spojitosti součtu lok. stejn. konvergentní řady spojitých fcí)

<u>Součet řady $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$</u>:

Řada derivací $\sum_1^\infty \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_1^\infty x^{n-1} = \sum_0^\infty x^n$ je lokálně stejnoměrně konvergentní v $(-1,1)$ (viz př. 1) $\Rightarrow$ (věta o záměně sumace a derivace)

$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ konverguje v $(-1,1)$

$$\left(\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_1^\infty \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{v } (-1,1),$$

tedy $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + c$ v $(-1,1)$ (+)

pro $x=0$: $0 = -\ln 1 + c \Rightarrow c = 0$,

tj. $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

ze spojitosti v $-1+$ (obou stran rovnosti) plyne, že i pro $x = -1$ platí:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

(tedy, $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ )

$\boxed{\text{Platí tedy v } \langle -1, 1): \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}}$

<u>Poznámka</u>: řada $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($= \ln 2$) nekonverguje moc rychle, lépe se počítá $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n 2^n}$ (viz +) (konverguje rychleji)

(4) <u>DÚ</u>: Vyzkoušejte podobně vyřešit i řadu $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

( $\Rightarrow \operatorname{arctg} x$ na $\langle -1, 1 \rangle$ )

Spočítejte $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left(= \frac{\pi}{4}\right)$