Přednáška 2

- limita a spojitost funkce
- parciální derivace
- derivace složené funkce
- transformace diferenciálních výrazů do křivočarých souřadnic

Limita funkce (1)

Limita popisuje chování hodnot vyšetřované funkce, blížíme-li se k danému bodu, nazývaného limitní bod. V případě funkce definované na reálné ose se k danému bodu můžeme přibližovat zprava, zleva nebo současně z obou stran (limita zprava, limita zleva a limita oboustranná). V případě funkce více proměnných, máme mnohem více možností, jak se k danému bodu blížit. V případě 2D, např. po polopřímkách, spirálách, kruhových výsečích, parabolách či jiných křivkách. Abychom postihli všechny tyto možnosti zavádíme univerzální defici limity funkce.

Definice: *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod C je hromadným bodem D_f. Řekneme, že funkce f má v bodě C limitu $L \in \mathbb{R}^*$, píšeme*

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} f(\mathbf{x}) = L,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \mathbf{x} \in P_\delta(C) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(L).$$

Limita se nazývá vlastní, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě se nazývá nevlastní.

Existence limity v daném bodě tedy znamená, že limita nezávisí na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Naopak podobně jako v 1D (při limitách zleva/zprava), dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě nemůže existovat.

Limita funkce (2)

Věta (O jednoznačnosti limity funkce):
Funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ má v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ nejvýše jednu limitu.

Věta (O limitě sevřené funkce):
Nechť funkce $f, g, h : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $C \in \boldsymbol{R}^n$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to C} h(\mathbf{x}) = L \in \boldsymbol{R}(i\ \boldsymbol{R}^*),$$

dále nechť existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna $\mathbf{x} \in P_\varepsilon(C)$ platí $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$. Potom platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} g(\mathbf{x}) = L.$$

Věta (O aritmetice limit funkcí):
Nechť funkce $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $C \in \boldsymbol{R}^n$, a dále nechť

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} f(\mathbf{x}) = A \in \boldsymbol{R}^*, \quad \lim_{\mathbf{x}\to C} g(\mathbf{x}) = B \in \boldsymbol{R}^*,$$

Potom platí:

$$(a) \quad \lim_{\mathbf{x}\to C} |f(\mathbf{x})| = |A|,$$

$$(b) \quad \lim_{\mathbf{x}\to C} (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = A \pm B,$$

$$(c) \quad \lim_{\mathbf{x}\to C} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = A \cdot B,$$

$$(d) \quad \lim_{\mathbf{x}\to C} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{A}{B}, \ \text{pro } B \neq 0,$$

pokud pravá strana existuje.

Limita funkce (3)

Věta (O součinu omezené a "nulové" funkce):
Nechť funkce $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $C \in \boldsymbol{R}^n$. Je-li f omezená na jistém prstencovém okolí $P_\varepsilon(C)$ bodu C a současně $\lim_{\mathbf{x}\to C} g(\mathbf{x}) = 0$, pak

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0.$$

Věta (O limitě složené funkce):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $C \in \boldsymbol{R}^n$, $b \in \boldsymbol{R}$. Dále nechť existuje $\lim_{t\to b} h(t)$ a nechť existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(C)$ bodu C takové, že $f(\mathbf{x}) \neq b$ pro $\mathbf{x} \in P_\varepsilon(C)$. Pak

$$\lim_{\mathbf{x}\to C} h(f(\mathbf{x})) = lim_{t\to b} h(t).$$

Věta (Nutná podmínka existence limity funkce):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $C \in \boldsymbol{R}^n$. Existuje-li

$$\lim_{[x_1;x_2;\dots,x_n]\to[c_1;c_2;\dots,c_n]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A,$$

je také

$$\lim_{x_1\to c_1} f(x_1, c_2, \dots, c_n) = \lim_{x_2\to c_2} f(c_1, x_2, \dots, c_n) = \dots = \lim_{x_n\to c_n} f(c_1, c_2, \dots, x_n) = A.$$

Limita funkce (4)

Příklad: *Určete následující limity [návod]:*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{y}$ [*součin omezené a "nulové" funkce*],

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$ [*limita složené funkce*],

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2}$ [*polární souřadnice*],

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ [*nutná podmínka ex. lim.*],

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ [*pol. s., závislost na úhlu*].

Spojitost funkce (1)

Definice: *Řekneme, že funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ spojitá, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \mathbf{x} \in P_\delta(C) \cap D_f \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in U_\varepsilon(f(C)).$$

Definice: *Funkce, která je spojitá v každém bodě množiny $M \subseteq D_f$, se nazývá spojitá v množine M. Funkci spojitou v každém bodě svého definičního oboru nazýváme spojitou.*

Věta (Vlastnosti spojitých funkcí):
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$, pak jsou spojité v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ také funkce

$$|f|, \quad f+g, \quad f \cdot g \quad a \quad \frac{f}{g}, \text{ je-li } g(C) \neq 0.$$

Věta (O spojitosti složené funkce):
Je-li funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ spojitá v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ a funkce $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spojitá v bodě $y = h(C)$, pak je složená funkce $F(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}))$ spojitá v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$.

Věta (O limitě spojité funkce):
Funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ spojitá tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{\mathbf{x} \to C} f(\mathbf{x}) = f(C).$$

Spojitost funkce (2)

Věta (O spojitosti normy):
Nechť $\|\mathbf{x}\|$ je norma na $\boldsymbol{R}^n$. Pak $\|\mathbf{x}\|$ je spojitá funkce.

Věta (O limitě vybrané posloupnosti v $\boldsymbol{R}^n$):
Každá omezená posloupnost bodů z $\boldsymbol{R}^n$ obsahuje vybranou podposloupnost, která má vlastní limitu v $\boldsymbol{R}^n$.

Věta (O nabývání minima a maxima):
Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je spojitá v každém bodě uzavřené a omezené množiny $M \subseteq \boldsymbol{R}^n$. Potom f nabývá na M svého minima a maxima.

Definice: *Nechť $A, B \subset \boldsymbol{R}^n$. Jestliže $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$, říkáme, že množiny A, B jsou oddělené. Neprázdnou množinu A nazýváme souvislou, jestliže A není sjednocením dvou neprázdných oddělených množin.*

Věta (O nabývání hodnot):
Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je spojitá na uzavřené souvislé množině $M \subset R^n$. Potom funkce f nabývá v množině M všech hodnot ležících mezi čísly

$$a = \inf_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x}) \quad a \; b = \sup_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x}),$$

resp. obor hodnot H_f je souvislá množina v $\boldsymbol{R}$ (interval nebo jeden bod).

Parciální derivace (1)

Derivace je základním pojmem diferenciálního počtu. Při defnici derivace pro funkce více proměnných můžeme postupovat několika způsoby. První možnost je uvažovat hodnoty dané funkce pouze na jisté přímce, konkrétně na přímkách rovnoběžných se souřadnými osami. Získáme tak v podstatě funkci jedné proměnné, kterou již derivovat umíme. Nevýhodou však je, že tato derivace (nazývaná parciální) poskytuje informaci o chování funkce pouze vůči velice speciálním podmnožinám definičního oboru (přímkách rovnoběžných se souřadnými osami).

Definice: *Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je definována v okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$. Existuje-li*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h}$$

nazýváme ji parciální derivací funkce f podle j-té proměnné v bodě $\mathbf{x}$ a budeme ji značit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n).$$

Parciální derivace může být vlastní i nevlastní.

Geometrický význam: stejně jako u funkcí jedné proměnné představuje parciální derivace funkce f podle j-té proměnné v bodě $\mathbf{x}$ směrnici tečny ve směru osy x_j.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ závisí na bodu $\mathbf{x}$ a je to tedy opět funkce n proměnných.

Parciální derivace (2)

Parciální derivace podle x_j se hledá stejně jako derivace funkcí jedné proměnné, přičemž ostatní proměnné jsou brány jako konstanty (a derivace konstanty je nula).

Věta (O parciální derivaci součtu, součinu a podílu):
Nechť $c \in \boldsymbol{R}$ je konstanta a funkce $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ mají vlastní derivaci v bodě $\mathbf{a} \in \boldsymbol{R}^n$ podle $x_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \frac{\partial (c\, f)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = c \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}),\\
&(b) \quad \frac{\partial (f \pm g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}),\\
&(c) \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}),\\
&(d) \quad \frac{\partial (f/g)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}, \ \ \textit{pro } g(\mathbf{a}) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Věta: *Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ má všechny parciální derivace prvního řádu omezené v otevřené množině $M \subseteq \boldsymbol{R}^n$. Potom je funkce f spojitá v množině M.*

Věta: *Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ má všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule ve všech bodech otevřené množiny $M \subset \boldsymbol{R}^n$. Potom je funkce f konstantní v množině M.*

Parciální derivace (3)

Příklad: *Vypočtete parciální derivace* $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 5xy + 3x - 1$.
Řešení: Derivujeme podobně jako funkci jedné proměnné:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(2y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(5xy) + \frac{\partial}{\partial x}(3x) = 3x^2 + 0 - 5y + 3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy) + \frac{\partial}{\partial y}(3x) = 0 + 4y - 5x + 0.$$

Příklad: *Vypočtete parciální derivace* $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Parciální derivace složené funkce(1)

Mezi základní pravidla týkající se derivací funkcí jedné proměnné patří pravidlo o derivaci složené funkce, pomocí něj jsme schopni derivovat nejen základní typy funkcí. Uvažujme situaci, kdy do funkce $f(x,y)$ dvou proměnných dosadíme za x a y jiné funkce dvou proměnných u, v, a získáme tak novou funkci $F(u,v)$. Následně budeme chtít určit parciální derivace F podle nových proměnných pomocí parciálních derivací původní funkce f vzhledem k původním proměnným.

Před vyslovením věty o parciální derivaci složené funkce si zavedeme pojem totálního (úplného) diferencálu, který bude podrobně vysvětlen v Přednášce 3.

Definice: *Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je definována v okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x} = [x_1, \dots, n]$. Zvolme čísla $A_1, \dots, An$ a definujeme funkci $r(\mathbf{x})(\mathbf{x} = [h_1, \dots, h_n])$ rovnicí*

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n + \|\mathbf{x}\| r(\mathbf{x}), \quad r(0,\dots,0) = 0.$$

Lze-li čísla $A_1, \dots, A_n$ volit tak, že funkce r je spojitá v bodě $[0,\dots,0]$, nazýváme výraz

$$A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n$$

(úplným nebo) totálním diferenciálem funkce f v bodě $\mathbf{x}$ a říkáme, že funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{x}$, neboli je v tomto bodě diferencovatelná.

Věta (O parciální derivaci složené funkce):
Nechť funkce $g_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, \dots, n$ mají v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, \dots, n$. Dále nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ má totální diferenciál v bodě $\mathbf{y}_0 = [y_1^0, \dots, y_n^0]$, kde $y_i^0 = g_i(\mathbf{x}_0)$. Potom má funkce $f(g_1, \dots, g_n)$ v bodě $\mathbf{x}_0$ parciální derivaci

$$\frac{\partial f(g_1,\dots,g_n)}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Transformace diferenciálních výrazů (1)

Pod tímto názvem rozumíme zavedení nových proměnných nebo i funkcí do výrazů obsahujících derivace. Toho se využívá zejména při řešení složitějších diferenciálních rovnic. Uvedeme zde nejběžnější případy zavedení nových (křivočarých) souřadnic (polární, sférické) a s využitím věty o parciální derivaci složené funkce transformujeme dané diferenciální výrazy do nových souřadnic.

Definice: *Zobrazení* $T_p : \langle 0; +\infty) \times \langle 0; 2\pi) \to \boldsymbol{R}^2$ *definované*

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

se nazývá transformací do polárních souřadnic (r, φ).

Transformace do polárních souřadnic nám umožnuje vzájemně jednoznačně vyjadřit body různé od nuly v souřadnicích r (vzdálenost od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) a φ (kladně orientovaný úhel, který svírá spojnice bodu a počátku s osou x).

Definice: *Zobrazení* $T_s : \langle 0; +\infty) \times \langle 0; 2\pi) \times \langle 0; \pi\rangle \to \boldsymbol{R}^3$ *definované*

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\theta,$$

se nazývá transformací do sférickýchích souřadnic (r, φ, θ).

Analogicky platí $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Transformace diferenciálních výrazů (2)

Příklad: *Pro funkci $F(x,y) = f(u,v)$, vypočtete první parciální derivace:*

$$u = xy, \; v = x$$

Řešení: Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}y + \frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}x.$$

Příklad: *Pro funkci $F(x,y) = f(r), r = \sqrt{x^2+y^2}$, vypočtete první parciální derivace.*
Řešení: Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}.$$

Transformace diferenciálních výrazů (3)

Příklad: *Transformujte diferenciální rovnici:*

$$x\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x}$$

do polárních souřadnic, tj. $F(x, y) = f(r, \varphi)$.

Řešení: Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Parciálním derivováním transformačních rovnic ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$) dostaneme soustavy:

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} r\sin\varphi, \quad 0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} r\sin\varphi,$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} r\cos\varphi, \quad 1 = \frac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} r\cos\varphi,$$

a z nich vypočteme, že

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi}{r}.$$

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Po dosazení do původní rovnice získáme:

$$x\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$