1. Logika – úvod *(MP leden 2010)*

F-uzávěr $\mathbf{F}\langle X\rangle$

$\mathbf{F}$-*uzávěr* X je nejmenší $\mathbf{F}$-uzavřená nadmnožina X.

F-uzavřená

X *je* $\mathbf{F}$-*uzavřená*, když obsahuje svoji $\mathbf{F}$-konkluzi, neboli $\mathbf{F}\lceil X\rceil \subset X$.

F-konkluze $\mathbf{F}\lceil X\rceil$

$\mathbf{F}$-*konkluze* X je množina $\bigcup\{F\lceil X\rceil \mid F \in \mathbf{F}\}$. Tedy v $\mathbf{F}\lceil X\rceil$ jsou právě prvky $F(x_1,\dots,x_n)$ s $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in X^n \cap \mathrm{dom}(F), F \in \mathbf{F}$.

F-odvození

$\mathbf{F}$-*odvození z* X je sekvence s taková, že pro každé $i < lh(s)$ je buď $s_i \in X$ nebo existuje $F \in \mathbf{F}$ a $i_0,\dots,i_{n-1} < i$ takové, že n je četnost F a $s_i = F(s_{i_0},\dots,s_{i_{n-1}})$. Pak s je $\mathbf{F}$-odvození z X prvku $y = (s)_{lh(s)-1}$. Prvek je $\mathbf{F}$-*odvozený z* X, existuje-li jeho $\mathbf{F}$-odvození z X.

Induktivní definice

Induktivní definice množiny Y je seznam pravidel

- Každý prvek z X je v Y.
- Pro funkci F z $\mathbf{F}$, její četnost n a $\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ z Y^n je $F(y_1,\dots,y_n)$ v Y, jakmile $F \in \mathbf{F}$ s $\langle y_1,\dots,y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

Důkaz indukcí

Důkaz indukcí na objektech z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ prokazující, že každý prvek z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, je schema:

- Každý prvek z X má vlastnost V.
- Když každé $y_1,\dots,y_n$ z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, má $F(y_1,\dots,y_n)$ vlastnost V, jakmile $F \in \mathbf{F}$ a $\langle y_1,\dots,y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

(Vlastnosti uzávěru a důkazu indukcí)

Tvrzení 1.1.3 *Buď* $\mathbf{F}$ *množina funkcí konečných četností a* X *množina. Pak:*

1) $\mathbf{F}\langle X\rangle = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$, *kde* $X_0 = X$ *a* $X_{n+1} = X_n \cup \mathbf{F}\lceil X\rceil$.
2) $\mathbf{F}\langle X\rangle = \{y \mid y$ *je* $\mathbf{F}$-*odvozený z* $X\}$.
3) Platí-li schema důkazu indukcí na objektech, pak má každý prvek z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ *vlastnost* V.
4) $X' \subseteq X \Rightarrow \mathbf{F}\langle X'\rangle \subseteq \mathbf{F}\langle X\rangle$ *a* $X \subseteq \mathbf{F}\langle X\rangle = \mathbf{F}\langle\mathbf{F}\langle X\rangle\rangle$.

Obecná notace

Obecná notace je dvojice $\langle S, Ar_s\rangle$, kde $\emptyset \in S$, $Ar_S : S \to \mathbf{N}$. Platí, že S jsou symboly a Ar_s jejich četnosti. Konstantní symbol má četnost nulovou.

Notace

Notace je obecná notace obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Signatura

Signatura je dvojice $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$, kde $\underline{R}$ je obecná notace s nenulovými četnostmi a její prvky jsou relační symboly. A $\underline{F}$ je obecná notace, jejíž prvky jsou funkční symboly. Notace je funkční signatura, neboli signatura, kde $\underline{R} = \emptyset$.

Struktura

Struktura je trojice $\underline{A} = \langle A, R, F \rangle$, kde A je neprázdná množina (*univerzum*), R je soubor relací konečných četností a F je soubor funkcí konečných četností. Nulární funkce se nazývá konstanta. *Kardinalita* struktury $\underline{A}$ je velikost jejího univerza, tedy $\|\underline{A}\| = |A|$.

Podstruktura

Podstruktura struktury $\underline{A} = \langle A, R, F \rangle$ je struktura $\underline{B} = \langle B, R', F' \rangle$, kde:

a) $B \subseteq A$.
b) Relace R' jsou právě tvaru $\mathrm{R} \cap B^m$ s $\mathrm{R} \in R$ a m rovným četnosti R.
c) Funkce F' jsou právě tvaru $\mathrm{F} \cap (B^n \times B)$ s $\mathrm{F} \in F$ a n rovným četnosti F.

Realizace signatury

I Realizace signatury $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$ je struktura $\underline{A} = \langle A, R^A, F^A \rangle$, kde:

$$R^A = \langle R'_R \mid \mathrm{R} \in R \rangle \quad R'_R \subseteq A^{Ar(\mathrm{R})} \text{ je realizace R v } \underline{A} \text{ a značíme ji } \mathrm{R}^A.$$

$$F^A = \langle F'_F \mid \mathrm{F} \in F \rangle \quad F'_F : A^{Ar(\mathrm{F})} \to A \text{ je realizace F v } \underline{A} \text{ a značíme ji } \mathrm{F}^A.$$

Izomorfismus struktur

Nechť $\underline{A} = \langle A, R^A, F^A \rangle$ a $\underline{B} = \langle B, R^B, F^B \rangle$ jsou dvě $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$-struktury. Pak zobrazení $h : A \to B$ je *izomorfismus* struktur $\underline{A}$ a $\underline{B}$, když:

a) Zobrazení h je prosté a na.
b) Pro každé $\mathrm{R} \in R$, jeho četnost n a $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ je

$$\mathrm{R}^A(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathrm{R}^B(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

c) Pro každou $\mathrm{F} \in F$, její četnost n a $\langle a - 1$

Obor výrazů

Obor dezignátorů

(O jednoznačnosti dezignátorů)

(O výskytech dezignátorů)

(O substituci v dezignátorech)

Hodnota dezignátoru ve struktuře

2. Logika – výroková logika *(MP leden 2010)*

Jazyk

Výrokový jazyk nad $\mathbf{P}$ tvoří

- neprázdná množina $\mathbf{P}$ prvkovýroků,
- logické spojky $\neg, \rightarrow$.

Formule

Výroky či *výrokové formule* nad $\mathbf{P}$ jsou dezignátory $D(F_{\mathbf{P}})$, kde

$$F_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cup \{\neg, \rightarrow\}.$$

$VF_{\mathbf{P}}$ značí množinu všech výroků nad $\mathbf{P}$. *Výroková teorie* nad $\mathbf{P}$ je množina $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ a její prvky se nazývají *axiomy*.

Výrok je *literál*, je-li to prvovýrok nebo negace prvovýroku. Disjunkce literálů se nazývá *klauzule*. Konjunkce literálů se nazývá *elementární klauzule*.

Normální tvary

Výrok je v disjunktivně normálním tvaru, je-li to disjunkce konjunkcí literálů. Výrok je v konjunktivně normálním tvaru, je-li to konjunkce disjunkcí literálů.

Model

Pravdivostní ohodnocení $\mathbf{P}$ = *model výrokového jazyka nad* $\mathbf{P}$ je funkce $v \in {}^{\mathbf{P}}2$. *Hodnota* $\overline{v}(\varphi)$ *výroku* φ *z* $VF_{\mathbf{P}}$ *v ohodnocení* v je hodnota φ v $F_{\mathbf{P}}$-struktuře

$$\langle 2, v(p), -_1, \rightarrow_1 \rangle_{p \in \mathbf{P}}.$$

Říkáme, že v *je model* φ, jestliže $\overline{v}(p) = 1$, tedy φ platí (je splněno) ve v.

Dále v *je model teorie* $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$, když je modelem každého axiomu T, což značíme $v \models T$.

Pro $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ je $M^{\mathbf{P}}(T)$ *třída všech modelů teorie* T

$$M^{\mathbf{P}}(T) = \{v \in {}^{\mathbf{P}}2 \mid v \models T\}.$$

Sémantická ekvivalence

Buď $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$. Formule φ, ψ z $VF_{\mathbf{P}}$ jsou *T-símanticky ekvivalentní* $\varphi \sim_T \psi$, když platí

$$M^{\mathbf{P}}(T, \varphi) = M^{\mathbf{P}}(T, \psi).$$

Pravdivost v teorii

Formule φ je *pravdivá v teorii* T, platí-li v každém modelu v teorie T. $T \models \varphi$

Formule φ je *lživá v teorii* T, neplatí-li v žádném modelu teorie T. $T \models \neg\varphi$

Formule φ je *nezávislá v teorii* T, není-li pravdivá ani lživá v T.

Formule φ je *konzistentní s teorií* T *(splnitelná v* T*)* není-li lživá v T.

Formule φ je *silnější než* ψ *v teorii* T a ψ je *slabší* než φ, když $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

Množinu všech pravdivých $\mathbf{P}$-formulí v T značíme $\Theta_{\mathbf{P}}(T)$.

Množinu všech lživých $\mathbf{P}$-formulí v T značíme $\Theta'_{\mathbf{P}}(T)$.

Ekvivalentní teorie

Teorie S je *extenze teorie* T, když $\mathbf{P}(T) \subseteq \mathbf{P}(S)$ a $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$.

Je-li $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(S)$, je to *jednoduchá extenze*.

Teorie T je ekvivalentní S, je-li každá z nich extenzí druhé.

Axiomatizovatelnost

Teorie je *konečně axiomatizovatelná*, je-li ekvivalentní teorii s konečně axiomy.

Množina $K \subseteq {}^{\mathbf{P}}2$je *axiomatizovatelná*, resp. *konečně axiomatizovatelná*, když existuje teorie, resp. konečná teorie T taková, že $K = M(T)$.

Kompletní teorie

Teorie T je *kompletní*, jestliže má model a pro každou formuli φ jejího jazyka platí $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$, tedy T nemá nezávislý výrok.

(Sémantická kompaktnost)

Věta 2.1.13 *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Elementární konjunkce, otevřené a uzavřené množiny

Pro funkci $\sigma \subseteq \mathbf{P} \times 2$ značíme $\tilde{\sigma} = \{v \in {}^{\mathbf{P}}2 \mid \sigma \subseteq v\}$.

Pro konečnou funkci $\sigma \subseteq \mathbf{P} \times 2$ je *elementární konjunkce určená* σ formule ε_σ

$$\bigwedge_{p \in \operatorname{dom}(\sigma)} p^{\sigma(p)}.$$

Platí $M(\varepsilon_\sigma) = \tilde{\sigma}$.

Buď $K \subseteq {}^{\mathbf{P}}2$. Řekneme, že $v \in {}^{\mathbf{P}}2$ je *oddělené od* K, když existuje $\sigma \subseteq v$ konečné s $\tilde{\sigma} \cap K = \emptyset$.

Dále K je *uzavřená*, když K obsahuje každé v, které není oddělení od K.

K je *otevřená*, je-li její komplement uzavřená.

K je *obojetná*, jsou-li ona i její komplement uzavřené.

Dedukce

Předpoklady dedukce představují mimologické axiomy teorie T a logické axiomy. *Logické axiomy* LAx jsou dány schematy formulí:

- (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- (PL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- (PL3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Pravidlo dedukce je *pravidlo odloučení*, neboli *modus ponens* (MP)

$$\text{z } \varphi \text{ a } \varphi \to \psi \text{ odvoď } \psi.$$

Důkaz

Důkaz v T je $\{\text{MP}\}$-odvození t $T \cup$ LAx.

Je to *důkaz formule*, která je jeho posledním členem.

Teorém a vyvratitelná formule

Formule φ je *dokazatelná v* T = je *teorémem* T, existuje-li její důkaz v T. $T \vdash \varphi$.

Formule φ je *vyvratitelná v* T, když $T \vdash \neg\varphi$.

Množinu všech teorémů teorie T značíme $Thm(T)$. Je to tedy $\{\text{MP}\}$-uzávěr $T \cup$ LAx.

Speciálně jsou teorémy T definovány induktivními pravidly:

1. Každý axiom teorie T a každý logický axiom je teorém teorie T.
2. Jsou-li $\varphi, \varphi \to \psi$ teorémy teorie T, je ψ teorém T.

Bezesporná teorie

Teorie T je *sporná*, je-li v ní dokazatelná každá formule. Jinak je *bezesporná*.

(Existence modelu bezesporné teorie)

Tvrzení 2.2.3

1) (O korektnosti) *Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.*
2) *Má-li teorie model, je bezesporná.*

Tvrzení 2.2.4

1) $\vdash \varphi \to \varphi$.
2) (O dedukci) $T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$.

Tvrzení 2.2.5

a) $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ a $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ a $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$
b) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ a $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
d) $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
e) $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \psi$

(Věta o úplnosti výrokové logiky)

Tvrzení 2.2.6 *Buďte φ, ψ formule teorie T.*

1)
    a) *Teorie T je sporná, právě když je v ní dokazatelný spor.*
    b) (Důkaz sporem) $T, \neg\varphi$ *je sporná* $\Leftrightarrow T \vdash \varphi$.

2) *Buď T maximální bezesporná teorie. Pak platí:*
    a) $T \vdash \varphi \Leftarrow \varphi \in T \Leftarrow T, \varphi$ *je bezesporná.*
    b) $\varphi \in T \Leftarrow \neg\varphi \notin T$ *a také platí* $\varphi \to \psi \in T \Leftarrow \neg\varphi \in T$ *nebo* $\psi \in T$.
    c) *Ohodnocení v takové, že ($v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T$ pro každý prvovýrok p), je jediný model T.*

3) *Bezesporná teorie má maximální bezesporné rozšíření v témže jazyce.*

4) (O existenci modelu) *Teorie má model, právě když je bezesporná.*
5) (O kompaktnosti) *Teorie má model, právě když každá její konečná podteorie má model.*
6) (O úplnosti) $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$ *platí pro každou teorii* T *a její podformuli* φ.

Syntaktické metody dokazování – především 2.2.9

Vlastnost, že každá formule z S je dokazatelná v T, značíme symbolem $T \vdash S$. Znamená to, že $S \subseteq \mathrm{Thm(T)} \Leftrightarrow \mathrm{Thm(S)} \subseteq \mathrm{Thm(T)}$.

Platí *tranzitivita dedukce* $T \vdash S$ a $S \vdash S' \Rightarrow T \vdash S'$.

Speciálním případem je *tranzitivita* $\rightarrow$

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ a } T \vdash \psi \rightarrow \psi' \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi'$$

.

Tvrzení 2.2.9

1) $\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi, \psi \quad \text{a} \quad \varphi, \psi \vdash \varphi \,\&\, \psi$
2) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi\} \quad \text{a} \quad \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$
3) $T \vdash \varphi \,\&\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \text{ a } T \vdash \psi$
4) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ a } T \vdash \psi \rightarrow \varphi$
5) (Pravidlo tranzitivity $\leftrightarrow$) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ a $T \vdash \psi \quad \Rightarrow \quad \chi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$

Tvrzení 2.2.10

Syntakticky jsou dokazatelné: idempotence &, komutativita &, asociativita &, reflexivita $\leftrightarrow$, *symetrie* $\leftrightarrow$ *a idempotence* $\neg$.

Tvrzení 2.2.11

Syntakticky jsou dokazatelné následující ekvivalence:

1) $(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots))) \quad \leftrightarrow \quad ((\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_n) \rightarrow \psi)$
2) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \leftrightarrow \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \rightarrow \varphi))$
3) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \leftrightarrow \quad (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

Tvrzení 2.2.12 (O ekvivalenci)

Vznikne-li formule φ' *z* φ *nahrazením některého výskytu podformule* ψ *formulí* ψ'*, tak*

$$\vdash \quad \psi \leftrightarrow \psi' \quad \rightarrow \quad \varphi \leftrightarrow \varphi'$$
$$T \models \psi \leftrightarrow \psi' \quad \Rightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

Tvrzení 2.2.13

Syntaktiky jsou dokazatelné: de Morganovy vztahy, idempotence $\vee$*, komutativita* $\vee$*, asociativita* $\vee$.

Dále jsou syntakticky dokazatelné: pravidlo rozbor případů, distributivnost $\vee$ a & a další.

Booleovská pravidla

4. Logika – nerozhodnutelnost *(MP leden 2010)*

Definovatelné množiny

Nechť $\mathbf{A}$ je L-struktura a $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jsou L-formule a

$$D = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n \mid \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}.$$

Pak D je *množina definovaná v* $\mathbf{A}$ *formulí* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *bez parametrů*. D značíme $\varphi(\mathbf{A})$.

$\Sigma_{n,L}$ a $\Pi_{n,L}$-formule

$\Sigma_{n,L}$ a $\Pi_{n,L}$-formule definujeme induktivně:

- $\Sigma_{0,L}$-formule a $\Pi_{0,L}$-formule jsou právě omezené formule jazyka L.
- $\Sigma_{n+1,L}$-formule jsou právě tvaru $(\exists\overline{x})\varphi$, kde φ je nějaká $\Pi_{n,L}$-formule.
- $\Pi_{n+1,L}$-formule jsou právě tvaru $(\forall\overline{x})\varphi$, kde φ je nějaká $\Sigma_{n,L}$-formule.

$\Delta_{n,L}$-formule logicky ekvivalentní jak nějaké $\Sigma_{n,L}$-formuli, tak nějaké $\Pi_{n,L}$-formuli.

Kolekce

Nechť jazyk L obsahuje binární predikátový symbol $\leq$. *Axiom kolekce* pro L-formuli φ dle různých proměnných $x, \overline{y}$ je formule

$$(\forall x \leq u)(\exists\overline{y})\varphi \rightarrow (\exists v)(\forall x \leq u)(\exists\overline{y} \leq v)\varphi,$$

kde u, v se nevyskytují ve φ a jsou různé od všech $x, \overline{y}$. Značíme ji $B_\varphi^{x,\overline{y}}$, či B_φ.

Numerický jazyk

Numerický jazyk je jazyk obsahující $\langle S, 0\rangle$, kde S je unární funkční symbol *operace následníka* a 0 je konstantní symbol. Teorie v numerickém jazyce je *numerická teorie*. Konstantní term $S \cdots S0$, S aplikováno n-krát značíme $\underline{n}$ a nazýváme *n-tý numerál*.

Pak zavádíme pojem *aritmetika*, což je numerická teorie s jazykem

$$L^A = \langle S, +, \cdot, 0, \leq\rangle,$$

kde $+$ a $\cdot$ jsou binární funkční symboly a $\leq$ je binární relační symbol.

Robinsonova aritmetika

Robinsonova aritmetika Q je L^A-teorie [1] s axiomy:

(Q1)	$0 \neq Sx$	(Q2)	$Sx = Sy \ \rightarrow\ x = y$
(Q3)	$x + 0 = x$	(Q4)	$x + Sy = S(y + y)$
(Q5)	$x \cdot 0 = x$	(Q6)	$y \cdot Sy = x \cdot y + x$
(Q7)	$x \neq 0 \ \rightarrow\ (\exists y)(x = Sy)$	(Q8)	$x \leq y \ \leftrightarrow\ (\exists z)(z + x = y)$

Standardní model Robinsonovy aritmetiky je model $\mathbf{N} = \langle N, S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$.

[1] L^A-teorie je teorie jazyka $\langle S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$, kde S je operace následníka a $\underline{n}$ značí n-tý numerál, tedy S aplikováno n-krát na konstantní term 0.

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika P je rozšíření Q o *schema indukce* I, tvořené *axiomy indukce* I^x_φ, které mají tvar

$$(\varphi(0) \,\&\, (\forall x)(\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(Sx))) \;\rightarrow\; (\forall x)\varphi(x).$$

Aritmetiky $I\Sigma$

Aritmetika $I\Sigma_n$ je rozšíření Q o schema indukce I_{Σ_n}, tvořené všemi axiomy indukce I^x_φ, kde φ je Σ_n-formule.

Aritmetika $I\Sigma_{n,L}$[2] je rozšíření Q o schema indukce $I_{\Sigma_{n,L}}$, tvořené všemi axiomy indukce I^x_φ, kde φ je $\Sigma_{n,L}$-formule.

Aritmetizace – idea via ${}^\Delta\mathbf{N}$ a 4.2.11

IS-teorie je teorie S, která obsahuje axiomy $I\Sigma_{1,L(S)}$.

Δ_1-*extenze* teorie S je teorie S' získaná z S postupně prováděnou extenzí o symbol definovaný $\Delta_{1,L(S)}$-formulí právě extendované teorie S_0. Značíme ji $\mathbf{A}^{S'}$. Každý model $\mathbf{A} \models S$ lze jednoznačně expandovat do modelu S'.

Buď S nějaká IS-teroie. *Teorie* S^Δ se získá tak, že k ní přidáme pro každou Δ_1-formuli jazyka aritmetiky φ (relační) symbol $\mathcal{O}_\varphi$ a jeho definici formulí φ, přičemž splňuje-li φ podmínku existence a jednoznačnosti, přidáme ještě i funkční symbol $\mathcal{O}_\varphi$. Když $\mathbf{A} \models S^\Delta$, značíme ji $\mathbf{A}^{S^\Delta}$ či $\mathbf{A}^\Delta$ a interpretaci symbolu $\mathcal{O}$ teorie $\mathbf{A}^{S^\Delta}$ značíme $\mathcal{O}^\Delta$.

Snaha aritmetizace je převést vše na přirozená čísla. Každou formuli tedy potřebujeme zakódovat nějakým přirozeným číslem. Je několik možností, jak formule kódovat. Začněme kódováním dvojic – např. použijme Cantorovo diagonální uspořádání.

$a\backslash b$	0	1	2
0	0	1	3
1	2	4	.
2	5	.	.

Toto kódování dvojici (a, b) přiřadí číslo

$$\langle a, b\rangle = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a.$$

Když už umíme zakódovat dvojice, n-tice můžeme kódovat následovně:

$$\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle_{n+1} = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle_n\rangle,$$

[2] L je extenze jazyka L^A aritmetiky.

kde index n u pravé závorky značí kód n-tice. Závorky bez indexu značí kód dvojice, jak jsme ho zavedli. Jelikož formule jsou konečné n-sekvence, můžeme již kódovat formule.

Teorie BAS se získá jako Δ_1-extenze teorie $I\Sigma_1$. Definuje se binární funkční symbol

$$(x, y) = z \;\leftrightarrow\; \underline{2}z = (x + y + \underline{1})(x + y) + \underline{2}x,$$

kde (x, y) se nazývá *kód uspořádané dvojice*. Dále se definuje unární funkční symbol 2^x, který se nazývá *exponenciální dvojka*. Platí základní vlastnosti. Dále definujeme mnoho funkčních a relačních symbolů.

Řekneme-li, že A *je* Σ_n*-množina*, znamená to, že A je množina definovaná bez parametrů v $\mathbf{N}$ nějakou Σ_n-formulí. Obdobně pro Π_n a Δ_n.

Platí, že $A \subseteq \mathbf{N}^k$ je Δ_n, právě když A i $\mathbf{N}^k \setminus A$ je Σ_n.

Dále si zavedeme formuli $\varphi^{Prf}_{Ax}(x, y)$ jazyka $L(S^\Delta)$ vyjadřující, že y je důkazem x ⟨3⟩ a teorii extendujeme o symboly

$\mathrm{Prf}_{Ax}(x, y) \leftrightarrow \varphi^{Prf}_{Ax}(x, y)$	y je důkazem x
$\mathrm{Th}_{Ax}(x) \leftrightarrow (\exists y)(\mathrm{Prf}_{Ax}(x, y)\ \&\ \mathrm{Sent}(x))$	$x \in \mathrm{Th(Ax)}$, tzn. dokazatelná sentence
$\mathrm{nTh}_{Ax}(x) \leftrightarrow \mathrm{Th}_{Ax}(\langle \neg, x \rangle)$.	$x \notin \mathrm{Th(Ax)}$

Zavedeme strukturu ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ jako model teorie SA^Δ, kde $\mathrm{SA} = Th(\mathbf{N})$, tedy tzv. standardní aritmetika.

$${}^{\Delta}\mathbf{N} \models SA^\Delta$$

To znamená, že teorii SA rozšíříme o symboly definované Δ_1-formulemi. Pro každý takový symbol $\mathcal{O}$ teorie SA^Δ je $\mathcal{O}^\Delta$ jeho interpretace v ${}^{\Delta}\mathbf{N}$.

Pro jazyk L ve struktuře ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ je L*-axiomatika* množina $Ax \subseteq {}^{\Delta}Fm_L$. Teorie je nad ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ je jazyk L v ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ a nějaká L-axiomatika.

Buď T teorie nad ${}^{\Delta}\mathbf{N}$. Označme expanzi $\langle {}^{\Delta}\mathbf{N}, Ax_T \rangle$ do modelu $\mathrm{SA}^\Delta(Ax)$ jako ${}^{\Delta}\mathbf{N}(T)$.

Říkáme, že T je Δ_1*-axiomatizovaná*, je-li její axiomatika Δ_1. Dále T je Δ_1*-axiomatizovatelná*, je-li T ekvivalentní nějaké Δ_1-axiomatizované teorii. Obdobně pro Σ_1.

Jde nám tedy o to, že opět vše převádíme na čísla. To, že je jazyk z ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ a teorie nad ${}^{\Delta}\mathbf{N}$ znamená, že je vše kódováno přirozenými čísly. Daná axiomatika jsou pak zakódované axiomy teorie.

Místo $\mathrm{Prf}_{Ax}(x, y)$ píšeme $\mathrm{Prf}_T = \{\langle a, b \rangle \in \mathbf{N}^2 \mid \langle {}^{\Delta}\mathbf{N}, Ax_T \rangle \models \varphi^{Prf}_{Ax}[a, b]\}$.

⟨3⟩ $Ax(x)$ je unární relační symbol vyjadřující, že x je mimologickým axiomem T.

Rozhodnutelnost

Teorie T je *rozhodnutelná*, když Th_T je Δ_1. Jinak je *nerozhodnutelná.*

TVRZENÍ 4.2.13

1) *Když teorie T je $\Delta_1[\Sigma_1]$-axiomatizovaná, Prf_T je $\Delta_1[\Sigma_1]$ a Th_T i nTh_T jsou Σ_1.*
2) *Kompletní Σ_1-axiomatizovaná teorie T je rozhodnutelná.*

Důkaz: První plyne z definic Prf_T a Th_T a nTh_T.

Druhé je již důsledek prvního, neboť pokud je T Σ_1-axiomatizovaná, tak Th_T je Σ_1 a jelikož je kompletní, tak se dokáže, že $\mathbf{N}\setminus \mathrm{Th}_T$ je Σ_1. Neboť x není z Th_T právě tehdy, když je z nTh_T (což je Σ_1), nebo to není sentence (což je asi definováno Δ_1 formulí). Tedy Th_T je Δ_1, tedy T je rozhodnutelná. ♡

Relace $R \subseteq \mathbf{N}^2$ je Σ_1-*kompletace* L-teorie T, jestliže

1) R je Σ_1 (množina).
2) Pro každé $a \in \mathrm{dom}(R)$ je $R[a]$ L-axiomatika kompletní extenze teorie T.
3) Každá kompletní L-extenze teorie T je ekvivalentní L-teorii s axiomatikou tvaru $R[a]$.

TVRZENÍ 4.2.15 (Kompletační kriterium rozhodnutelnosti)

Když teorie T je Σ_1-axiomatizovaná a má Σ_1-kompletaci, je rozhodnutelná.

Reprezentovatelnost

Funkce $F : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ a relace $R \subseteq \mathbf{N}^n$ reprezentujeme v T nějakou formulí.

TVRZENÍ 4.3.2 (O reprezentaci funkcí a relací z Δ_1 v Robinsonově aritmetice Q)

1) *Každá totální funkce ze Σ_1 je reprezentována v Q nějakou Σ_1-formulí.*
2) *Každá relace z Δ_1 je reprezentována v Q nějakou Σ_1 formulí.*

Nerozhodnutelnost

VĚTA 4.3.3 (O Δ_1-neoddělitelnosti)

Buď T bezesporná numerická L-teorie a nechť každá Δ_1-podmnožina $\mathbf{N}$ je reprezentovaná v T.

1) Když $P \subseteq \mathbf{N}$ odděluje Th_T a nTh_T (tedy obsahuje jednu a je disjunktní s druhou), tak platí nějaký ošklivý štrúdl pro nějakou ještě ošklivější relaci.
2) Th_T a nTh_T nelze oddělit Δ_1-množinou $A \subseteq \mathbf{N}$ a speciálně je tedy T nerozhodnutelná.
3) Když T je navíc Σ_1-axiomatizovaná a A je Δ_1 nadmnožina $Th_T \cup nTh_T$, tak $A \setminus (\ Th_T \cup nTh_T)$ není Σ_1.

VĚTA 4.3.4 (O nerozhodnutelnosti)

Bezesporná teorie rozšiřující Robinsonovu aritmetiku Q je nerozhodnutelná. Je-li navíc Σ_1-axiomatizovaná, není kompletní.

Bezesporná teorie T rozšiřující Robinsonovu aritmetiku Q je bezesporná numerická teorie a platí, že každá Δ_1 množina lze v Q reprezentovat. Proto je T nerozhodnutelná (dle 4.3.3.2)). Je-li Σ_1-axiomatizovaná, tak není kompletní, jinak bychom se dostali do sporu s 4.2.13.2).

TVRZENÍ 4.3.6

1) *Buď T' extenze T o konečně definic nebo jednoduchá extenze T o konečně axiomů. Pak je-li T' nerozhodnutelná, je i T nerozhodnutelná.*
2) *Buď T' konzervativní extenze T. Pak je-li T nerozhodnutelná, je T' nerozhondutelná.*

TVRZENÍ 4.3.7

Teorie T v jazyce aritmetiky, která nemá žádné mimologické axiomy, je nerozhodnutelná a nekompletní.

Aritmetika Q je nerozhodnutelná (dle 4.3.4 (O nerozhodnutelnosti)) a je to jednoduchá extenze T o konečně axiomů (o 8), tedy podle 4.3.6 je i T nerozhodnutelná. A jelikož má Δ_1-axiomatiku (prázdnou?), což je i Σ_1-axiomatika, tak je nekompletní (dle 4.3.12.2)).

Struktura $\mathbf{A}$ je *silně nerozhodnutelná*, je-li nerozhodnutelná každá teorie, která ji má za model.

Buď $\mathbf{A}$ struktura s jazykem konečné signatury. Struktura $\mathbf{A}$ je *definovatelná* ve struktuře $\mathbf{B}$, jestliže $A \subseteq B$ je definovaná bez parametrů v $\mathbf{B}$ a každá relace nebo funkce z $\mathbf{A}$ je restrikcí na A nějaké relace nebo funkce definované bez parametrů v $\mathbf{B}$.

TVRZENÍ 4.3.9

Standardní model $\mathbf{B}$ přirozených čísel je silně nerozhodnutelná struktura.

Důkaz: Buď $\mathbf{N} \models T$. Pak $T \cup Q$ je bezesporné rozšíření Q, tedy dle 4.3.4 to je nerozhodnutelná teorie. A jelikož je to jednoduché rozšíření T o konečně axiomů, tak je i T dle 4.3.6 nerozhodnutelná.

VĚTA 4.3.10 (O silně nerozhodnutelné struktuře)

Je-li $\mathbf{A}$ silně nerozhodnutelná struktura definovatelná ve struktuře $\mathbf{B}$, je i $\mathbf{B}$ silně nerozhodnutelná struktura.

VĚTA 4.3.11

1) *Struktura $\mathbf{B} = \langle \mathbf{Z}, +, -, ., 0, 1 \rangle$ celých čísel je silně nerozhodnutelná.*
   Důsledek: Teorie okruhů, komutativních okruhů a oborů integrity jsou nerozhodnutelné.
2) *Struktura $\langle \mathbf{Q}, +, -, ., 0, 1 \rangle$ racionálních čísel je silně nerozhodnutelná.*
   Důsledek: Teorie těles a teorie těles charakteristiky 0 jsou nerozhodnutelné.

Stačí jen ukázat, že standardní model je definovatelný ve struktuře $\mathbf{B}$ tak, že $\mathbf{N}$ definujeme v $\mathbf{Z}$ pomocí formule $\varphi(x)$ v jazyce struktury $\mathbf{B}$

$$(\exists a, b, c, d)(a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = x).$$

Že tato formule definuje právě přirozená čísla nám dává Lagrangeova věta o 4 čtvercích. Dále stačí jen definovat následníka jako $S(a) = a + 1$ a $\leq$ jako

$$a \leq b \leftrightarrow (\exists c \in \mathbf{N})(a + c = b).$$

(První Gödelova věta)

LEMMA 4.3.12 (Diagonální lemma) *Buď T rozšíření teorie Q. Pak pro formuli $\varphi(v_0)$ teorie T existuje její sentence $\varphi*$ tak, že $T \vdash \varphi* \leftrightarrow \varphi(\underline{\varphi*})$.*

Formule $\tau(x)$ numerické teorie T je *definice pravdy v T*, jestliže pro každou sentenci φ teorie T platí $T \vdash \varphi \leftrightarrow \tau(\underline{\varphi})$.

TVRZENÍ 4.3.14

1) V bezesporném rozšíření teorie Q neexistuje definice pravdy.
2) Th($\mathbf{N}$) není aritmetická množina.

VĚTA 4.3.15 (První Gödlova věta) *Buď T bezesporná Δ_1-axiomatizované rozšíření Q. Pak existuje Π_1-sentence pravdivá v $\mathbf{N}$ a nedokazatelná v T.*

Speciálně když $\mathbf{N} \models T$, tak existuje sentence nezávislá v T.

Rekurze a Δ_1-definované funkce a relace

Rekurzivní funkce definujeme induktivně následujícími pravidly:

RF1. Funkce $S(x) = x + 1$ (následník), $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pro $0 < i \leq n$ a $0 < n$ (i-tá projekce), $x + y$, $x \cdot y$ a $K_<$ jsou základní rekurzivní funkce.

RF2. Je-li H k-ární rekurzivní funkce a $G_1, \ldots G_k$ jsou m-ární rekurzivní funkce, je složená funkce $F(\overline{a}) = H(G_1(\overline{a}), \ldots, G_n(\overline{a}))$ rekurzivní.

RF3. Je-li G speciální⟨4⟩ rekurzivní $(m + 1)$-ární funkce, pak je $\mu x(G(\overline{a}, x) = 0)$⟨5⟩ rekurzivní m-ární funkce.

TVRZENÍ 4.4.7

1) Totální číselná funkce, resp. relace je rekurzivní, právě když je z Δ_1.
2) Číselná relace je rekurzivně spočetná, právě když je ze Σ_1.

Silně nerozhodnutelné struktury

Expanze L-struktury $\mathbf{A}$ je *nepodstatná*, je-li její jazyk extenzí L pouze o konstantní symboly.

LEMMA 4.5.2 (O nepodstatné expanzi)

Je-li nepodstatná expanze $\mathbf{A}'$ struktury $\mathbf{A}$ silně nerozhodnutelná, je $\mathbf{A}$ silně nerozhodnutelná.

TVRZENÍ 4.5.3

Grupa $\langle Perm(\mathbf{Z}), \cdot, Id\rangle$ je silně nerozhodnutelná.

⟨4⟩ Funkce F s aritou $(n + 1)$ je *speciální*, platí-li $(\forall \overline{a})(\exists x)F(\overline{a}, x) = 0$.
⟨5⟩ Vrací minimální x, pro které platí $G(\overline{a}, x) = 0$.

TVRZENÍ 4.5.4

Buď $\mathbf{D_4} = \langle \mathbf{N}, R_4^D \rangle$, *kde*

$$R_4^D = \{\langle 1, m, n, m+n \rangle \ \mid m, n, \in \mathbf{N}\} \cup \{\langle 0, m, n, m \cdot n \rangle \ \mid m, n, \in \mathbf{N}\}.$$

Struktura $\mathbf{D_4}$ *je silně nerozhodnutelná.*

Důsledek: Každý jazyk $\langle R \rangle$ *(prázdná teorie s tímto jazykem), kde* R *je kvartérní relační symbol, je nerozhodnutelný.*

Standardní model je definovatelný ve struktuře $\langle \mathbf{N}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, která je zase definovatelná v $\mathbf{D_4}$ (stačí jen definovat konstanty 0 a 1 a binární funkční symboly $\cdot$ a $+$ pomocí formulí v $\mathbf{D_4}$). Jelikož standardní model je silně nerozhodnutelný, tak i $\langle \mathbf{N}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ a $\mathbf{D_4}$ jsou silně nerozhodnutelné.

TVRZENÍ 4.5.5

Buď $\mathbf{D_2} = \langle \mathbf{N} \cup \mathbf{N}^2 \cup \{\infty\}, R_2^D \rangle$, *kde* R_2^D *je*

$$\{\langle \langle m, n \rangle, \langle m', n' \rangle \rangle \mid R_4^D(m, n, m', n')\} \cup$$

$$\cup \{\langle m, \langle m, n \rangle \rangle \mid m, n \in \mathbf{N}\} \cup$$

$$\cup \{\langle \langle m, n \rangle, n \rangle \mid m, n \in \mathbf{N}\} \cup$$

$$\cup \{\langle \infty, m \rangle \mid m \in \mathbf{N}\} \cup$$

$$\cup \{\langle \langle m, n \rangle, \infty \rangle \mid m, n \in \mathbf{N}\} \cup$$

Struktura $\mathbf{D_2}$ *je silně nerozhodnutelná.*

Důsledek: Každý jazyk $\langle R \rangle$ *(prázdná teorie s tímto jazykem), kde* R *je binární relační symbol, je nerozhodnutelný.*

Definujme $\mathbf{D_4}$ v nepodstatné expanzi $\mathbf{D_2}$, kterou rozšíříme o konstantní symbol e^D značící ∞. Pak relační symbol $R_4^D(x, y, x', y')$ definujeme formulí $\varphi(x, y, x', y')$ tvaru

$$R_2(e, x) \ \& \ R_2(e, y) \ \& \ R_2(e, x') \ \& \ R_2(e, y') \ \&$$

$$(\exists u, u')(\ \ R_2(u, e) \ \& \ R_2(u', e) \ \& \ R_2(u, u') \ \&$$

$$\& \ R_2(x, u) \ \& \ R_2(u, y) \ \& \ R_2(x', u') \ \& \ R_2(u', y') \ \ ).$$

TVRZENÍ 4.5.6

Existuje silně nerozhodnutelný (obyčejný) graf.

Definujme $\mathbf{D_2}$ v nepodstatné expanzi $\mathbf{A}'$ struktury $\langle A, P^A \rangle$.

TVRZENÍ 4.5.7

1) *Existuje silně nerozhodnutelný svaz.*
2) *Existuje silně nerozhodnutelná struktura* $\langle B, F^B, G^B \rangle$, *kde* F^B, G^B *jsou unární funkce.*

Najdeme strukturu izomorfní s $\mathbf{A}$ definovatelnou v $\mathbf{B} = \langle B, \leq^B \rangle$.

Definujme $\mathbf{A}$ v $\mathbf{B}$.

5. Logika – eliminace kvantifikátorů *(MP leden 2010)*

Elementární podstruktura

Struktura $\mathbf{A}$ je *elementární podstuktura* struktury $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \prec \mathbf{B},$$

jestliže je to podstruktura struktury $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

a pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathbf{A}$ a $\overline{a} \in A^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[\overline{a}].$$

Platí, že je-li $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ a φ je bezkvantifikátorová, tak $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Dále platí, že pokud $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, tak $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Modelová kompaktnost

Teorie T je *modelově kompletní*, když pro každé její dva modely $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}$ platí $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Vnoření

Funkce $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je *(izomorfní) vnoření* $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, je-li prostá a platí:

(e1) Pro každé $m > 0$ a každý m-ární relační symbol R jazyka L a $a_1, \ldots, a_m$ z A je $R^A(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow R^B(f(a_1), \ldots, f(a_m))$.

(e2) Pro každé $m > 0$ a každý m-ární funkční symbol F jazyka L a $a_1, \ldots, a_m$ z A je $f(F^A(a_1, \ldots, a_m)) = F^B(f(a_1), \ldots, f(a_m))$.

Elementární vnoření

Je-li $f[\mathbf{A}] \prec \mathbf{B}$, říkáme, že f je *elementární vnoření* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$.

Neboli vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ je elementární právě, když pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathbf{A}$ a $\overline{a} \in A^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

Parciální vnoření $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ je funkce $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každou atomickou (nebo ekvivalentně otevřenou) L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

Parciální vnoření f lze *bezprostředně prodloužit*, když pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $f \cup \{\langle a, b\rangle\}$ je parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$.

Prvomodel

Model teorie T je její *algebraický prvomodel*, lze-li jej vnořit do každého modelu teorie T. Model teorie T je její *prvomodel*, lze-li jej elementárně vnořit do každého modelu teorie T.

Má-li T prvomodel $\mathbf{A}$, je $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathbf{A})$ a T je tedy kompletní, neboť každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s $\mathbf{A}$.

TVRZENÍ 5.1.3

Má-li teorie T algebraický prvomodel a je modelově kompletní, je kompletní a její algebraický prvomodel je její prvomodel.

Eliminace kvantifikátorů

Nejmenší množina formulí obsahující množinu Γ formulí, uzavřená na $\neg$, $\&$, $\vee$ se značí $b(\Gamma)$ a její prvky se nazývají *booleovské kombinace* formulí z Γ.

Buď Γ množina L-formulí a T teorie v L. Množina Γ je *eliminační pro teorii* T, jestliže ke každé L-formuli $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x}) > 0$ existuje booleovská kombinace $\psi(\overline{x})$ formulí z Γ tak, že $T \vdash \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$. Je-li Γ množina všech atomických L-formulí, říkáme, že T *má eliminaci kvantifikátorů*.

TVRZENÍ 5.2.3

Má-li T eliminaci kvantifikátorů, je modelově kompletní.

Je-li formule φ tvaru $(\exists y)\chi$, kde χ je elementární konjunkce, říkáme, že φ je *1-primitivní*.

Je-li formule φ tvaru $(\exists y)\chi$, kde χ je bezkvantifikátorová formule, říkáme, že φ je *1-existenční*.

Pokud máme $\overline{y}$ místo y, říká se, že φ je *primitivní*, resp. *existenční*.

Teorie T je *[1]-koexistenční*, když pro $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ a neprázdné konečné parciáln ívnoření f modelu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ a každou [1]-primitivní formuli $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x}) > 0$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{l(\overline{x})}$ je

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

TVRZENÍ 5.2.5 *Buď T teorie.*

1) (Eliminační ekvivalent) *T má eliminaci kvantifikátorů $\Leftrightarrow$ T je koexistenční $\Leftrightarrow$ T je 1-koexistenční.*
2) (Eliminační kriterium) *Když pro každé $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ bezprostředně prodloužit, má T eliminaci kvantifikátorů.*

Když pro každé $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ bezprostředně prodloužit, je T 1-koexistenční.