JAK NA STEJNOMĚRNOU KONVERGENCI

$f_n, f : J \to \mathbb{R}$

$f_n \to f$ bodově $\Leftrightarrow \forall x \in J \ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in J \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall [c,d] \subset J$ pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$

Věta: $f_n, f : J \to \mathbb{R}$. Označ $\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$

pak $f_n \rightrightarrows f$ na $J \Leftrightarrow \sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Věta: f_n spoj, $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$ spoj.

tedy f_n spoj. na J & f není spoj. na $J \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ na J

Postup řešení

1) najít funkci, ke které budou f_n konvergovat (vyzkoušet klíčové body intervalu)
- pokud f_n spoj. a f není spoj $\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$, tedy vyloučit problém. bod, řešit $\overset{loc}{\rightrightarrows}$

2) najít $\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$

   a) odhadnout funkci shora (pokud jde odhad k 0)

   b) průběhem funkce ~~~~ najdeme maximum v bodě m (pro n pevné), maximum dosadit ~~~~ za x, vypočítat supremum

3) $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, pokud nejde σ_n k 0 pokračovat bodem 4), jinak f_n konverguje (i lokálně) k f

4) najdeme problémový bod (pravděpodobně lze určit podle toho, k čemu jde m (maximum) pokud $n \to \infty$) tento bod pomocí δ nebo k vyloučíme a řešíme znovu od bodu 2) pro nový interval = lokální konv.

5) po vyřešení lokál. konv. převedeme na stejnom. konv.

   př.: $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[0; 1-\delta] \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $[0; 1)$

Postup:

1) najít f i f_n spojité, f nespojitá $\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$; přejít na 4)

2) najít σ_n
   a) odhad
   b) průběh

3) $\sigma_n \to 0$ — ano — $f_n \rightrightarrows f$; konec
   — ne — přejít na 4)

4) vyloučit problémový bod (δ / K); řešit od 2) pro nový interval

5) $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ převést na $\rightrightarrows$

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE ŘAD FUNKCÍ

Def.: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na $M \subset \mathbb{R} \iff s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \rightrightarrows$ na M

Věta: (nutná podmínka)
$\sum u_n(x) \rightrightarrows$ na $M \Rightarrow u_n(x) \rightrightarrows 0$ na M

Věta: (Weierstrassovo kritérium)
a) $\forall x \in M \ |u_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$
b) $\sum a_n$ K
Pak $\sum u_n(x) \rightrightarrows$ na M

Věta: (o spojitosti řady funkcí)
$u_n(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$, u_n spoj.
$\sum u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(a,b) \Rightarrow F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spoj. na (a,b)

Věta: $\sum u_n(x)$ na (a,b) $\exists u_n'$ (přehození Σ a derivace)
(i) $\exists x_0 \ \sum u_n(x_0)$ K
(ii) $\sum u_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b)
Pak pro $F(x) = \sum u_n(x)$ platí $F'(x) = \sum u_n'(x)$

Věta: (A-D)
$b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots \geq b_n(x) \geq \ldots \geq 0$
(A) $\sum a_n(x) \rightrightarrows$ & $b_n(x)$ omezená,
nebo
(D) $b_n \rightrightarrows 0$ & $a_n(x)$ má omezené částeč. součty
Pak $\sum a_n(x) \cdot b_n(x) \rightrightarrows$

(seznam na další straně)

Omezení

Částečné součty:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = (-1)^n \quad \text{na } \mathbb{R} \\ a_n = \left.\begin{array}{l}\sin nx \\ \cos nx\end{array}\right\} \text{na } [\delta; 2\pi - \delta] + 2k\pi \end{array}}$$

Věta (B-C)

$\sum u_i(x) \rightrightarrows \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in \dots$

$$\left|\sum_{i=n}^{m} u_i(x)\right| < \varepsilon$$

Postup řešení 0) možná potřeba zjistit pro jaká x Σ konverguje

1) najdeme $\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$

2) $\sigma_n \not\to 0 \Rightarrow u_n \not\rightrightarrows 0 \Rightarrow \sum u_n \not\rightrightarrows$

3) $\sigma_n \to 0$ & $\sum \sigma_n K \overset{\text{Weierst.}}{\Rightarrow} \sum u_n \rightrightarrows$

4) $\sigma_n \to 0$ & $\sum \sigma_n D \Rightarrow ?$
- zkusit A-D nebo B-C

5) pro zjištění spojitosti použít větu (o spoj. řady funkcí)
pro zjištění derivace použít větu (přehození Σ a der.)

MOCNINNÉ ŘADY

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada

R je poloměr konvergence:

$|x-a| < R \Rightarrow \Sigma K$
$|x-a| > R \Rightarrow \Sigma D$

Věta (hodnota poloměru konvergence)

$R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Pokud $\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak

$R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Moravskoslezský kraj, 28. října 117, 702 18 Ostrava
Tel.: 595 622 222, fax: 595 622 126
E-mail: podatelna@kr-moravskoslezsky.cz, www.kr-moravskoslezsky.cz

Věta (abel) Jestliže $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = R$, pak $\sum \rightrightarrows$ na $[0; R]$ a tedy $\sum a_n R^n = \lim_{x \to R_-} \sum a_n x^n$

Věta: $\sum a_n x^n \ldots R_1 \qquad \sum b_n x^n \ldots R_2$

$$\left(\sum a_n x^n\right)' = \sum a_n n x^{n-1} \quad \forall |x| < R_1$$

$$\int \left(\sum a_n x^n\right) = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \forall |x| < R_1$$

$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n \quad \forall |x| < \min(R_1, R_2)$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Postup řešení

- Pro ~~...~~ součet řad lze využít abel - vytvoříme z ní mocninnou řadu s ~~...~~ $R = 1$ a vypočítáme součet limitou
- Pro rozvinutí vzorců do řad se dá použít poslední věta (většinou je třeba vzorec upravit - derivace / převést na součin)

FOURIEROVY ŘADY

Def.: f 2π-periodická $\qquad f \in R([0; 2\pi]) \hat{=}$ R-integrovatelná

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Koeficienty:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx$$

Věta: $f \in P_{2\pi}$

a) Je-li f po částech monotónní, pak

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

b) $\exists f'(x) \Rightarrow F_f(x) = f(x)$

Moravskoslezský kraj

f lichá $\Rightarrow a_k = 0$; f sudá $\Rightarrow b_k = 0$

Věta: (Parseval)

$$\int_0^{2\pi} (f)^2 = \frac{a_0^2}{2}\cdot\pi + \pi\sum(a_k^2 + b_k^2)$$

$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\right)$ Pozn.: Pomocí Parsevala zjistíme, že součet úplně jiné řady je nějaké číslo

---

Postup řešení:

A) Výpočet Fourierovy řady

1) spočítáme a_k, b_k a a_0

2) určíme vzorec Fourierovy řady dle:

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

3) pokud se to po nás chce, zjistíme chování řady v daném bodě pomocí

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$ (pokud je f po částech monot.)

B) sinová / cosinová řada

1) interval rozšíříme tak, aby byl souměrný podle 0

2) funkci upravíme tak, aby byla: ~~lichá~~
lichá pro sinovou řadu $\Rightarrow a_k = 0$
sudá pro cosinovou řadu $\Rightarrow b_k = 0$
ale, aby její původní část zůstala nezměněna.

3) vyřešíme ~~f~~ Fourierovou řadu.

C) součet řady

1) najdeme k původní řadě mocninnou řadu

Moravskoslezský kraj, 28. října 117, 702 18 Ostrava
Tel.: 595 622 222, fax: 595 622 126
E-mail: podatelna@kr-moravskoslezsky.cz, www.kr-moravskoslezsky.cz

tak, aby ~~x~~ se nám po derivaci něco zkrátilo

2) Pokud je potřeba znovu derivovat můžeme něco vytknout, aby se opět něco zkrátilo.

3) Zpátky ~~x~~ integrujeme (nezapomenout doplnit vytknuté věci, po každé integraci porovnat s odpovídající derivací původní řady a vypočítat $\underline{c}$.

4) Pokud jsme se pohybovali na hranici konvergence, musíme použít Abela.