Jak na totální diferenciál, implicitní funkce a vázané extrémy

Totální diferenciál

Formálně

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f : G \to \mathbf{R}$ a $x \in G$. *Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné* nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t},$$

pokud limita existuje.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je *totální diferenciál funkce f v bodě a*, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Věta L 7 (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** *Nechť f má v bodě $a \in \mathbf{R}^n$ spojité parciální derivace, tedy funkce*

$$x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \ j = 1, \ldots, n$$

jsou spojité v a. Pak $Df(a)$ existuje.

Věta L 2 (o tvaru totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbf{R}^n$ platí*

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Postup výpočtu

1) Chce-li se to po nás, nalezneme spojité rozšíření na $\mathbb{R}^n$, tedy zkusíme najít limitu v problémovém bodě (typicky počátek)
   a) Zkusíme jít k bodu z různých směrů ($x = 0$, $y = 0$, $x = y$, …).
   b) Pokud limity nejsou stejné, limita neexistuje ⟹ Nelze spojitě rozšířit ⟹ Přejdeme na 2)
   c) Pokud jsou limity stejné, odhadneme funkci tak, abychom ukázali, že se ze všech směrů blíží k danému bodu.
2) Pro $[x, y, \ldots] \neq \mathit{problémový\ bod}$ vypočítáme totální diferenciál
   a) Vypočítáme parciální derivace (=provedeme derivace podle jednotlivých proměnných).

   b) Ukážeme, že parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^n \setminus problémový\ bod \Longrightarrow$ existuje totální diferenciál
   c) Určíme totální diferenciál podle vzorečku ve větě 2.
3) Vypočítáme totální diferenciál pro problémový bod
   a) Určíme parciální derivace v problémovém bodě (podle vzorečku v první definici, kde druhý člen čitatele známe – je to limita spočítaná v bodě 1))
   b) Prohlásíme, že pokud existuje totální diferenciál, pak se musí rovnat vzorečku z věty 2, kam dosadíme za parciální derivace (pravděpodobně vyjde 0)
   c) Určíme, k čemu se blíží diferenciál podle definice a tím ověříme, jestli existuje. Dosadíme tedy do vzorečku z druhé definice, kde *h* je *n*-rozměrný vektor a *a* je problémový bod (také *n*-rozměrný vektor)
   d) Pokud se hodnota určená v bodě c) rovná 0, tak totální diferenciál existuje a rovná se hodnotě vypočítané v bodě b).
4) Napíšeme závěr, ve kterém shrneme naše výsledky do jedné funkce.

Příklad

Nalezněte spojité rozšíření funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ na $\mathbb{R}^2$ a spočtěte parciální derivace a totální diferenciál všude, kde existují.

1) Problémový bod: $[0,0]$
   a) $x = 0$: $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\left(y^2\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = 0$

      $y = 0$: $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$

      $x = y$: $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\left(2x^2\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right) = 0$
   b) Jsou stejné
   c) (x^2+y^2) se blíží k 0 a $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ je omezená $\Longrightarrow$ celá funkce se blíží k 0
2) $[x,y] \neq [0,0]$
   a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2x$

      $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2y$$
   b) $\frac{\partial f}{\partial x}\ a\ \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité (sp. + sp. = sp.; sp. × sp. = sp.; sp.(sp.) = sp.) v $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\} \Longrightarrow$ $\exists Df([x,y])$
   c) $Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot$ $\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2xh_1 + 2y\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2yh_2$
3) $[x,y] = [0,0]$
   a) $\frac{\partial f}{\partial x}([0,0]) = \lim_{t\to0}\frac{f([0+t,0])-f([0,0])}{t} = \lim_{t\to0}\frac{t^2\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)-0}{t} = 0$

      $$\frac{\partial f}{\partial y}([0,0]) = \lim_{t\to0}\frac{f([0,0+t])-f([0,0])}{t} = \lim_{t\to0}\frac{t^2\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)-0}{t} = 0$$
   b) pokud $\exists Df([0,0])$ pak $Df([0,0])(h) = \frac{\partial f}{\partial x}([0,0])h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}([0,0])h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0$

c) $\lim_{h\to 0} \frac{f([0+h_1,0+h_2])-f([0,0])-0}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cdot \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} =$

$= \lim_{h\to 0}\big(0\cdot(\le 1)\big) = 0$

d) $0 = 0 \Longrightarrow \exists Df([0,0]) = 0$

4) $Df(a)(h) = 2x\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2xh_1 + 2y\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) +$
$(x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2yh_2 \quad [x,y]\neq[0,0]$

$Df(a)(h) = 0 \quad [x,y] = [0,0]$

Implicitní funkce

Formálně

Definice. Nechť $G\subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G\to \mathbf{R}$. Řekneme, že $f\in C^1(G)$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$, na G a jsou to spojité funkce na G.

Věta T 8 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G\to\mathbf{R}$, $\tilde{x}\in\mathbf{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbf{R}$, $(\tilde{x},\tilde{y})\in G$ a nechť platí:*

$$(i)\ F\in C^1(G),$$
$$(ii)\ F(\tilde{x},\tilde{y}) = 0,$$
$$(iii)\ \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})\neq 0.$$

Pak existuje okolí $U\subset\mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V\subset\mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x\in U$ existuje právě jedno $y\in V$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi\in C^1(U)$ a platí

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}\ \text{pro všechna } x\in U \text{ a } j = 1,\ldots,n.$$

Věta T 9 (o implicitních funkcích - bez důkazu)**.** *Nechť $G\subset\mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j : G\to\mathbf{R}$, $j = 1,\ldots,m$, $\tilde{x}\in\mathbf{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbf{R}^m$, $(\tilde{x},\tilde{y})\in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j\in C^1(G)$ *pro* $j = 1,\ldots,m$,

(ii) $F_j(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, *tedy* $F_j(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_m) = 0$ *pro* $j = 1,\ldots,m$,

(iii) determinant $m\times m$ matice parciálních derivací F_j je nenulový, tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U\subset\mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V\subset\mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x\in U$ existuje právě jedno $y\in V$ s vlastností $F_j(x,y) = 0$ pro každé $j = 1,\ldots,m$. Píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, pak $\varphi_j\in C^1(U)$ pro $j = 1\ldots,m$.

Postup výpočtu

1) Ověříme předpoklady pro zadané funkce f_i, bod *a*, vybrané souřadnice $y = (y_1, \dots, y_m)$ a zbylé souřadnice $x = (x_1, \dots)$. (*m* je většinou rovno počtu funkcí. Pokud je menší, pak je jedno, pomocí kterých rovnic se bude počítat.)
   a) $\forall i \in \{1, \dots, m\}: f_i \in C^1$
   b) $\forall i \in \{1, \dots, m\}: f_i(a) = 0$
   c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a) \end{vmatrix} \neq 0$
2) Platí-li předpoklady, pak prohlásíme, že na okolí bodu *a* lze $y_1, \dots, y_m$ popsat jako graf funkce *F* vzniklé z *f* nahrazením proměnných y_i funkcemi $y_i(x)$.
3) Funkci *F* zderivujeme podle požadovaných souřadnic a do výsledných rovnic dosadíme bod *a*. Rovnice je potřeba počítat od nejjednodušších (jedna derivace) po složitější (více po sobě jdoucích derivací).

Příklad

Pro funkci $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ dokažte, že na okolí bodu [0,0,1] lze určit proměnnou *z*, jako funkci a spočtěte následující derivace: $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$

1) Ověříme předpoklady
   a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ sp., ostatní analogicky $\Longrightarrow f(x, y, z) \in C^1$
   b) $f(0,0,1) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$
   c) $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 2z = 2 \neq 0$
2) Tedy na okolí bodu [0,0,1] lze *y* popsat jako graf funkce $x^2 + y^2 + z^2(x, y) - 1 = 0$
3) z_x: $2x + 2z(x, y)z_x(x, y) = 0$

   $$z_x(x, y) = \frac{-2x}{2z(x,y)} = \frac{-2\cdot 0}{2\cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

   z_{xx}: $2 + 2z_x(x, y)z_x(x, y) + 2z(x, y)z_{xx}(x, y) = 0$

   $$z_{xx}(x, y) = \frac{-2 - 2\big(z_x(x, y)\big)^2}{2z(x, y)} = \frac{-2 - 0}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

   z_{xy}: $0 + 2z_y(x, y)z_x(x, y) + 2z(x, y)z_{xy}(x, y) = 0$

   $$z_{xy}(x, y) = \frac{-2z_x(x, y)z_y(x, y)}{2z(x, y)} = \frac{0 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

   z_y: $2y + 2z(x, y)z_y(x, y) = 0$

   $$z_y(x, y) = \frac{-2x}{2z(x, y)} = \frac{-2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

   z_{yy}: $2 + 2z_y(x, y)z_y(x, y) + 2z(x, y)z_{yy}(x, y) = 0$

   $$z_{yy}(x, y) = \frac{-2 - 2\left(z_y(x, y)\right)^2}{2z(x, y)} = \frac{-2 - 0}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vázané extrémy

Formálně

Věta T 10 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $s < n, f, g_1, \ldots, g_s \in C^1(G)$ a mějme množinu*

$$M = \{x \in \mathbf{R}^n : g_1(x) = \ldots = g_s(x) = 0\}.$$

Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory

$$\Big(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a),\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)\Big)$$
$$\vdots$$
$$\Big(\frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a),\ \frac{\partial g_s}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a)\Big)$$

jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \ldots + \lambda_s Dg_s(a) = 0$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \ldots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) + \ldots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Poznámka: Předchozí věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému!

Postup výpočtu

1) Ověříme předpoklady pro funkci *f* a funkce g_i tvořící množinu *M*.
   a) Množina *M* je uzavřená. Dokážeme pomocí toho, že g_i jsou spojité funkce a že obor hodnot inverzní funkce je uzavřený, pokud je původní obor hodnot uzavřený. Případně provedeme ještě průnik těchto oborů hodnot, což je opět uzavřená množina.
   b) Množina *M* je omezená – najdeme nějakou kouli, do které se *M* vejde.
   c) Funkce *f* je spojitá.
   d) Pokud platí a) a b), pak je *M* kompaktní a pokud platí ještě c), pak *f* nabývá na *M* extrémů.
2) Vypočítáme extrémy uvnitř množiny *M*.
   a) Položíme $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ a odtud vypočítáme souřadnice $x_1, \cdots, x_n$, čímž dostaneme podezřelé body.
3) Vypočítáme extrémy na okraji množiny *M*.

   a) Ověříme, že Dg_i nejsou lineárně závislé. Případně najdeme body v M, pro které jsou lineárně závislé a ty zařadíme mezi podezřelé body.
   b) Sestavíme soustavu rovnic:
      $$\frac{\partial}{\partial x_j}(f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m) = 0$$
      $$g_i = 0$$
      Tuto soustavu vyřešíme, čímž dostaneme další podezřelé body.
4) Ve všech podezřelých bodech vypočítáme hodnotu funkce f a vybereme z nich maximum a minimum.

Příklad

Najděte minimum a maximum funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na množině
$S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$

1) Ověříme předpoklady
   a) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ spojitá
      $S = g^{-1}\big((-\infty, 100]\big) \Longrightarrow$ uzavřená.
   b) $S \subset B(0{,}200) \Longrightarrow$ omezená.
   c) Funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ je spojitá.
   d) S omezená & S uzavřená $\Longrightarrow$ S kompaktní & f spojitá $\Longrightarrow$ f nabývá na S minima a maxima.
2) $M = \{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$
   a) $0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$
      $$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$
      $$0 = \frac{\partial f}{\partial z} = 6z$$
      $\Longrightarrow x = 0 \,\&\, y = 0 \,\&\, z = 0 \Longrightarrow$ podezřelý bod $[0{,}0{,}0]$
3) $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 100\}$
   a) Dg je lineárně závislá $\Leftrightarrow Dg = (0{,}0{,}0)$
      $Dg = (2x, 2y, 2z) \neq (0{,}0{,}0)$ na okolí S
   b) $2x + \lambda 2x = 0$
      $4y + \lambda 2y = 0$
      $6z + \lambda 2z = 0$
      $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

      $x = 0: y = 0: z^2 = 100 \Longrightarrow z = \pm 10$

      $y \neq 0: \lambda = \dfrac{-4y}{2y} = -2$
      $6z - 4z = 0 \Longrightarrow z = 0$
      $y^2 = 100 \Longrightarrow y = \pm 10$

      $x \neq 0: \lambda = \dfrac{-2x}{2x} = -1$
      $4y - 2y = 0 \Longrightarrow y = 0$
      $6z - 2z = 0 \Longrightarrow z = 0$
      $x^2 = 100 \Longrightarrow x = \pm 10$
4) $f(0{,}0{,}0) = 0 \Longrightarrow$ minimum
   $f(\pm 10{,}0{,}0) = 100$
   $f(0, \pm 10{,}0) = 200$
   $f(0{,}0, \pm 10) = 300 \Longrightarrow$ maximum