<u>Priklad</u>:
Mame funkci $f(x, y)=x^2+y^2-2x+4y$ na mnozine $M=\{[x,y];x^2+y^2\leqslant 25\}$. Zjistete globalni extremy funkce f.

<u>Reseni</u>:
- pozorovani: f je spojita na M, M je kompaktni → existuji globalni extremy.

- i-ty stacionarni bod budu znacit S_i .

1) Vysetrim funkci uvnitr mnoziny M ($M=\{[x,y];x^2+y^2<25\}$).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)=2x-2=0\rightarrow x=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)=2y+4=0\rightarrow y=-2$$

$$\rightarrow S_1=[1,-2]$$

Pro funkci f existuje jen jeden stacionarni bod S_1 , nyni zkontroluji, zda vyhovuje podmince:

$$x^2+y^2<25$$
$$1^2+(-2)^2<25$$
$$1+4<25$$
$$5<25$$

→ OK, pokracujeme.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, takze pro bod S_1 (i kdyz na promennych nezalezi) je matice $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ pozitivne definitni, coz znamena, ze v bode S_1 je lokalni minimum.

2) Vysetrim funkci na hranici mnoziny M ($M=\{[x,y];x^2+y^2=25\}$).

Sestavim tedy Lagrangeovu funkci:

$$L(x, y)=x^2+y^2-2x+4y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

Vytvorim si tri rovnice o trech neznamych a spocitam je:

$$L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 2(x - 1 + \lambda x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$L'_y = 2y + 4 + 2\lambda y = 2(y + 2 + \lambda y) = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{1+\lambda}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-2}{1+\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; \lambda_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{5},\;\; \lambda_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{5}$$

Pro λ_1 vyjde $S_2 = [\sqrt{5}, -2\sqrt{5}]$, pro λ_2 to je $S_3 = [-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$

Sestavim matici L'' :

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda,\;\; L''_{yy} = 2 + 2\lambda,\;\; L''_{xy} = L''_{xy} = 0$$

$$L'' = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$L''(S_2) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \ldots \textit{pozitivne definitni} \rightarrow \textit{v } S_2 \textit{ je lokalni minimum}$$

$$L''(S_3) = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \ldots \textit{negativne definitni} \rightarrow \textit{v } S_3 \textit{ je lokalni maximum}$$

Lokalni maximum je jen jedno, tudiz v S_3 je globalni maximum.
Lokalni minima jsou dve, takze porovname body S_1 a S_2 :

$$f(S_1) = 1^2 + (-2)^2 - 2*1 + 4(-2) = 1 + 4 - 2 - 8 = -5$$

$$f(S_2) = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 4(-2\sqrt{5}) = 5 + 20 - 10\sqrt{5} = 5(5 - 2\sqrt{5}) \simeq 2.639$$

$$f(S_1) < f(S_2) \;\rightarrow\; S_1 \textit{ je globalni minimum.}$$