3.6. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 3.6.1. :

Rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(x) + \mathbf{L} + a_{n-1} \cdot y'(x) + a_n \cdot y(x) = f(x) \ ,$$

kde $a_1, \mathbf{L}, a_n \in R$,

nazýváme lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Je-li $f(x) = 0$, nazýváme rovnici homogenní, v opačném případě nehomogenní.

Poznámka 3.6.1. :

Takovou rovnicí je např. úloha

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \ .$$

Řešení spočívá v nalezení dvou lineárně nezávislých funkcí, které tu rovnici splňují.

Uvažme ještě jednodušší případ - máme najít řešení rovnice

$$y' - y = 0 \quad \Rightarrow y' = y \ .$$

Je to rovnice 1.řádu, hledám jednu funkci, která tu rovnici splňuje, ale takovou funkci každý zná - e^x , je tedy $y_H = C \cdot e^x$.

A vraťme se k původní úloze. Vlastnosti exponenciely přímo nabízejí možnost, že fundamentální systém naší rovnice tvoří dvě exponenciální funkce

$$e^{l_1 x},\ e^{l_2 x} \ .$$

Snadno zjistíme existenci čísel $l_1,\ l_2$:

Předpokládané řešení typu e^x a jeho derivace

$$y = e^{l x}, \qquad y' = l \cdot e^{l x}, \qquad y'' = l^2 \cdot e^{l x} \ ,$$

dosadíme do rovnice a upravíme

$$\left(l^2 - 4l + 3 \right) e^{l x} = 0 \ .$$

Rovnice

$$l^2 - 4l + 3 = 0$$

se nazývá charakteristická rovnice,

v našem případě má dvě reálná řešení

$$l_1 = 1,\quad l_2 = 3 \ ,$$

která nazýváme charakteristická (vlastní) čísla diferenciální rovnice.

Snadno lze zjistit, že funkce e^x, e^{3x} jsou lineárně nezávislé, tudíž obecné řešení je

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{3x} \ .$$

Věta 3.6.1. :

Nechť $l_1, \mathbf{L}, l_k, \quad k \le n$ jsou vlastní čísla rovnice

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \mathbf{L} + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0 \quad .$$

Potom funkce

$$e^{l_1 x}, \mathbf{L}, e^{l_k x}$$

patří do fundamentálního systému.

Je-li $k \le n$, jsou některá vlastní čísla vícenásobnými kořeny charakteristické rovnice. Takové r -násobné vlastní číslo l_i dodá do fundamentálního systému

(kromě $e^{l_i x}$) funkce

$$x\, e^{l_i x}, \quad x^2 e^{l_i x}, \quad \mathbf{L}, \quad x^{r-1} e^{l_i x} \quad .$$

Poznámka 3.6.2. :

Od rovnice s reálnými koeficienty očekáváme reálné řešení.
Ale těžko zabráníme algebraické rovnici n -tého stupně, aby měla kořeny komplexní.

V takovém případě totiž získáme do fundamentálního systému funkce typu

$$y = e^{(a + i b)x}, \quad a, b \in R ,$$

což vypadá odpudivě.

Lze to spravit - stačí a je nutné znát tzv. Eulerovu formuli pro goniometrický tvar komplexního čísla :

$$e^a (\cos b + i \sin b) = e^{a + i b} \quad .$$

Je zřejmě ($\cos x$ je sudá, $\sin x$ je lichá funkce)

$$e^{b i} = \cos b + i \sin b$$

$$e^{-b i} = \cos b - i \sin b$$

a odtud

$$\cos b = \frac{1}{2}\left(e^{b i} + e^{-b i}\right), \quad \sin b = \frac{1}{2}\left(e^{b i} - e^{-b i}\right) .$$

Takže pro vlastní čísla

$$l_1 = a + i\, b \quad , \quad l_2 = a - i\, b$$

máme v obecném řešení lineární kombinaci

$$C_1\, e^{(a + i b)x} + C_2\, e^{(a - i b)x} =$$

Označme nejdříve

$$C_2 = C_1 + K \quad .$$

Potom platí

$$C_1 + \frac{K}{2} = C_2 - \frac{K}{2} = \hat{C}_1 \quad .$$

A budeme pokračovat

$$= e^{a x} \left(C_1\, e^{i b} + C_2\, e^{-i b} + K \cos b\; x - K \cos b\; x\right) =$$

$$= e^{a\,x}\left[C_1 e^{ib} + C_2 e^{-ib} + \frac{K}{2}\left(e^{ib\,x} + e^{-ib\,x}\right) - \frac{K}{2}\left(e^{ib\,x} + e^{-ib\,x}\right)\right] =$$

$$= e^{a\,x}\left[\left(C_1 + \frac{K}{2}\right)e^{ib\,x} + \left(C_2 - \frac{K}{2}\right)e^{-ib\,x} - \frac{K}{2}e^{ib\,x} + \frac{K}{2}e^{-ib\,x}\right] =$$

$$= e^{a\,x}\left[\hat{C}_1\left(e^{ib\,x} + e^{-ib\,x}\right) - \frac{K}{2}\left(e^{ib\,x} - e^{-ib\,x}\right)\right] =$$

$$= e^{a\,x}\left[\frac{\hat{C}_1}{2}\cos b\,x - K\sin b\,x\right] = e^{a\,x}\left[C_1\cos b\,x + C_2\sin b\,x\right] \ .$$

Dvojici komplexních vlastních čísel

$$l_{1,2} = a \pm i\,b$$

s případnou násobností r tedy v obecném řešení reprezentuje lineární kombinace reálných funkcí

$$x^{r-1}\cdot\left(C_1\cdot e^{a\,x}\cdot\cos b\,x + C_2\cdot e^{a\,x}\cdot\sin b\,x\right) \ .$$

Příklad 3.6.1. :

Najdeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y'' + 6y' + 13 = 0 \ :$$

Charakteristická rovnice $l^2 + 6l + 13 = 0$

má komplexně sdružené kořeny $l_{1,2} = -3 \pm 2i$.

Obecné řešení má tvar

$$y_H = C_1 e^{(-3+2i)x} + C_2 e^{(-3-2i)x} = e^{-3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) \ .$$

Příklad 3.6.2. :

Rovnice $y'' - 2y' + y = 0$ má charakteristickou rovnici

$$l^2 - 2l + 1 = 0 \ ,$$

s dvojnásobným kořenem

$$l_{1,2} = 1 \ .$$

Fundamentální systém tedy obsahuje funkci e^x , druhou stvoříme podle věty 3.6.1. :

Násobnost $r = 2$, tedy další funkce je $x\cdot e^x$.

Obecné řešení je tudíž

$$y_H = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x \ .$$

Příklad 3.6.3. :

Rovnice $y''' - y = 0$ má charakteristickou rovnici

$$l^3 - 1 = 0, \quad \text{t.j.} \quad l^3 = 1, \ \text{resp.}$$

$$(l-1)(l^2 + l + 1) = 0,$$

charakteristická čísla jsou

$$l_1 = 1, \quad l_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Obecné řešení je

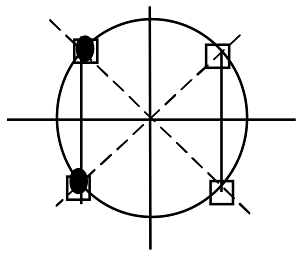
$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2} \ .$$

Příklad 3.6.4. :

Rovnice $y^{(4)} + y'' + y = 0$ má charakteristickou rovnici

$$l^4 + l^2 + 1 = 0, \quad \text{resp.} \ (l^2)^2 + (l^2) + 1 = 0,$$

● $$(l^2)_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$



charakteristická čísla jsou

□ $$l_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad l_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Obecné řešení je

$$y_H = C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_4 e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2} \ .$$

Lineární rovnice s konstantními koeficienty s nenulovou pravou stranou

Podobně jako u rovnic 1.řádu nazýváme následující postup hledání řešení nehomogenní rovnice **variace konstant**, nebo **metoda neurčitých koeficientů**.

Příklad 3.7.1. :

Zkusme najít řešení rovnice

$$y'' + y = \operatorname{cotg}^2 x$$

variací konstant - ono to stejně jinak nejde ...

Najdeme nedříve obecné řešení homogenní rovnice

$$y'' + y = 0 \ .$$

Charakteristická rovnice $l^2 + 1 = 0$ má komplexní kořeny.
Vlastní čísla jsou tedy

$$l_{1,2} = \pm i$$

a obecné řešení je

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x \ .$$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \ .$$

Derivujeme

$$y_p' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \quad + \quad C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x$$

$$y_p'' = -C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x \quad - \quad C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x$$

Derivace červeného pytle tu chybí, derivovat nulu je zbytečné …

Soustava rovnic je tedy ***násobme a sčítejme : 1.*** ***2.***

$$C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \qquad /*\cos x \qquad /*\sin x$$

$$-C_1'\sin x + C_2'\cos x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \qquad /*\ -\sin x \qquad /*\cos x$$

$$C_1' \qquad = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$C_2' \qquad = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

Stačí integrovat

$$C_1 = -\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx = \int\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)dx = -\cos x - \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} =$$
$$= -\cos x - \ln\sqrt{\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|}$$

$$C_2 = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x\,dx = \int\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x \ ,$$

A můžeme psát řešení :

$$y = y_H + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 - \cos x - \ln\sqrt{\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|} \ .$$

Poznámka 3.7.3. :

Pro některé tvary pravé strany rovnice lze na štěstí partikulár odhadnout v příjemnějším tvaru.

Totiž, uvažujeme-li stejně jako při objevování fundamentálního systému homogenní rovnice, je vidět, že když má pravá strana tvar exponenciály, nebo součinu exponenciály a polynomu, musí partikulár mít tvar dosti podobný.

Jednoduše napsáno - lze-li pravou stranu upravit na tvar

$$P_k(x)\,e^{(a+ib)x} \ ,$$

pak partikulár má obdobný tvar

$$Q_k(x)\,x^r e^{(a+ib)x} \ ,$$

kde r je násobnost čísla $a+ib$ mezi vlastními čísly rovnice.

Obvykle se užívá reálné formulace, i když je poněkud těžkopádná :

Lze-li pravou stranu rovnice upravit na tvar

$$e^{a\,x}\cdot\left(P_k(x)\ \cos b\ x+Q_l(x)\ \sin b\ x\right)\ ,$$

kde P_k, Q_l jsou mnohočleny stupně k , resp. l , potom partikulár nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru

$$y_p = x^r\cdot e^{a\,x}\cdot\left(R_m(x)\cos b\ x+S_m(x)\sin b\ x\right)\ ,$$

kde

r je násobnost čísla $a+ib$ mezi vlastními čísly homogenní rovnice,

R_m, S_m jsou mnohočleny stupně $m=\max(k,l)$.

Koeficienty mnohočlenů R_m, S_m spočteme po dosazení y_p (a jeho derivací) do rovnice.

Příklad 3.7.2. :

Pokusme se o řešení rovnice

$$y''-3y'+2y=e^x(3-4x)+2\cos^2 x\ .$$

Snadno zjistíme, že vlastní čísla jsou

$$l_1=1,\quad l_2=2\ .$$

Obecné řešení homogenní úlohy je

$$y_H=C_1e^x+C_2e^{2x}\ .$$

Zkusme najít partikulární řešení nehomogenní úlohy.

Pravá strana tak docela předchozí poznámce nevyhovuje, ale lze to spravit:

$$f=\left[e^x(3-4x)\right]+[1]+\left[-\cos 2x\right]=f_1+f_2+f_3\ .$$

Ke každé části pravé strany budeme hledat partikulár „zvlášť“ a jejich součet - opět díky linearitě rovnice - bude partikulárem pro celou pravou stranu.

Pro

je

$$\boxed{f_1 = e^x(3-4x) = e^{1x}\left[(3-4x)\cos 0x + Q_1(x)\sin 0x\right]}$$

$$a + ib = 1 \qquad \Rightarrow \quad r=1, \quad k=1, \quad l=1 \quad \Rightarrow \quad m=1$$

a partikulár má tvar

$$\boxed{y_1 = x \cdot e^x(ax+b)\ .}$$

Koeficienty a, b spočteme dosazením partikuláru do rovnice.
K tomu je třeba spočítat derivace $y_1', \ y_1''$. Protože výpočty bývají dost rozsáhlé, je rozumné vést zápisy tak, abychom si udrželi přehled pokud možno co nejdéle :

$$\begin{array}{ll} +2\cdot/ & y_1 = e^x(ax^2+bx) \\ -3\cdot/ & y_1' = e^x(ax^2+bx) + e^x(2ax+b) \\ +1\cdot/ & y_1'' = e^x(ax^2+bx) + e^x(2ax+b) + e^x(2ax+b) + e^x 2a \end{array}$$

Srovnáme sčítance rovnou podle funkcí :

$$e^x\left\{x^2\left[2a-3a+a\right] + x\left[2b-3b-6a+b+2a+2a\right] + \left[-3b+b+b+2a\right]\right\} =$$

$$= e^x\{-4x+3\}$$

Polynomy na obou stranách rovnice musí být stejné.

Pro koeficienty u mocniny x^2 už je vidět, že to zatím může být bez chyby. (Nulu přece čekáme)

Pro koeficienty u mocniny x máme

$$-2a = -4, \quad \Rightarrow \quad a = 2\ .$$

A konečně pro prosté členy na obou stranách rovnice máme

$$2a - b = 3, \quad \Rightarrow \quad b = 1\ .$$

Máme spočteno -

$$\boxed{y_1 = e^x(2x^2 + x)}.$$

Pro

$$\boxed{f_2 = 1 = e^{0x}\left(P_0 \cos 0x + Q_0 \sin 0x\right)}$$

je

$$a + ib = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0, \quad k = 0, \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

a partikulár má tvar

$$\boxed{y_2 = c \ .}$$

Tady jsou výpočty jednoduché :

$$y_2' = y_2'' = 0 \ ,$$

a po dosazení do rovnice je rovnou

$$2c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2} \quad .$$

Máme spočteno -

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{2} \quad .}$$

Konečně pro

$$\boxed{f_3 = \cos 2x = e^{0x}\left(P_0 \cos 2x + Q_0 \sin 2x\right)}$$

je $\quad a + ib = 2i \quad \Rightarrow \quad r = 0, \quad k = 0, \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

a partikulár hledejme ve tvaru

$$\boxed{y_3 = d \cos 2x + g \sin 2x \ .}$$

Pro dosazení opět spočteme derivace $y_3', \quad y_3''$ a hned šikovně zapíšeme :

$$\begin{array}{ll} +2\cdot / & y_3 = d\cos 2x + g\sin 2x \\ -3\cdot / & y_3' = -2d\sin 2x + 2g\cos 2x \\ +1\cdot / & y_3'' = -4d\cos 2x - 4g\sin 2x \\ \hline \end{array}$$

$$\cos 2x\cdot[2d-6g-4d]+\sin 2x\cdot[2g+6d-4g]=\cos 2x$$

A máme soustavu rovnic

$$\left.\begin{array}{r} -6g-2d=1 \\ -2g+6d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-\dfrac{1}{10} \\ g=-\dfrac{3}{10} \end{array}\right. .$$

Třetí partikulár je tedy

$$\boxed{y_3 = -\frac{1}{10}(\cos 2x + 3\sin 2x)\ .}$$

Řešení diferenciální rovnice tedy má tvar

$$y = y_H + y_1 + y_2 + y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x(2x^2+x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{10}(\cos 2x + 3\sin 2x)\ .$$

Poznámka :

Koeficienty a,b,c,d,g můžeme také hledat všechny současně. Sepíšeme dohromady celý partikulár

$$y_p = y_1 + y_2 + y_3 = xe^x(ax+b) + c + d\cos 2x + g\sin 2x\ ,$$

zderivujeme a dosadíme do rovnice najednou ...