ÚLOHY Z VÝROKOVÉ LOGIKY

Logika s konečně prvovýroky.

UV.1.1. Počty výroků, pravdivých výroků a teorií.

Buď $|\mathbb{P}| = l$ přirozené nenulové, $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ nechť má model.

1. Existuje 2^{2^l} neekvivalentních $\mathbb{P}$-teorií a právě 2^l kompletních neekvivalentních $\mathbb{P}$-teorií.

2. Teorie T má $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$ neekvivalentních pravdivých a také lživých výroků a dále má $(2^{|\mathsf{M}(T)|} - 2) \cdot 2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$ neekvivalentních nezávislých výroků.

3. Existuje právě $|\mathsf{M}(T)|$ neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí T a $2^{|\mathsf{M}(T)|}$ neekvivalentních jednoduchých extenzí T (z nichž jediná je sporná).

4. Kolik je $\sim_T$-neekvivalentních nezávislých výroků teorie T?
   Řešení: $2^{\mathsf{M}(T)} - 2$.

5. Buď $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. Kolik je neekvivalentních výroků φ' takových, že $\varphi' \sim_T \varphi$.
   Řešení: Pro uvažované φ' musí právě platit: $\mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi') = \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi)$. Je jich tedy tolik, kolik je různých podmnožin množiny ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{M}(T)$, tj. $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$.

UV.1.2. Počty výroků a teorií.

Buď $|\mathbb{P}| = l$ přirozené nenulové.

1. Nechť φ je výrok. Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?

   Návod: Spočtěte, kolik je množin $\mathsf{M}(\psi)$ pro uvažovaná ψ.

   Řešení: $2^m + 2^{2^l - m} - 1$, kde $m = |\mathsf{M}(\varphi)|$. Je to počet množin $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ takových, že $K \subseteq \mathsf{M}(\varphi)$ nebo $\mathsf{M}(\varphi) \subseteq K$.

2. Nechť $\{\varphi, \psi\}$ nemá model. Kolik je neekvivalentních pravdivých výroků teorie $\{\varphi \vee \psi\}$?

   Návod: Hledané číslo vyjádřete pomocí $l, |\mathsf{M}(\varphi)|, |\mathsf{M}(\psi)|$.

   Řešení: $2^{2^l - (|\mathsf{M}(\varphi)| + |\mathsf{M}(\psi)|)}$. Je totiž $|\mathsf{M}(\varphi \vee \psi)| = |\mathsf{M}(\varphi) \cup \mathsf{M}(\psi)| = |\mathsf{M}(\varphi)| + |\mathsf{M}(\psi)|$; poslední rovnost plyne z $\mathsf{M}(\varphi) \cap \mathsf{M}(\psi) = \mathsf{M}(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \emptyset$.

UV.1.3.

Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ množina všech prvovýroků.

1. a) Ekvivalentními úpravami najděte disjunktivně normální tvar následujícího výroku χ:

$$(p \to \neg q) \mathbin{\&} (\neg p \to q) \mathbin{\&} r.$$

   Řešení: $(p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} r) \vee (\neg p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} r)$. Možný postup:
   $(p \to \neg q) \mathbin{\&} (\neg p \to q) \mathbin{\&} r \quad \sim \quad (\neg p \vee \neg q) \mathbin{\&} (p \vee q) \mathbin{\&} r$
   $\sim \quad (((\neg p \vee \neg q) \mathbin{\&} p) \vee ((\neg p \vee \neg q) \mathbin{\&} q)) \mathbin{\&} r$
   $\sim \quad ((p \mathbin{\&} \neg q) \vee (\neg p \mathbin{\&} q)) \mathbin{\&} r \quad \sim \quad (p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} r) \vee (\neg p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} r)$
   Užilo se tvrzení o ekvivalenci a „booleovská pravidla“.

   b) Uveďte počet neekvivalentních nezávislých výroků teorie $\{\chi\}$.
   Řešení: $|\mathbb{P}| = 3$, $|\mathsf{M}(\chi)| = 2$, tedy hledané číslo je $2^{2^3 - 2}(2^2 - 2) = 2^7$.

   c) Uveďte počet neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie $\{\chi\}$.
   Řešení: $|\mathsf{M}(\chi)| = 2$. Uvažovaná teorie $\{\chi'\}$ musí právě splňovat $\mathsf{M}(\chi') \subseteq \mathsf{M}(\chi)$; uvažovaných χ' je tedy právě tolik, kolik je podmnožin $\mathsf{M}(\chi)$, tj. $2^2 = 4$.

2. a) Ekvivalentními úpravami najděte disjunktivně normální tvar následujícího výroku χ:

$$\neg(p \,\&\, q) \,\&\, (p \vee q) \,\&\, r.$$

Řešení: $(p \,\&\, \neg q \,\&\, r) \vee (\neg p \,\&\, q \,\&\, r)$.

b) Uveďte počet neekvivalentních pravdivých výroků teorie $\{\chi\}$.

Řešení: $2^{2^3-2} = 2^6 = 64$.

c) Kolik je neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie $\{\chi\}$?

Řešení: 2.

Různé výrokové spojky.

UV.1.4. Dualita $\vee$ a $\&$.

Duální výrok φ^* k výroku φ, zapsanému jen pomocí $\neg, \vee, \&$, se získá z φ nahrazením každého výskytu prvovýroku v něm jeho negací a záměnou $\vee$ a $\&$. Platí

$$\models \neg\varphi \leftrightarrow \varphi^*.$$

Návod: Užijte indukci na výrocích.

UV.1.5. Pierceova spojka.

Zkratka za $\neg(\neg\varphi \to \psi)$ buď $\varphi \downarrow \psi$; je to tzv. *Pierceova spojka*, značící „ani-ani“.

1. $\varphi \downarrow \psi$ je ekvivalentní s $\neg\varphi \,\&\, \neg\psi$.

2. K výroku φ najděte výrok s ním ekvivalentní a napsaný jen pomocí $\downarrow$.

3. K výroku $\varphi \to \psi$ najděte výrok s ním ekvivalentní a napsaný jen pomocí $\downarrow$.

UV.1.6. Výlučná disjunkce.

Buď $\varphi \dot{-} \psi$ zkratka za $(\varphi \,\&\, \neg\psi) \vee (\psi \,\&\, \neg\varphi)$; je to logická spojka zvaná *výlučná disjunkce* čili *XOR*.

1. Dokažte pomocí „booleovských“ úprav:
   a) $\varphi \dot{-} \psi \sim \psi \dot{-} \varphi$.
   b) $\varphi \dot{-} \psi \sim (\varphi \vee \psi) \,\&\, \neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim (\varphi \vee \psi) \,\&\, (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
   c) $\neg(\varphi \dot{-} \psi) \sim \varphi \leftrightarrow \psi \sim \neg(\neg\varphi \dot{-} \neg\psi)$.

2. Najděte disjunktivně normální a konjunktivně normální ekvivalenty k $p \dot{-} q$.

3. Asociativitu $\dot{-}$.
   a) Dokažte $\models \varphi \dot{-} (\psi \dot{-} \chi) \leftrightarrow (\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi$.
   b) Dokažte $\vdash \varphi \dot{-} (\psi \dot{-} \chi) \leftrightarrow (\varphi \dot{-} \psi) \dot{-} \chi$ syntakticky.

   Návod: Užívejte „booleovských pravidel“, tj. komutativitu $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, asociativitu $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ atd.

4. a) $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{-} \neg\varphi) = {}^{\mathbb{P}}2$.
   b) $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{-} \varphi) = \emptyset$.

UV.1.7. Výroky jen se spojkami $\vee, \&, \to$.

1. Je-li výrok φ napsaný jen pomocí spojek $\vee, \&, \to$ a v ohodnocení identicky rovné 1, tak $v(\varphi) = 1$.

   Řešení: Výrok φ je designátor z $\mathrm{D}(\mathbb{P} \cup \{\vee, \&, \to\})$; dokazujme tvrzení indukcí na $\mathrm{D}(\mathbb{P} \cup \{\vee, \&, \to\})$. Je-li φ z $\mathbb{P}$, platí to. Nechť φ je $\varphi_0 \diamond \varphi_1$ s $\diamond$ rovným $\vee, \&, \to$ a pro φ_0, φ_1 nechť tvrzení platí. Pak ($\&_1$ značí $\wedge_1$)

$$v(\varphi) = v(\varphi_0) \diamond_1 v(\varphi_1) = 1 \diamond_1 1 = 1.$$

2. Žádný z výroků $\neg p, \perp, \neg p \vee \neg q, p \dot{-} q$ není ekvivalentní výroku napsanému jen pomocí spojek $\vee, \&, \to$.

Řešení: v identicky rovné jedné je modelem každého výroku napsaného jen pomocí spojek $\vee, \&, \rightarrow$, avšak není modelem žádného z výroků $\neg p, \perp, \neg p \vee \neg q, p \dot{-} q$.

Vlastnosti axiomatizovatelnosti.

UV.1.8.

1. Buď $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$. Pak existuje nejmenší množina K', $K \subseteq K' \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$, která je axiomatizovatelná.

Návod: Uvažujte průnik všech axomatizovatelných nadmnožin K.

Řešení: Průnik všech axomatizovatelných nadmnožin množiny K je axiomatizovatelný.

2. Buď $0 < n$ přirozené. Pro n teorií $\{T_i;\ i < n\}$ nějakého jazyka definujme teorii

$$T = \{\bigvee_{i<n}\varphi_i;\ \varphi_i \in T_i \text{ pro } i < n\}. \tag{1}$$

a) Platí $\bigcup_{i<n} \mathsf{M}(T_i) = \mathsf{M}(T)$.

Řešení: Pro $v \in \bigcup_{i<n} \mathsf{M}(T_i)$ je jistě $v \models T$. Když $v \in -\bigcup_{i<n} \mathsf{M}(T_i)$, tak $v \not\models T_i$ a existuje tedy $\varphi_i \in T_i$ tak, že $v(\varphi_i) = 0$ pro $i < n$. Pak $v(\bigvee_{i<n} \varphi_i) = 0$, tedy $v \not\models T$.

b) Buď $\emptyset \neq K = \{v_0, \dots, v_{n-1}\} \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$. Pro každé $v_i \in K$ existuje teorie T_i s jediným modelem v_i. Je-li T jako v (1), tak $K = \mathsf{M}(T)$. Navíc není K konečně axiomatizovatelná, je-li $\mathbb{P}$ nekonečné.

UV.1.9. Teorie T se spočetným $\mathsf{M}(T)$ a algebrou AM_T rovnou algebře konečných-duálně konečných množin.

Buď $\mathbb{P} = \{p_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ (spočetné). Pro $k \in \mathbb{N}$ buď $v_k(p_n)$ rovno 1 pro $n < k$ a 0 jinak. Buď $w = \mathbb{P} \times \{1\}$ (konstanta 1). Označme $K = \{p_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$. K je axiomatizovatelná; dále T značí nějakou její axiomatiku.

1. Dokažte, že K je uzavřená.

Návod: Užijte toho, že $v \notin K \Leftrightarrow$ existují $i < j$ s $v(p_i) = 0$, $v(p_j) = 1$.

2. Popište podrobněji nějakou teorii, axiomatizující K.

Návod: Pro konečnou funkci $\sigma \subseteq \mathbb{P} \times 2$ je

$$\widetilde{\sigma} \cap K = \emptyset \Leftrightarrow \text{existují } i < j \text{ s } \sigma(p_i) = 0,\ \sigma(p_j) = 1.$$

3. a) $\mathsf{M}(T, \varphi)$ je buď konečná nebo duálně konečná podmnožina K.

Řešení: Když $w \in \mathsf{M}(T, \varphi)$ tak $\mathsf{M}(T, \varphi)$ je komplement konečné množiny. Je-li totiž $\bigwedge_{i<n} \psi_i$ disjunktivně normální tvar φ, tak $w \in \mathsf{M}(\varphi_i)$ pro některé $i < n$. Je ψ_i tvaru ε_σ, tj. $\bigwedge_{p \in \sigma} p^{\sigma(p)}$ s jistou konečnou funkcí $\sigma \subseteq \mathbb{P} \times 2$. Je $\mathrm{rng}(\sigma) = \{1\}$. Označme m maximální j takové, že p_j je v definičním oboru σ. Pak všechny funkce v_k s $k > m$ leží v $\mathsf{M}(T, \psi_i)$.

Když $w \notin \mathsf{M}(T, \varphi)$, je $\mathsf{M}(T, \varphi)$ konečná, neboť to je komplement $\mathsf{M}(T, \neg\varphi)$ a ten obsahuje w.

b) Pro každou konečnou $K' \subseteq K$ existuje φ s $\mathsf{M}(T, \varphi) = K'$.

Řešení: Stačí pro každé k najít φ s $\mathsf{M}(T, \varphi) = \{v_k\}$. Nechť σ je v_k zúženo na $\{p_0, \dots, p_k\}$; pak φ tvaru $\bigwedge_{i \le k} p_i^{\sigma(p_i)}$ má potřebnou vlastnost.

4. T, φ je jednoduché kompletní rozšíření $T \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) = \{v_k\}$ pro nějaké k.

Řešení: T, φ je uvažované rozšíření, právě když má T, φ jediný model. Jelikož $\mathsf{M}(T, \psi)$ je konečné, právě když obsahuje některé v_k, tvrzení platí.

UV.1.10. Algebry $\mathrm{AM}^{\mathbb{P}}_{\emptyset} = \{\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\varphi);\ \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}\}$. (Tzv. zobecněné Cantorovy algebry.)

1. a) Kolik prvků mají algebry $\mathrm{AM}_{\emptyset}^{\mathbb{P}}$ s $\mathbb{P}$ konečným a s $\mathbb{P}$ nekonečným.
   Řešení: Pro $\mathbb{P}$ konečné, l-prvkové má $\mathrm{AM}_{\emptyset}^{\mathbb{P}}$ právě 2^{2^l}, pro $\mathbb{P}$ nekonečné tolik, jako $\mathbb{P}$.

2. b) Které algebry $\mathrm{AM}_{\emptyset}^{\mathbb{P}}$ jsou atomární a které bezatomární.
   Řešení: Atomární jsou právě ty, které jsou konečné. Pro $\mathbb{P}$ nekonečné jsou bezatomární. Když totiž $\mathsf{M}(\varphi) \neq \emptyset$, nechť prvovýrok p není v φ. Pak $\emptyset \neq \mathsf{M}(\varphi \mathbin{\&} p) \subsetneq \mathsf{M}(\varphi)$. Tudíž $\mathsf{M}(\varphi)$ není atom.

Vlastnosti $\mathrm{Thm}(T)$**.**

UV.1.11. Vlastnosti $\mathrm{Thm}(T)$, $\cup$, $\cap$. T, S jsou teorie a φ, ψ, χ výroky.

1. a) $\mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)) = \mathrm{Thm}(T \cup S)$.
   Řešení: Je jasně
   $$\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S) \subseteq \mathrm{Thm}(T \cup S) \subseteq \mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S));$$
   aplikací Thm dostaneme požadované.

   b) $\mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S)) = \mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S)$.
   Řešení: Je jasně $\mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S)) \subseteq \mathrm{Thm}(T), \mathrm{Thm}(S)$, tedy platí také
   $$\mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S)) \subseteq \mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S) \subseteq$$
   $$\subseteq \mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T) \cap \mathrm{Thm}(S))$$
   a odtud dostaneme požadovanou rovnost.

2. $\mathrm{Thm}(T, \varphi \vee \psi) = \mathrm{Thm}(T, \varphi) \cap \mathrm{Thm}(T, \psi)$.
   Řešení: Tvrzení plyne z $T, \varphi \vee \psi \vdash \chi \Leftrightarrow T, \varphi \vdash \chi$ a $T, \psi \vdash \chi$.

3. a) $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S) \subseteq \mathrm{Thm}(T \cup S)$.

   b) Rovnost v a) platí $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$ je uzavřeno na &.
   Řešení: Platí-li rovnost, plyne z uzavřenosti $\mathrm{Thm}(T \cup S)$ na & uzavřenost $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$. Nechť naopak je $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$ uzavřeno na &. Buď $T \cup S \vdash \varphi$. Pak pro jisté $\psi \in T$ a $\chi \in S$ je $\psi \mathbin{\&} \chi \vdash \varphi$. Je $\psi \mathbin{\&} \chi \in \mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$. Když $\psi \mathbin{\&} \chi \in \mathrm{Thm}(T)$, je $\varphi \in \mathrm{Thm}(T)$. Když $\psi \mathbin{\&} \chi \in \mathrm{Thm}(S)$, je $\varphi \in \mathrm{Thm}(S)$.

   c) $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$ je uzavřeno na & $\Leftrightarrow$ $T \subseteq \mathrm{Thm}(S)$ nebo $S \subseteq \mathrm{Thm}(T)$.
   Řešení: Platí-li pravá strana $\Leftrightarrow$, je $\mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$ buď $\mathrm{Thm}(S)$ nebo $\mathrm{Thm}(T)$ a ty jsou uzavřeny na &. Nechť naopak existuje $\psi \in T - \mathrm{Thm}(S)$ a $\chi \in S - \mathrm{Thm}(T)$. Kdyby $\psi \mathbin{\&} \chi \in \mathrm{Thm}(T)$, tak $T \vdash \chi$ – spor. Stejně vede ke sporu $\psi \mathbin{\&} \chi \in \mathrm{Thm}(S)$. Tedy $\psi \mathbin{\&} \chi \notin \mathrm{Thm}(T) \cup \mathrm{Thm}(S)$.

4. a) $\mathrm{Thm}(\varphi) \cup \mathrm{Thm}(\psi) = \mathrm{Thm}(\varphi \mathbin{\&} \psi) \Leftrightarrow \varphi \vdash \psi$ nebo $\psi \vdash \varphi$.
   Řešení: Inkluze $\subseteq$ platí vždy. Nechť platí rovnost. Pak $\varphi \mathbin{\&} \psi \in \mathrm{Thm}(\varphi) \cup \mathrm{Thm}(\psi)$. Když $\varphi \mathbin{\&} \psi \in \mathrm{Thm}(\varphi)$, tak $\varphi \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi$, tedy $\varphi \vdash \psi$. Když $\varphi \mathbin{\&} \psi \in \mathrm{Thm}(\psi)$, plyne stejně $\psi \vdash \varphi$. Nechť naopak platí $\varphi \vdash \psi$ nebo $\psi \vdash \varphi$. Když $\varphi \mathbin{\&} \psi \vdash \chi$, tak $\varphi \vdash \chi$ nebo $\psi \vdash \chi$ a tedy $\chi \in \mathrm{Thm}(\varphi) \cup \mathrm{Thm}(\psi)$.

   b) $\mathrm{Thm}(p) \cup \mathrm{Thm}(p') \subsetneq \mathrm{Thm}(p \mathbin{\&} p')$ pro různé prvovýroky p, p'.
   Řešení: $p \nvdash p \mathbin{\&} p'$, $p' \nvdash p \mathbin{\&} p'$.