MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Implicitní funkce

Bakalářská práce

Brno 2008 Jana Zubčáková

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem zpracovala samostatně pod odborným vedením doc. RNDr. Zdeňka Pospíšila, Dr. s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 30. května 2008 ....

Jana Zubčáková

Poděkování
Děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Zdeňkovi Pospíšilovi, Dr. za cenné rady a odborné vedení, které mi poskytl při zpracovaní tématu bakalářské práce.

Obsah

Úvod

V první kapitole své práce shrnu základní poznatky o implicitně zadaných funkcích jedné proměnné a ukážu několik příkladů, při kterých se dají dané poznatky využít.

V další kapitole se zaměřím na metody vyšetřování asymptot bez směrnice i se směrnicí grafů takto zadaných funkcí a taktéž řešení předvedu na několika příkladech.

Poslední kapitola bude obsahovat ilustraci výsledků na vybrané ekonomické aplikaci.

Kapitola 1

Funkce zadaná implicitně

Uvažujme tento problém: Nechť F je funkce dvou proměnných, $\mathscr{D}(F)$ její definiční obor a označme množinu (křivku)

$$M = \{[x, y] \in \mathscr{D}(F) : \ F(x, y) = 0\}.$$

Například pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je křivka M jednotková kružnice se středem v počátku.

Zvolme libovolný bod na křivce M. Chceme vyšetřit chování křivky v okolí tohoto bodu, zejména určit rovnici tečny v tomto bodě a rozhodnout, zda křivka v okolí tohoto bodu leží nad nebo pod tečnou.

Jestliže křivka M je přímo grafem funkce jedné proměnné $y = f(x)$, tj. $F(x, y) = \ y - f(x) = 0$, problém snadno vyřešíme výpočtem derivací f', f''. Rovněž v jednoduchých případech, jako je rovnice kružnice, lze využít metod diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné, neboť z rovnice kružnice můžeme snadno spočítat y jako funkci proměnné x. Je-li však rovnice křivky komplikovanější, např. $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ a chceme určit rovnici tečny ke křivce určené touto rovnicí v bodě $[x_0, y_0] = [1, 1]$, předchozí postup selhává, protože z rovnice křivky nelze y rozumně spočítat.

V této kapitole ukážu pro funkci jedné proměnné, jak tuto nesnáz obejít. Budu se zabývat problémem, zda je křivka M v okolí daného bodu totožná s grafem nějaké funkce jedné proměnné, a pokud ano, jak spočítat její derivace.

1.1 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

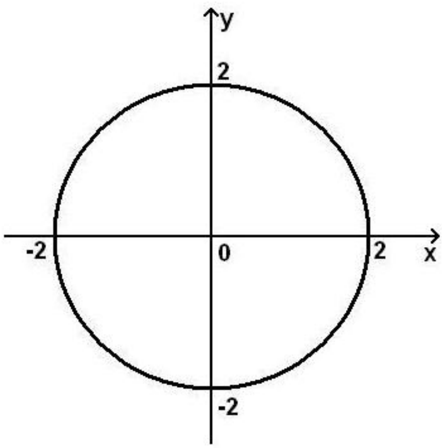
Definice 1.1. Nechť F je funkce dvou proměnných. Označme $\mathscr{M} = \{[x,y] \in \mathscr{D}(F) : F(x,y) = 0\}$ a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Jestliže existují čísla $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ taková, že množina

$$\{[x,y] \in \mathscr{M} : \ |x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \varepsilon\}$$

je totožná s grafem funkce $y = f(x)$, $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ *definována implicitně* rovnicí $F(x,y) = 0$.

Poznámka. Jinými slovy, funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

V případě rovnice kružnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ vidíme, že v okolí libovolného bodu $P_0 \neq [\pm 2,\ 0]$ této kružnice je rovnicí $x^2 + y^2 - 4 = 0$ implicitně zadaná funkce $y = f(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$ (znaménko $+$ bereme, leží-li bod na horní půlkružnici a znaménko $-$, je-li na dolní půlkružnici).
Dále vidíme, že v okolí bodů $[\pm 2,\ 0]$ není rovnicí zadaná žádná funkce proměnné x.



Obrázek 1.1: Kružnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Jako jiný příklad uvažujme křivky dané rovnicemi

$$F(x,y) := x - y^2 = 0 \qquad \text{(parabola)}$$
$$F(x,y) := x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(dvojice přímek } y = \pm x\text{)}$$

Je vidět, že v libovolném okolí počátku není rovnicí $F(x,y) = 0$ určena implicitně žádná funkce. Naopak, v dostatečně malém okolí každého jiného bodu těchto křivek je rovnicí $F(x,y) = 0$ definována funkce $y = f(x)$.

V prvním případě to jsou funkce $y = \sqrt{x}$ nebo $y = -\sqrt{x}$, podle toho, leží-li bod v horní nebo dolní polorovině určené osou x, ve druhém případě $x = y$ nebo $x = -y$ podle toho, na které z dvojice přímek bod leží.

V následující Větě 1.1 je uvedena postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně v okolí daného bodu křivky a ve Větě 1.2 způsob pro výpočet její derivace.

Věta 1.1. *Nechť je funkce* F *spojitá na čtverci* $\mathrm{R} = \{[x, y] \in \mathscr{D}(F) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$ *a nechť* $F(x_0, y_0) = 0$. *Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci* $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ *v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, *v němž je rovností* $F(x, y) = 0$ *implicitně definována právě jedna funkce* $y = f(x)$, *která je spojitá.*

Důkaz. Existenci implicitně zadané funkce dokážeme pomocí Banachovy věty o pevném bodu kontraktivního zobrazení v úplném metrickém prostoru. Nechť $\varepsilon, \delta > 0$ jsou reálná čísla, jejichž přesnou hodnotu určíme později a označme $I = [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$. Uvažujme prostor funkcí

$$P = \{\, g \in C\,(I) : \; g(x_0) = y_0,\; |g(x) - y_0| \leq \varepsilon \text{ pro } x \in I\}.$$

To znamená, že P je prostor spojitých funkcí na I, jejichž grafy procházejí bodem $[x_0,\, y_0]$ a leží v $\delta-\varepsilon$ obdélníku kolem bodu $[x_0,\, y_0]$. Na P uvažujme metriku stejnoměrné konvergence $\rho(f,\, g) = max_{x \in I}\, |f(x) - g(x)|$. Označme $d = F_y(x_0,\, y_0) \neq 0$ a definujme na P zobrazení $T\colon P \to C(I)$ předpisem

$$g(x) \stackrel{T}{\longmapsto} g(x) - \frac{F(x,\, g(x))}{d}.$$

Najdeme-li pevný bod $f \in P$ zobrazení T, je tento bod hledanou implicitně zadanou funkcí f. Vskutku, je-li $f(x) = T(f)(x) = f(x) - d^{-1}F(x,\, f(x))$, je $d^{-1}F(x,\, f(x)) = 0$ pro $x \in I$, což podle Definice 1.1. znamená, že funkce f je implicitně zadána rovností $F(x,\, y) = 0$.

Určíme nyní konstanty δ a ε tak, aby zobrazení T bylo kontrakcí a zobrazovalo prostor P do sebe (což jsou spolu s úplností prostoru P předpoklady Banachovy věty).

Nechť $f,\, g \in P$.Využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci F dostáváme

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \left| f(x) - d^{-1}F(x,\, f(x)) - g(x) + d^{-1}F(x,\, g(x)) \right| =$$

$$= \left| f(x) - g(x) - \frac{F_y(x,\, \xi)(f(x) - g(x))}{d} \right| = |f(x) - g(x)| \left| 1 - \frac{F_y(x,\, \xi)}{d} \right|,$$

kde $\xi = \xi(x)$ leží mezi $f(x)$ a $g(x)$. Protože funkce F_y je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a $F_y(x_0, y_0) = d$, existují ε, $\delta_1 > 0$ taková, že $\left|1 - d^{-1}F_y(x, y)\right| < \frac{1}{2}$ pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Je-li $\delta \leq \delta_1$, pro takto zvolená ε, δ_1 platí

$$\rho(T(f), T(g)) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \left|1 - \frac{F_y(x, \xi)}{d}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}\rho(f, g),$$

tj. T je kontrakce s koeficientem kontrakce $q = \frac{1}{2}$. Nechť $f \in P$. Pak $T(f)$ je spojitá funkce a $T(f)(x_0) = f(x_0) - d^{-1}F(x_0, f(x_0)) = y_0$. Odtud plyne existence $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ platí

$$|T(f)(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak pro takto určená ε, δ je T kontraktivní zobrazení P do sebe, což jsme potřebovali dokázat. ♡

Derivaci implicitně zadané funkce vypočteme podle následující věty.

Věta 1.2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 1.1 a funkce F má na R spojité parciální derivace* 1. *řádu. Pak má funkce f, která je implicitně určená v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Důkaz. Nechť f je funkce implicitně určená v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, tj. existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $F(x, f(x)) = 0$. Důkaz existence derivace implicitně zadané funkce f zde nebudeme provádět, zde se zaměříme na odvození vzorce pro f'. Derivováním rovnosti $F(x, f(x))$ podle x dostáváme

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

odkud

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Dosadíme-li za $x = x_0$, pak ze skutečnosti, že $f(x_0) = y_0$, plyne dokazované tvrzení. ♡

Poznámka.

- Při výpočtu derivace funkce zadané rovnicí $F(x, y) = 0$ využíváme často místo vzorce
$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$
postupu uvedeného při jeho odvození. Rovnici $F(x, y) = 0$ derivujeme podle x a na y se díváme jako na funkci proměnné x. Pak dostáváme
$$F_x(x, y) + y' F_y(x, y) = 0,$$
a z této rovnice vypočteme y'.

- Postup z předchozí poznámky je vhodný i při výpočtu vyšších derivací funkce implicitně zadané rovnicí $F(x, y) = 0$. Derivujeme-li rovnici
$$F_x(x, y) + y' F_y(x, y) = 0,$$
ještě jednou podle x, pak dostáváme
$$F_{xx}(x, y) + F_{xy}(x, y)y' + y'' F_y(x, y) + y' \left(F_{yx}(x, y) + F_{yy}(x, y)y'\right) = 0$$
a z této rovnice vypočteme y''. Dalším derivováním poslední rovnice odvodíme vztah pro y''' atd.

1.2 Příklady pro implicitně zadané funkce jedné proměnné

Příklad 1.1. Najděte body křivky $x^2 + 4xy - y^2 - 20 = 0$, v nichž nejsou splněny předpoklady Věty 1.1. o existenci implicitní funkce $y = f(x)$.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 20$. Tato funkce je spojitá ve všech bodech, zejména tedy v bodech $[x_0, y_0]$, které splňují rovnost $F(x_0, y_0) = 0$. Obdobné tvrzení můžeme vyslovit pro parciální derivaci podle y, neboť

$$F_y(x_0, y_0) = 4x_0 - 2y_0.$$

Předpoklady Věty 1.1. tedy nejsou splněny v bodech, pro jejichž souřadnice platí

$$F_y(x_0, y_0) = 4x_0 - 2y_0 = 0$$

tedy

$$2x_0 - y_0 = 0.$$

Jestliže si uvědomíme, že musí splňovat i rovnost $F(x, y) = 0$, nalezneme jejich hodnoty vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_0^2 + 4x_0y_0 - y_0^2 &= 20 \\ 2x_0 - y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy získáme dvojici bodů $[2, 4]$ a $[-2, -4]$.

Příklad 1.2. Vypočtěte derivaci y' funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $x - y^2 = \ln y$

Řešení. Položme $F(x, y) = x - y^2 - \ln y$. Podle Věty 1.1. je rovností $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ určena právě jedna spojitá funkce $y = f(x)$, jestliže $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, v našem konkrétním případě

$$F_y(x_0, y_0) = -\frac{2y_0^2 + 1}{y_0} \neq 0.$$

Tato podmínka je však splněna ve všech bodech, které vyhovují zadávající rovnosti. Derivaci y' můžeme spočítat dvojím způsobem:

- využitím vztahu ve Větě 1.2.

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{1}{-2y - \frac{1}{y}} = \frac{y}{2y^2 + 1}$$

nebo

- derivací zadávající rovnosti podle x:

$$\begin{aligned} 1-2yy' &= \frac{1}{y}y' \\ 1 &= \left(2y+\frac{1}{y}\right)y' \\ y' &= \frac{y}{2y^2+1}. \end{aligned}$$

V obou případech musíme dospět ke stejnému výsledku.

Příklad 1.3. Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $2x^3 + 2y^3 - 4xy = 0$ v bodě $[1,\, 1]$ a rozhodněte, zda tato křivka leží v okolí bodu $[1,\, 1]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení. Označme $F(x,\, y) = 2x^3 + 2y^3 - 4xy$. Platí $F_y(x,\, y) = 6y^2 - 4x$, $F_y(1,1) = 2 \neq 0$, jsou tedy splněny všechny předpoklady věty, tj. rovností $2x^3 + 2y^3 - 4xy = 0$ je v jistém okolí bodu $[1,\, 1]$ určena implicitně funkce jedné proměnné $y = f(x)$, po jejíž derivaci v bodě $x = 1$ dostáváme

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{6x^2-4y}{6y^2-4x} = -1, \text{ pro } [x,y] = [1,1]$$

Rovnice tečny t je $y - y_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$, konkrétně v našem příkladě $y - 1 = -(x-1) \Rightarrow x + y - 2 = 0$. Normála je kolmá přímka k tečně a vzhledem k tomu, že pro směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek platí $k_1.k_2 = -1$, rovnice normály n je $y - 1 = x - 1$.

Nyní pro řešení druhé části zadání postupujeme jako při odvození vzorce pro tečnu. Derivujeme-li rovnici $2x^3 + 2y^3 - 4xy = 0$ podle x a uvážíme-li, že y je funkce proměnné x, dostáváme $6x^2 + 6y^2y' - 4y - 4xy' = 0$. Dalším derivováním podle x obdržíme $12x + 12y(y')^2 + 6y^2y'' - 4y' - 4y' - 4xy'' = 0$ a odtud

$$y'' = \frac{8y' - 12x - 12y(y')^2}{6y^2 - 4x}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za x, y a y'(tato hodnota je vypočítána při výpočtu tečny), dostaneme $y''(1) = -16$, což znamená, že křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ pod tečnou (neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = 1$ konkávní).

Příklad 1.4. Na elipse o rovnicí $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ najděte body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y.

Řešení. Normálou rozumíme přímku, která je kolmá k tečně a prochází bodem $T = [x_0,\, y_0]$, ve kterém se tečna dotýká elipsy. Podle zadání hledáme takové body, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x. Pro směrnici k takové přímky platí $k = 0$. Tuto směrnici vyjádříme jako derivaci rovnice elipsy v bodě T podle x:

$$\begin{aligned} 2x + 6yy' - 2 + 6y' &= 0 \\ y' &= \frac{-x+1}{3y+3} \\ f'(x_0) &= \frac{-x_0+1}{3y_0+3}. \end{aligned}$$

Jeho souřadnice nalezneme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_0^2 + 3y_0^2 - 2x_0 + 6y_0 - 8 &= 0 \qquad && (T \in \text{elipsa}) \\ -x_0 + 1 &= 0. \qquad && (f'(x_0) = k) \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme dvojici bodů $[1, -3]$ a $[1, 1]$, ve kterých je normála rovnoběžná s osou y.

Kapitola 2

Asymptoty pro implicitně zadané funkce

2.1 Pojem asymptoty

Definice 2.1. Přímka se nazývá asymptota křivky, když vzdálenost z bodu $M(x, y)$ ležícího na křivce se k dané přímce blíží k nule.

Pro *explicitně* zadanou funkci definujeme asymptotu následovně:

Definice 2.2. Asymptota *bez směrnice* je přímka $x = x_0$, $x \in \mathbb{R}$ funkce f, jestliže má funkce f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
Asymptota *se směrnicí* je přímka $y = kx + q$, k, $q \in \mathbb{R}$ funkce f, jestliže platí $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$.

Věta 2.1. *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad a \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Věta 2.2. *Přímka $y = q$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = q$. Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.*

K nalezení asymptoty pro *parametricky* zadanou křivku $x = x(t)$, $y = y(t)$ postupujeme následovně:

Definice 2.3. Pro asymptotu parametricky zadané křivky musíme najít hodnotu $t = t_i$, pro kterou platí $x(t) \to +\infty$ nebo $y(t) \to +\infty$. Pak můžou nastat dané případy:

- Pokud $x(t_i) = \infty$, ale $y(t_i) = c \neq \infty$, pak přímka $y = c$ je horizontální asymptota.
- Pokud $y(t_i) = \infty$, ale $x(t_i) = b \neq \infty$, pak přímka $x = b$ je vertikální asymptota.
- Pokud $x(t_i) = \infty$ a $y(t_i) = \infty$, pak bychom měli vypočítat dvě limity

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{t \to t_i} [y(t) - k.x(t)].$$

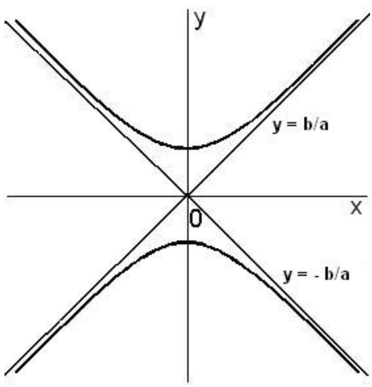
Pokuj obě limity existují a jsou konečné, pak existuje i asymptota a má tvar $y = kx + q$.

2.2 Příklady asymptot implicitně zadaných funkcí

V této podkapitole si ukážeme některé implicitní funkce a možnosti výpočtu jejích asymptot.

2.2.1 Hyperbola

Rovnice hyperboly v standardním tvaru je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Obrázek 2.1: Hyperbola

Hledáme asymptotu ve tvaru $y = mx + c$, kde m je směrnice dané přímky a c posunutí.
Nejprve vyšetříme průsečík křivky $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (rovnice hyperboly vynásobená výrazem a^2b^2) s přímkou $y = mx$. Pro souřadnici x průsečíku takové přímky s křivkou obdržíme rovnici:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2(mx)^2 &= a^2b^2 \\ x^2(b^2 - a^2m^2) &= a^2b^2, \end{aligned}$$

aby rovnice měla kořen x nekonečně velký, musí platit $b^2 - a^2m^2 = 0$, neboť $b^2 - a^2m^2 = \frac{a^2b^2}{x^2}$ a jestliže $x \to \infty$, pak $\frac{a^2b^2}{x^2} \to 0$.
Tato relace dává pro m dva kořeny a to $m = \pm\frac{b}{a}$, což představuje směrnici dvou asymptot.
Abychom obdrželi c na ose y, dosadíme do zadávající rovnice nejprve $y = \frac{b}{a}x + c$, pak

$$b^2x^2 - \left(\frac{b}{a}x + c\right)^2 a^2 = a^2b^2$$
$$\vdots$$
$$-2abcx - a^2c^2 = a^2b^2,$$

kde kořen této rovnice je

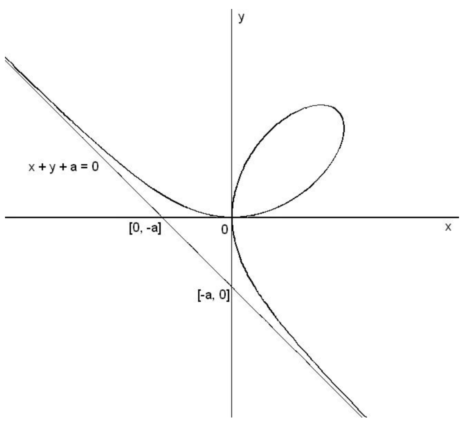
$$x = \frac{-c^2a - b^2a}{2bc}$$

a tento kořen může být nekonečný pouze pro $c = 0$ a tedy hledaná rovnice asymptoty je rovna $y = \frac{b}{a}x$.
Stejný výsledek pro hodnotu c dostaneme, když budeme pracovat s kořenem $m = -\frac{b}{a}$, tj. pro danou hyperbolu ve standardním tvaru existují dvě asymptoty $y = \frac{b}{a}x$ a $y = -\frac{b}{a}x$.

2.2.2 Descartův list

Descartův list je funkce:

- zadaná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
- zadaná parametricky $x = \frac{3at}{t^3+1}$ a $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$, pro $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$



Obrázek 2.2: Descartův list

Nyní budeme hledat asymptotu se směrnicí, kterou předpokládáme ve tvaru $y = kx + q$. Můžeme postupovat dvěma způsoby:

1. Využitím implicitního zadání funkce: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
   Nejprve vyšetříme průsečík této křivky s přímkou $y = kx$. Pro souřadnici x průsečíku takové přímky s křivkou obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} x^3 + (kx)^3 - 3ax(kx) &= 0 \\ x^3(1 + k^3) - 3ax^2k &= 0 \qquad /: x^2 \\ x(1 + k^3) - 3ak &= 0, \end{aligned}$$

   aby rovnice měla kořen x nekonečně velký, tj. aby rovnoběžka asymptoticky křivku „protínala v nekonečnu“ musí platit $1 + k^3 = 0$, neboť $1 + k^3 = \frac{3ak}{x}$ a jestliže $x \to \infty$, pak $\frac{3ak}{x} \to 0$.
   Tato relace dává pro k jediný reálný kořen a to $k = -1$, což představuje směrnici asymptoty.
   Abychom obdrželi q na ose y, dosadíme do zadávající rovnice $y = -kx + q$, pak

$$\begin{aligned} x^3 + (-x + q)^3 - 3ax(-x + q) &= 0 \\ &\vdots \\ x^2 3(q + a) - x3q(q + a) + q^3 &= 0. \end{aligned}$$

   Kořeny této rovnice jsou

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{3q(q + a) \pm \sqrt{(3q(q + a))^2 - 4.3(q + a)(q^3)}}{2.3(q + a)} = \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{9q^2 - \frac{12q^3}{q + a}} \end{aligned}$$

   a tyto kořeny mohou být nekonečné pouze pro $q = -a$, tedy dostaneme hledaný úsek a pak hledaná rovnice asymptoty je rovná $y = -x - a$.

2. Využitím parametrického zadání funkce: $x = \frac{3at}{t^3+1}$ a $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$
   Protože pro $x(-1) = \infty$ a $y(-1) = \infty$ použijeme výpočet dvou limit

$$k = \lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} \frac{\frac{3at^2}{t^3+1}}{\frac{3at}{t^3+1}} = \lim_{t \to -1} t = -1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{t \to -1} [y(t) - k.x(t)] = \lim_{t \to -1} \frac{3at^2}{t^3 + 1} + \frac{3at}{t^3 + 1} = \\ &= \lim_{t \to -1} \frac{3at(t + 1)}{t^3 + 1} = \lim_{t \to -1} \frac{3at(t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} = \\ &= \lim_{t \to -1} \frac{3at}{t^2 - t + 1} = -a \end{aligned}$$

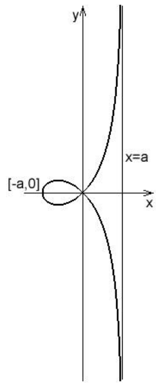
   z čeho nám vyplývá, že asymptota má tvar $y = -x - a$.

Samozřejmě musíme v obou případech dostat stejný výsledek, nezáleží na způsobu vyjádření dané funkce.

2.2.3 Strofoida a Nikomédova konchoida

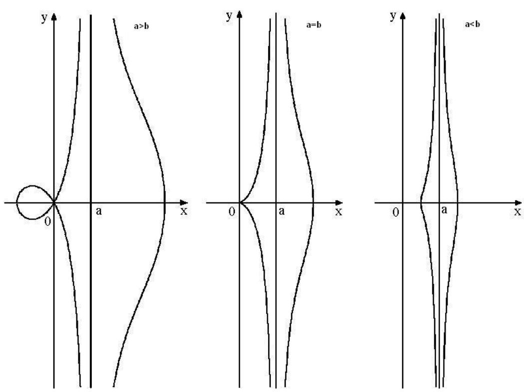
Jako příklad implicitně zadaných funkcí, které mají asymptotu bez směrnice, uvedu strofoidu a Nikomédovu konchoidu.

Strofoida: $y^2 = x^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$, kde daná funkce není definovaná právě v bodě $x_0 = a$, tedy funkce se pro $x \to a$ blíži do $\pm\infty$, tj. asymptota bez směrnice je rovná $x = a$.



Obrázek 2.3: Strofoida

Nikomédova konchoida: $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$, kde po úpravě dostaneme, že daná funkce není definovaná opět v hodnotě $x_0 = a$, tj. asymptota dané křivky je bez směrnice a má tvar vždy $x = a$.



Obrázek 2.4: Nikomédova konchoida

Kapitola 3

Goodwinův růstový cyklus

V této kapitole budu aplikovat praktické využití předešlých poznatků na Goodwinův růstový cyklus. Nejprve si zavedeme potřebné značení.

Značení:
$y = y(t)$ ... produkt v čase t
$k = k(t)$ ... kapitál v čase t
$n = n(t)$ ... nabídka práce v čase t (počet práceschopných)
$l = l(t)$ ... zaměstnanost v čase t (počet zaměstnaných)
$a = a(t)$ ... produktivita práce v čase t (množství produktu, které vyprodukuje jeden pracovník za jednotku času)
$w = w(t)$ ... mzdová sazba (mzda, kterou dostane jeden pracující za jednotku odpracovaného času)

Dále:
$u = \frac{w}{a}$ ... podíl zaměstnaných na produktu
$v = \frac{l}{n}$ ... relativní zaměstnanost

Goodwin začíná přijetím stálého technologického pokroku, stálého růstu pracovních sil a dvou činitelů výroby: práce a kapitálu (budovy a zařízení), množství je reálné a beze srážky, mzdy jsou plně spotřebovávané, zisky jsou ušetřené a investované, procento výstupu kapitálu je konstantní a reálné mzdové sazby rostou s plnou zaměstnaností. Toto všechno si tedy můžeme uvést jako následující předpoklady.

Předpoklady:
P1) Stály technický pokrok se přenáší do růstu produktivity práce

$$a(t) = a_0 e^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

kde a je produktivita práce rostoucí stálou rychlostí hodnoty α.
P2) Rovnost popisování růstu pracovních sil má podobnou formu

$$n(t) = n_0 e^{\beta t},$$

kde n nabídka práce s předpokladem růstu o hodnotě β.
P3) Práce je pokládaná za jediný výrobní faktor, tedy platí

$$y = l.a$$

P4) Veškeré zisky se investují

$$\frac{y'}{y} = \frac{k'}{k},$$

kde $\frac{y'}{y}$ je relativní přírůstek produktu a $\frac{k'}{k}$ je relativní přírůstek kapitálu.
P5) Existuje konstantní poměr kapitálu a produktu rovný

$$\sigma = \frac{k}{y}$$

P6) Relativní růst mezd se zvětšuje s relativní zaměstnaností

$$\frac{w'}{w} = \rho v - \gamma, \;\; \rho > 1, \gamma > 1,$$

kde γ je absolutní člen a ρ je směrnice Phillipsové křivky.

Pak platí:

- $k(t + \Delta t) = k(t) + y\Delta t - (wl)\Delta t$, tedy

$$\begin{aligned} k' &= y - wl, \text{ kde z předpokladu } \texttt{P3} \text{ plyne} \\ k' &= y\left(1 - \frac{w}{a}\right) \\ k' &= y(1 - u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

- podle předpokladu `P4` platí:

$$\frac{y'}{y} = \frac{k'}{k},$$

  kde po uplatnění vztahu (3.1) dostaneme

$$\frac{y'}{y} = \frac{k'}{k} = \frac{y}{k}(1 - u)$$

  a následně pomocí předpokladu `P5` dostáváme vztah

$$\frac{y'}{y} = \frac{k'}{k} = \frac{y}{k}(1 - u) = \frac{1 - u}{\sigma} \tag{3.2}$$

- podle předpokladu `P3` a následně `P1` můžeme odvodit daný vztah

$$\frac{y}{l} \overset{\texttt{P3}}{=} a \overset{\texttt{P1}}{=} a_0 e^{\alpha t} \tag{3.3}$$

- uplatněním dvakrát předchozího vzorce (3.3) si odvodíme, že

$$\alpha a_0 e^{\alpha t} \overset{(3.3)}{=} \left(\frac{y}{l}\right)' = \frac{y'l - yl'}{l^2} \overset{(3.3)}{=} \left(\frac{y'}{y} - \frac{l'}{l}\right) a_0 e^{\alpha t},$$

  tedy

$$\alpha a_0 e^{\alpha t} = \left(\frac{y'}{y} - \frac{l'}{l}\right) a_0 e^{\alpha t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y} - \alpha$$

  a podle (3.2) platí

$$\frac{l'}{l} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha \tag{3.4}$$

- teď si ukážeme odvození vztahu pro v'

$$\begin{aligned} v' = \left(\frac{l}{n}\right)' = \frac{l'n - ln'}{n^2} \overset{\mathtt{P2}}{=} \frac{l'n - l\alpha n}{n^2} = (l' - \beta l)\frac{l}{ln} = \\ \left(\frac{l'}{l} - \beta\right) v \overset{(3.4)}{=} \left(\frac{1-u}{\sigma} - (\alpha + \beta)\right) v \end{aligned} \tag{3.5}$$

- a nakonec odvození vztahu pro u'

$$\begin{aligned} u' = \left(\frac{w}{a}\right)' = \frac{w'a - wa'}{a^2} \overset{\mathtt{P1}}{=} \frac{w'a - w\alpha a}{a^2} = (w' - \alpha w)\frac{w}{aw} = \\ = \left(\frac{w'}{w} - \alpha\right)\frac{w}{a} = \left(\frac{w'}{w} - \alpha\right) u \overset{\mathtt{P6}}{=} (-\gamma + \rho v - \alpha)u \end{aligned} \tag{3.6}$$

Rovnice (3.5), (3.6) tedy představují model studovaného procesu.

$$\begin{aligned} v' &= \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) - \frac{u}{\sigma}\right) v \\ u' &= (-(\alpha + \gamma) + \rho v)\, u \end{aligned}$$

Dále se předpokládá $\frac{1}{\sigma} > \alpha + \beta$ (aby všechno neskončilo v $(0, 0)$).

Trajektorie systému

$$\begin{aligned} v' &= \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) - \frac{u}{\sigma}\right) v \\ u' &= (-(\alpha + \gamma) + \rho v)\, u \end{aligned}$$

je pak daná implicitně zadanou rovnicí

$$\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta)\right) \ln |u| - \frac{u}{\sigma} = -(\alpha + \gamma) \ln |v| + \rho v + \text{const.} \tag{3.7}$$

Danou rovnici (3.7) dostaneme následující úpravou:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta) - \frac{u}{\sigma}\right) v \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \left(-(\alpha+\gamma) + \rho v\right) u,\end{aligned}$$

pro které platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{u\big(-(\alpha+\gamma)+\rho v\big)}{v\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta) - \frac{u}{\sigma}\right)},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, kterou lze vyřešit jako:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta) - \frac{u}{\sigma}\right)}{u}\mathrm{d}u &= \frac{\big(-(\alpha+\gamma)+\rho v\big)}{v}\mathrm{d}v \\ \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{u}\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right)\right)\mathrm{d}u &= \left(\rho - \frac{\alpha+\gamma}{v}\right)\mathrm{d}v \\ \int\left(-\frac{1}{\sigma} + \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right)\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u &= \int\left(\rho - (\alpha+\gamma)\frac{1}{v}\right)\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

kde integrováním dostaneme

$$-\frac{1}{\sigma}u + \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right)\ln|u| = \rho v - (\alpha+\gamma)\ln|v| + \text{const.},$$

což je právě rovnice (3.7).

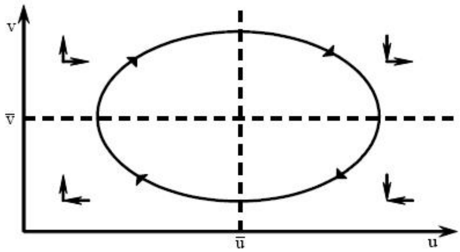
Rovnost (3.7) lze chápat jako implicitně zadanou funkci $u = u(v)$. Na základě předešlých poznatků pak umíme vyjádřit pomocí první a druhé derivace dané funkce její extrémy, konkávnost, resp. konvexnost a následně i jej asymptoty, přičemž všechny výsledky budou záviset na konkrétních parametrech $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho$ dané implicitně zadané rovnice. Podle následujících úvah a grafů zjistíme, že asymptoty pro naši implicitně zadánu funkci neexistují.

Pro určení stacionárních bodů spočteme derivace funkce podle f_v a f_u a ty se pak musí rovnat 0, čili dostaneme:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\alpha+\gamma}{\rho} \\ \bar{u} &= \left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right)\sigma\end{aligned}$$

Zvýšení produktivity α je realizované do obou diferenciálních rovnic. Pro dosáhnutí uzavřené trajektorie kolem definované souřadnice $(\bar{v}, \bar{u})$ v Goodwinově modelu je nezbytné, že proměnné hodnoty musí být navzájem k sobě v specifickém procentu.

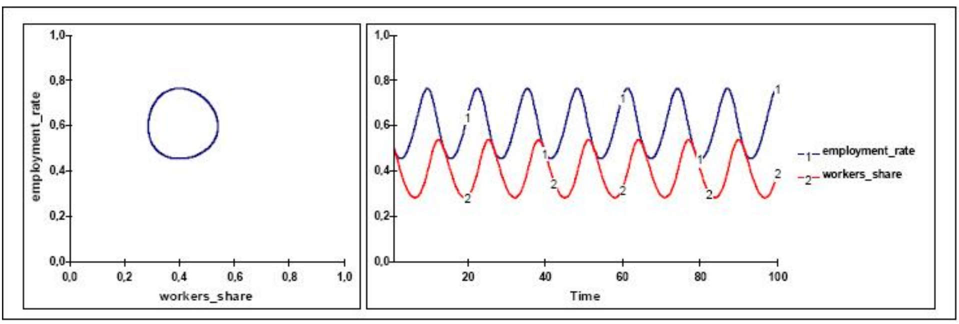
Vývoj vztahu podílu zaměstnaných na produktu (u) a relativní zaměstnanosti (v) vidíme na následujícím grafu.



Vztah proměnných pak vidíme v následující tabulce:

		stacionární bod podílu zaměstnaných	stacionární bod relativní zaměstnanosti
		ū	v̄
růst produktivity	α	-	+
růst pracovní nabídky	β	-	nic
poměr kapitálu a produktu	σ	-	nic
průsečík Phollipsové křivky	γ	nic	+
sklon Phillipsové křivky	ρ	nic	-

A nakonec si ukážeme graf, kde levá část zobrazuje očekávaný cyklus pro konkrétně zadané hodnoty proměnných a pravý obrazec cyklická chování v čase.



Výsledkem je tedy, že trajektorie diferenciálního systému jsou uzavřené křivky, což znamená, že řešení jsou periodická. Proto je tento model jedním z možných vysvětlení vzniku hospodářských cyklů.

Závěr

První dvě kapitoly měly čtenáře uvést do tématiky a byly teoretickou přípravou pro aplikaci. Ukázalo se, že teorie je bohatší, než bylo možno ve vybrané aplikaci použít; zejména studium asymptot implicitně zadané funkce se v modelu vzniku hospodářských cyklů neuplatnilo. Hledání asymptot by však určitě bylo užitečné při studiu modelů omezeného nebo neomezeného růstu.

Literatura

[1] Došlá, Z.-Došlý, O., *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Brno, Masarykova univerzita, 2003

[2] Došlá, Z.-Kuben, J., *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno, Masarykova univerzita, 2003

[3] Zdráhal, L. *Implicitně zadaná funkce jedné a dvou proměnných.* Diplomová práce, Brno, PřF Masarykova univerzita, 1996

[4] Polyanin, A. D.-Manzhirov A. V., *Handbook of mathematics for engineers and scientists.* CRC Press, 2007

[5] Goodwin, R. M., *A Growth cycle.* Cambridge University Press, Cambridge, 1967

[6] Weber, L. *A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective.* (http://www.systemdynamics.org/conferences/2005/proceed/papers/WEBER196.pdf), 2005