SKALÁRNÍ SOUČIN

Příklad 1. *Procesem ortogonalizace sestrojte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory* $(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$.

Řešení 1. *Dané vektory jsou lineárně nezávislé, tvoří bázové vektory* $e_1=(1,2,2,-1), e_2=(1,1,-5,3), e_3=(3,2,8,-7)$. *Ortogonální bázi označme* f_i.

$$f_1=e_1=(1,2,2,-1).$$

Podle Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu dále dostaneme:

$$f_2=e_2+\lambda f_1=(1,1,-5,3)+\lambda(1,2,2,-1).$$

Protože vektory f_1 *a* f_2 *tvoří ortogonální bázi, musí být na sebe kolmé, tzn. jejich skalární součin musí být nulový:*

$$f_1\cdot f_2=-10+10\lambda=0,$$

tedy $\lambda=1$. *Vektor* $f_2=(2,3,-3,2)$.
Obdobným způsobem zkonstruujeme bázový vektor f_3*:*

$$f_3=e_3+\eta f_1+\mu f_2=(3,2,8,-7)+\eta(1,2,2,-1)+\mu(2,3,-3,2).$$

Bázový vektor f_3 *musí být kolmý k oběma bázovým vektorům* f_1 *a* f_2*. Tedy*

$$f_1\cdot f_3=30+10\eta=0\Rightarrow\eta=-3,$$

$$f_2\cdot f_3=-26+26\mu=0\Rightarrow\mu=1.$$

Bázový vektor $f_3=(2,-1,-1,-2)$.
Ortogonální báze podprostoru je tvořena vektory:

$$[(1,2,2,-1),(2,3,-3,2),(2,-1,-1,-2)].$$

Tvoří tyto vektory opravdu bázi?

Příklad 2. *Nalezněte ortogonální projekci vektoru* $x=(4,-1,-3,4)$ *na podprostor generovaný vektory* $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,2,-1)$ *a* $a_3=(1,0,0,3)$.

Řešení 2. *Ortogonální projekce - viz. učební texty. Vektor* x *si zapíšeme jako součet*

$$x=y+\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3, \tag{1}$$

kde $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ *je ortogonální projekce. Vektor* y *je ortogonální (kolmý) k vektorům* a_1, a_2 *a* a_3*. Počítáme tedy skalární součiny:*

$$\begin{aligned} x \cdot a_1 &= (4,-1,-3,4)^T \cdot (1,1,1,1), \\ x \cdot a_2 &= (4,-1,-3,4)^T \cdot (1,2,2,-1), \\ x \cdot a_3 &= (4,-1,-3,4)^T \cdot (1,0,0,3). \end{aligned}$$

Podle našeho vyjádření (1) můžeme psát

$$\begin{aligned} x \cdot a_1 &= y + \alpha a_1 a_1 + \beta a_2 a_1 + \gamma a_3 a_1, \\ x \cdot a_2 &= y + \alpha a_1 a_2 + \beta a_2 a_2 + \gamma a_3 a_2, \\ x \cdot a_3 &= y + \alpha a_1 a_3 + \beta a_2 a_3 + \gamma a_3 a_3. \end{aligned}$$

Obě vyjádření jsou totožná, proto dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} 4 &= 4\alpha + 4\beta + 4\gamma, \\ -8 &= 4\alpha + 10\beta - 2\gamma, \\ 16 &= 4\alpha - 2\beta + 10\gamma, \end{aligned}$$

jejíž řešení má tvar

$$\begin{aligned} \alpha &= -2\gamma + 3 \\ \beta &= \gamma - 2. \end{aligned}$$

Volbou parametru $\gamma = 0$ *dostáváme ortogonální projekci vektoru* $x = y + (1,-1,-1,5)$*. Existuje i jiné vyjádření tohoto vektoru?*