Přednáška 5

- lokální extrémy funkce více proměnných
- vázané extrémy funkce více proměnných a Lagrangeova funkce
- globální maximum a minimum funkce na množině

Lokální extrémy funkce více proměnných (1)

Definice (Lokální minimum (neostré/ostré)):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ lokální minimum, jestliže

$$\exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in P_\delta(C) \cap D_f \text{ platí } f(C) \leq f(x).$$

Jestliže

$$\exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in P_\delta(C) \cap D_f \text{ platí } f(C) < f(x).$$

řekneme, že funkce f má v bodě C ostré lokální minimum.

Definice (Lokální maximum (neostré/ostré)):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ lokální maximum, jestliže

$$\exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in P_\delta(C) \cap D_f \text{ platí } f(C) \geq f(x).$$

Jestliže

$$\exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in P_\delta(C) \cap D_f \text{ platí } f(C) > f(x).$$

řekneme, že funkce f má v bodě C ostré lokální maximum.

Nabývá-li f v x lokální minimum nebo maximum, říkáme, že f má v x lokální extrém. Podobně ostrý lokální extrém znamená ostré lokální minimum nebo ostré lokální maximum.

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém):
Funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ nemá v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ lokální extrém, jestliže alespoň pro jedno přirozené číslo $i \leq n$ derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(C)$ existuje a je různá od nuly.

Lokální extrémy funkce více proměnných (2)

Příklad: *Funkce* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *má v bodě* $[0,0]$ *ostré lokální minimum, protože* $f(0,0) = 0$ *a pro každé* $[x,y] \neq [0,0]$ *je* $f(x,y) > 0$. *Parciální derivace podle obou proměnných mají tvar*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Tedy ve všech bodech existují vlastní parciální derivace a obě jsou rovny nule právě v bodě $[0,0]$.

Příklad: *Funkce* $f(x,y) = x^2y^2$ *má v bodě* $[0,0]$ *neostré lokální minimum, protože* $f(0,0) = 0$ *a pro každé* $[x,y] = [x,0]$ *nebo* $[x,y] = [0,y]$ *je také* $f(x,y) = 0$. *Parciální derivace podle obou proměnných mají tvar*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y.$$

Tedy ve všech bodech existují vlastní parciální derivace a obě jsou rovny nule právě na souřadnicových osách, tj. $x = 0$, *resp.* $y = 0$.

Příklad: *Funkce* $f(x,y) = |x| + |y|$ *má v bodě* $[0,0]$ *ostré lokální minimum, protože* $f(0,0) = 0$ *a pro každé* $[x,y] \neq [0,0]$ *je* $f(x,y) > 0$. *Parciální derivace podle obou proměnných mají tvar*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn} x \text{ pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn} y \text{ pro } y \neq 0.$$

Tedy v bodě $[0,0]$ *neexistuje ani jedna parciální derivace a ve všech ostatních bodech existují vlastní parciální derivace.*

Lokální extrémy funkce více proměnných (3)

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém):
Nechť $G \subset \boldsymbol{R}^n$ je otevřená množina a nechť funkce $f : G \to \boldsymbol{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li $\mathbf{x} \in G$ bod, ve kterém f nabývá lokální extrému, pak

$$\partial_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^n \text{ (tj. pro každý směr)}$$

ekvivalentně

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0 \equiv \operatorname{grad} f = 0.$$

Definice (Stacionární bod):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Bod $C \in \boldsymbol{R}^n$, pro který platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(C) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(C) = 0$$

se nazývá stacionární bod funkce f.

Funkce více proměnných může mít lokální extrémy pouze buď ve stacionárních bodech nebo bodech, v nichž některá parciální derivace prvního řádu neexistuje.

Kvadratické formy (1)

Definice (Kvadratické formy):
Nechť $a_{ij} \in \boldsymbol{R}$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, i\}$. Funkce $Q : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ definovaná

$$Q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} h_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h_i h_j, \quad \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$$

se nazývá kvadratická forma na R^n.
Kvadratickou formu lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$Q(\mathbf{h}) = (h_1 \; h_2 \; \ldots \; h_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Každá kvadratická forma je jednoznačně určena symetrickou maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

jejíž složky korespondují s koeficienty dané kvadratické formy.

Kvadratické formy (2)

Definice (Definitnost kvadratických forem):
Kvadratická forma $Q : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ se nazývá

- *pozitivně definitní, jestliže*

$$Q(\mathbf{h}) > 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \neq (0, \dots, 0),$$

- *pozitivně semidefinitní, jestliže*

$$Q(\mathbf{h}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^n \wedge \exists\, \mathbf{h}_0 \neq (0, \dots, 0) \,:\, Q(\mathbf{h}_0) = 0,$$

- *negativně definitní, jestliže*

$$Q(\mathbf{h}) < 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \neq (0, \dots, 0),$$

- *negativně semidefinitní, jestliže*

$$Q(\mathbf{h}) \leq 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^n \wedge \exists\, \mathbf{h}_0 \neq (0, \dots, 0) \,:\, Q(\mathbf{h}_0) = 0,$$

- *indefinitní, jestliže*

$$\exists\, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \boldsymbol{R}^n \,:\, Q(\mathbf{h}_1) > 0 \wedge Q(\mathbf{h}_2) < 0.$$

Kvadratické formy (3)

Věta (Sylvestrovo kritérium):
Nechť $Q : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je kvadratická forma a $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ k ní příslušící matice.
Řekneme, že kvadratická forma Q je

(a) *pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{A}$ jsou kladné, tj.*

$$a_{11} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0,\ \ldots,\ \det\mathbb{A}$$

(b) *negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminanty střídají znaménka počínaje záporným,, tj.*

$$a_{11} < 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0,\ \ldots,\ (-1)^n\det\mathbb{A}$$

(c) *indefinitní, jestliže jsou všechny subdeterminanty nenulové a přitom neplatí ani pravidlo (a) ani pravidlo (b).*

Předchozí věta nezahrnuje případ, kdy alespoň jeden ze subdeterminantů je nulový.
Příklad: *Uveďme několik příkladů pro případ $\boldsymbol{R}^2$:*

- $Q(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2$ *je pozitivně definitní forma*
- $Q(\mathbf{h}) = -4h_1^2 - 9h_2^2$ *je negativně definitní forma*
- $Q(\mathbf{h}) = h_1^2 - h_2^2$ *je indefinitní forma*

Lokální extrémy funkce více proměnných (4)

Definice (Hessova matice):
Nechť $G \subset \boldsymbol{R}^n$ je otevřená množina a nechť funkce $f : G \to \boldsymbol{R}$ je třídy C^2 na G. Potom matice $\mathbb{H}_f(x_1, \dots, x_n)$ definovaná na množině G následovně

$$\mathbb{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$$

se nazývá Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{x}$.

Věta (Postačující podmínka pro lokální extrém):
Nechť má funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ v bodě $C \in \boldsymbol{R}^n$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu a nechť jsou v tomto bodě všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule. Sestrojme kvadratickou formu Q příslušející Hesově matici $\mathbb{H}_f(C)$, tj.

$$Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}\, \mathbb{H}_f(C)\, \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(C) h_i h_j, \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$$

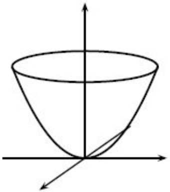
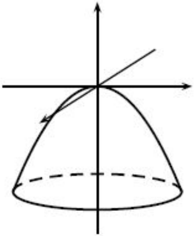
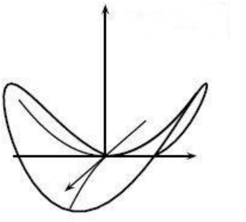
Potom platí: Je-li kvadratická forma Q

- *pozitivně definitní, má funkce f v bodě C ostré lokální minimum.*
- *negativně definitní, má funkce f v bodě C ostré lokální maximum.*
- *indefinitní, nemá funkce f v bodě C lokální extrém (C je tzv. sedlový bod).*

Lokální extrémy funkce více proměnných (5)

Protože v našich příkladech budeme většinou používat funkci dvou proměnných, můžeme při určování lokálních extrémů postupovat následovně:
Nechť má funkce f dvou proměnných spojité parciální derivace druhého řádu a v bodě $[x, y]$ má obě parciální derivace prvního řádu rovné nule, užitím Sylvestrova kritéria a postačující podmínky pro lokální extrém získáme následující tvrzení.

- Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$ má funkce f v bodě $[x, y]$ ostré lokální minimum
- Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$ má funkce f v bodě $[x, y]$ ostré lokální maximum
- Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$ nemá funkce f v bodě $[x, y]$ lokální extrém

Lokální extrémy funkce více proměnných (6)

Příklad: *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x(3-x^2) - y^2$.

Řešení: *Stacionární body musí vyhovovat podmínkám*

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 3x^2 \quad a \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

které jsou splněny pro $x = \pm 1$ *a* $y = 0$. *Funkce* f *má tedy dva stacionární body* $\mathbf{x}_1 = [1,0]$ *a* $\mathbf{x}_2 = [-1,0]$. *Následně zjistíme, jakého typu je kvadratická forma* $Q(\mathbf{h})$ *v příslušných bodech, tj. sestavíme Hessovu matici, která má složky*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2$$

a spočítat determinanty Hessovy matice v příslušných bodech:

$$\det(\mathbb{H}_f(\mathbf{x}_1)) = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 12 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_1) = -6 < 0,$$

a tedy $Q(\mathbf{h})$ *je v* $\mathbf{x}_1$ *negativně definitní a v bodě* $\mathbf{x}_1$ *je lokální maximum funkce* f,

$$\det(\mathbb{H}_f(\mathbf{x}_2)) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -12 < 0,$$

a tedy $Q(\mathbf{h})$ *je v* $\mathbf{x}_2$ *indefinitní a funkce* f *nemá v* $\mathbf{x}_2$ *lokální extrém (*$\mathbf{x}_2$ *je sedlový bod).*

Vázané extrémy (1)

V této části se budeme zabývat výpočtem lokálních extrémů funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ na množině M, která je dána soustavou rovnic, tzv. vazebních podmínek

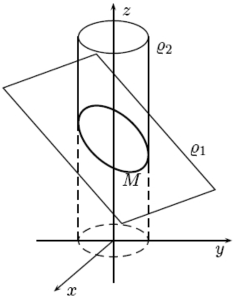
$$g_k(\mathbf{x}) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, p$$

Tyto extrémy vzhledem k množině M se nazývají vázané extrémy.

Příklad: *Ukázka vazebních podmínek pro $p = 2$, $n = 3$ a funkce*

$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 2 \quad a \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1,$$

které implicitně představují nadplochy ρ_1 a ρ_2, jejichž dimenze je $n - 1$.



Vázané extrémy (2)

Věta (O Lagrangeových multiplikátorech):
Nechť f, $g_1, \ldots, g_p$ jsou funkce třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \boldsymbol{R}^n$, $n > p$. Mějme množinu M zadánu

$$M = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in \boldsymbol{R}^n : g_i(\mathbf{x}) = 0\} \subset G.$$

Dále předpokládejme, že vektory $\operatorname{grad} g_1(\mathbf{x}), \operatorname{grad} g_2(\mathbf{x}), \ldots, \operatorname{grad} g_p(\mathbf{x})$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech množiny M. Je-li bod $\mathbf{x}_0 \in M$ bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M, pak existují taková čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \boldsymbol{R}$, že bod $\mathbf{x}_0$ je stacionární bod tzv. Lagrangeovy funkce

$$L = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

Poznámka: *Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ nazýváme Lagrangeovy multiplikátory Podmínka pro stacionární bod Lagrangeovy funkce L rozepsaná do složek představuje n rovnic*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_1} &= 0,\\
&\vdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_n} &= 0,
\end{aligned}$$

k výše uvedené soustavě přidáme nakonec p vazebných podmínek $g_1(\mathbf{x}) = 0$, $g_2(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_p(\mathbf{x}) = 0$ a řešením tohoto celého systému pak získáme body podezřelé z extrémů.

Vázané extrémy (3)

Poznámka: *Podmínku lineární nezávislosti gradientů* $\mathrm{grad}\, g_1(\mathbf{x})$, $\mathrm{grad}\, g_2(\mathbf{x}), \ldots, grad g_p(\mathbf{x})$ *lze ekvivalentně vyjádřena požadavkem, aby matice typu* $p \times n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

měla hodnost p *ve všech bodech množiny* M.

Poznámka: *Nejjednodušší situace nastává tehdy, když máme pouze jednu vazební podmínku a zároveň jsme schopni z této rovnice* $g(x) = 0$ *vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních (např.* $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$*). Tuto funkci můžeme následně dosadit do funkce* f *a místo vázaných extrémů vyšetřovat lokální extrémy funkce* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}))$.

Příklad: *Nalezněte vázané extrémy funkce* f *vzhledem k množině* M*, je-li:*

$$f(x,y) = e^{xy}, \; M = \{[x,y] \in \boldsymbol{R}^2 : x + y = 1\}.$$

Řešení: *Z vazební podmínky si vyjádříme* $y = 1 - x$ *a dosadíme do funkce* f*, získáme tak novou funkci*

$$\tilde{f}(x) = f(x, 1-x) = e^{x(1-x)} = e^{x-x^2},$$

u které nalezneme lokální extrémy představující vázané extrémy funkce f *na množině* M.

Vázané extrémy (4)

Věta (Postačující podmínka pro vázaný extrém):
Nechť $f, g_1, \ldots, g_p$ jsou funkce třídy C^2 na otevřené množině $G \subset \boldsymbol{R}^n$, $n > p$. Mějme množinu M zadánu

$$M = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in \boldsymbol{R}^n : g_i(\mathbf{x}) = 0\} \subset G.$$

Dále předpokládejme, že vektory $\operatorname{grad} g_1(\mathbf{x}), \operatorname{grad} g_2(\mathbf{x}), \ldots, \operatorname{grad} g_p(\mathbf{x})$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech množiny M. Nechť $\mathbf{x}_0 \in M$ je bod s následujícími vlastnostmi

a) *existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \boldsymbol{R}$, že Lagrangeova funkce*

$$L = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

má v bodě $\mathbf{x}_0$ stacionární bod, $\operatorname{grad} L(\mathbf{x}_0) = 0$,

b) *kvadratická forma $Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbb{H}_L(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \mathrm{d}^2 L(x_0; \mathbf{h})$ uvažovaná pouze pro vektory $\mathbf{h}$ z množiny*

$$T = \bigcap_{i=1}^{p} \{\mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^n : \mathbf{h} \perp \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\}$$

je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, resp. indefinitní).

Pak funkce f má v bodě x_0 ostré lokální minimum (resp. maximum, resp. nemá extrém) vzhledem k množině M.

Vázané extrémy (5)

Příklad: *Nalezněte vázané extrémy funkce f vzhledem k množině M, je-li:*

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2,\ M = \{[x,y] \in \boldsymbol{R}^2 : g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}.$$

Řešení: *Nejprve ověříme podmínku lineární nezávisloti* $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0)$, *která se v případě jedné vazební podmínky redukuje na požadavek*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y + 4 \neq 0,$$

který není splněn pouze v bodě $[1,-1]$, *ale tento bod nevyhovuje vazební podmínce* ($g(1,-1) = -3$), *tzn. můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech. Zkonstruujeme Lagrangeovu funkci*

$$L(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$$

a hledáme řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x + 2\lambda(x-1) &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 4y + 4\lambda(y+1) &= 0,\\
g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y &= 0.
\end{aligned}$$

Vázané extrémy (6)

Pokračování řešení: *Pro $\lambda \neq -1$ (pro $\lambda = -1$ nemá soustava řešení) dostanu z první rovnice $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ a z druhé rovnice $y = \frac{-\lambda}{\lambda+1}$ Po dosazení do vazební podmínky obdržíme*

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} - 2\frac{\lambda}{\lambda+1} + 2\frac{2\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + 4\frac{-\lambda}{\lambda+1} = 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 6\lambda = 0,$$

tj. $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -2$ a máme tedy dvě řešení: bod $\mathbf{x}_1 = [0,0]$ pro $\lambda_1 = 0$ a bod $x_2 = [2,-2]$ pro $\lambda_2 = -2$.
Nyní spočteme druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = 4 + 4\lambda,$$

a sestavíme Hessovy matice v příslušných bodech

$$\mathbb{H}_L(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbb{H}_L(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

*Definitnost kvadratických forem určených Hessiány budeme vyšetřovat pouze pro takové vektory **h** splňující požadavky*

$$\mathbf{h} \perp \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_1),\ tj.\, \mathbf{h} \perp (-2,4), \quad resp. \quad \mathbf{h} \perp \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_2),\ tj.\, \mathbf{h} \perp (2,-4),$$

tzn. v obou případech budeme volit $\mathbf{h} = (2h, h)$, $h \in \boldsymbol{R}$.

Vázané extrémy (7)

Pokračování řešení: *Následně můžeme psát*

$$Q_1(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbb{H}_L(\mathbf{x}_1)\mathbf{h} = (2h, h) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2h \\ h \end{pmatrix} = 8h^2 + 4h^2 > 0 \,\forall h \in \boldsymbol{R},$$

resp.

$$Q_2(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbb{H}_L(\mathbf{x}_2)\mathbf{h} = (2h, h) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2h \\ h \end{pmatrix} = -8h^2 - 4h^2 < 0 \,\forall h \in \boldsymbol{R},$$

tzn. forma Q_1 je pozitivně definitní a v bodě $\mathbf{x}_1 = [0, 0]$ je ostré lokální minimum funkce f na množině M, resp. forma Q_2 je negativně definitní a v bodě $\mathbf{x}_2 = [2, -2]$ je ostré lokální maximum funkce f na množině M.

Globální extrémy (1)

Definice (Globální maximum):
Nechť je dán bod $\mathbf{x}_0$ *a funkce* $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, *definovaná v množině* $M \subset \boldsymbol{R}^n$ *obsahující bod* $\mathbf{x}_0$. *Jestliže*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\, \mathbf{x} \in M,$$

říkáme, že funkce f *má v bodě* $\mathbf{x}_0$ *globální (absolutní) maximum v množině* M.

Definice (Globální minimum):
Nechť je dán bod $\mathbf{x}_0$ *a funkce* $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, *definovaná v množině* $M \subset \boldsymbol{R}^n$ *obsahující bod* $\mathbf{x}_0$. *Jestliže*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall\, \mathbf{x} \in M,$$

říkáme, že funkce f *má v bodě* $\mathbf{x}_0$ *globální (absolutní) minimum v množině* M.

Věta (Hledání globálních extrémů):
Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, *definovaná v uzavřené a omezené (tj. kompaktní) množině* $M \subset \boldsymbol{R}^n$. *Má-li funkce* f *v bodě* $\mathbf{x}_{\max} \in M$ *absolutní maximum na množině* M, *potom bod* $\mathbf{x}_{\max}$ *buď leží na hranici množiny* M *nebo má funkce* f *v bodě* $\mathbf{x}_{\max}$ *lokální maximum. Obdobně má-li funkce* f *v bodě* $\mathbf{x}_{\min} \in M$ *absolutní minimum na množině* M, *potom bod* $\mathbf{x}_{\min}$ *buď leží na hranici množiny* M *nebo má funkce* f *v bodě* $\mathbf{x}_{\min}$ *lokální minimum.*

Abychom tedy našli největší a nejmenší hodnotu diferencovatelné funkce $f(\mathbf{x})$ na kompaktní množině M stačí najít vnitřní body množiny M, ve kterých platí $\operatorname{grad} f = 0$ a hraniční body M, kde by mohl být vázaný extrém vzhledem k množině ∂M. Jestliže je těchto bodů konečně mnoho, stačí z těchto bodů vybrat ten, ve kterém je funkční hodnota $f(\mathbf{x})$ největší nebo nejmenší.