Cvičení MAI 3 – Konvergence posloupností funkcí

Teoretický základ:

Def: $f_n, f : M \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $M \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$

- $f_n \to f$ (bodově) na M $\overset{def}{\equiv}$ $\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  $(n_0 = n_0(\varepsilon, x))$
- $f_n \rightrightarrows f$ (stejnoměrně) na M $\overset{def}{\equiv}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  $(n_0 = n_0(\varepsilon))$
- $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ (lokálně stejn.) na M $\overset{def}{\equiv}$ $\forall x \in M\ \exists\, U(x) : f_n \rightrightarrows f$ na $U(x)$

Platí: $f_n \rightrightarrows f$ na M $\Rightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M $\Rightarrow$ $f_n \to f$ na M

Vyšetřování konvergence $\{f_n\}$ na $M \neq \emptyset$

1) bodová konvergence – výpočet limity posloupnosti pro $x \in M$
(x - pevné – $f_n(x)$ číselná posloupnost)

2) stejnoměrná konvergence na M

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$

(ii) $\exists \alpha_n, n \in \mathbb{N}$ tak, že $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ pro $\forall\, x \in M$
a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \implies f_n \rightrightarrows f$ na M

(iii) (Bolzano – Cauch. podmínka) (stejnoměrná)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

(iv) nutné podmínky stejnoměrné konvergence:

1) $f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou omezené na M $\Rightarrow$ f je omezená na M

2) $f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou spojité na M $\Rightarrow$ f je spojitá na M
(důkaz na přednášce)

(hodí se k vyloučení stejn. konvergence na M)

3) lokálně stejnoměrná konvergence

(i) často se zapíší takto: (jednodušší):

$M = (a,b)$, $f_n \rightrightarrows f$ na každém uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$ $\Rightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)

(ii) platí také: („těžké")

$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$

4) „záměna limit" u posloupností funkcí

V. (Moore-Osgood):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_n \rightrightarrows f \text{ v } P(x_0) \quad (x_0 \in R,\ x_0 = \pm\infty) \\ 2)\ \text{ex. } \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ex. } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ i } \lim_{x \to x_0} f(x)$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$)

(analog. pro limity jednostranné)

Důsledky

1) $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), f_n spojité na (a,b) $\Rightarrow$ f je spojitá na (a,b)

2) $$\left.\begin{array}{l} f_n \in R(\langle a,b \rangle),\ n \in N \\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } \langle a,b \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f \in R(\langle a,b \rangle) \text{ a } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$)

3) $f_n : (a,b) \to R$ ((a,b) - omezený interval), ex. $f_n' \in R$ na (a,b)
a ex. $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje;
a $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b),
potom platí: $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ na (a,b) a $f'(x) = g(x)$ na (a,b)

Cvičení teoretická:

1. Dokažte, že platí:

$$f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows g \text{ na } M \Rightarrow f_n \pm g_n \rightrightarrows f \pm g \text{ na } M$$

$$c \in \mathbb{R},\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Rightarrow c f_n \rightrightarrows c f \text{ na } M$$

2. Dokažte:

$f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou funkce omezené na M pro $\forall n \in N$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f je omezená na M

3. Ukažte, nebo vyvraťte:

na M: $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ $\Rightarrow$ $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ na M

4. Pokud $f_n, f : (a,b) \to R$ ($n \in N$ a (a,b) je omezený interval) mají na (a,b) primitivní funkce F_n, F, lze něco tvrdit o $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)?

Příklady:

(1.) $f_n(x) = x^n$, $n \in N$, $x \in \langle 0,1\rangle$

(bylo na přednášce, mírně zde podrobněji)

bodová limita: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

odtud: $x^n \not\rightrightarrows$ na $\langle 0,1\rangle$, neboť limita je nespojitá funkce

z definice: $x^n \overset{?}{\rightrightarrows} 0$ na $\langle 0,1)$ – může zde být konvergence stejnoměrná??

tj. ? $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in \langle 0,1)$: $|x^n| < \varepsilon$

$\overset{?}{x^n < \varepsilon} \iff \overset{?}{n \ln x < \ln \varepsilon} \iff n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

$x \in (0,1)$

pro $x \to 1-$ je $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x} = +\infty$, tedy nelze zvolit n_0 tak, aby pro v. $n > n_0$ a $x \in (0,1)$ platí $x^n < \varepsilon$

<u>stejně i n.a.p. podmínka stejnoměrné konvergence:</u>

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \iff \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\sup_{x \in (0,1)} x^n = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in (0,1)} (x^n - 0) = 1 \neq 0, \text{ tedy}$$

$$x^n \not\rightrightarrows 0 \text{ na } (0,1)$$

<u>lokálně stejnoměrná konvergence</u>

$x \in \langle 0, a \rangle$, $0 < a < 1$, pak

$\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \langle 0,a \rangle} x^n = \lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, tedy $x^n \rightrightarrows 0$ na každém intervalu $\langle 0, a \rangle$, $a < 1$, a tedy $x^n \overset{lok}{\rightrightarrows} 0$ na $\langle 0, 1)$

(<u>Pozn.</u> konvergence není lokálně stejnoměrná na $\langle 0,1 \rangle$ – v případě kompaktního intervalu $\langle 0,1 \rangle$ by konvergence pak byla i stejnoměrná!)

(2) <u>$f_n(x) = x^n (1-x)$, $x \in \langle 0,1 \rangle$</u>

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^n (1-x) = 0 \; (\equiv f(x))$ pro $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$

(ii) upřesněme, zda konvergence je stejnoměrná:

$$\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} x^n (1-x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$$

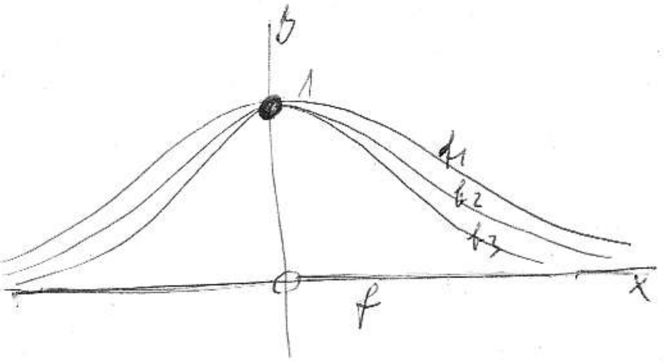
$$\Rightarrow \underline{x^n (1-x) \rightrightarrows 0 \text{ na } \langle 0,1 \rangle}$$

Vypočtení $\max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} x^n(1-x)$ $\left(= \sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x)-0|\right)$ standardně:

$f_n(0)=f_n(1)=0$, $f_n(x)>0$ v $(0,1)$ $\Rightarrow$ max bude tam, kde $f_n'(x)=0$
ev. $f_n'(x)$ v $(0,1)$

$$f_n'(x) = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}[n-(n+1)x]$$

$$\underset{x\in(0,1)}{f_n'(x)=0} \iff x_n = \frac{n}{n+1}$$



(3) $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, $x\in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$

(ii) $f_n(x)$ jsou funkce spojité na R, limita $f(x)$ je fce nespojitá v $x=0$ $\Rightarrow$ $f_n \not\rightrightarrows f$ na R

(iii) ? konvergence v $(0,+\infty)$ (analog. v $(-\infty,0)$ – $f_n(x)$ jsou sudé funkce)!

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1, \text{ tedy,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = 1, \text{ tedy } \frac{1}{(1+x^2)^n} \not\rightrightarrows 0 \text{ na } (0,+\infty)$$

(iv) ? lokálně stejnoměrná konvergence na $(0,+\infty)$ (resp. $(-\infty,0)$):

$x\in\langle a,+\infty)$, $a>0$;

$$\sup_{x\in\langle a,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\langle a,+\infty)} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+a^2)^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$$

(kles. fce na $\langle a,+\infty)$)

$\Rightarrow$ $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na každém int. $\langle a,+\infty)$, $a>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,+\infty)$ (i na $(-\infty,0)$ – stejné)

! ale $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ na R, neboť neex. žádné okolí bodu 0, na kterém by $\{f_n(x)\}$ konvergovala stejnoměrně

Poznámka:
$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^n} &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1\\ \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} &= \lim_{x\to 0} 0 = 0\end{aligned}\right\}\neq 0,$$

tedy (Moore-Osgood), na žádném $P(0)$ $f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně k $f(x)$

④ $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$ pro $\forall x\in R$

(ii) vyšetření stejnoměrné konvergence:
$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in R}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{(\to e)}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}}_{(\to 1)} = 0 \Rightarrow$$

$$f_n'(x) = \frac{2x(1+x^2)^n - x^2\cdot n(1+x^2)^{n-1}\cdot 2x}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\left(1+(1-n)x^2\right)$$

$$f_n'(x)=0 \iff x=0 \ \vee\ x^2=\frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n>1$$

$$\max_{x\in R} f_n(x) \underset{n>1}{=} \frac{\frac{1}{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \rightrightarrows 0 \text{ na } R$$

⑤ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in R$: (jednoduchý příklad)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = 0$, $x\in R$ (věta o limitě sevřené posl.)

(ii) $\left|\dfrac{\sin nx}{n} - 0\right| \le \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0 \text{ na } R$$

(6) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \ x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0 \quad \forall x \in R$

(ii) $\sup\limits_{x\in R} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in R} \left|\sin\frac{x}{n}\right| = 1 \not\to 0 \Rightarrow$

$\left(= \max \left|\sin\frac{x}{n}\right| = f_n\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows 0 \ \text{v} \ R$

(iii) ale: $x \in \langle -a, a\rangle$, pak

$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{x\in\langle -a,a\rangle} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in\langle -a,a\rangle} \left|\sin\frac{x}{n}\right| \leq \frac{a}{n}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\langle -a, a\rangle$ pro lib. $a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na R

Dú (7) $f_n(x) = n\cdot\sin\frac{x}{n}, \ x \in R$ – Dú

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{x}{n} = x, \ x \in R$

(ii) $\left.\begin{array}{l} f_n(x) = n\sin\frac{x}{n} \text{ je fce omezená v } R \ (\forall n \in N) \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x \text{ – není omezená} \end{array}\right\} \Rightarrow$ konvergence není stejnoměrná v R

(iii) ukažte, že $n\cdot\sin\frac{x}{n} \rightrightarrows x$ na každém int. $\langle -a, a\rangle$, $a > 0$,

tedy, $n\sin\frac{x}{n} \overset{loc}{\rightrightarrows} x$ na R

<u>Dú</u> (8) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx,\ x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (0,+\infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty,0) \end{cases}$

(ii) limita funkcí spojitých na R je nespojitá $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows$ na R

(iii) upřesněte, zda $\operatorname{arctg} nx \rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ na $(0,+\infty)$ (ne)
nebo aspoň lokálně stejnoměrně na $(0,+\infty)$ (ano)

<u>Dú</u> (9) $f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg} nx,\ x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}\cdot x,\ x \in R$

(ii) ukažte, že $x \operatorname{arctg} nx \rightrightarrows \frac{\pi}{2} x$ na R

<u>Poznámka k příkladu (8) – záměna limit:</u>

$f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ v $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

ex. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(= \frac{\pi}{2}\right)$

<u>ale</u> **!**: $\left.\begin{aligned} &\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg} nx = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \\ a\ &\lim\limits_{x\to 0+}\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \neq 0 \Rightarrow$

tedy f_n nekonvergují stejnoměrně na žádném $P_+(0)$
(analog. pro $P_-(0)$)