11. Lineární zobrazení

V celé přednášce pojednáváme o vektorových prostorech nad jedním a týmž polem P.

Definice. Buďte U, V vektorové prostory. Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá *lineární*, přesněji *lineární nad polem* P, jestliže platí

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (aditivita)

(ii) $f(ra) = rf(a)$ (homogenita)

pro každé dva vektory $a, b \in U$ a každý skalár $r \in P$. Jiný název pro lineární zobrazení je *homomorfismus vektorových prostorů*.

Příklad. (1) Identické zobrazení $\mathrm{id} : U \to U$, $\mathrm{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0 : U \to U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c : U \to U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že (1) resp. (2) jsou speciální případy pro $c = 1$ resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbf{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbf{R}$. Toto zobrazení *není* lineární zobrazení nad $\mathbf{C}$. Ověřte.

(5) Zobrazení $\mathrm{re} : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbf{R}$.

(6) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U : U \to V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

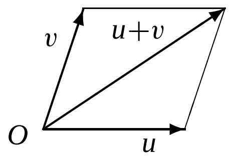
Cvičení. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je lineární nad $\mathbf{R}$ právě když existuje skalár $c \in \mathbf{R}$ takový, že $f(a) = ca$.

Návod: Položte $c = f(1)$.

Uveďme dva příklady významných geometrických zobrazení, která jsou lineární co se týče účinku na vektory.

1. *Otáčení.* Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α, nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha : E^2 \to E^2$.

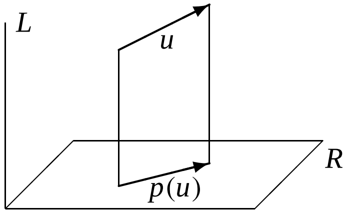
Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c-násobek vektoru na c-násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu



se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \to E^3$.

2. *Rovnoběžné promítání.* Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \to R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dotplus R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.



Promítání $p : E^3 \to R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \to V$ je homomorfismem abelovských grup $(U, +, 0, -) \to (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$.

Tvrzení. *Buďte $f : U \to V$, $g : V \to W$ homomorfismy. Pak je $g \circ f : U \to W$ také homomorfismus.*

Důkaz. Ověřme aditivitu zobrazení $g \circ f$. Pro libovolná $a, b \in U$ máme $(g \circ f)(a + b) = g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b)) = g(f(a))+g(f(b)) = (g\circ f)(a)+(g\circ f)(b)$. Homogenita podobně.

Jádro a obraz

Definice. Buď $f : U \to V$ homomorfismus. Označme

$$\operatorname{Ker} f = \{ u \in U \mid f(u) = 0 \},$$

$$\operatorname{Im} f = fU = \{ f(u) \mid u \in U \}.$$

Ker f se nazývá *jádro* a Im f se nazývá *obraz* homomorfismu f.

Tvrzení. *Buď $f : U \to V$ homomorfismus. Pak*
(1) Ker f *je podprostor v U.*
(2) Im f *je podprostor ve V.*

Důkaz. (1) (i) $0 \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(0) = 0$. (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Ker} f$. Pak $a + b \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Ker} f$, $r \in P$. Pak $ra \in \operatorname{Ker} f$ (cvičení).
(2) Cvičení.

Cvičení. (1) Pro homomorfismus re z příkladu (5) platí:

$$\operatorname{Im} \mathrm{re} = \mathbf{R}, \qquad \operatorname{Ker} \mathrm{re} = \mathbf{R}\mathrm{i} = \{r\mathrm{i} \mid r \in \mathbf{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p : E^3 \to E^2$ je podprostor Ker f totožný se směrem promítání, kdežto Im $f = E^2$.
(3) Při otáčení $\phi_\alpha : E^2 \to E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\operatorname{Im} \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\operatorname{Ker} \phi_\alpha$ je nulový podprostor.

Tvrzení. *Buď* $f : U \to V$ *homomorfismus. Pak*
(1) f *je injektivní právě tehdy, když* $\operatorname{Ker} f = 0$.
(2) f *je surjektivní právě tehdy, když* $\operatorname{Im} f = V$.

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\operatorname{Ker} f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivity $u = 0$.

Naopak, nechť $\operatorname{Ker} f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \operatorname{Ker} f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé.

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \operatorname{Ker} f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \operatorname{Im} f$ *hodnost* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení. *Buď* $f : U \to V$ *homomorfismus mezi konečněrozměrnými prostory* U, V*. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$, $\dim \operatorname{Ker} f = m$ a $\dim \operatorname{Im} f = p$. Zvolme bázi $u_1, \dots, u_m$ v $\operatorname{Ker} f$, doplňme ji do báze $u_{m+1}, \dots, u_n$ v U. Ověřme, že vektory $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} f$.

Zaprvé, $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ generují $\operatorname{Im} f$. Víme totiž, že $u_1, \dots, u_n$ generují U, načež $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generují $fU = \operatorname{Im} f$ (ověřte podrobně), ale $f(u_1) = 0, \dots, f(u_m) = 0$, takže je můžeme z generující množiny bez následků vyškrtnout.

Zadruhé, $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ jsou lineárně nazávislé. Vskutku, uvažujme o nulové lineární kombinaci $x_{m+1} f(u_{m+1}) + \dots + x_n f(u_n) = 0$, čili, $f(x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n) = 0$, tj.

$$x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n \in \operatorname{Ker} f,$$

načež

$$x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n = x_1 u_1 + \cdots x_m u_m$$

pro vhodné koeficienty $x_1, \dots, x_m$. Ale zúčastněné vektory $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ jsou nezávislé, a proto jsou všechny koeficienty nulové, zejména $x_{m+1}, \dots, x_n$ jsou nuly, což se mělo dokázat.

Našli jsme bázi v $\operatorname{Im} f$ čítající $n-m$ vektorů, takže $\dim \operatorname{Im} f = n-m = \dim U - \dim \operatorname{Ker} f$. Důkaz je hotov.

Izomorfismy

Podobně jako u jiných algebraických struktur, invertibilní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení. *Buď* $f : U \to V$ *izomorfismus. Pak je*

$$f^{-1} : V \to U$$

též izomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f^{-1} je bijektivní. Dokažme, že je lineární. Ověřme aditivitu, tj. rovnost $f^{-1}(a+b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$. Počítejme:

$$f(f^{-1}(a+b)) = a+b = f(f^{-1}(a)) + f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

Požadovaná rovnost plyne z injektivnosti zobrazení f. Homogenita podobně.

Definice. Vektorové prostory U, V, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Tvrzení. (1) Reflexivita: $U \cong U$.
(2) Symetrie: *je-li* $U \cong V$, *pak* $V \cong U$.
(3) Tranzitivita: *je-li* $U \cong V$, $V \cong W$, *pak* $V \cong W$.

Důkaz. (1) $\mathrm{id} : U \to U$ je izomorfismus. (2) Viz předchozí tvrzení. (3) Kompozice bijekcí je bijekce, kompozice homomorfismů je homomorfismus.

Cvičení. (1) Homotetie $f_c : a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.
(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (4) je izomorfismus $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}$.
(3) Homomorfismus re z příkladu (5) není izomorfismus (není injektivní).
(4) Otáčení je vždy izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^2$ není nikdy izomorfismus.

Tvrzení. *Buďte* $U \cong V$ *dva izomorfní konečněrozměrné vektorové prostory. Pak* $\dim U = \dim V$.

Důkaz. Buď $f : U \to V$ izomorfismus. Pak $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Cvičení. Buď $f : U \to V$ izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Je-li $u_1, \dots, u_n \in U$ báze prostoru U, pak $f(u_1), \dots, f(u_n) \in V$ je báze prostoru V. Dokažte. Totéž pro množiny generátorů resp. množiny lineárně nezávislých vektorů.

Izomorfni prostory se z hlediska lineárni algebry prakticky neliší a není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor U je izomorfní s některým prostorem P^n.

Tvrzení. (1) *Libovolný vektorový prostor* U *nad polem* P *je izomorfní s prostorem* $P^{\dim U}$.
(2) *Konečněrozměrné vektorové prostory* U, V *jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. (1) Nechť $\dim U = n$. Zvolme libovolně bázi $e_1, \dots, e_n$ v U. Pak má libovolný vektor $u \in U$ souřadnice $x_1, \dots, x_n$, jednoznačně určené vztahem $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Zaveďme zobrazení $U \to P^n$ předpisem $u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. O něm je známo, že je lineární, protože při sčítání vektorů se jejich souřadnice sčítají a při násobení skalárem se násobí týmž skalárem.

(2) Implikace „$\Rightarrow$“ již byla dokázána. Implikace „$\Leftarrow$“: Je-li $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$.

Vidíme, že počítání s vektory v souřadnicích je vlastně výpočtem v izomorfním prostoru $U \cong P^n$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě souřadnic, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a P^n ztotožňovat.

Každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze a tyto obrazy lze volit libovolně:

Tvrzení. *Zvolme bázi $u_1, \dots, u_n$ v konečněrozměrném prostoru U. Pak ke každé n-tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f : U \to V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots,$ $f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Zvolme n-tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$. Obecný prvek $u \in U$ je tvaru $x_1u_1 + \dots + x_nu_n$. Položme $f(u) = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Ověřte samostatně, že (a) zobrazení $f : U \to V$ je lineární a $f(u_i) = v_i$; (b) je-li $f' : U \to V$ lineární zobrazení takové, že $f(u_i) = v_i$, pak $f' = f$.

Přitom lze snadno rozeznat injektivní a surjektivní homomorfismy:

Tvrzení. *Buď $f : U \to V$ zobrazení z předchozího tvrzení*
(1) *f je injektivní právě tehdy, když jsou vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ nezávislé;*
(2) *f je surjektivní právě tehdy, když vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V.*

Důkaz. Cvičení.

Důsledek. *Zobrazení f z předchozího tvrzení je izomorfismus právě tehdy, když $v_1, \dots, v_n$ je báze.*

Přímý součet vektorových prostorů

Již dříve jsme zavedli přímé součty podprostorů. Nyní uvedeme konstrukci přímého součtu libovolných prostorů, pokud mají společné pole skalárů.

Definice. Buďte $U_1, \dots, U_n$ libovolné vektorové prostory nad polem P. Na kartézském součinu $U_1 \times \dots \times U_n$ zaveďme strukturu vektorového prostoru předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$
$$r(u_1, \dots, u_n) = (ru_1, \dots, ru_n)$$

pro libovolné prvky $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in U \times V$.

Vektorový prostor $U_1 \times \dots \times U_n$ s touto algebraickou strukturou se značí $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů $U_1, \dots, U_n$.

Cvičení. Ověřte, že $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ skutečně splňuje všechny axiomy vektorového prostoru.

Tvrzení. *Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ konečněrozměrné vektorové prostory, pak platí*

$$\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n.$$

Důkaz. Je-li $e^i_1, \dots, e^i_{m_i}$ báze prostoru U_i, pak je

$$(e^1_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^1_{m_1}, 0, \dots, 0), \dots\dots, (e^n_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^n_{m_n}, 0, \dots, 0)$$

báze prostoru $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ (cvičení).

Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory nějakého vektorového prostoru U, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_n$ a $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. První z nich je podprostor v U, kdežto druhý není. Nicméně, oba přímé součty jsou izomorfní. Plyne to z následujícího tvrzení.

Tvrzení. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*
(1) *součet $U_1 + \cdots + U_n$ je přímý;*
(2) *zobrazení $p : U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \to U_1 + \cdots + U_n$,*

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \cdots + u_n,$$

je izomorfismus prostoru $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ na prostor $U_1 + \cdots + U_n$.
(3) $\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 + \cdots + U_n)$.

Důkaz.
(1) $\Rightarrow$ (2). Zobrazení p je lineární (cvičení). Dále, ke každému $u \in U_1 + \cdots + U_n$ existuje rozklad $u = u_1 + \cdots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Je-li součet $U_1 + \cdots + U_n$ přímý, potom je rozklad $u = u_1 + \cdots + u_n$ jediný a $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ je zobrazení $U_1 + \cdots + U_n \to U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, inverzní k p. Potom je p bijektivní, a tedy izomorfismus.
(2) $\Rightarrow$ (3). Je-li $U_1 + \cdots + U_n \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, pak $\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.
(3) $\Rightarrow$ (2). Nechť $\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 + \cdots + U_n)$. Homomorfismus p je surjektivní (cvičení). Máme pak $\dim \operatorname{Ker} p = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) - \dim \operatorname{Im} p = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n - \dim(U_1 + \cdots + U_n) = 0$. Tudíž, p je injektivní, a proto izomorfismus, načež je náš součet přímý podle předchozího tvrzení.
(2) $\Rightarrow$ (1). Cvičení.

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího tvrzení je opravdu lineární.

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme zobrazení $\pi_i : U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \to U_i$, zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$. Nazývá se i-tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme též zobrazení $\iota_i : U_i \to U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, , 0 \dots, 0)$, kde u stojí na i-tém místě. Nazývá se vložení i-tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtěte $\pi_i \circ \iota_j$.