# Stejnoměrná konvergence posloupností fcí II

## Další příklady:

(10) $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}\ ,\quad x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x}{1+n^2x^2} = 0 \quad \forall\, x \in R$

(ii) vyšetření konvergence:

pro $x \neq 0$ zkusme odhad shora (jako v příkladu 5):

$\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2|x|}$ – pro $|x| \geq a > 0$ dostaneme

$\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2|x|} \le \dfrac{1}{n^2a}\ ,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(-\infty, -a)$ a $(a, +\infty)$, ale

pro $x \to 0$ se odhad zhoršuje, o okolí 0 nelze nic říci –

– tedy přímo – (pomocí $\max\limits_{x\in R}\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right|$):

$\max\limits_{x\in R}|f_n(x)|$: $\quad f_n'(x) = 2 \cdot \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\ ,\ f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = \pm\dfrac{1}{n}$

$\max\limits_{x\in R}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n}}{1+1} = \dfrac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$,

tedy: $\dfrac{2x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $R$

(11) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\ ,\quad x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0\ ,\ x \in R$

(ii) $\max\limits_{x\in R}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \not\to 0 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows 0$ v $R$

(Pozn.: limita může být spojitá funkce, i když konvergence není stejnoměrná)

(iii) $v\ \langle a,+\infty),\ a>0$ :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ : $\frac{1}{n_0} < a$, pro $n$: $n > n_0$ je $f_n(x)$ klesající fce v $\langle a,+\infty)$ ( $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$ ), a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\langle a,+\infty)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{2na}{1+a^2n^2} = 0,$$

tedy $\frac{2nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $\langle a,+\infty)$, a tedy

$$\frac{2nx}{1+n^2x^2} \overset{loc}{\rightrightarrows} 0 \quad v \quad (0,+\infty)$$

(analogicky se ukáže lok. stejn. konvergence i v $(-\infty,0)$), ale posloupnost nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí nuly.

Dú (12) $f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{2}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$

(ii) ukažte (podobně jako v př. 11), že $f_n(x) \rightrightarrows \frac{2}{x}$ pro int. $\langle a,+\infty)$ (a $(-\infty,-a\rangle$), $a>0$, tedy $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} \frac{2}{x}$ na $(0,+\infty)$ (a $(-\infty,0)$), ale $f_n$ nekonvergují na $(0,+\infty)$ (ani na $(-\infty,0)$) stejnoměrně

(nakreslete si $f_n$ v příkladech 10, 11, 12)

Poznámka: všimněte si opět:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0\pm} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0\pm} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{2}{x} = \pm\infty$$

} není zde záměna limit! ($f_n$ nekonverg. stejnoměrně v žádném $P(0)$)

zde: ($x\to\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

} zde jsou splněny předp. věty Moore-Osgood

Dú (13) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} = 1$, $x \in R$

(ii) ukažte, že $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 1$ v $R$, ale ne stejnoměrně na $R$

(iii) ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Dú (14) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(ii) vysvětlete, zda $f_n \rightrightarrows$ v $R$, nebo aspoň $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ v $R$
(ne – limita je nespojitá funkce)

(iii) najděte max. interval, kde konvergují $f_n$ stejnoměrně, kde lokálně stejnoměrně

( $f_n \rightrightarrows 0$ na každém int. $(-\infty, -a\rangle$, $\langle a, +\infty)$, $a > 0$,
$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, +\infty)$ a $(-\infty, 0)$ )

Dú (15) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^2}$, $x \in R$

(i) Ukažte, že $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $R$ (lze jednoduše odhadem $|f_n(x)|$)

(ii) Přesvědčte se o záměně limit pro $x \to \infty$.

Ještě několik poznámek a příkladů k větám o „záměně limity a derivací" a „záměně limity a integrálu"

(viz sk 2)

(1) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$, $x \in R$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $R$ $\left(\text{neboť}_{(x\in R)} \ \left|\dfrac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$
$(\equiv f(x))$

ale posloupnost $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$ nemá limitu $f'(x)=0$

(2) $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)$, $x \in R$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $R$ $\left(\text{opět: pro } x\in R: \left|\dfrac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}\right| \le \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$,

tedy $f(x) = 0$ a $f'(x) = 0$ v $R$

ale: $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \ne 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1 \\ \text{neex.} & \text{pro } x = -1 \end{cases}$,

tedy opět, i když $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $R$, $f_n'(x)$ nekonvergují k $f'(x)$.

Je vidět, že $f_n'(x)$ nekonvergují stejnoměrně (ani lokálně stejn.) na $R$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ není spojitá fce (a dokonce v $x=-1$ neex.)

Na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$ ale $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$, tedy zde už platí věta o „záměně limity a derivace":

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 = \left(\lim f_n(x)\right)', \quad x\in(0,1),\ x\in(1,+\infty)$$

(zatímco $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2} \ne \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} = 0$ )

Dů! (3) $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ , $x \in R$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $R$ (viz příklad 10), ale

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 2, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$$ , tedy opět

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \left(\lim f_n(x)\right)'$$

ukažte. (a pokuste se vyjádřit, kde posloupnost $f_n'(x)$ konvergují lokálně stejnoměrně a kde lze uplatnit větu o záměně limity a derivace)

(4) $f_n(x) = n$ , $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ , $x \in R$

$f_n'(x) = 0$ , tedy $f_n' \rightrightarrows 0$ v $R$ , ale opět zde není záměna limity a derivace – nelze vynechat předpoklad o konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$ aspoň v jednom bodě ve větě „o záměně“.

(5) „Záměna limity a integrálu“

$f_n(x) = n \cdot x\, e^{-nx^2}$ , $x \in \langle 0,1 \rangle$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot x\, e^{-nx^2} = 0$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ , ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x e^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\left(e^{-nx^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) = \tfrac{1}{2} ,$$

zatímco $\int_0^1 \lim f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ , tedy

! $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$

Tedy, $\{f_n(x)\}$ nekonvergují stejnoměrně k $0$ v $\langle 0,1\rangle$ – ověřte!
(lze opět užít n. a p. podmínku stejnoměrné konvergence)

(6) Ale! $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ , $x \in \langle 0,1\rangle$

$f_n(x) \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$, ale ne stejnoměrně (viz příklad 11 z části I),
přesto
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(1+n^2) = 0 = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$$

$$\left( \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n}\Big[\ln(1+n^2x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{n}\ln(1+n^2) \right)$$

Tedy, stejnoměrná konvergence $\{f_n\}$ na oboru integrace není podmínkou nutnou pro záměnu limity a R-integrálu.

Dú (7) Ještě k předchozímu příkladu:

Ukažte také, že i když $\{f_n(x)\}$ nekonvergují lokálně stejnoměrně na žádném intervalu $(-a,a)$ $(a>0)$, lze zvolit primit. fce $F_n(x)$ k $f_n(x)$ $(x \in R)$ tak, že $F_n(x) \rightrightarrows 0$ v $(-a,a)$ (pro $\forall a>0$) a tedy $F_n(x) \overset{lok}{\rightrightarrows} 0$ v $R$.