8 Implicitní funkce

71. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $x^2 - 2xy + y^3 = 0$.

Řešení První derivaci y' určíme oběma možnými metodami.
a) Nejprve podle vzorce

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2x - 2y}{-2x + 3y^2} = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}.$$

b) Druhá možnost výpočtu spočívá ve zderivování dané rovnice $x^2 - 2xy + y^3 = 0$ podle x, přičemž y považujeme za funkci proměnné x. Platí

$$2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0.$$

Vypočítáme y' a opět dostáváme $y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x}$.

Nyní přistupme k výpočtu druhé derivace y''.
Tu podle vzorce určovat nebudeme. Pro výpočet druhé derivace budeme vždy používat metodu derivování rovnice podle x. Vztah $2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí

$$2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0.$$

Rovnici upravíme a vypočteme y''. Dostáváme

$$y'' = \frac{4y' - 2 - 6y(y')^2}{3y^3 - 2x}.$$

72. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $x + y - \mathrm{e}^{x-y} = 0$.

Řešení Vzorec pro výpočet y' je vhodné použít, pokud nemusíme určovat derivace vyšších řádů. Použijeme tedy k výpočtu druhé metody. Rovnici $x + y - \mathrm{e}^{x-y} = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$1 + y' - - \mathrm{e}^{x-y}(1 - y') = 0.$$

Odtud po úpravě plyne

$$y' = \frac{\mathrm{e}^{x-y} - 1}{\mathrm{e}^{x-y} + 1}.$$

Druhou derivaci y'' funkce dané implicitně získáme dalším derivováním vztahu $1+y'-\mathrm{e}^{x-y}(1-y') = 0$. Platí

$$y'' - \mathrm{e}^{x-y}(1 - y')^2 - \mathrm{e}^{x-y}(-y'') = 0.$$

Z poslední rovnice již vypočítáme y''. Dostáváme $y'' = \dfrac{\mathrm{e}^{x-y}(1 - y')^2}{\mathrm{e}^{x-y} + 1}$.

73. Příklad Spočtěte y' a y'', je-li $xy + y^2 - x\mathrm{e}^x = 0$.

Řešení Postupujme jako v předchozí úloze. První derivací rovnice $xy + y^2 - x\mathrm{e}^x = 0$ dostáváme

$$y + xy' + 2yy' - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = 0.$$

Odtud plyne

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - y}{2y + x}.$$

Druhým zderivováním dostaneme

$$y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = 0.$$

Vztah upravíme a vypočítáme y''. Platí $y'' = \dfrac{2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2y' - 2(y')^2}{2y + x}$.

74. Příklad Spočtěte a upravte y''', je-li $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Řešení Rovnici $x^2 - y^2 - 1 = 0$ třikrát zderivujeme podle x. Pro první derivaci platí

$$2x - 2yy' = 0. \quad \text{Odtud } y' = \frac{x}{y}.$$

Druhou derivací rovnice dostáváme

$$2 - 2y'y' - 2yy'' = 0. \quad \text{Odtud } y'' = \frac{1 - (y')^2}{y}.$$

Ze třetí derivací rovnice dostáváme

$$-4y'y'' - 2y'y'' - 2yy''' = 0. \quad \text{Odtud } y''' = -\frac{6y'y''}{y}.$$

Po dosazení za y' a y'' a krátké úpravě získáme

$$y''' = \frac{6x(x^2 - y^2)}{y^5}.$$

75. Příklad Určete, zda je funkce daná implicitně rovnicí $2^{xy} + y^2 - 5 = 0$ rostoucí v bodě $[0, -2]$.

Řešení Rovnici $2^{xy} + y^2 - 5 = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$\ln 2 \cdot 2^{xy}(y + xy') + 2yy' = 0. \quad \text{Odtud } y' = -\frac{\ln 2 \cdot y \cdot 2^{xy}}{2y + \ln 2 \cdot x \cdot 2^{xy}}.$$

Nyní dosadíme souřadnice zadaného bodu $[0, -2]$ do y' a získáváme

$$y'(0) = -\frac{\ln 2(-2)2^0}{2(-2) + \ln 2 \cdot 0 \cdot 2^0} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Protože je derivace ve vyšetřovaném bodě záporná, je funkce daná implicitně v tomto bodě klesající.

76. Příklad Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení Předně rovnice tečny ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ zderivujeme podle x. Platí

$$5x^4 + 5y^4y' - 2y - 2xy' = 0.. \quad \text{Odtud } y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$$

a

$$y'(1) = \frac{2 - 5}{5 - 2} = -1.$$

Dosadíme do rovnice tečny. Platí $y - 1 = -1(x - 1)$. Po úpravě dostáváme $x + y - 2 = 0$.

77. Příklad Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $[2, 0]$.

Řešení Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 2$ a $y_0 = 0$. Určíme hodnotu derivace $y'(2)$. Rovnici $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ zderivujeme podle x. Platí

$$\mathrm{e}^{xy}(y + xy') + \cos y \cdot y' + 2yy' = 0.$$

Odtud $y' = \frac{y\mathrm{e}^{xy}}{2y+\cos y+x\mathrm{e}^{xy}}$ a $y'(2) = 0$. Po dosazení dostáváme, že rovnice tečny je $y = 0$.

78. Příklad Spočtěte rovnici normály ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $xy + \ln y - 1 = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení Předně rovnice normály ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy opět stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $xy+\ln y-1 = 0$ zderivujeme podle x. Platí $y+xy'+\frac{1}{y}y' = 0$. Odtud $y' = \frac{-y^2}{1+xy}$ a $y'(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$. Dosadíme do rovnice normály. Platí $y - 1 = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}(x - 1)$. Po úpravě dostáváme $2x - y - 1 = 0$.

79. Příklad Rozhodněte, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1]$.

Řešení Abychom rozhodli, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1]$, musíme spočítat hodnotu derivace $y''(1)$. Zadanou rovnici zderivujeme podle x. Platí $3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0$. Odtud $y' = \dfrac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$ a tedy $y'(1) = \frac{2-3}{3-2} = -1$. Z tohoto výsledku lze usoudit, že funkce je v bodě $x_0 = 1$ klesající. Nyní zderivujeme zadanou rovnici podruhé. Platí $6x + 6yy'y' + 3y^2y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$. Odtud

$$y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x}, \qquad y''(1) = \frac{4(-1) - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = -16.$$

Protože je druhá derivace záporná, leží graf funkce v okolí bodu $[1, 1]$ pod tečnou a tedy funkce je v bodě $x_0 = 1$ konkávní.

80. Příklad Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$.

Řešení Nejprve vypočteme y'. Rovnici $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$ zderivujeme podle x. Platí $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy') - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = 0$. Vztah upravíme. $\frac{x+yy'}{x^2+y^2} - \frac{xy'-y}{x^2+y^2} = 0$ a tedy $\frac{x+y+yy'-xy'}{x^2+y^2} = 0$. Odtud plyne $x + y + yy' - xy' = 0$ a $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Podobně dojdeme k výsledku podle vzorce

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{-y}{x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{1}{x}} = -\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Ve druhém kroku nalezneme stacionární body, tj. body, pro které platí $y' = 0$. Z předchozího výpočtu ale plyne, že $y' = 0$ právě když $x + y = 0$, tj. $y = -x$. Dosazením do zadané rovnice dostaneme $\ln\sqrt{2x^2} - \operatorname{arctg}(-1) = 0$. Odtud plyne $\ln\sqrt{2}|x| + \frac{\pi}{4} = 0$. Odlogaritmováním získáme $\sqrt{2}|x| = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ a $|x| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. Nalezli jsme dva stacionární body

$$s_1 = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \text{ a } s_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Ve třetím kroku určíme druhou derivaci y''. Rovnici $x + y + y'y - y'x = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $1 + y' + y''y + (y')^2 - y''x - y' = 0$. Odtud plyne, že $y'' = \dfrac{(y')^2 + 1}{x - y} = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$. Poslední rovnost vznikla dosazením $y' = \frac{x+y}{x-y}$. V závěrečném kroku pomocí druhé derivace rozhodneme, zda v bodech S_1 a S_2 dochází k lokálním extrémům. Pro bod s_1 platí $y''(s_1) = \dfrac{2s_1^2}{(s_1 - (-s_1))^3} = \dfrac{1}{2s_1} < 0$. Podobně pro bod s_2 platí $y''(s_2) = \dfrac{1}{2s_2} > 0$. Tedy v bodě s_1 dochází k lokálnímu maximu a v bodě s_2 k lokálnímu minimu implicitní funkce.