

BA.1 Booleovy algebry.

BA.1.1. Struktury \underline{I}_2 .

Buď

$$\underline{2} = \langle 2, -, \vee_1, \wedge_1, 0, 1 \rangle, \quad (1)$$

kde $2 = \{0, 1\}$ a dále:

Funkce	Definice
$-_1 : 2 \rightarrow 2$	$-_1(0) = 1, -_1(1) = 0$
$\vee_1 : 2 \times 2 \rightarrow 2$	$\vee_1(x, y) = \max(x, y)$
$\wedge_1 : 2 \times 2 \rightarrow 2$	$\wedge_1(x, y) = \min(x, y)$

(1) je L -struktura, kde $L = \langle -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ s unárními $-$, binárními \vee, \wedge a nulárními $0, 1$; L je signatura Booleových algeber.

Obecněji pro $I \neq \emptyset$ buď

$$\underline{I}_2 = \langle I, -_I, \vee_I, \wedge_I, 0_I, 1_I \rangle, \quad (2)$$

kde každá uvedená operace se bere po složkách v $\underline{2}$. Struktura \underline{I}_2 je I -tá mocnina struktury $\underline{2}$. $\underline{2}$ snadno ztotožníme s \underline{I}_2 , tj. prokážeme jejich izomorfismus. (Přitom $1 = \{0\}$.) \underline{I}_2 můžeme také chápat jako strukturu všech pravdivostních ohodnocení prvovýroků, tvořících právě množinu I .

BA.1.2. Booleovy algebry.

Pro struktury \underline{I}_2 platí *booléovské zákony* (též *axiomy*), tj. pro x, y, z z jejich univerz máme, vynecháme-li dolní index I :

asociativita	$x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$	\diamond je \vee nebo \wedge
komutativita	$x \diamond y = y \diamond x$	\diamond je \vee nebo \wedge
distributivita	$x \diamond (y \diamond' z) = (x \diamond y) \diamond' (x \diamond z)$	$\diamond [\diamond']$ je $\vee [\wedge]$ nebo $\wedge [\vee]$
absorbce	$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$	
komplementace	$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0$	

Každá struktura $\underline{B} = \langle B, -^B, \vee^B, \wedge^B, 0^B, 1^B \rangle$, o jejíchž funkcích (operacích) platí booleovské zákony (kde místo operace \diamond píšeme \diamond^B) se nazývá *Booleova algebra*. Platí-li navíc $0 \neq 1$, je *netriviální*, když $0 = 1$, je *triviální*.

To, že \underline{I}_2 je Booleova algebra vidíme ihned např. z toho, že $\underline{\mathcal{P}(I)}$ je izomorfní s \underline{I}_2 , píšeme

$$\underline{\mathcal{P}(I)} \cong \underline{I}_2,$$

kde $\underline{\mathcal{P}(I)}$ je *potenční Booleova algebra*:

$$\underline{\mathcal{P}(I)} = \langle \mathcal{P}(I), -, \cup, \cap, \emptyset, I \rangle.$$

kde $-, \cup, \cap$ jsou operace komplementu, sjednocení a průniku, zúžené na $\mathcal{P}(I)$; tedy $-u = I - u$ pro $u \subseteq I$. Izomorfismem je $u \mapsto \text{ch}_u$, přičemž ch_u je charakteristická funkce u na I .

V Booleově algebře $\underline{B} = \langle B, -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ (vynechali jsme pro jednoduchost index B) definujeme *kanonické uspořádání* \leq na B vztahem $a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$. Dále definujeme binární operaci $-$ rozdíl resp. $\dot{-}$ symetrická difference vztahy $a - b = a \wedge (-b)$ resp. $a \dot{-} b = (a - b) \vee (b - a)$ a dále (booleovskou) implikaci \rightarrow resp. ekvivalenci \leftrightarrow takto: $a \rightarrow b = -a \vee b$ resp. $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

BA.1.3. V Booleově algebře $\langle B, -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ pro $x, y, z, x', y' \in B$ platí:

<i>Idempotence:</i>	$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$
	$x \vee y = x \Leftrightarrow x \wedge y = y$
	\leq je uspořádání, $x \vee y = \sup_{\leq} \{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf_{\leq} \{x, y\}$
<i>Monotonie:</i>	$x \leq y \text{ a } x' \leq y' \Rightarrow x \vee x' \leq y \vee y' \text{ a } x \wedge x' \leq y \wedge y'$
<i>Extremalita:</i>	$x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 0 = 0$
<i>Neutralita:</i>	$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$

$$\begin{aligned}
& x \wedge y = 0 \text{ a } x \vee y = 1 \Leftrightarrow y = -x, \quad 0 = -1, \quad 1 = -0 \\
\text{De Morgan: } & x \wedge y = -(x \vee -y), \quad x \vee y = -(x \wedge -y) \\
& -(-x) = x, \quad -x = -y \Rightarrow x = y, \quad x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x \\
& x \dot{-} y = y \dot{-} x, \quad (x \dot{-} y) \dot{-} z = x \dot{-} (y \dot{-} z) \\
& -(x - y) = x \rightarrow y, \quad -(x \dot{-} y) = x \leftrightarrow y
\end{aligned}$$

Důkaz se provede zcela rutinně. \square

Vidíme, že kanonické uspořádání \leq Booleovy algebry \underline{B} má nejmenší prvek 0 a největší 1 a každá konečná množina $s \subseteq B$ má supremum a infimum, $\langle B, \leq \rangle$ je tedy svaz. Definujeme operace \bigvee a \bigwedge z $\{s \subseteq B; s \text{ je konečná}\}$ do B :

$$\bigvee s = \sup_{\leq} s, \quad \bigwedge s = \inf_{\leq} s; \quad \text{speciálně } \bigvee \emptyset = 0, \quad \bigwedge \emptyset = 1.$$

Platí ovšem $\bigwedge \{x_0, \dots, x_{n-1}\} = x_0 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $\bigvee \{x_0, \dots, x_{n-1}\} = x_0 \vee \dots \vee x_{n-1}$; závorky v uvedených výrazech díky asociativitě a komutativitě vynecháváme.

Podstruktura Booleovy algebry \underline{B} je struktura $\underline{A} = \langle A, -^A, \vee^A, \wedge^A, 0^A, 1^A \rangle$, kde $A \subseteq B$ a operace \diamond^A jsou zúžením \diamond^B na A (speciálně $0^A = 0^B$, $1^A = 1^B$.) Každá podstruktura Booleovy algebry je Booleova algebra, neboť v ní jasně platí všechny booleovské zákony.

Pro $0 < m < n \in \mathbb{N}$ je každá Booleova algebra \underline{m} až na izomorfismus podalgebrou \underline{n} a také podalgebrou \mathbb{N}_2 .

BA.1.4. Atomy v Booleově algebře.

1. Atom v Booleově algebře je nenulový prvek x , pod kterým leží jen nula a on sám. Množinu všech atomů Booleovy algebry \underline{B} označíme At_B .

2. Booleova algebra je *atomární*, leží-li pod každým jejím nenulovým prvkem atom. Booleova algebra je *bezatomární*, neexistuje-li v ní žádný atom.

Zřejmě atomy Booleovy algebry jsou právě minimální prvky množiny jejich nenulových prvků v kanonickém uspořádání. Dále je každá konečná netriviální Booleova algebra atomární.

TVRZENÍ BA.1.5. *Buď \underline{B} atomární Booleova algebra. Zobrazení $h : B \rightarrow \mathcal{P}(\text{At}_B)$, kde $h(b) = \{a; a \leq b, a \text{ je atom v } B\}$, je izomorfismus \underline{B} a nějaké podalgebry potenční algebry $\mathcal{P}(\text{At}_B)$. Je-li \underline{B} konečná, je h izomorfismus B a $\mathcal{P}(\text{At}_B)$. Speciálně jsou každé dvě konečné Booleovy algebry izomorfní, právě když mají týž počet atomů; tedy $\mathcal{P}(n)$ je izomorfní s \underline{n} .*

Důkaz. Buďte $b, b' \in B$. h je prosté, neboť když $b - b' \neq 0$, existuje atom $a \leq b - b'$; pak není $a \leq b'$ a tedy $h(a) \neq h(b)$. Zřejmě $h(-^B b) = \text{At}_B - h(b)$, $h(b \wedge^B b') = h(b) \cap h(b')$, $h(b \vee^B b') = h(b) \cup h(b')$. $h(0^B) = \emptyset$ a $h(1^B) = \text{At}_B$; h je tedy izomorfismus B a podalgebry $\mathcal{P}(\text{At}_B)$ s univerzem $\{h(b); b \in B\}$. Je-li \underline{B} konečná, je At_B konečné a h je zřejmě na $\mathcal{P}(\text{At}_B)$. \square

BA.1.6. Spočetná bezatomární Booleova algebra.

Buď \underline{K} podalgebra algebry \mathbb{N}_2 s univerzem $K \subseteq \mathbb{N}_2$ tvořeným právě všemi funkcemi $f : \mathbb{N} \rightarrow 2$, které mají nějakou periodu p , $0 < p \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ. *\underline{K} je spočetná bezatomární Booleova algebra a je to až na izomorfismus jediná spočetná bezatomární Booleova algebra.*

Algebra AP výroků nad spočetně prvovýroky je spočetná bezatomární. AP je tvořená třídami $\varphi/\sim = \{\psi; \varphi \sim \psi\}$ výroků nad danou spočetnou množinou prvovýroků \mathbb{P} ; přitom

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Booleovským operacím odpovídají \neg , \vee , $\&$, \perp (falešný výrok), \top (tautologie).