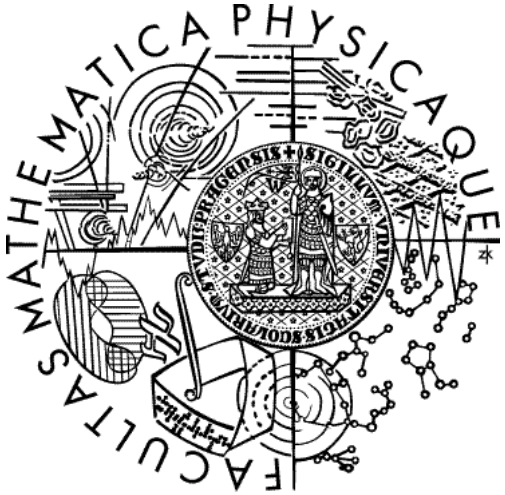
Učební texty k státní bakalářské zkoušce
Matematika

29. srpna 2011



Vážený študent/čitateľ,

toto je zbierka vypracovaných otázok pre bakalárske skúšky Informatikov. Otázky boli vypracované študentmi MFF počas prípravy na tieto skúšky, a teda zatiaľ neboli overené kvalifikovanými osobami (profesormi/dokotorandmi mff atď.) - preto nie je žiadna záruka ich správnosti alebo úplnosti.

Väčšina textov je vypracovaná v čestine resp. slovenčine, prosíme dodržujte túto konvenciu (a obmedzujte teda používanie napr. anglických textov). Ak nájdete nejakú chybu, nepresnosť alebo neúplnú informáciu - neváhajte kontaktovať administrátora alebo niektorého z prispievateľov, ktorý má write-prístup k svn stromu, s opravou :-) Podobne - ak nájdete v „texte“ veci ako ??? a TODO, znamená to že danú informáciu je potrebné skontrolovať, resp. doplniť...

Texty je možné ďalej používať a šíriť pod licenciou **GNU GFDL** (čo pre všetkých prispievajúcich znamená, že musia súhlasiť so zverejnením svojich úprav podľa tejto licencie).

Veríme, že Vám tieto texty pomôžu k úspešnému zloženiu skúšok.

Hlavní writeři :-) :

- *ajs*
- *andree* – http://andree.matfyz.cz/
- *Hydrant*
- *joshis / Petr Dvořák*
- *kostej*
- *nohis*
- *tuetschek* – http://tuetschek.wz.cz/

Úvodné verzie niektorých textov vznikli prepisom otázok vypracovaných „písomne na papier“, alebo inak ne-TEX-ovsky. Autormi týchto pôvodných verzií sú najmä nasledujúce osoby: *gASK*, *Grafi*, *Kate* (mat-15), *Nytram*, *Oscar*, *Stando*, *xStyler*. Časť je prebratá aj z pôvodných súborkových textov... Všetkým patrí naša/vaša vďaka.

V roce 2011 některé otázky updatovali a rozšířili: Karel Bílek (`http://karelbilek.com`), Petr Čečil, Michal Krkavec.

Obsah

1 Čísla **6**
- 1.1 Reálná čísla $\mathbb{R}$ . . . 6
- 1.2 Přirozená čísla $\mathbb{N}$ . . . 7
- 1.3 Celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$ . . . 8
- 1.4 Komplexní čísla $\mathbb{C}$ . . . 9
  - 1.4.1 Aritmetika . . . 9
- 1.5 Posloupnosti a limity . . . 10
  - 1.5.1 Vlastní limity . . . 10
  - 1.5.2 Nevlastní limity . . . 13
  - 1.5.3 Monotónní posloupnosti . . . 14
- 1.6 Cauchyovské posloupnosti . . . 15

2 Základy diferenciálního počtu **17**
- 2.1 Reálné funkce jedné reálné proměnné . . . 17
- 2.2 Spojitost, limita funkce v bodě (vlastní i nevlastní) . . . 17
- 2.3 Některé konkrétní funkce (polynomy, racionální lomené funkce, goniometrické a cyklometrické funkce, logaritmy a exponenciální funkce) . . . 20
- 2.4 Derivace: definice a základní pravidla, věty o střední hodnotě, derivace vyšších řádů . . . 21
- 2.5 Některé aplikace (průběhy funkcí, Newtonova metoda hledání nulového bodu, Taylorův polynom se zbytkem) . . . 26

3 Integrál **29**
- 3.1 Primitivní funkce, metody výpočtu . . . 29
  - 3.1.1 Postup integrace racionální funkce . . . 29
- 3.2 Určitý (Riemannův) integrál, užití určitého integrálu . . . 30
  - 3.2.1 Užití určitého integrálu . . . 32
- 3.3 Vícerozměrný integrál a Fubiniho věta . . . 32

4 Základy teorie funkcí více proměnných **35**
- 4.1 Parciální derivace a totální diferenciál . . . 35
- 4.2 Věty o střední hodnotě . . . 36
- 4.3 Věta o implicitních funkcích . . . 37
- 4.4 Extrémy funkcí více proměnných . . . 37

5 Metrické prostory **39**
- 5.1 Definice metrického prostoru, příklady . . . 39
- 5.2 Definice topologického prostoru . . . 41
- 5.3 Spojitost a stejnoměrná spojitost . . . 42

6 Základní algebraické struktury **46**
- 6.1 Grupa, okruh, těleso – definice a příklady . . . 46
- 6.2 Malá Fermatova věta . . . 48
- 6.3 Dělitelnost a ireducibilní rozklady polynomů . . . 49
- 6.4 Rozklady polynomů na kořenové činitele . . . 51
- 6.5 Násobnost kořenů a jejich souvislost s derivacemi mnohočlenu . . . 52

7 Vektorové priestory **54**
- 7.1 Definície . . . 54
- 7.2 Vlastnosti vektorových priestorov . . . 54
- 7.3 Veta o výmene . . . 56
- 7.4 Lineárne zobrazenie . . . 56

8 Skalární součin **58**
- 8.1 Vlastnosti v reálném i komplexním případě . . . 58
- 8.2 Norma . . . 58
- 8.3 Cauchy-Schwarzova nerovnost . . . 59
- 8.4 Kolmost . . . 60
- 8.5 Ortogonální doplněk a jeho vlastnosti . . . 61

9 Řešení soustav lineárních rovnic **63**
- 9.1 Lineární množiny ve vektorovém prostoru . . . 63
- 9.2 Geometrická interpretace . . . 63
- 9.3 Řešení soustavy rovnic je lineární množina . . . 64
- 9.4 Frobeniova věta . . . 65
- 9.5 Řešení soustavy úpravou matice . . . 65
- 9.6 Souvislost soustavy řešení s ortogonálním doplňkem . . . 66

10 Matice **67**
10.1 Matice a jejich hodnost . . . 67
10.2 Operace s maticemi a jejich vlastnosti . . . 68
10.3 Inversní matice . . . 69
10.4 Regulární matice, různé charakteristiky . . . 70
10.5 Matice a lineární zobrazení, resp. změny souřadných soustav . . . 70

11 Determinanty **72**
11.1 Definice a základní vlastnosti determinantu . . . 72
11.2 Úpravy determinantů, výpočet . . . 74
11.3 Geometrický smysl determinantu . . . 74
11.4 Minory a inversní matice . . . 75
11.5 Cramerovo pravidlo . . . 75

12 Vlastní čísla a vlastní hodnoty **77**
12.1 Definice . . . 77
12.2 Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů . . . 77
12.3 Vlastnosti . . . 78
12.4 Uvedení matice na diagonální tvar . . . 78
12.5 Jordanův tvar v obecném případě . . . 79
12.6 Spektrální věta - část důkazu . . . 80

13 Algebra **83**
13.1 Grupa, okruh, těleso – definice a příklady . . . 83
13.2 Podgrupa, normální podgrupa, faktorgrupa, ideál . . . 85
13.3 Homomorfismy grup . . . 89
13.4 Podílová tělesa . . . 91

14 Diskrétní matematika **92**
14.1 Uspořádané množiny . . . 92
14.2 Množinové systémy, párování, párování v bipartitních grafech (systémy různých reprezentantů) . . . 93
14.3 Kombinatorické počítání . . . 94
14.4 Princip inkluze a exkluze . . . 96
14.5 Latinské čtverce a projektivní roviny . . . 96

15 Teorie grafů **98**
15.1 Základní pojmy teorie grafů, reprezentace grafu . . . 98
15.2 Reprezentace grafu . . . 100
15.3 Stromy a jejich základní vlastnosti . . . 100
15.4 Eulerovské a hamiltonovské grafy . . . 101
15.5 Rovinné grafy . . . 103
15.6 Barvení grafu . . . 104
15.7 Základní grafové algoritmy . . . 105

16 Pravděpodobnost a statistika **107**
16.1 Náhodné jevy, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost náhodných jevů . . . 107
16.2 Náhodné veličiny, střední hodnota, rozdělení náhodných veličin, normální a binomické rozdělení . . . 107
16.3 Lineární kombinace náhodných veličin . . . 107
16.4 Bodové odhady, intervaly spolehlivosti, testování hypotéz, t-test, chí-kvadrát test, lineární regrese . . . 107

17 Kompaktnost, úplnost, posloupnosti a řady funkcí **108**
17.1 Kompaktní metrické prostory . . . 108
17.2 Kompaktní topologické prostory . . . 110
17.3 Úplné prostory . . . 111
17.4 Aplikace metrických a topologických prostorů . . . 112
17.5 Stejnoměrná konvergence . . . 113
17.6 Mocninné řady . . . 116
17.7 Taylorovy řady . . . 116
17.8 Fourierovy řady . . . 117
17.8.1 Obecné Fourierovy řady . . . 117
17.8.2 Trigonometriké Fourierovy řady . . . 118
17.9 Aplikace mocninných řad . . . 120

18 Optimalizační metody **121**
18.1 Minimaxové věty . . . 121
18.2 Geometrická interpretace - mnohostěny . . . 121
18.3 Základy lineárního programování, věty o dualitě, algoritmy - simplexová a elipsoidová metoda . . . 121
18.4 Simplexová metoda . . . 122
18.5 Duální úloha . . . 123

1 Čísla

Požadavky

- Vlastnosti přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel
- Posloupnosti a limity
- Cauchyovské posloupnosti

1.1 Reálná čísla $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ definujeme axiomaticky.

Definice

Množinou všech reálných čísel (značíme ji $\mathbb{R}$) budeme rozumět množinu, na níž je definováno sčítání (značíme $x+y$), násobení (značíme $x \cdot y$) a uspořádání (značíme $x \leq y$), která spňují tyto axiomy:

1. (Algebraické operace)
   (a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociativní zákon pro sčítání)*
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ *(komutativní zákon pro sčítání)*
   (c) v $\mathbb{R}$ existuje nulový prvek (značíme ho 0) tak, že $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$
   (d) pro každý $x \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek (značíme ho $-x$) tak, že $x + (-x) = 0$
   (e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(asociativní zákon pro násobení)*
   (f) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ *(komutativní zákon pro násobení)*
   (g) v $\mathbb{R}$ existuje jednotkový prvek (značíme ho 1) tak, že $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$
   (h) pro každý $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ existuje inverzní prvek (značíme ho x^{-1}) tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$
   (i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *(distributivní zákon)*
2. (Uspořádání)
   (a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ *(tranzitivita)*
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ *(slabá antisymetrie)*
   (c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$ *(linearita)*
   (d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$
   (e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (0 \leq z) \Rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z)$
3. (Netrivialita)
   (a) $0 \neq 1$
4. (Úplnost)
   Definice *(Axiom suprema)*
   Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená (tj. $\exists a \forall x \in M : x \leq a$). Pak existuje číslo $s \in \mathbb{R}$, které má vlastnosti:
   (a) $\forall x \in M : x \leq s$ *(s je horní omezení)*
   (b) $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s \;\; \exists x \in M : x > s'$ *(všechny menší nejsou horní omeznení)*

Poznámka

Axiom supréma je důležitý, odlišuje reálná čísla od racionálních.

Číslo s z axiomu suprema je jednoznačně určeno, značí se $\sup M$ a říká se mu **supremum množiny** M. Supremum množiny je její nejmenší horní závora (**horní závora** nebo **horní mez** je každý takový prvek, pro který platí bod (a) definice suprema). Největší dolní závoru množiny M nazýváme **infimem množiny** M a značíme $\inf M$; z axiomu suprema plyne, že každá zdola omezená množina má infimum.

Poznámka

Relace „<“ na reálných číslech (a stejně tak na přirozených a racionálních číslech) se definuje takto: $a < b$, právě když $a \leq b$ a zároveň $a \neq b$.

Definice

$\mathbb{R}$ lze sestrojit i tak, že vezmeme $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ definujeme z nich – tento přístup jsem formálně popsal zde, ale nejsem si jist, jestli bude nutný u zkoušek – nejspíš ne a je tu spíš pro úplnost. Další, ekvivalentní přístup jsou tzv. Dedekindovy řezy, skrze které byly dokonce reálná čísla původně vytvořena[1].

Nechť R je množina všech Cauchyovských posloupností ve $\mathbb{Q}$. Operace na této množině definujeme následovně:

- $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$

[1] více info např. tady – `http://en.wikipedia.org/wiki/Dedekind_cut` – opět, nepředpokládám, že by bylo nutné znát.

- $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$
- $\{x_n\} \geq \{y_n\}$, právě když $\exists n_0 \ \ \forall n > n_0 : x_n \geq y_n$

Na R definujme relaci ekvivalence jako $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} |x_k - y_k| = 0$ (je nutné ještě dokázat, že jde o ekvivalenci). Potom reálná čísla $\mathbb{R} = R/\sim$.

Poznámka
Na takto definovaných reálných číslech lze potom racionální čísla vzít jako třídy ekvivalence konstantních posloupností ($x_0 = x_n = q \in \mathbb{Q}$), celá čísla potom jako třídy ekvivalence posloupností, kde $x_0 = x_n = n \in \mathbb{N}$.

Poznámka
O co přesně jde lze dobře ilustrovat na desetinných rozvojích daného reálného čísla: např. pro číslo π může jít např. o posloupnost $3,\ 3,1,\ 3,14,\ 3,141,\ 3,1415\ldots$, ale také například $3,\ 3,14,\ 3,1415\ldots$. Jde o různé posloupnosti, obě ale reprezentují stejné reálné číslo π.

Stejně je například číslo $0,\overline{9}$ rovno číslu 1 – pokud vezmeme $\{x_n\}$ posloupnost $0,9,\ 0,99\ldots$ a $\{y_n\}$ konstantní rovnou 1, jdou rozdíly k nule, jsou tedy ve stejné třídě ekvivalence, tedy jsou si rovny.

Poznámka
Jak jsem již psal, $\mathbb{R}$ se od $\mathbb{Q}$ liší pouze tím, že má každá shora omezená množina supremum. Z tohoto axiomu plyne, že v $\mathbb{R}$ má *každá Cauchyovská posloupnost limitu*[2], což u $\mathbb{Q}$ neplatí.

1.2 Přirozená čísla $\mathbb{N}$

Definice
Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}$ je *induktivní*, jestliže platí

- $1 \in S$
- $x \in S \Rightarrow (x+1) \in S$

Množinu *přirozených čísel* $\mathbb{N}$ definujeme jako průnik všech induktivních podmnožin $\mathbb{R}$, tedy

$$\mathbb{N} := \bigcap \{S; S \subset \mathbb{R}; S \textit{ induktivní}\}$$

Věta *(Induktivnost přirozených čísel)*
Množina $\mathbb{N}$ je induktivní.

Důkaz
1 je tam proto, že je ve všech. Pokud je nějaké číslo x z $\mathbb{N}$ ve všech, tak i $x+1$ je ve všech.

Věta *(Slabá indukce)*
Pro vlastnost φ platí:

1. Platí-li $\varphi(1)$ a $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$, platí φ pro všechny $\mathbb{N}$ *(slabá indukce)*

Idea důkazu
Triviálně z definice.

Věta *(Vlastnosti přirozených čísel)*
Množina $\mathbb{N}$ má nasledující vlastnosti:

1. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$
2. $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = m+1$
3. $m, n \in \mathbb{N}, m < n \Rightarrow m+1 \leq n$
4. každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek
5. Platí-li $\varphi(1)$ a $(\forall k \leq n, k \in \mathbb{N} : \varphi(k)) \Rightarrow \varphi(n+1)$, platí φ pro všechny $\mathbb{N}$ *(silná indukce)*

Idea důkazu
5. se dokáže sporem a tím, že *konečná* množina prvků má vždy nejmenší prvek; 4. se dokáže přes silnou indukci; 1., 2. a 3. bych dokazoval přes 4. (ale je možné, že by to byl důkaz kruhem).

[2] definice Cauchyovských posloupností bude dále

Věta *(Archimédova vlastnost reálných čísel)*
Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x < n$.

Idea důkazu
Sporem – vybereme infimum x množiny těch, pro které neexistuje (je zdola omezené 1); pro $x - 1$ už musí existovat, takže existuje i pro x, což vede ke sporu.

Definice *(Peanove axiómy pre zavedenie prirodzených čísel)*
Opět můžeme $\mathbb{N}$ zavést jinak. Tato a následující definice jsou ekvivalentní.
Množina $\mathbb{N}$ je taková množina, pro kterou platí:

- Existuje číslo 0 (to neznamená, že nula je prirodzené číslo, v $\mathbb{N}$ roli tejto nuly hraje jednotka).
- Na množine prirodzených čísel je definovaná unárna operácia „nasledovník“, označovaná S.
- Neexistuje žiadne prirodzené číslo, ktorého nasledovníkom je 0.
- Rôzne prirodzené čísla majú rôznych nasledovníkov: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$ (t.j. funkcia nasledovníka je prostá).
- Ak číslo 0 spĺňa nejakú vlastnosť a súčasne ju spĺňa každý nasledovník prirodzeného čísla, potom túto vlastnosť spĺňajú všetky prirodzené čísla (*axióm matematickej indukcie*).

Definice *(Konštrukcia prirodzených čísel založená na teórii množín)*
Označme $0 := \{\}$ a definujme $S(a) = a \cup \{a\}$ pre všetky a. Množina prirodzených čísel je potom definovaná ako prienik všetkých množín obsahujúcich 0, ktoré sú uzavreté vzhľadom na funkciu nasledovníka. Predpokladajúc platnost axiómu nekonečnosti, dá sa dokázať, že táto definícia spĺňa Peanove axiómy. *Axióm nekonečnosti* vyzerá takto:

$$\exists \mathbb{N} : \emptyset \in \mathbb{N} \wedge (\forall x : x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N})$$

V „klasickom“ zápise čísel potom každému prirodzenému číslu zodpovedá množina prirodzených čísel menších ako ono samo, takže

- $0 = \Big\{ \Big\}$
- $1 = \Big\{ 0 \Big\} = \Big\{ \{\} \Big\}$
- $2 = \Big\{ 0, 1 \Big\} = \Big\{ 0, \{0\} \Big\} = \Big\{ \{\}, \{\{\}\} \Big\}$
- $3 = \Big\{ 0, 1, 2 \Big\} = \Big\{ 0, \{0\}, \{0, \{0\}\} \Big\} = \Big\{ \{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\} \Big\}$

Poznámka
$\mathbb{N}$ je uzavretá na sčítanie.

1.3 Celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$

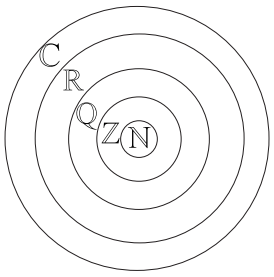
Definice
Kromě symbolů $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$, které jsme již zavedli, budeme značit symbolem $\mathbb{Z}$ množinu *celých čísel*, tedy

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n, n \in \mathbb{N}\}$$

a symbolem $\mathbb{Q}$ množinu *racionálních čísel*, tedy

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$\mathbb{Z}$ je uzavřena na sčítání, odčítání a násobení, $\mathbb{Q}$ je uzavřena na sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem.
Množině $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se také říká *iracionální*.



Obrázek 1: Různé množiny

Věta *(Existence celé části)*
Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ splňující

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Toto číslo nazýváme *dolní celou částí čísla x.*

Idea důkazu
Sporem – pro kladné vybereme infimum x množiny těch, pro které neexistuje (je zdola omezené 0); pro $x-1$ už musí existovat, takže existuje i pro x, což vede ke sporu. Se supremem podobně.

Věta *(Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$)*
Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ takové, že

$$a < q < b,\ a < r < b$$

Idea důkazu
Vůbec nevím, jestli jde o korektní důkaz, ale já bych dokazoval „konstrukčně“ - pokud jsou a nebo b v $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, vzal bych q jako $(a+b)/2$ a r jako tak dlouhý desetinný rozvoj q, aby $a < r < b$. Pokud jsou a i b v $\mathbb{Q}$, vzal bych q jako $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, což by mělo být iracionální číslo, a pro r udělal opět totéž. Ale nevím, jestli třeba existence odmocniny náhodou nezávisí na této větě :)

Věta *(o existenci n-té odmocniny)*
Nechť $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ takové, že $y^n = x$.

1.4 Komplexní čísla $\mathbb{C}$

Definice
Komplexním číslem nazveme číslo tvaru $a+bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou a imaginární částí** komplexního čísla. Tento tvar komplexního čísla se nazývá **algebraický**. Písmeno i značí **imaginární jednotku**, která se formálně zavádí jako číslo splňující rovnici $i^2 + 1 = 0$ tj. jako $\sqrt{-1}$, která v reálných číslech neexistuje.

Pokud je $b = 0$, je dotyčné číslo reálným číslem, tj. reálná čísla tvoří podmnožinu čísel komplexních. Pokud je $a = 0$, mluvíme o **ryze imaginárním čísle**.

1.4.1 Aritmetika

Aritmetika je na $\mathbb{C}$ definována následovně:

- $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$
- $(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$
- $(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$
- $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

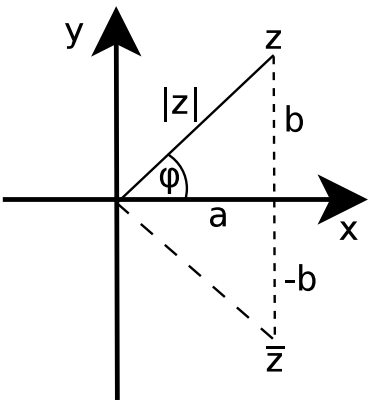
Pojmem **komplexně sdružené číslo** komplexního čísla $z = a + ib$ se nazývá číslo:

$$\bar{z} = a - ib$$

Absolutní hodnotou (také **modul**) komplexního čísla $z = a + bi$ se nazývá:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Komplexní čísla se zobrazují v **komplexní (Gaussově) rovině** jako body se souřadnicemi $[x, y]$; x je reálná část komplexního čísla, y imaginární část. Na ose x leží reálná čísla, na ose y ryze imaginární čísla.



Obrázek 2: Komplexní číslo 2D

Následující vlastnosti platí pro všechna komplexní čísla z a w, není-li uvedeno jinak.

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, pro w nenulové
- $\overline{z} = z$, právě když je z reálné číslo
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, pro z nenulové

Každé komplexní číslo z různé od nuly je možné jednoznačně vyjádřit v **goniometrickém tvaru**.

Pokud si v komplexní rovině zvolíme polární souřadnicový systém, vzdálenost čísla z od počátku je právě jeho absolutní hodnota $|z|$ a orientovaný úhel $\varphi = |\sphericalangle JOZ|$ (*argument*), kde J je bod $J[1,0]$, O je počátkem soustavy a Z je obraz komplexního čísla $z = a + bi$ se souřadnicemi $Z[a,b]$, platí:

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Argument φ lze vyjádřit ze vztahů: $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$

Pro dělení komplexních čísel $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ platí následující rovnice:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Pro násobení komplexních čísel z_1 a z_2 z předchozího příkladu slouží vzorec:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Pro **n-tou mocninu komplexní čísla** v goniometrickém tvaru platí tzv. **Moivreova věta**:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

Odmocnina není v $\mathbb{C}$ jednoznačná – např. $i^2 = (-i)^2 = i$, nebo např. $i^3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^3 = -i$.

Platí, že každý polynom má v $\mathbb{C}$ kořen.

Report *(Majerech)*

Napisal som co som si pamatal, asi som trochu pomotal aj tie vlastnosti R, ale jemu o ne ani neslo, hlavny bol pre neho axiom suprema. Zaujimalo ho, ktore cisla z ktorych vznikli, ktore su ktorych uzaverom (napriklad ze komplexne su preto, aby mal kazdy polynom koren ci co, realne zas uzavrete na cauchyovske postupnost -¿ to je vraj axiom suprema, ale nerucim za to, toto si vlastne povedal on sam).

Report

Začátek mi dělal trošku problém, „vlastnosti N, Z, Q, R čísel“. Nebude to moc do hloubky (zavádění R jako v Jarníkovi) ale napsat inkluzi by taky nestačilo.

1.5 Posloupnosti a limity

Definice *(posloupnost)*

Posloupností reálných čísel nazýváme jakékoli zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Posloupnost obvykle značíme symbolem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pro každé konkrétní $n \in \mathbb{N}$ nazýváme reálné číslo a_n *n-tým členem* posloupnosti $\{a_n\}$.

Definice *(Omezené posloupnosti)*

1. Posloupnost $\{a_n\}$ je *shora omezená*, je-li $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ shora omezená.
2. Posloupnost $\{a_n\}$ je *zdola omezená*, je-li $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ zdola omezená.
3. Posloupnost $\{a_n\}$ je *omezená*, je-li zdola omezená a shora omezená.

Definice *(Rostoucí a klesající posloupnosti)*

1. Posloupnost $\{a_n\}$ je *klesající*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.
2. Posloupnost $\{a_n\}$ je *rostoucí*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.
3. Posloupnost $\{a_n\}$ je *neklesající*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.
4. Posloupnost $\{a_n\}$ je *nerostoucí*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
5. Posloupnost $\{a_n\}$ je *monotónní*, jestliže je nerostoucí nebo neklesající.
6. Posloupnost $\{a_n\}$ je *ryze monotónní*, jestliže je rostoucí nebo klesající.

1.5.1 Vlastní limity

Definice

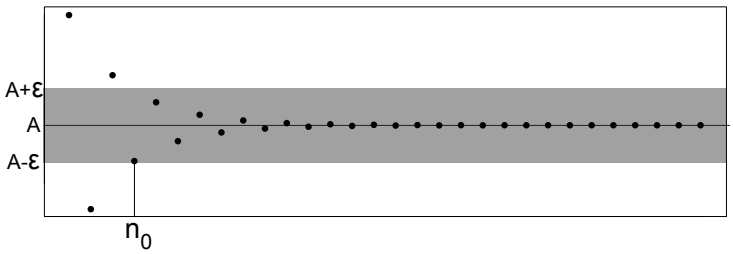
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Poznámka
Na obrázku 3 jsem nakreslil posloupnost k osvětlení definice limity. Jde o posloupnost[3], která konverguje k číslu 0.739085, označeno A.



Obrázek 3: Ilustrace k definici vlastní limity

Definice
Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní limitu* nebo že *konverguje* (je *konvergentní*). V opačném případě říkáme, že posloupnost *diverguje*.

Pozorování
Ne každá posloupnost je konvergentní. Například posloupnost 0,1,0,1,0,... nemá vlastní limitu a podobně posloupnost $\{2^n\}$ nemá vlastní limitu.

Příklady

- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Poznámka
Následující věty mají poměrně lehké důkazy, které zde jenom naznačím; pokud si je budete zkoušet, je dobré si u nich uvědomit základní vlastnosti absolutní hodnoty:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Věta *(o jednoznačnosti limity posloupnosti)*
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Idea důkazu
Kdyby měla dvě, zvolíme ε menší než vzdálenost. Od většího z dvou n_0 (jedno pro každou z limit) by pak musela být zároveň ve dvou disjunktních intervalech – spor.

Věta *(o omezenosti konvergentní posloupnosti)*
Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Idea důkazu
Pro libovolně zvolené ε je od nějakého n_0 posloupnost omezená $A + \varepsilon$ shora a $A - \varepsilon$ zdola a před n_0 je jich konečně mnoho, takže můžeme vybrat největší/nejmenší.

Definice
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *vybraná* z posloupnosti, neboli že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka
Tahle definice je trochu neprůhledná, ale jenom říká, že z jedné posloupnosti vybereme jinou.

Věta *(o limitě vybrané posloupnosti)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Idea důkazu
Nemůže jít jinam – pokud je n_0 u a_n v intervalu, tím spíš pak bude b_n v intervalu.

Věta *(o aritmetice limit)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. je-li $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ a $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

[3] konkrétně $a_0 = 1, a_n = \cos a_{n-1}$, ale není to důležité

Idea důkazu

1. Pro každé ε můžeme vzít $\frac{\varepsilon}{2}$, pro a i b najít jejich n_0, od většího z nich je i součet ve ε
2. Víceméně totéž, vezmeme $\sqrt{\varepsilon}$
3. Dokážeme, že $\frac{1}{b_n}$ jde k $\frac{1}{B}$. Jednoduchou úpravou máme

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \left|\frac{1}{B}\right| \cdot |b_n - B|\,.$$

K omezení $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \left|\frac{2}{B}\right|$ provedeme dost zběsilý trik[4].

$$\Big|\,|b_n| - |B|\,\Big| \leq |b_n - B| < \varepsilon,$$

takže $|b_n| \geq |B| - \varepsilon$.
Pokud bychom vzali $\varepsilon < |B|$, je $\frac{1}{|B|-\varepsilon} > 0$ a proto

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \left|\frac{1}{B}\right| \cdot |b_n - B| \leq \left|\frac{1}{|B| - \varepsilon}\right| \cdot \left|\frac{1}{B}\right| \cdot |b_n - B|\,.$$

Pokud bychom vzali $\varepsilon < \frac{|B|}{2}$, je

$$\frac{1}{|B| - \varepsilon} < \frac{1}{|B| - \frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|},$$

takže celý rozdíl původních zlomků

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \left|\frac{2}{B}\right| \cdot \left|\frac{1}{B}\right| \cdot |b_n - B|\,.$$

Dále jasné, protože $\left|\frac{2}{B}\right| \cdot \left|\frac{1}{B}\right|$ je konstantní.

Věta *(o limitě a uspořádání)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. Jestliže $A < B$, potom $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$
2. Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$

Pozor, ostrost nerovností v tomto případě je důležitá.

Idea důkazu
Provede se sporem a „chytře“ velkými epsilony.

Věta *(o policajtech)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti reálných čísel, splňující

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$

Pak

$$\lim c_n = A$$

Idea důkazu
Pokud je v epsilonu v jedné i v druhé, zvolíme větší z n_0 a musí tam být i ta prostřední.

Věta *(o limitě součinu mizející (*$\lim = 0$*) a omezené posloupnosti)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti reálných čísel, nechť je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$$

Idea důkazu
U mizející vezmeme $\frac{\varepsilon}{K}$, kde K je horní omezení b_n.

[4] z Drahošových skript; pokud to někdo umíte líp, tak napište na fórum, ale pochybuji

1.5.2 Nevlastní limity

Definice
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* $+\infty$, jestliže:

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n \geq K$$

Obdobně řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* $-\infty$, jestliže:

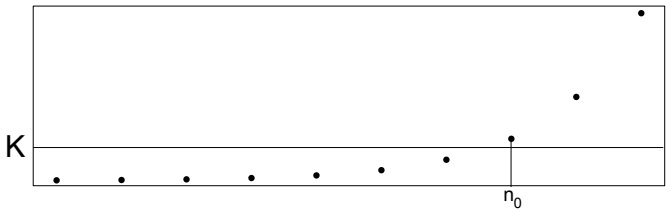
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$$

Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme o ní, že diverguje, stejně jako v případě, že žádnou limitu nemá.

Poznámka
Ilustrace k definici nevlastní limity je na obrázku 4.

Poznámka
Všechny možné situace jsou:
Limita posloupnosti:

- neexistuje
- existuje
  - vlastní (= posloupnost konverguje)
  - nevlastní
    - $-\infty$
    - $+\infty$



Obrázek 4: Ilustrace k definici nevlastní limity

Definice
Množinu $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme *rozšířenou reálnou osou.*

Poznámka
Věty o jednoznačnosti limity, o limitě vybrané posloupnosti, o limitě a uspořádání a o policajtech platí v nezměněné podobě, jestliže připustíme nevlastní limity. Věta o omezenosti konvergentní posloupnosti zrejmě neplatí - neboť je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (nebo $-\infty$), pak posloupnost $\{a_n\}$ není omezená; je ale omezená *zdola* u ∞ a *shora* u $-\infty$. Větu o aritmetice limit pro rozšírenou osu uvedeme zvlášť.

Věta *(o aritmetice limit pro nevlastní limity)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, *pokud je výraz* $A+B$ *definován*
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je výraz* $A \cdot B$ *definován*
3. je-li $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ a $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz* $\frac{A}{B}$ *definován*

Idea důkazu

1. Pokud je $\{a_n\}$ v $\mathbb{R}$, je zdola omezená L, budeme brát (pokud $\{b_n\}$ jde k ∞) $K - L$, podobně u dalších variant.
2. Třeba $\{a_n\}$ jde k A v $\mathbb{R}$ a $A > 0$ a $\{b_n\}$ jde k ∞, pro ostatní se dokáže obdobně. Pro $\alpha > 0$ uděláme $\epsilon = A - \alpha$, z toho plyne $a > \alpha$; b_n určitě jde nad $\frac{L}{\alpha}$ pro libovolné L a tedy $a_n b_n > L$.
3. Dokážeme, že když b_n jde k ∞ tak $\frac{1}{b_n}$ jde k 0 – pro ϵ platí odněkud $b_n > \frac{1}{\epsilon}$, ale je totéž, co $\frac{1}{b_n} < \varepsilon$.

Definice *(Supremum a infimum na rozšířené reálné ose)*

- Nechť množina $A \subset \mathbb{R}$ je shora neomezená. Pak klademe $\sup A := +\infty$
- Nechť množina $A \subset \mathbb{R}$ je zdola neomezená. Pak klademe $\inf A := -\infty$
- Nechť $A = \emptyset$. Pak klademe $\sup A := -\infty$ a $\inf A := +\infty$

Poznámka
Prázdná množina je jediná množina, jejíž supremum je menší než její infimum.

Věta *(o limitě podílu kladné a mizející posloupnosti)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti reálných čísel, nechť je $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, A > 0$ a nechť $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$. Nechť

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : b_n > 0$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Idea důkazu

Jestliže K je horní omezení, pak můžeme vzít epsilon u mizející $\frac{1}{K}$, součin pak jde nad K.

1.5.3 Monotónní posloupnosti

Věta *(o limitě monotónní posloupnosti)*
Každá monotónní posloupnost má limitu.

Idea důkazu
Např. rostoucí posloupnost buď není shora omezená a má tedy limitu ∞, nebo je shora omezená, protože je ale zároveň rostoucí, tak se k danému hornímu omezení postupně přibližuje.

Poznámka
Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) omezená, pak má vlastní limitu. Tato limita se navíc rovná supremu (infimu) hodnot. Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) neomezená, pak má limitu $+\infty$ ($-\infty$).

Definice *(Limes superior a limes inferior)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Je-li $\{a_n\}$ shora omezená, definujeme posloupnost $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem:

$$b_n := \sup\{a_k; k \geq n\}$$

b_n neroste.
Je-li $\{a_n\}$ zdola omezená, definujeme posloupnost $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem:

$$c_n := \inf\{a_k; k \geq n\}$$

c_n neklesá.
V takovém případě definujeme:

$$\limsup\ a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} b_n & \textit{jestliže je } \{a_n\} \textit{ shora omezená} \\ \infty & \textit{jestliže je } \{a_n\} \textit{ shora neomezená} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem:

$$\liminf\ a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} c_n & \textit{jestliže je } \{a_n\} \textit{ zdola omezená} \\ -\infty & \textit{jestliže je } \{a_n\} \textit{ zdola neomezená} \end{cases}$$

Poznámka
Limes superior a limes inferior jsou vždy dobře definované hodnoty a platí

$$\limsup\ a_n \in \mathbb{R}^*, \liminf\ a_n \in \mathbb{R}^*,$$

Na rozdíl od limity, která nemusí existovat, tyto dvě hodnoty existují pro libovolnou posloupnost reálných čísel.

Poznámka
Limes superior a limes inferior jsou někdy definovány jako $\inf\sup$ a $\sup\inf$ – jelikož jde o monotónní posloupnosti, jde ale o totéž.

Věta *(o vztahu limity, limes superior a limes inferior)*
Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

právě tehdy, když

$$\limsup\ a_n = \liminf\ a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

Důkaz
Pro vlastní limity:

$\Rightarrow$: Nechť $\lim_n a_n = A$, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 > 0$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $A - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} a_n < A + \varepsilon$. Jelikož posloupnost $\left\{(\inf_{k \geq n} a_k)_n\right\}$ neklesá a je shora omezená, musí limita existovat a musí platit $\lim_{n \to \infty} \leq A + \varepsilon$.

Protože ε je nekonečně malé, platí $\liminf a_n = A$.

Podobně pro $\limsup$.

$\Leftarrow$: Nechť $\limsup\ a_n = \liminf\ a_n = A$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$existuje $n_1 > 0$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $A - \varepsilon < \sup_{k \geq n} a_k < A + \varepsilon$. Také existuje $n_2 > 0$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $A - \varepsilon < \inf_{k \geq n} a_k < A + \varepsilon$. Vezmeme $n_0 = \max(n_1, n_2)$; pro $n \geq n_0$ je $\sup_{k \geq n} a_k$ i $\inf_{k \geq n} a_k$ mezi $A - \varepsilon$ a $A\varepsilon$. Ale protože je v tomto intervalu suprémum i infimum, musí v tomto intervalu být i všechny hodnoty $a_n \forall n \geq n_0$.

Pro nevlastní limity:

Dokážeme pro ∞, pro $-\infty$ se dokáže obdobně.

$\Rightarrow$: Zvolme K libovolně. Potom je-li $\liminf\ a_n = \infty$, je pro nějaké n $\inf_{k \geq n} a_k > K$, tedy $\forall k \geq n$ je $a_k > K$.

$\Leftarrow$: Je-li $\lim\ a_n = \infty$, pro dostatečně velké n platí, že $k \geq n \Rightarrow a_k > K$, tedy $\inf_{k \geq n} a_k > K$ a $\sup_{k \geq n} a_k > K$.

Definice
Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost taková $\{a_{n_k}\}$, že $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = A$. Množina všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$

Věta *(o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)*
Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H\{(a_n)\} \neq \emptyset$,

$$\limsup\ a_n = \max H(\{a_n\})\ a\ \liminf\ a_n = \min H(\{a_n\})$$

K tomuhle jsem důkaz nenašel ani nevymyslel :-(

Report *(IP 21.6.2011 (<2007))*
1. Konvergence rad.
Napiste definici konvergence rad.
Rozhodnete a zduvodnete, zda konverguji rady: $1/n$, $1/n^2$, $sin(n)/n$

1.6 Cauchyovské posloupnosti

Tato sekce je vypracovaná podle skript Prof. A. Pultra z matematické analýzy (`http://kam.mff.cuni.cz/~pultr/`).

Věta *(Bolzano-Weierstrassova)*
Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Jsou-li a_n v kompaktním intervalu $[a, b]$, je limita vybrané posloupnosti v tomto intervalu.

Důkaz
První část dokážeme nalezením takové posloupnosti.

Vezmeme $A := \limsup\ a_n$ – to můžeme, protože $\{a_n\}$ je shora omezená.

Definujeme pro každé $k \in \mathbb{N}$ množinu $M_k := \{j \in \mathbb{N} | j > n_{k-1}, a_j \in \langle A - \frac{1}{2^k}, A + \frac{1}{2^k} \rangle\}$ a $n_k := \min M_k$ – pro každé k taková množina je, protože A je limita suprem, tj. pro libovolně malé okolí A jsou od nějakého bodu dál všechna suprema pouze v něm.

Potom $\{a_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost, která konverguje.

Druhá část je přímým důsledkem věty o limitě a uspořádání – limita „nemůže“ být jinde.

Definice *(Bolzano-Cauchyova podmínka)*
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \geq 0}$ je *cauchyovská*, nebo-li že splňuje *Bolzano-Cauchyho podmínku*, pokud pro ní platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n_0, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Lemma
Má-li cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost, je konvergentní.

Důkaz
Nechť $\lim a_{k_n} = x$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n_0, aby pro $m, n \geq n_0$ platilo $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|a_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $k_n \geq n$, platí $|a_n - x| = |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - x| < \varepsilon$.

Věta *(Bolzano-Cauchyova)*
Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, právě když je cauchyovská.

Důkaz

1. Implikace „⇒“ je hned vidět – stačí vzít k ε takové n_0, že $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$. Potom je $|a_n - a_m| = |a_n - x + x - a_m| \leq |a_n - x| + |x - a_m| \leq \varepsilon$ $\forall m, n \geq n_0$.

   Řečeno česky – v pásmu velkém ε jsou si všichni vzdáleni maximálně ε

2. Pro druhou implikaci stačí dokázat, že je cauchyovská posloupnost omezená a zbytek dostaneme z předchozího lemmatu a Bolzano-Weierstrassovy věty.

   Pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 takové, že $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$ pro každé $n \geq n_0$ (to plyne přímo z podmínky), takže zbývá jen konečný počet členů mimo toto rozmezí (pro $n < n_0$), a ty vždy tvoří omezený systém, tedy posloupnost je omezená.

Report *(Koubek)*
nic lepšího na zahřátí snad ani nešlo, definice, aritmetika a další větičky co jsem si vzpomněl včetně cauchyho + důkazy, to stačilo.

Report *(Kopecký)*
Cauchyovská posloupnost (stačila definice a jak souvisí s konvergencí posloupnosti, což mě trochu zaskočilo)

2 Základy diferenciálního počtu

Požadavky

- Reálné funkce jedné reálné proměnné
- Spojitost, limita funkce v bodě (vlastní i nevlastní)
- Některé konkrétní funkce (polynomy, racionální lomené funkce, goniometrické a cyklometrické funkce, logaritmy a exponenciální funkce)
- Derivace: definice a základní pravidla, věty o střední hodnotě, derivace vyšších řádů
- Některé aplikace (průběhy funkcí, Newtonova metoda hledání nulového bodu, Taylorův polynom se zbytkem)

2.1 Reálné funkce jedné reálné proměnné

Definice *(Reálná funkce)*
Reálná funkce jedné proměnné je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.
f může být na M:

- *rostoucí*: $\forall x, y : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- *klesající*: $\forall x, y : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- *neklesající*: $\forall x, y : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- *nerostoucí*: $\forall x, y : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- *sudá*: $x \in M \Rightarrow -x \in M \wedge f(x) = f(-x), \forall x \in M$
- *lichá*: $x \in M \Rightarrow -x \in M \wedge f(x) = -f(-x), \forall x \in M$
- *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$: $x \in M \Rightarrow x \pm p \in M \wedge f(x) = f(x+p) = f(x-p), \forall x \in M$

Definice *(Okolí bodu)*

- $P(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ *(prstencové okolí)*
- $P^+(a, \delta) = (a, a + \delta)$ *(pravé prstencové okolí)*
- $P^-(a, \delta) = (a - \delta, a)$ *(levé prstencové okolí)*
- $B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = P(a, \delta) \cup \{a\}$ *(δ-okolí)*
- $B^+(a, \delta) = P^+(a, \delta) \cup \{a\}$ *(pravé δ-okolí)*
- $B^-(a, \delta) = P^-(a, \delta) \cup \{a\}$ *(levé δ-okolí)*
- $P(\infty, d) = B(\infty, d) = (\frac{1}{d}, \infty)$
- $P(-\infty, d) = B(-\infty, d) = (-\infty, -\frac{1}{d})$

2.2 Spojitost, limita funkce v bodě (vlastní i nevlastní)

Definice *(Limita)*
Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(A, \varepsilon)$$

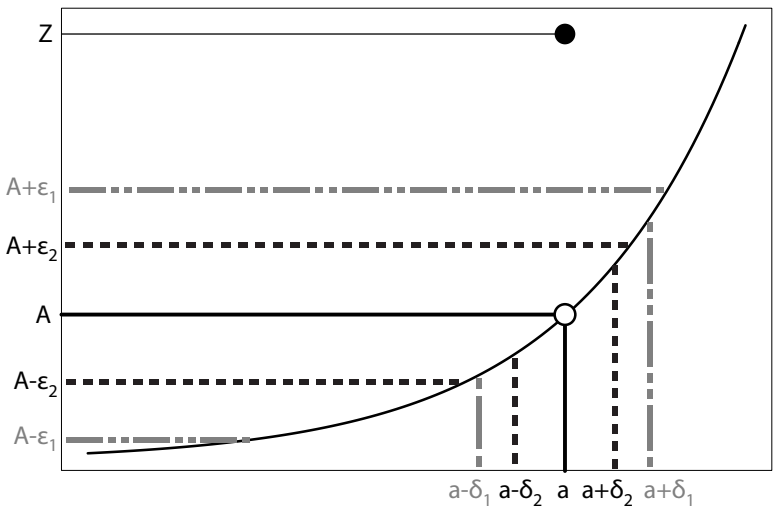
a značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$

Platí-li tato vlastnost jen pro pravá okolí bodů a a A, mluvíme o *jednostranné limitě zprava* a podobně zleva.

Definice *(Spojitost v bodě)*
Řekneme, že f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Na obrázku 5 je funkce, definovaná všude jako $f(x) = \mathrm{e}^x$ kromě bodu a, kde je definována jako $f(a) = Z \neq \mathrm{e}^a$. V bodě a má limitu A - pro různá ε nalézám příslušné δ; v tomto bodě ale *není spojitá*. Pokud by ale v bodě a byla A, byla by spojitá.



Obrázek 5: Ilustrace limity

Věta *(Heineho věta)*

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Nechť f je definováno na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$
2. Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $x_n \in D(f)\ \forall n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = a, x_n \neq a\ \forall n$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Heineho věta umožňuje tvrzení, vyslovená o limitách posloupností, převádět na limity funkcí v bodě.

Idea důkazu

(nejsem si jist, jestli důkaz funguje i pro nekonečna)

1⇒2 Pro ε okolí A najdu odpovídající δ okolí a, x_n jsou od nějakého n_0 všechny v tomto δ okolí, jejich obrazy ale musí být i v ε okolí A .

2⇒1 Sporem. Musí existovat ε, že $\forall\delta\exists x \in P(a,\delta)$ takové, že $f(x) \notin B(A,\varepsilon)$ (pouze negace definice limity). Můžeme tedy postupně zmenšovat δ, v každém $P(a,\delta)$ najít takové x a vytvořit tak posloupnost, která má limitu v a, ale její obrazy nebudou mít limitu v A, protože jsou vždy vzdálené ε – spor.

Věta *(Věta o jednoznačnosti limity funkce)*

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Idea důkazu

Buď přímo, nebo přes Heineho větu a už dokázané vlastnosti limit posloupností.

Věta *(O lokální omezenosti funkce s vlastní limitou)*

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(a,\delta)$ omezená.

Idea důkazu

Buď přímo, nebo přes Heineho větu a už dokázané vlastnosti limit posloupností.

Věta *(Aritmetika limit pro funkce)*

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $a \in R^*$. Potom

1. $\lim(f(x) + g(x)) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován.
2. $\lim(f(x)g(x)) = A \cdot B$, je-li výraz na pravé straně definován.
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.

Idea důkazu

Buď přímo, nebo přes Heineho větu a už dokázané vlastnosti limit posloupností.

Věta *(Limita a uspořádání - policajti pro funkce)*

1. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, $a \in R^*$.
   Potom $\exists P(a,\delta) : f(x) > g(x)\ \forall x \in P(a,\delta)$
2. Nechť $f(x) \leq g(x), \forall x \in P(a,\delta), \delta > 0$ a existují $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$.
   Potom $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.
3. Nechť $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in P(a,\delta), \delta > 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.
   Potom existuje $\lim h(x)$ a $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Pozor na ostrost nerovností, v tomto případě je velmi důležitá.

Idea důkazu

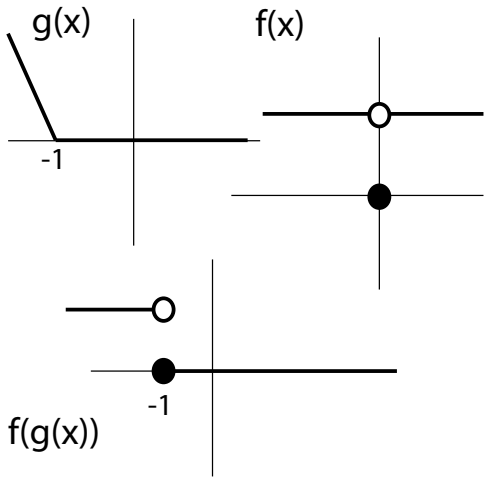
Buď přímo, nebo přes Heineho větu a už dokázané vlastnosti limit posloupností.

Definice *(Jednostranná spojitost funkce v bodě)*

- *funkce f je spojitá v a* $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$
- *funkce f je spojitá v a zprava* $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(B^+(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$
- *funkce f je spojitá v a zleva* $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(B^-(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$

Věta *(O limitě složené funkce)*
Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$, $a, A, B \in \mathbb{R}^*$. Nechť navíc platí jeden z předpokladů:
(P1) f je spojitá v A *(vnější funkce je spojitá)*
(P2) $\exists \delta > 0 : g(x) \neq A$ pro $\forall x \in P(a, \delta)$ *(vnitřní je „lokálně prostá“)*
Potom $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = B$.

Poznámka *(protipříklad)*
Na obrázku 6 je uveden protipříklad pro osvětlení, proč musí podmínky platit. $f(x)$ – vnější – je nespojitá, $g(x)$ – vnitřní – není lokálně prostá. Složená funkce potom nemá v bodě -1 limitu – a tam, kde jí má, se stejně *nerovná* složené limitě (limita $f(x)$ v nule je 1, ale limita $f(g(x))$ je v nule 0 a dokonce je tam i spojitá). „Pouhý“ bod nespojitosti vnější funkce se následkem konstantnosti vnitřní funkce „roztáhnul“.



Obrázek 6: Protipříklad na podmínky o limitě

Idea důkazu
Vezmeme ε, pro něj najdeme μ, že pro x z okolí A je $f(x)$ v ε okolí – ale pozor, definice limity je $0 < |x - A| < \mu \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$. Můžeme z definice limity $g(x)$ najít δ pro μ, že $0 < |g - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \mu$. Pokud platí (P2), $|g(x) - A|$ nikdy nebude 0, takže levá strana platí a tím pádem jsme ve vysněném ε; pokud platí (P1), 0 to být může, ale díky spojitosti jsme zase v klidu a bezpečí ε.

Definice *(Interval)*
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$. Pak *otevřeným intervalem* (a, b) nazveme $\{x | a < x < b\}$, *(uzavřeným) intervalem* $\langle a, b\rangle$ (pro $a, b \in \mathbb{R}$) nazveme $I = \{x | a \leq x \leq b\}$. Uzavřený interval se někdy značí i $[a, b]$.

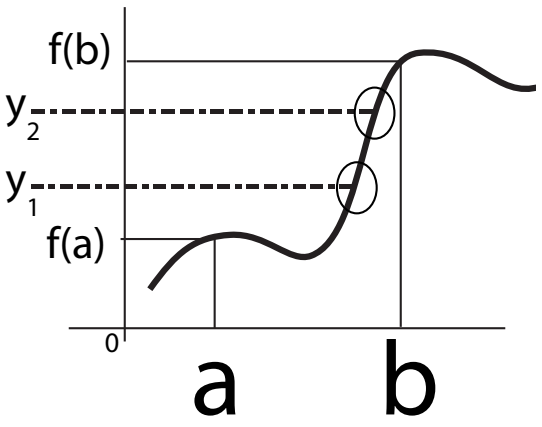
Věta *(Věta o limitě monotónní funkce)*
Nechť je funkce f monotónní na (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$. Potom $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$, $\exists \lim_{x\to b^-} f(x)$.
Idea důkazu
Buď přímo, nebo přes Heineho větu a už dokázané vlastnosti limit posloupností (omezená a monotónní posloupnost má limitu).

Definice *(Spojitost na intervalu)*
Je-li $\langle a, b\rangle$ interval, pak a nazýváme počátečním bodem, b koncovým bodem a $x \in (a, b)$ vnitřními body.

Řekneme, že *f je spojitá na intervalu I*, jestliže je spojitá zprava ve všech bodech kromě koncového a spojitá zleva ve všech bodech kromě počátečního.

Věta *(Darbouxova o nabývaní mezihodnot)*
Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $f(a) < f(b)$, potom $\forall y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.
Ilustrováno na obrázku 7.
Idea důkazu
K důkazu se nám bude hodit lemma, vyplývající z definice limity.
Lemma
Pokud má spojitá funkce v x_0 hodnotu ostře větší než y, má hodnotu $f(x) > y$ i v nějakém okolí x_0. (vezmeme si chytře epsilon)

Pokračujeme s důkazem Darbouxe.
Mějme y, pro něj hledejme x, že $f(x) = y$. Zkoumejme množinu všech hodnot, které mají hodnotu menší nebo rovnu, než y, tj. $M = \{x | f(x) \leq y\}$. Množina M je shora omezená a tak má suprémum, nazveme ho s. Zkoumejme $f(s)$.
Pokud by hodnota $f(s)$ byla větší, než y, díky lemmatu by byla větší i pro nějaká menší $x < s$ a tedy by nešlo o nejmenší horní mez.
Pokud by hodnota $f(s)$ byla menší, než y, díky lemmatu by byla menší i pro nějaká větší $x > s$ a tedy by nešlo vůbec o horní mez.
Hodnota $f(s)$ tedy musí být y.



Obrázek 7: Darbouxova věta

Věta *(O spojitém obrazu intervalu)*
Nechť funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I. Potom $f(I)$ je také interval.
Idea důkazu
Pultr dokazuje přes Darbouxe – krajní body I tam mají svoje hodnoty, všechny hodnoty mezi těmito hodnotami tam musí být a proto je to interval. Já si nejsem úplně jistý, ale budu Pultrovi věřit. V kapitole o prostorech se beztak podobné důkazy opakují.

Definice
$f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. f nabývá v bodě $a \in M$:

- *maxima* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M : f(x) \leq f(a)$
- *minima* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M : f(x) \geq f(a)$
- *ostrého maxima* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) < f(a)$
- *ostrého minima* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) > f(a)$
- *lokálního* maxima (minima, ostrého...)$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f$ nabývá na $M \bigcap B(a, \delta)$ maxima (minima, ...)

Věta *(Vztah spojitosti a extrémů)*
Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Potom f nabývá na $\langle a, b\rangle$ svého maxima i minima.
Idea důkazu
Vezmeme si suprémum hodnot, budeme kolem něj zmenšovat okolí, musí tam vždycky něco být, tj. máme posloupnost, z ní vybereme konvergentní, musí konvergovat k limitě, tam je to maximum. Minimum totéž.

Věta *(Vztah spojitosti a omezenosti)*
Spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je omezená.
Idea důkazu
Má tam maximum i minumum, tj je omezená.

Definice *(prostá funkce, inverzní funkce)*
Funkce f je *prostá*, jestliže $\forall x, y \in D(f) : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
Nechť f je prostá na M, tedy $f : M \to f(M)$. Pak *inverzní funkce* f^{-1} k funkci f je definovaná na $f(M)$ předpisem: $y \in f(M)$, pak $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Věta *(O inverzní funkci)*
Nechť I je interval a funkce f je definovaná, spojitá a rostoucí (klesající) na I. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována, spojitá a rostoucí (klesající) na $f(I)$.

Report *(Majerech)*
Vytáhl jsem si funkce jedné proměnné... to neznělo špatně co přišlo byl docela šok... otázka byla totiž: Dokažte větu o Darbouxouvě vlastnosti pro spojité funkce - žádné věty nebo definice - prostě jeden důkaz uff důkaz jsem neviděl od prváku... no vymyslel jsem něco co vypadalo důvěryhodně majerech se podíval konstatoval, že takhle si důkaz nepředstavoval... a že se to normálně dokazuje jinak, uznal že to co jsem vyrobil má hlavu a patu nicméně použil jsem že uzavřený interval je kompaktní množina a že tam lze tedy vybrat konvergentní podposloupnost což majerech prohlásil že je důsledek toho co mám dokazovat... a že bych asi to měl ukázat... naštěstí z toho sešlo po této co majerech po drobném přesvědčování uznal že věta byla +- dokázána

Report *(Zahradník)*
v podstate jen definice, Heineho veta a par pozorovani Zde jsem napsal definici spojitosti, tu větu, a přehled vět a vlastností nějak se vztahujících k spojitosti. Napsal jsem znění Darbouxovy věty + důkaz. To stačilo.

Report *(IOI 21. 6. 2011 <2007)*
1.1 Definujte pojem limity funkce v bode
2.1 Urcete limitu funkcí $\sin(1/(x-1))$ *a* $(x-1) * \sin(1/(x-1))$ *v bode 1*

2.3 Některé konkrétní funkce (polynomy, racionální lomené funkce, goniometrické a cyklometrické funkce, logaritmy a exponenciální funkce)

Teoreticky se dají funkce popsat axiomaticky (s tím, že jejich existence a jednoznačnost se dokáže později). Nebo se dají naopak zadefinovat konkrétně a axiomy z nich vyplynou jako jejich vlastnosti. Ono je to asi fuk – důkazy existencí těchto funkcí jsou tak jako tak na státnice příliš složité (podle mě).
Věta *(Exponenciální funkce)*
Existuje právě jedna reálná funkce **exp**, splňující:

- $\exp(x + z) = \exp(x) \exp(z), \forall x, z \in \mathbb{R}$
- $\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$

Poznámka *(Některé vlastnosti* exp*)*
Platí:

- $\exp 0 = 1$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$
- $\exp(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$
- exp je rostoucí na $\mathbb{R}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$

Věta *(Vlastnosti* log*)*
Funkce log, definovaná předpisem $\log = \exp^{-1}$ má následující vlastnosti:

- $D(\log) = (0,\infty)$, $\log((0,\infty)) \to \mathbb{R}$
- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \forall x, y \in (0,\infty)$, $\log(x^n) = n \log x$
- log je spojitá, rostoucí na $(0,\infty)$, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$
- $lim_{x\to 0_+} \log x = -\infty$, $lim_{x\to\infty} \log x = \infty$
- $lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$, $lim_{x\to 0} \frac{\log x + 1}{x} = 1$

Definice *(obecná mocnina)*
Obecná mocnina $a^b = \exp(b \log a)$ pro $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Speciálně pro $a = e : e^x = \exp x$

Věta
Existuje právě jedna reálná funkce s a právě jedna reálná funkce c taková, že:

- $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$
- $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$
- s je lichá, c sudá
- $s > 0$ *na* $(0,1), s(1) = 0$

Definice
Podle s a c definujeme *Goniometrické funkce*:
$\sin(x) = s(\frac{x}{\pi})$, $\cos(x) = c(\frac{x}{\pi})$, $\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
Cyklometrické funkce:

- $\arcsin x = y \Leftrightarrow y \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}> \wedge \sin y = x$
- $\arccos x = y \Leftrightarrow y \in <0, \pi> \wedge \cos y = x$
- $\mathrm{arctg}\ x = y \Leftrightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \wedge \mathrm{tg}\ y = x$
- $\mathrm{arccotg}\ x = y \Leftrightarrow y \in (0,\pi) \wedge \mathrm{cotg}\ y = x$

a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} = 1$$

2.4 Derivace: definice a základní pravidla, věty o střední hodnotě, derivace vyšších řádů

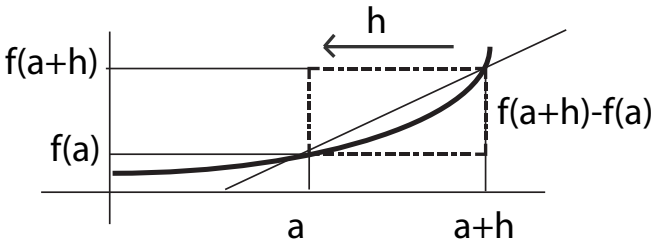
Definice
Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, $a \in \mathbb{R}$. Derivací funkce f v bodě a nazveme

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ pokud existuje}$$

Derivací zprava a zleva rozumíme:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},\ f'_-(a) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Možná trochu osvětlující obrázek je 8 – snažíme se o směrnici tečny, směrnice je definována jako svislý růst děleno vodorovný růst, snažíme se jí přiblížit.



Obrázek 8: Derivace

Věta *(Vztah derivace a spojitosti)*
Má-li f v a vlastní (tj. konečnou) derivaci, potom je f v a spojitá.
Idea důkazu
$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(x)\cdot 0 = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim(f(x)-f(a)+f(a)) = f(a)$.

Věta *(Aritmetika derivací)*
Nechť existují $f'(a)$, $g'(a)$:

1. $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$, je-li pravá strana definována
2. je-li g nebo f spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$
3. je-li g spojitá v a, $g(a)\neq 0$, pak $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Důkaz
Je pracný.

Věta *(O derivaci složené funkce)*
Nechť funkce f má derivaci v y_0, g má derivaci v x_0, g je spojitá v x_0 a $y_0 = g(x_0)$. Potom $(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.
Idea důkazu
Je velmi pracný, jen naznačím. Zlomek upravíme na

$$\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x))*f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Rozložíme na dvě množiny – $A = \{x|g(x)\neq g(a)\}$, $B = \{x|g(x) = g(a)\}$. Každá se musí vyřešit zvlášť, díky spojitosti to ale jde.

Věta *(O derivaci inverzní funkce)*
Nechť funkce f je na intervalu (a,b) spojitá a ryze monotonní[5] a má v bodě $x_0\in(a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Poznámka
Pokud v situaci popsané v právě uvedené větě je $f'(x_0)$ nevlastní, je $(f^{-1})'(y_0) = 0$. Je-li $f'(x_0) = 0$, je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (je-li f rostoucí), resp. $= -\infty$ (je-li f klesající).

Příklad
Definice není úplně průhledná. Řekněme, že zkoumáme funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $(0,+\infty)$. V bodě $x_0 = 1$ má derivaci $f'(x_0) = 2x_0 = 2$. Funkce f^{-1}, tedy $\sqrt{y}$ má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1$ (to je bod, odkud zobrazujeme inverzní funkci, ale kam dopadá hlavní funkce, a kde zjišťujeme derivaci inverzní funkce) a platí, že $\left(\sqrt{y}\right)'(y_0) = \frac{1}{(x^2)'(x_0)} = \frac{1}{2}$.
(nevím, jak moc jsem to ujasnil :-))

Důkaz
Položme funkci $F(x)$

$$F(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

(tj. „obrácená“ definice limity). Tato funkce má z definice limitu $\lim x\to y = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Protože $g(y)$ je prostá a spojitá, můžeme jí (díky Heineho větě a větě o složených posloupnostech) vložit do $F(x)$ a bude platit $\lim_{y\to y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$ – tj. totéž, jako předtím (protože $g(y) = x$), ale jde o limitu podle y.
Také ale platí

$$F(g(y)) = \frac{g(x)-g(x_0)}{f(g(x))-f(g(x_0))} = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

.

Věta
Je-li v bodě x_0 $f'(x_0)>0$, $f(x)$ v bodě x_0 roste. Pokud je v bodě tam <0, tak klesá..

[5] aby vůbec měla inverzní

Důkaz

Buď třeba $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Musí být > 0 na celém nějakém okolí – v bodech vpravo od x_0 je $x - x_0 > 0$ a tak i $f(x) - f(x_0) > 0$, vlevo naopak.

Věta *(Nutná podmínka lokálního extrému)*

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť f má v $a \in M$ lokální extrém. Pak buď neexistuje $f'(a)$, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz

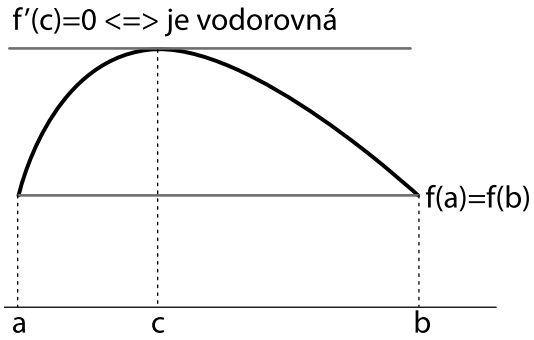
Pokud existuje, tak v celém okolí $f(x)$ ani neklesá, ani nestoupá, spolu s předchozí větou dává, že tam musí být 0.

Věta *(Rolleova věta)*

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $f'(x)\ \forall x \in (a, b)$. Nechť $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Poznámka

Rolleova věta je jedna ze tří vět o střední hodnotě, co se občas zkouší.



Obrázek 9: Ilustrace Rolleovy věty

Důkaz

Pokud je funkce konstantní na celém intervalu, je všude 0 a není co řešit. Nechť není konstantní a třeba existuje bod, že v něm je větší, než $f(a)$.

Funkce musí nabývat na intervalu $[a, b]$ maxima (podle jedné z předchozích vět je spojitý obraz intervalu interval). Najdeme c, kde nabývá maxima; v něm podle předcházející věty musí být derivace 0.

Podobně v případě, že neexistuje bod, který je větší, než $f(a)$, ale existuje nějaký, co je menší, než $f(a)$ – jen místo maxima hledáme minimum.

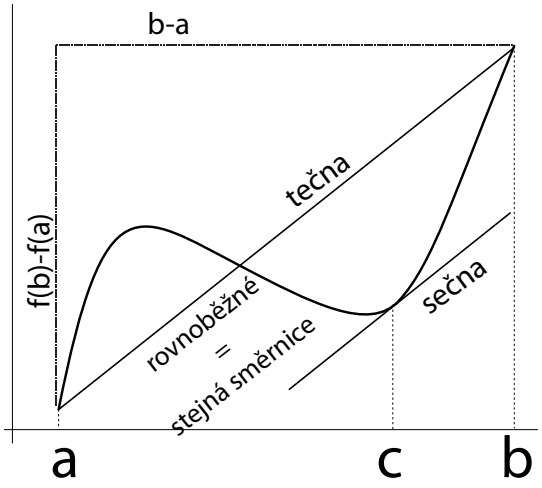
Věta *(Lagrangeova o střední hodnotě)*

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $f'(x)\ \forall x \in (a, b)$. Potom existuje

$$c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Poznámka

Na obrázku 10 je snad trochu osvětleno, co věta říká a co vzoreček znamená. Opět jde o to, že směrnice je definována jako podíl svislé ku vodorovné vzdálenosti bodů $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$; v bodě c, co je mezi nimi, je potom sečna se stejnou směrnicí, tj. derivace funkce.



Obrázek 10: Ilustrace Lagrange

Důkaz

Předpokládejme, že existuje taková konstanta k, že pro $g(x) = f(x) - kx$ platí $g(a) = g(b)$. Potom funkce $g(x)$ splňuje Rolleovu větu a platí, že existuje c, kde $g'(c) = 0$ – platí potom ale, že $g'(c) = f'(c) - k$, tj.

$$f'(c) = g'(c) + k = 0 + k = k,$$

tj. v c je derivace f právě tato konstanta.

Pokusme se tuto konstantu k najít – musí platit, že $g(a) = g(b)$, tj. $f(a) - ka = f(b) - kb$, tj. $k(b - a) = f(b) - f(a)$, tj. $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, což jsme chtěli.

(Tenhle důkaz je úmyslně víc názorný, než být musí – mohli bysme vzít tu konstantu „rovnou“ a bylo by. Ale takhle mi to přijde přehlednější, je jasnější, kde se tam ta funkce vezme, a přitom ten důkaz je taky korektní.)

Věta *(Cauchyova o střední hodnotě)*
Nechť f a g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, nechť existuje $f'(x)\ \forall x \in (a, b)$ a nechť existuje $g'(x)$ vlastní a nenulové. Potom existuje

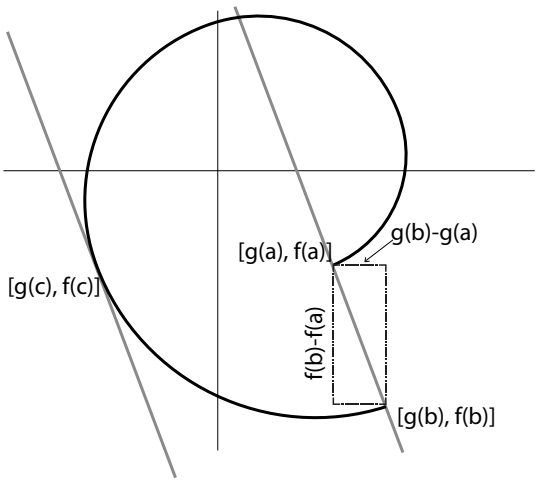
$$c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Poznámka
Z vět o střední hodnotě je tahle asi nejobecnější a je problém si přesně představit, co znamená; snažil jsem se to ilustrovat na obrázku 11; ještě ho trochu popíšu, snad to bude trochu jasnější. Je nutno si představit „čáru“, které děláme směrnice, ne jako klasický graf funkce z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale jako čáru, jejíž x-ovou souřadnici určuje jedna funkce g a y-ovou jiná funkce f.

Já osobně si to představuji tak, že jakoby tu čáru kreslím v nějakém čase - v čase a jsem v bodě $[g(a), f(a)]$, v čase čase b jsem v bodě $[g(b), f(b]$.

Když teď u téhle čáry vezmu tyhle dva body a udělám mezi nimi přímku, má směrnici $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Tečna je v tomhle podivném zobrazení definována jako $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ (díky tomu, jak vypadá přímka, procházející dvěma body). A Cauchyho věta říká, že pro nějaký bod mezi $[g(a), f(a)]$ a $[g(b), f(b)]$ je tato tečna vodorovná této přímce (tj. zobecnění Lagrangeho věty - pokud bychom vzali $g(x) = x$, máme „normální“ grafy funkcí).



Obrázek 11: Ilustrace Cauchyho

Důkaz
Kdyby $g(a) = g(b)$, tak by podle Rolleovy věty existovalo $c \in (a, b)$, že $g'(c) = 0$, což nesmí, tedy $g(a) \neq g(b)$.
Dále velmi podobné, jako u Lagrange. *i s tím, že důkaz je úmyslně trochu „pomalejší“, než by mohl být, aby byl jasnější*

Předpokládejme, že existuje taková konstanta k, že pro $H(x) = f(x) - kg(x)$ platí $H(a) = H(b)$. Potom funkce $H(x)$ splňuje Rolleovu větu a platí, že existuje c, kde $H'(c) = 0$ – platí potom ale, že $H'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$, tj.

$$f'(c) = kg'(c) \to \frac{f'(c)}{g'(c)} = k.$$

Pokusme se tuto konstantu k najít – musí platit, že $g(a) = g(b)$, tj. $f(a) - kg(b) = f(b) - kg(b)$, tj. $k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$, tj. $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, což jsme chtěli.

Věta *(L'Hospitalovo pravidlo)*
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g jsou definovány na nějakém $P(a, \delta)$, f, g mají v $P(a, \delta)$ vlastní derivaci, $\forall x \in P(a, \delta) : g'(x) \neq 0$ a existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí i jedna z následujících podmínek:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$

Potom existuje i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Věta *(O limitě derivací)*
Nechť funkce f je spojitá zprava v $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$.

Věta *(Vztah derivace a monotonie)*
Nechť I je nezdegenerovaný interval (tj. nejde o jediný bod) a $Int(I) = \{$*vnitřní body* $I\}$. Nechť f je spojitá na I a existuje f' vlastní na $Int(I)$.:

1. je-li $f' > 0$ na $Int(I)$, pak f je rostoucí na I
2. je-li $f' \geq 0$ na $Int(I)$, pak f je neklesající na I
3. je-li $f' < 0$ na $Int(I)$, pak f je klesající na I
4. je-li $f' \leq 0$ na $Int(I)$, pak f je nerostoucí na I

Definice *(Tečna, inflexe)*
Nechť funkce f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Označíme $T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}$. Řekneme, že $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ leží nad (pod) tečnou T_a, jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ ($f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$).

Nechť f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Řekneme, že f má v a *inflexi*, jestliže $\exists\delta > 0$: buď $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad $T_a \wedge \forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod T_a, nebo opačně.

Věta *(Nutná podmínka existence inflexe)*
Jestliže $f''(a) \neq 0$, pak f nemá v a inflexi.

Věta *(Postačující podmínka existence inflexe)*
Nechť f má spojitou první derivaci na (a, b). Nechť $z \in (a, b)$. Nechť $\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0$ a $\forall x \in (z, b) : f''(x) < 0$ (nebo naopak). Pak z je bod inflexe f.

Definice
Řekneme, že funkce f je na intervalu I:

- *konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.
- *konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.
- *ryze konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cot f(x_2)$.
- *ryze konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.

Věta
Nechť funkce f je konvexní na I a $a \in Int(I)$. Potom $\exists f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $\exists f'_-(a) \in \mathbb{R}$. Tj. konvexnost implikuje existenci vlastních jednostranných derivací, neznamená to ale, že existuje derivace.

Věta *(Vztah konvexity a spojitosti)*
Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu (a, b). Pak f je na (a, b) spojitá.

Věta
Nechť f má spojitou první derivaci na $I = (a, b)$. Potom:

- $f''(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b)
- $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b)
- $f''(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b)
- $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b)

Definice *(Asymptota)*
Funkce f má *asymptotu* $ax + b$ v $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže f je definována na nějakém okolí $+\infty(-\infty)$ a platí

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - ax - b) = 0$$

Věta *(Výpočet asymptoty)*
Funkce f má v ∞ asymptotu $ax + b$, právě když

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Analogicky pro $-\infty$.

Report *(neznamy hodny pan)*
Derivace + 3 vety o stredni hodnote

Report *(Surynek)*
Derivace: definice a základní pravidla, věty o střední hodnotě - dokazy ...

Report *(Kucera)*
Derivacie, vety o strednej hodnote -¿ napisal som definicie, par viet o derivaciach a vety o strednych hodnotach. Pan Kucera sa prisiel pozriet ako mi to ide, s tym, ze este par viet som chcel dopisal. Pozrel sa na to, povedal "Ale jo", a nic viac nepozadoval, ani dokazy (znamku nepovedal)

Report *(Majerech)*
vety o stredni hodnote (vyzadoval dukaz bez aplikace jine vety o strednu hodnote) vety o stredni hodnote jsem sepsal a nejak odkyval dukaz

Report *(Matousek)*
Trapili me trochu na dukazu te Lagrangeovy vety, kde sem nemel jasno v predpokladech - popravde s takovym spankovym deficitem me to, ze jsem si tam hodil silnejsi, moc nevzrusovalo. Matousek se me ptal na nejaky algoritmicky aspekty - jestli bych dokazal vypocitat determinant rychlejs nez v n^3, coz sem moc nevedel, tak on pry jestli alespon nasobeni, coz sem mu rekl, ze Strassen a on na to, ze se to da aplikovat i na determinanty.

Report *(Kopecky)*
Z matiky jsem mel vetu o stredni hodnote, tak jsem napsal Rolleovu, Lagrangeovu a Cauchyovu vetu o kterych jsem si myslel ze k tomu patri. Ale se zlou jsem se potazal.

Report *(Majerech)*
u matiky stacily definice potrebnych veci a Majerech celkem navedl. Jen ma netradicni definice vety o str. hodnote. Chtel dukaz Darboux. vlast. + proc jde na R a ne na Q, Newton metoda - vsechno se odehravalo na magickem prikladu $x^2 = 2$

2.5 Některé aplikace (průběhy funkcí, Newtonova metoda hledání nulového bodu, Taylorův polynom se zbytkem)

Vyšetření průběhu funkce:

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočítáme první derivaci (tam, kde existuje, případně jednostranné derivace), určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.

Taylorův polynom se zbytkem

pozn. – na tohle doporučuju si ty důkazy udělat, případně si přečíst něco z nějakých skript, jinak se ty hnusné vzorečky nedají zapamatovat.

Definice
Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a f má derivace do řádu n. Pak funkci

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem funkce f řádu n v bodě a.*

Věta
Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, nechť existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Nechť P je polynom stupně $\leq n$. Pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}$$

Věta *(Obecný tvar zbytku)*
Nechť f má vlastní (n+1)-ní derivaci v intervalu $\langle a, x\rangle$, $x > a$. Nechť φ je spojitá funkce na $\langle a, x\rangle$, která má na (a, x) vlastní nenulové derivace. Pak:

$$\exists \xi \in (a,x) : R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}.\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)}.f^{(n+1)}(\xi).(x-\xi)^n$$

Důkaz
Věta je důsledkem Cauchyho věty o střední hodnotě, aplikované na funkci $F(t) := f(x) - T_n^{f,t}(x)$, definované pro $t \in [a, x]$. (Ošklivou a pracnou) derivací této funkce vyjde, že $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \ \forall t \in (a,x)$ a teď použijeme onu Cauchyho větu a dostaneme

$$\frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{0 - R_n^{f,a}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)}$$

což už dává kýžený tvar zbytku.

□

Důsledek

Lagrangeův tvar zbytku: Je-li $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostaneme

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Cauchyho tvar zbytku: Je-li $\varphi(t) = t$, dostaneme

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)$$

Newtonova metoda hledání nulového bodu

Zdroje:
`http://www.kvd.zcu.cz/cz/materialy/numet/_numet.html#_Toc501178905`,
`http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/Derivace/matika_krokem5.php` :-)

Newtonova metoda je numerická...

Jde o nalezení nulového bodu nějaké funkce, tedy bodu, kde $f(x) = 0$ pro nějakou reálnou funkci f na intervalu $\langle A, B\rangle$.

Jako první aproximaci (x_1) kořene rovnice v intervalu $\langle A, B\rangle$ použijeme střed tohoto intervalu. V něm sestrojíme tečnu a její průsečík s osou x je novou aproximací (x_2) kořene. V tomto bodě sestrojíme opět tečnu atd.

Další, přesnější, novou aproximaci kořene tedy hledáme jako průsečík tečny ve staré aproximaci s osou x.

Máme-li řešit rovnici $f(x) = 0$, pak rovnice tečny ve starém průsečíku (x_n) bude $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ Průsečík s osou x získáme vyjádřením x z rovnice: $0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ Tedy: $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Tento průsečík bude novou aproximací (x_{n+1}) kořene.

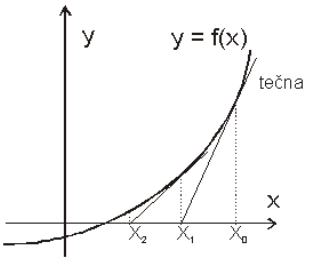
Výsledný vztah pro výpočet nové aproximace tedy zní:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Lze očekávat při každé iteraci dojde ke zdvojnásobení počtu platných číslic. Pro odhad chyby lze použít vzorec $chyba \leq \frac{|f(x_i)|}{m}$, kde m je minimum hodnoty první derivace v intervalu od počáteční aproximace ke kořeni. Nevýhodou této metody je ovšem to, že nemusí konvergovat vždy. Také kriterium použitelnosti může značně omezit oblast jejího používání:

- funkce musí být v okolí kořene spojitá
- funkce nesmí mít v okolí kořene nulovou derivaci a musí být splněna podmínka $\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| \leq m < 1$

Řešení je pro konvexní i konkávní funkce stejné, pouze je zapotřebí jinak volit výchozí bod. U konvexních funkcí je zapotřebí zvolit výchozí bod nad očekávaným kořen a přibližovat se k němu shora. U konkávních funkcí je třeba zvolit výchozí pod kořenem a ke kořenu se přibližovat zdola. Princip Newtonovy metody pro konvexní funkce je znázorněn na následujícím obrázku:



Report *(IOI 21.6.2011)*

Definujte Tayloruv polynom. Vyslovte vitu o zbytku Taylorova polynomu. Vypoetite Taylorovu oadu pro funkci sin(x).

Report *(?)*

fuuuuuuuuuuuuuuuuuj, dala jsem dohromady zakladni definici, jeden priklad pro exponencialu, jeden priklad zbytku (zkonenej:), pak po me chtel spocitat sin(168 stupnu) pomocí taylora (coze???), no s velkou pomoci jsem to nejak dala...

Report *(Majerech)*

newtonova metoda (chtel pomoci ni spocitat dom(n)) pricemz Newtona jsem si skoro vubec nepamatoval a smolil a smolil...nakonec jsem delal jen matiku

Report *(Matousek)*

tayloruv polynom, pouziti. A dodal, ze kdybych vedel i nejake tvrzeni, "tak by to bylo skvely"- taylora jsem zadefinoval, napsal i pouziti. Tvrzeni jsem vedel jen jedno jednoduche (nejaka ta limita jde k nule), ale predpoklady moc ne-e - to se mu nelibilo, takze to jeste rozebiral - nejak jsme se dostali ke zbytku a on chtel aspon lagrangeovu vetu o stredni hodnote, ze ktere se to da tak nejak vyjadrit (ja jsem v podstate rekl jen tu vetu, zbytek odrikal on)

Report *(neznámý)*

v kazdom pripade newtona si myslim ze spocitas pre nejaky polynom vcelku jednoducho - tak isto ako taylorov polynom pre exp tiez spocitas podla definicie

Report *(Majerech)*

Taylor+zbytek, Newtonova metoda pro funkci $x^2 + 2$ a věty o pevném bodě. Hned na začátku mi řekl, že ty věty o pevném bodě co jsme brali nejsou ty, co po mně chce a nadefinoval mi vlastní, kterou jsem měl dokázat a navíc dokázat, že neplatí pro fukce nad Q. Taylor a NM byly v pohodě, u Taylora stačila definice a NM jsem si pamatoval z numeriky, když jsem se dostal k odm ze dvou s přesností na tři místa, tak jsme to prohlásili za konvergentní. Pak ale začalo přituhovat. Použil jsem metodu nahrazení kvality kvantitou a sesypal jsem na několik A4 úplně všechna fakta, která by se v tom důkazu věty o pevném bodě dala použít. Pak jsme se v tom dost dlouho přehrabovali a nakonec mě k tomu nějak dokormidloval a kupodivu mi to dal taktéž za 1.

Report *(Zemlicka)*

Dalsi otazka bylo hledani korene polynomu numerickymi metodami, tedy Newtonovu metodu + dalsi algoritmy, kde po me chtel abych srovnal jejich vyhody, nevyhody, rychlosti, ... nicmene musim rict, ze Zemlicka je vic v pohode, nez jsem cekal.

Report *(Klazar)*

Taylorove polynomu jsem napsala jen, jak vypada, Tayloruv rozvoj funkce, k cemu se to pouziva. Jeste se me pak ptal na par veci, ty uz jsem moc nevedela. A pak jeste rozepsat e na xtou a sin x. `http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=418&t=3406&p=16319`

3 Integrál

Požadavky

- Primitivní funkce, metody výpočtu
- Určitý (Riemannův) integrál, užití určitého integrálu
- Vícerozměrný integrál a Fubiniho věta

3.1 Primitivní funkce, metody výpočtu

Definice
Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta *(Tvar primitivní funkce)*
Nechť F a G jsou dvě primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta *(Linearita primitivní funkce)*
Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.
Poznámka
Předchozí tvrzení často zapisujeme (pokud alespoň jedno z čísel α, β je různé od nuly)

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Věta *(Spojitost a existence primitivní funkce)*
Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta *(O substituci)*

1. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definována na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \ na\ (\alpha, \beta)$$

2. Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C \ na\ (\alpha, \beta)$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C \ na\ (a, b)$$

Věta *(Integrace per partes)*
Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \ na\ I$$

(*Poznámka autora*: $\int u'v = uv - \int uv'$)

3.1.1 Postup integrace racionální funkce

Věta *(Dělení polynomu)*
Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž Q není identicky roven nule. Pak existují (jednoznačně určené) polynomy R a S takové, že stupeň S je menší než stupeň Q a pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $P(x) = R(x)Q(x) + S(x)$.

Věta *(Základní věta algebry)*
Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$P(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n),\ x \in \mathbb{R}$$

Věta *(O kořenech polynomu)*
Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbb{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen P násobnosti k.

Věta *(O rozkladu polynomu)*
Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ taková, že:

1. $P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
2. žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
3. mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Věta *(O rozkladu na parciální zlomky)*
Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

1. stupeň P je ostře menší než stupeň Q,
2. $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
3. $a_n, x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$
4. $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{N}$
5. žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen
6. mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k$,
$B_1^1, C_1^1, \ldots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \ldots, B_1^l, C_1^l, \ldots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \ldots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

Postup integrace racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je:

1. Vydělíme polynomy P a Q - najdeme polynomy R a S takové, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

   a stupeň S je menší než stupeň Q.
2. Najdeme rozklad polynomu Q ve tvaru uvedeném ve *větě o rozkladu polynomu.*
3. Najdeme rozklad $\frac{S}{Q}$ na parciální zlomky ve tvaru uvedeném ve *větě o rozkladu na parciální zlomky.*
4. Najdeme primitivní funkce ke všem parciálním zlomkům.

3.2 Určitý (Riemannův) integrál, užití určitého integrálu

Definice
Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením intervalu* $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme dělícími body. *Normou dělení* D rozumíme číslo

$$\upsilon(D) = \max\{x_j - x_{j-1}; j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b\rangle$ je *zjemněním dělení* D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice
Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $D=\{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a,b\rangle$. Označme

$$S(f,D)=\sum_{j=1}^{n} M_j(x_j-x_{j-1}),\ \ kde\ M_j=\sup\{f(x);x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle\}$$

$$s(f,D)=\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j-x_{j-1}),\ \ kde\ m_j=\inf\{f(x);x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle\}$$

Poznámka
Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$.

1. Pro každé dělaní D intervalu $\langle a,b\rangle$. platí $s(f,D)\le S(f,D)$.
2. Je-li D_1 zjemněním D_2, pak $s(f,D_1)\ge s(f,D_2)$ a $S(f,D_1)\le S(f,D_2)$
3. Jsou-li D_1 a D_2 dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, pak $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$.

Definice
Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$.

1. Označme

$$\overline{\int_a^b} f=\inf\{S(f,D);D\ je\ dělením\ intervalu\ \langle a,b\rangle\}$$

(tzv. horní *Riemannův integrál funkce* f přes $\langle a,b\rangle$),

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{s(f,D);D\ je\ dělením\ intervalu\ \langle a,b\rangle\}$$

(tzv. dolní *Riemannův integrál funkce* f přes $\langle a,b\rangle$)

2. Řekneme, že funkce f má *Riemannův integrál přes* $\langle a,b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$. Hodnota tohoto integrálu je pak rovna $\overline{\int_a^b f}$ a značíme ji $\int_a^b f$.
Pokud $a>b$, definujeme $\int_a^b f=-\int_b^a f$, v případě, že $a=b$, definujeme $\int_a^b=0$.

Věta *(Kritérium existence Riemannova integrálu)*
Nechť $a<b$ a f je funkce omezená na $\langle a,b\rangle$. Pak $\int_a^b f$ existuje, právě když pro každé $\varepsilon>0$ existuje dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$

Věta *(Monotonie a linearita Riemannova integrálu)*
Nechť $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ a funkce f,g mají Riemannův integrál přes interval $\langle a,b\rangle$. Pak platí:

1. Jestliže pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ je $f(x)\le g(x)$, pak $\int_a^b f\ \le\int_a^b g$
2. $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$
3. $\int_a^b cf=c\int_a^b f$ pro každé $c\in\mathbb{R}$

Věta *(Spojitost a Riemannovská integrovatelnost)*
Nechť $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $\int_a^b f$. **Poznámka**
Platí dokonce: Pokud je f omezená na $\langle a,b\rangle$ a je spojitá ve všech bodech intervalu $\langle a,b\rangle$ s výjimkou konečně mnoha, pak existuje $\int_a^b f$.

Věta *(Monotonie a Riemannovská integrovatelnost)*
Je li f omezená a monotónní na uzavřeném intervalu, pak je Riemannovsky integrovatelná.

Věta *(Vlastnosti $\int$)*
Nechť $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ a funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí

1. Jestliže existuje $\int_a^b f$, pak pro každý interval $\langle c,d\rangle\subset\langle a,b\rangle$ existuje $\int_c^d f$.
2. Je-li $c\in(a,b)$, pak $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$, má-li alespoň jedna strana smysl (*aditivita Riemannova integrálu jako funkce intervalu*)

Věta *(Riemannův integrál jako primitivní funkce)*
Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro $x \in \langle a, b\rangle$ položme $F(x) = \overline{\int_a^x} f$. Potom platí:

1. Funkce F je spojitá na $\langle a, b\rangle$
2. Je-li $x_0 \in (a, b)$ a funkce f je v bodě x_0 spojitá, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Stejná tvrzení platí i pro funkci $G(x) = \underline{\int_a^x} f$

Poznámka
Pro Riemannovy integrály lze použít i metodu per partes nebo pravidlo substituce.

Věta *(Základní věta analýzy)*
Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí:

$$\int_a^b f = (\lim_{x\to b-} F(x)) - (\lim_{x\to a+} F(x))$$

Definice *(Newtonův integrál)*
Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a F je primitivní funkce k f na (a, b). *Newtonovým integrálem* funkce f přes interval (a, b) nazýváme číslo

$$(N)\int_a^b f = (\lim_{x\to b-} F(x)) - (\lim_{x\to a+} F(x))$$

pokud obě limity na pravé straně existují a jsou vlastní.

Poznámka *(Vztah Riemannova a Newtonova integrálu)*
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Množiny funkcí integrovatelných newtonovsky a riemannovsky jsou neporovnatelné.

3.2.1 Užití určitého integrálu

Obsahy rovinných útvarů...
Věta *(Délka křivky)*
Nechť f má na (a, b) spojitou derivaci. Délka křivky v $\mathbb{R}^2$, vyznačené průběhem funkce f z $[a; f(a)]$ do $[b; f(b)]$ potom je dána předpisem:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Věta *(Objem rotačního tělesa)*
Nechť f je definována na $\langle a, b\rangle$ a $f > 0$. Objem tělesa vzniknutého rotací křivky je $V = \pi \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$

Věta *(Integrální kritérium konvergence řad)*
Nechť f je spojitá, nezáporná a nerostoucí na $\langle n_0 - 1, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \Leftrightarrow (N)\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt < \infty$$

3.3 Vícerozměrný integrál a Fubiniho věta

Definice
(Kompaktním) *intervalem* v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n rozumíme součin

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$$

kde $\langle a_i, b_i\rangle$ jsou kompaktní intervaly v $\mathbb{R}$.

Definice

- *Rozdělením* D takového intervalu J rozumíme n-tici $D_1, \dots, D_n$, kde D_i je rozdělení intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$.
- Rozdělení $D = (D_1, \dots, D_n)$ je *zjemněním* $D' = (D'_1, \dots, D'_n)$ jestliže D_i zjemňuje D'_i.

Pozorování
Každé dvě rozdělení mají společné zjemnění.

Definice
Člen rozdělení $D = (D_1, \dots, D_n)$ je kterýkoliv interval $K = \langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$, kde $D_k : t_{k0} < \cdots < t_{k,r(k)},\ 0 \le i_j \le r(j)$. Množina všech členů rozdělení D bude označována $|D|$.

Definice
Objem intervalu $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ je číslo

$$\text{vol } J = (b_1 - a_1).(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

Definice
Buď f omezená funkce na intervalu J, buď D rozdělení J. *Dolní (resp. horní) sumou* funkce f v rozdělení D rozumíme číslo

$$s(f, D) = \sum_{K \in |D|} m_K \cdot \text{vol } K \quad \textit{resp.} \quad S(f, D) = \sum_{K \in |D|} M_K \cdot \text{vol } K,$$

kde m_K je infimum a M_k supremum funkce f na intervalu K.

Pozorování
Pro libovolná dvě rozdělení D a D' platí $s(f, D) \le S(f, D')$

Definice
Dolní a horní Riemannův integrál definujeme jako

$$\underline{\int_J} f = \sup_D s(f, D), \quad \overline{\int_J} f = \inf_D S(f, D)$$

a při rovnosti těchto hodnot mluvíme o Riemannově integrálu a píšeme prostě

$$\int_J f \ \textit{nebo} \ \int_J f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots x_n, \quad \int_J f(\overrightarrow{x}) d\overrightarrow{x}.$$

Věta
Pro vícerozměrný Riemannův integrál platí (podobně jako pro jednorozměrný případ) že f je Riemannovsky integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení D takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$$

Platí i věta, že spojitá funkce na intervalu J je Riemannovsky integrovatelná.

Věta *(Vlastnosti Riemannova vícerozměrného integrálu)*
Platí:

1. $|\int_J f| \le \int_J |f|$ (existují-li příslušné integrály)
2. Buďte f, g Riemannovsky integrovatelné funkce na J, buď $f \le g$. Potom $\int_J f \le \int_J g$.
3. Speciálně, je-li $f(\overrightarrow{x}) \le C$ pro nějakou konstantu C, platí $\int_J f \le C \cdot \text{vol } J$

Věta *(Fubiniova)*
Buďte $J' \subseteq E^n, J'' \subseteq E^m$ intervaly, $J = J' \times J''$, buď f spojitá funkce definovaná na J. Potom

$$\int_J f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) d\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) d\overrightarrow{y} \right) d\overrightarrow{x} = \int_{J''} \left(\int_{J'} f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) d\overrightarrow{x} \right) d\overrightarrow{y}$$

(Inými slovami: Hodnota „integrálu“ cez celý interval je rovná hodnote po integrovaní postupne cez (jednotlivé) „rozmery“ - pričom je možné integrovať v ľubovoľnom poradí.)

Definice *(Parciální derivace)*
Parciální derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i se definuje následovně:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

Definice *(Jacobiho matice, jakobián)*
Jacobiho matice funkce $\overrightarrow{f} : D \to \mathbb{R}^n$ v bodě $a \in D$, kde D je otevřená množina v $\mathbb{R}^m$ a $f_1, f_2, \ldots f_n$ jsou souřadnicové funkce f, je dána předpisem:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Táto čtvercová matice se obvykle značí $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ – a je-li $m = n$, její determinant se nazývá *Jakobián* (a značí se rovnako???).

Definice *(Regulární zobrazení)*
Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\overrightarrow{f} : U \to \mathbb{R}^n$ má spojité parciální derivace. *Zobrazení* $\overrightarrow{f}$ *je regulární*, je-li jakobián

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\overrightarrow{x}) \neq 0, \ \forall \overrightarrow{x} \in U$$

Věta *(O substituci)*
Nechť $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je regulární zobrazení, A je uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq U$ na které existuje $\int_{\varphi(A)} f(\overrightarrow{x}) d\overrightarrow{x}$. Potom platí:

$$\int_A f(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{t})) \frac{D(\overrightarrow{\varphi})}{D(\overrightarrow{t})} d\overrightarrow{t} = \int_{\varphi(A)} f(\overrightarrow{x}) d\overrightarrow{x}$$

4 Základy teorie funkcí více proměnných

Požadavky

- Parciální derivace a totální diferenciál
- Věty o střední hodnotě
- Extrémy funkcí více proměnných
- Věta o implicitních funkcích

4.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice *(Parciální derivace)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $X = [x_1, \ldots, x_n], X \in \mathbb{R}^n$. Potom *parciální derivací funkce f podle i-té složky v bodě X* nazveme limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Definice *(Derivace ve směru vektoru)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$, $X = [x_1, \ldots, x_n], X \in \mathbb{R}^n$. Potom *derivací funkce f ve směru vektoru v* nazveme limitu

$$D_v f(X) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X + t \cdot v) - f(X)}{t}$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Definice *(Gradient)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X = [x_1, \ldots, x_n], X \in \mathbb{R}^n$ a nechť existují všechny parciální derivace funkce f v bodě X a jsou vlastní. Pak vektor $\nabla f(X) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)]$ nazýváme *gradientem funkce f v bodě X*.

Definice *(Totální diferenciál)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X = [x_1, \ldots, x_n], X \in \mathbb{R}^n$ a nechť $v \in \mathbb{R}^n$. Existuje-li lineární zobrazení $Df(X)(v)$ takové, že platí:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(X + h) - f(X) - Df(X)(h)}{\|h\|} = 0$$

potom toto zobrazení nazýváme *totální diferenciál funkce f v bodě X*.

Definice *(Parciální derivace druhého řádu)*
Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, a nechť má funkce f parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Pak pro $a \in M$ definujeme *parciální derivaci druhého řádu (podle i-té a j-té složky)* jako $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$.

Definice *(Druhý diferenciál)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v bodě a *druhý diferenciál*, pokud každá parciální derivace f má v bodě a totální diferenciál. Druhý diferenciál je bilineární zobrazení $D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a má tedy následující tvar:

$$D^2 f(a)(h, k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$$

Použijeme-li analogii gradientu pro první diferenciál, můžeme říct, že druhý diferenciál je reprezentován maticí:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i=1,j=1}^{n,n} \tag{1}$$

Definice *(Klasifikace bilineárních forem)*
Nechť $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilineární forma.

- F se nazývá *pozitivně definitní*, pokud $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $F(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.
- F se *nazývá negativně definitní*, pokud je $-F$ pozitivně definitní.
- F se nazývá *indefinitní*, pokud $F(g, g) < 0$ a $F(h, h) > 0$ pro nějaké $g, h \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka
Při určování toho, zda je bilineární forma pozitivně definitní, negativně definitní, nebo indefinitní nám může pomoci tzv. Sylvestrovo kritérium, které tvrdí následující:

- jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice reprezentující bilineární formu F kladné, potom je F pozitivně definitní.
- jestliže je první hlavní subdeterminant této matice záporný a poté alterují znaménka, je forma negativně definitní.
- nenastává-li ani jedna z předchozích dvou možností a všechny hlavní subdeterminanty jsou nenulové, je F indefinitní.

Pakliže nenastane žádná z výše uvedených možností, Sylvestrovo kritérium nám nepomůže a je nutno o typu bilineární formy rozhodovat jiným způsobem (např. pomocí vlastních čísel).

Věta *(Tvar totálního diferenciálu)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom:

- pro $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$ existuje $D_v f(a)$ vlastní a platí $D_v f(a) = Df(a)(v)$.
- existují všechny parciální derivace a pro $\forall v \in \mathbb{R}^n : Df(a)(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i$ (neboli $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$).
- f je spojitá v a.

Věta *(Aritmetika totálního diferenciálu)*
Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom existují totální diferenciály $D(f+g)(a)$, $D(\alpha f)(a)$, $D(f \cdot g)(a)$. Pokud navíc $g(a) \neq 0$ existuje i $D(f \div g)(a)$. Navíc platí:

- $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$
- $D(\alpha f)(a) = \alpha Df(a)$
- $D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$.
- $D(f \div g)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}$.

Věta *(Diferenciál složeného zobrazení)*
Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a n funkcí $g_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Nechť $a \in \mathbb{R}^m$ a $b \in \mathbb{R}^n$ a $b_j = g_j(a)$. Nechť existují $Df(a)$ a $Dg_i(a), i = 1 \dots n$. Definujeme-li zobrazení $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x))$, potom H má v bodě a totální diferenciál a pro $h \in \mathbb{R}^m$ platí

$$DH(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \right) h_i$$

Z čehož plyne tzv. *řetízkové pravidlo*, tj.:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$$

Věta *(Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace. Potom má f v bodě a totální diferenciál.

Věta *(Postačující podmínka pro existenci druhého diferenciálu)*
Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a f má spojité parciální derivace druhého řádu na M. Potom f má v každém bodě z M druhý diferenciál.

Věta *(Záměnnost parciálních derivací druhého řádu)*
Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nechť f má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Potom existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ a obě tyto parciální derivace druhého řádu se rovnají.

Důsledek
Důsledkem dvou právě uvedených vět je fakt, že matice, která reprezentuje druhý diferenciál funkce f v bodě a (tedy hovoříme o situaci, kdy f má v bodě a druhý diferenciál), je symetrická.

4.2 Věty o střední hodnotě

Věta *(O střední hodnotě pro funkce více proměnných)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a, b \in \mathbb{R}^n$. Nechť f má všechny parciální derivace spojité v každém bodě úsečky (a, b). Potom $\exists \xi \in (0, 1)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = \nabla f(a + \xi(b-a)) \cdot (b-a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \xi(b-a))(b_i - a_i)$$

Důkaz
Plyne z Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $F(t) = f(a + t(b-a))$ a řetízkového pravidla.

4.3 Věta o implicitních funkcích

Věta *(O implicitní funkci (pro obecné křivky v R^2))*
Nechť $F([x,y]) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace. Mějme dva body $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $F([x_0,y_0]) = 0$. Nechť navíc $\frac{\partial F}{\partial y}([x_0,y_0]) \neq 0$. Potom exisuje okolí U bodu x_0 a okolí V bodu y_0 tak, že pro $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ takové, že $F([x,y]) = 0$. Označíme-li takto definovanou (implicitní) funkci jako $y = \varphi(x)$, potom φ je diferencovatelná na U a platí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}([x,\varphi(x)])}{\frac{\partial F}{\partial y}([x,\varphi(x)])}$$

Věta *(Věta o implicitní funkci (případ v R^{n+1}))*
Nechť $F : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina. Uvažujme body $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $[x_0,y_0] \in G$ a $F([x_0,y_0]) = 0$. Nechť F má spojité parciální derivace a nechť navíc $\frac{\partial F}{\partial y}([x_0,y_0]) \neq 0$. Potom existuje okolí $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu x_0 a okolí $V \subseteq \mathbb{R}$ bodu y_0 takové, že pro $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ takové, že $F([x,y]) = 0$. Navíc, označíme-li $y = \varphi(x)$, potom φ má spojité parciální derivace na U a platí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}([x,\varphi(x)])}{\frac{\partial F}{\partial y}([x,\varphi(x)])}$$

Poznámka
Na tomto místě uvedeme malou, ale pro nás důležitou poznámku z algebry. Mějme bod $a \in \mathbb{R}^n$ a funkce $F_j, j = 1 \dots n$, $F_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které mají všechny své parciální derivace. Potom determinant

$$JF^n_{j=1}(a) = \left|\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right| = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)^{n,n}_{i=1,j=1} \tag{2}$$

nazveme Jakobiánem funkcí F_j (v bodě a) vzhledem k proměnným $x_1,\dots,x_n$. Pojem Jakobián lze ekvivalentně zavést i pomocí vektorových funkcí. To zde však nebudeme potřebovat.

Věta *(O implicitních funkcích (případ v R^{n+m}))*
Nechť $F_j : G \to \mathbb{R}, j = 1 \dots m$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina. Uvažujme body $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ takové, že $[x_0,y_0] \in G$ a $F_j([x_0,y_0]) = 0$ pro všechny $j = 1 \dots m$. Nechť každá funkce F_j má spojité parciální derivace a nechť navíc $JF^m_{j=1}([x_0,y_0]) \neq 0$. Potom existuje okolí $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu x_0 a okolí $V \subseteq \mathbb{R}^m$ bodu y_0 takové, že pro $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ takové, že $F_j([x,y]) = 0, j = 1 \dots m$. Navíc, označíme-li $y_j = \varphi_j(x), j = 1 \dots m$, potom φ_j má spojité parciální derivace na U a platí:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\left|\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\dots,y_m)}\right|}{\left|\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right|}$$

Věta *(O inverzních funkcích)*
Důsledkem věty o implicitních funkcích je následující věta: Nechť $f : U \to \mathbb{R}^m$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^m$ je okolí bodu x_0, je zobrazení se spojitými parciálními derivacemi, které má v x_0 nenulový jakobián. Potom existují okolí $U_1 \subseteq U$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ bodů x_0 a $y_0 = f(x_0)$ taková, že $f : U_1 \to V$ je bijekce, inverzní zobrazení $f^{-1} : V \to U_1$ má spojité parciální derivace a pro každé $x \in U_1$ v bodě $y = f(x) \in V$ máme

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$$

Jacobiho matice zobrazení f^{-1} v bodě y je tedy inverzní k Jacobiho matici zobrazení f v bodě x.

4.4 Extrémy funkcí více proměnných

Definice *(Extrémy funkce)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\overline{X}$ je bodem *maxima funkce f na množině M*, pokud $\forall X \in M : f(\overline{X}) \geq f(X)$. Analogicky definujeme *minimum funkce f na množině M*.

Definice *(Lokální extrémy funkce)*
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\overline{X}$ je bodem ***lokálního*** *maxima funkce f na M*, pokud $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall X \in M \cap B(\overline{X},\delta) : f(\overline{X}) \geq f(X)$. Analogicky definujeme ***lokální*** *minimum funkce f na množině M*.

Definice *(Stacionární bod)*
Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, $f : M \to \mathbb{R}$, $\overline{X} \in M$. Řekneme, že bod $\overline{X}$ je *stacionárním bodem funkce f*, pokud existují všechny parciální derivace funkce f v bodě $\overline{X}$ a jsou nulové.

Věta *(Nutná podmínka existence lokálního extrému)*
Pokud $a \in \mathbb{R}^n$ je bodem lokálního extrému funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a v a existují všechny parciální derivace funkce F, potom jsou tyto nulové.

Věta *(Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému)*
Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $a \in G$. Nechť $F : G \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže $Df(a) = 0$, potom platí:

- je-li $D^2f(a)$ pozitivně definitní, potom a je bodem lokálního minima
- je-li $D^2f(a)$ negativně definitní, potom a je bodem lokálního maxima
- je-li $D^2f(a)$ indefinitní, potom v bodě a není lokální extrém

Věta *(O vázaných extrémech (Lagrangeovy multiplikátory))*
Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená. Mějme funkce $F, g_1, \dots g_m,\ m < n$, které mají spojité parciální derivace. Zadefinujme množinu M společných nulových bodů funkcí g_i, $i = 1 \dots m$, tedy:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0\}$$

Je-li bod $a = [a_1, \dots, a_n]$ bodem lokálního extrému funkce F na M a platí-li, že vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně nezávislé, potom existují tzv. Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takové, že:

$$DF(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \ldots + \lambda_m Dg_m(a) = 0$$

neboli

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a),\ i = 1, \dots, n$$

5 Metrické prostory

Požadavky

- Definice metrického prostoru, příklady
- Definice topologického prostoru
- Spojitost, otevřené a uzavřené množiny

5.1 Definice metrického prostoru, příklady

Metrický prostor, metrika

Definice *(metrický prostor)*
Metrický prostor je dvojice (M, d), kde M je množina a $d : M \times M \to \mathbb{R}$ je zobrazení, zvané *metrika*, splňující tři axiomy:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symetrie)*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Metrické prostory jsou abstrakcí jevu vzdálenosti. Z axiomů 1. a 3. vyplývá nezápornost hodnot metriky (která se ale většinou explicitně uvádí jako součást prvního axiomu). Prvky metrického prostoru nazveme *body*.

Příklady metrik

- Nechť $M = \mathbb{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky
  (kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$)

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

  Potom:

  - Pro $p = 1, n = 1$ dostáváme metriku $|x - y|$.
  - Pro $p = 2, n \geq 2$ dostáváme euklidovskou metriku

$$d_2(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

  - Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme tzv. pošťáckou metriku a pro $p \to \infty$ maximovou metriku

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

- Buď X libovolná množina. $F(X)$ označme množinu všech omezených funkcí $f : X \to \mathbb{R}$ a definujme funkci d předpisem

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

  Pak $(F(X), d)$ je metrický prostor (s tzv. supremovou metrikou).

- Vezmeme $M = \mathcal{C}[a, b]$ (množina reálných funkcí definovaných a spojitých an intervalu $[a, b]$) a reálné číslo $p \geq 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

  Pro $p = 1$ máme integrální metriku a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu. Vezmeme-li širší třídu funkcí $M = \mathcal{R}[a, b]$ (funkce mající na $[a, b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f, g)$ definovaná, ale nesplňuje axiom 1) a nedostáváme metriku. Změníme-li například hodnotu funkce $f \in \mathcal{R}[a, b]$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in \mathcal{R}[a, b]$, ale $d_p(f, f_0) = 0$. (Tato potíž se odstraní tak, že místo s $\mathcal{R}[a, b]$ se pracuje s $\mathcal{R}[a, b]/\sim$ pro vhodnou relaci ekvivalence $\sim$.)

- Na souvislém grafu $G = (M, E)$ s množinou vrcholů M máme metriku $d(u, v)$ odpovídající počtu hran na nejkratší cestě v G spojující u a v.

- Je-li A konečná množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tzv. Hammingovu metriku $(u = a_1 a_2 \ldots a_m, v = b_1 b_2 \ldots b_m)$, kde $d(u, v)$ odpovídá počtu souřadnic i, pro něž $a_i \neq b_i$. Měří míru odlišnosti obou slov – jaký nejmenší počet změn v písmenech stačí k přeměně u ve v.

- Úplně triviální příklad metriky dostaneme, když na nějaké množině M položíme $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, x) = 0$.

Definice *(euklidovský prostor)*
Euklidovským prostorem rozumíme metrický prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$, kde d_2 je funkce daná předpisem $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Konvergence

Definice *(konvergence posloupnosti bodů)*
Řekneme, že posloupnost bodů $(x_n)_{n\geq 0}$ nějakého metrického prostoru (M, d) *konverguje k bodu* $x \in M$ ($x_n \to x$), nebo že $x = \lim_{n\geq 0} x_n$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \ \Rightarrow \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Poznámka *(vlastnosti konvergence)*
Nechť je dán metrický prostor (M, d) a v něm posloupnost bodů $(x_n)_{n\geq 0}$. Potom platí:

1. Jestliže pro bod $y \in M$ platí, že $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n = y$, pak $x_n \to y$
2. Nechť $x_n \to y_1$ a zároveň $x_n \to y_2$. Potom $y_1 = y_2$.
3. Podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje ke stejnému bodu.

Důkaz
Obdobně jako pro konvergenci posloupností z $\mathbb{R}$ – pouze místo absolutní hodnoty použijeme obecnou metriku.

5.2 Definice topologického prostoru

Definice *(topologický prostor)*
Topologický prostor (nebo *topologie*) je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je systém (ne nutně všech) podmnožin množiny X, zvaných *otevřené množiny*, splňující tři axiomy:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný podsystém $\mathcal{T}$, potom také $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
- je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný konečný podsystém $\mathcal{T}$, potom také $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Příklady topologických prostorů
Nejjednodušší příklad topologického prostoru je dvojice $(X, \{\emptyset, X\})$

Základní příklad je systém otevřených množin metrického prostoru (díky vlastnostem otevřených množin). Budeme stručně mluvit o *topologii metrického prostoru*.

Definice *(metrizovatelné topologie)*
Topologie $(X, \mathcal{T})$ je *metrizovatelná*, pokud $\mathcal{T}$ je tvořena VŠEMI? otevřenými množinami nějakého metrického prostoru (X, d).

Definice *(haussdorfovská topologie)*
Topologie je *haussdorfovská*, pokud každé její dva body mají disjunktní okolí. Formálně $\forall a, b \in X, a \neq b \exists U, V \in \mathcal{T} : a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$.

Lemma *(vlastnosti metrizovatelných topologií)*
Je-li $(X, \mathcal{T})$ metrizovatelná, pak platí:

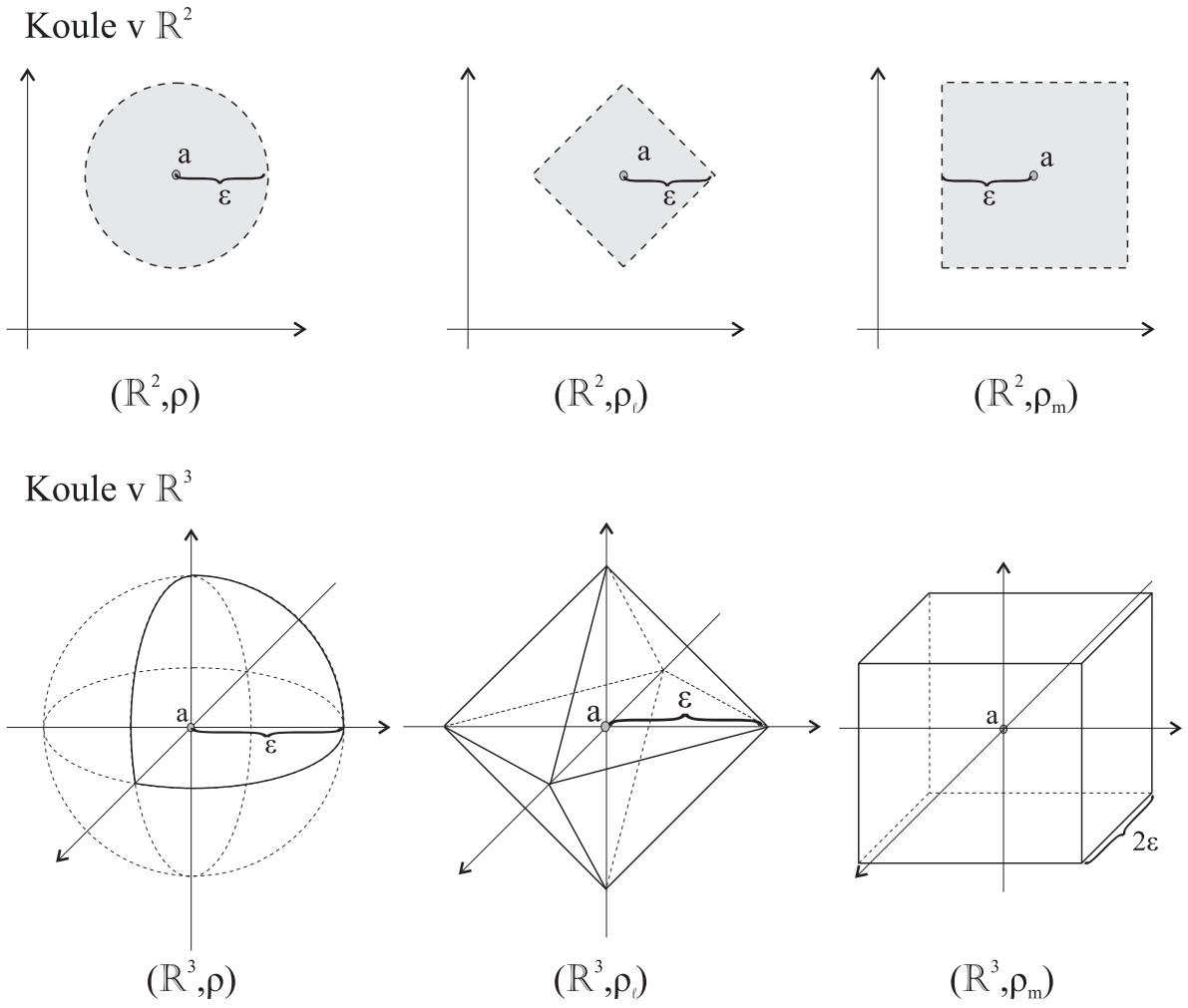
- každá konečná množina je v metrizovatelné topologii uzavřená,
- $(X, \mathcal{T})$ je haussdorfovská (tedy každé dva body mají disjunktní okolí).

Důsledek
Topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ není pro $|X| > 1$ metrizovatelná.

Definice *(báze topologie)*
Mějme topologie (X, T). Pak jeho *báze* je takový podsystém $U \subseteq \mathcal{T}$, že každá $A \in \mathcal{T}$ je sjednocení nějakých množin z U.

Příklad
Systém všech koulí $\{B(a, r) \mid a \in M, r > 0\}$ v metrickém prostoru (M, d) tvoří bázi topologie (M, d). Pro zadání topologie stačí zadat nějakou její bázi.

Definice *(ekvivalentní metrické prostory)*
Metrické prostory (X, d_1) a (X, d_2) nazveme *ekvivalentní*, pokud definují stejnou topologii. K tomu je nutné a stačí, aby $\forall a \in X, r > 0 \ \exists s > 0 : B_{d_1}(a, s) \subseteq B_{d_2}(a, r)$ a naopak (prohodíme-li metriky d_1 a d_2). Postačující podmínkou je existence konstant $0 < r \leq s$ takových, že pro každé dva body $x, y \in X$ máme $r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y)$.



Obrázek 12: Různé koule

5.3 Spojitost a stejnoměrná spojitost

Otevřené a uzavřené množiny

Definice *(otevřená a uzavřená koule)*
Buď (M,d) metrický prostor, $x \in M, r > 0$, potom

- *otevřenou koulí* (r*-okolím*) se středem x a poloměrem r nazveme množinu

$$B(x,r) = \{y \in M | d(x,y) < r\}$$

- *uzavřenou koulí* (r*-okolím*) se středem x a poloměrem r nazveme množinu

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in M | d(x,y) \leq r\}$$

Poznámka
Na obrázku 12 je ilustrace několika koulí na různých metrikách. Obrázky jsou z `http://kma.me.sweb.cz/metr-prostor.pdf`.

Definice *(otevřená a uzavřená množina)*
Buď (M,d) metrický prostor, $G \subseteq M$, potom

- G je *otevřená* v M, pokud

$$\forall x \in G\ \exists r > 0 :\ B(x,r) \subseteq G$$

  (tj. množina G je okolím každého svého bodu),
- G je *uzavřená* v M, pokud její doplněk $M \setminus G$ je otevřený v M.

Otevřená koule je otevřená množina v každém metrickém prostoru. Podobně pro uzavřenou kouli.

Věta *(vlastnosti otevřených množin)*
Buď (M, d) metrický prostor, potom platí, že

1. $\emptyset$, M jsou otevřené v M,
2. konečný průnik otevřených množin je otevřená množina v M,
3. libovolně velké sjednocení otevřených množin je otevřená množina v M.

Idea důkazu
Část 1. platí pro prázdnou množinu (podmínka je prázdná) a doplňkem i pro celé M. Proč v části 2. musí být průnik konečný? Vezměme nekonečnou posloupnost otevřených koulí $(B_n(x_0, 1/n))_{n\geq 1}$, pak jejich průnikem je pouze $\{x_0\}$, což není otevřená množina!

Věta *(vlastnosti uzavřených množin)*
Nech (M, d) je metrický prostor, potom platí, že

1. $\emptyset$, M jsou uzavřené v M,
2. libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina v M,
3. konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina v M.

Definice *(okolí bodu, vnitřní, vnější a další body)*
Buď (M, d) metrický prostor, $a \in M$ jeho bod. Každou otevřenou množinu $U \subset M$ splňující $a \in U$ nazveme *okolím bodu* a. Tedy každá koule $B(a, r)$ je okolím bodu a a ovšem každé okolí bodu a obsahuje nějakou takovou kouli. V následujících definicích buďte $a \in M$ bod, $X \subset M$ množina a U okolí bodu a. Řekneme, že

- a je *vnitřním* bodem X, když existuje U tak, že $U \subset X$,
- a je *vnějším* bodem X, když existuje U tak, že $U \subset M \setminus X$,
- a je *hraničním* bodem X, když každé U protíná X i $M \setminus X$,
- a je *limitním* bodem X, když je pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný,
- a je *izolovaným* bodem X, když existuje U tak, že $U \cap X = \{a\}$.

Příklad
Vnitřní a izolované body X nutně leží v X, vnější body leží mimo X. Hraniční a limitní body X mohou ležet v X i mimo X. Vezměme v euklidovské rovině R^2 množinu $X = \{x \in R^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \cup \{(0, 2)\}$, jednotkový kruh se středem v počátku, z něhož jsme počátek odstranili a k němuž jsme přidali bod $(0, 2)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $\{x \in R^2 \mid 0 < \|x\| < 1\}$, vnější body množinu $\{x \in R^2 \mid \|x\| > 1, x \neq (0, 2)\}$, hraniční body množinu $\{x \in R^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{(0, 0), (0, 2)\}$, limitní body množinu $\{x \in R^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{(0, 2)\}$.

Definice *(vzdálenost bodu od množiny)*
V metrickém prostoru (X, d) buď $A \subset X$ množina a $x \in (X, d)$ bod. *Vzdálenost bodu x od množiny A* je číslo $d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$.

Definice *(uzávěr)*
Uzávěrem množiny A v metrickém prostoru (M, d) nazýváme množinu

$$\overline{A} = \bigcap_{\forall F} \{F \mid F \text{ uzavřená}, A \subseteq F \subseteq M\}$$

Ekvivalentně $\overline{A} = \{a \in M \mid a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ pro nějakou } (a_n) \subset A\}$, neboli $\overline{A} = A \cup \{\text{limitní body } A\}$.

Věta *(vlastnosti uzávěru)*
Buď (M, d) metrický prostor a A, B množiny v něm, potom platí:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{M} = M$
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. charakteristika uzávěru: $\overline{A} = \{x \in M | d(x, A) = 0\}$
6. $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A, proto A je uzavřená právě když $\overline{A} = A$.

Poznámka *(ekvivalentní definice uzavřené množiny)*
Množina $X \subset (M, d)$ je uzavřená, jestliže každá posloupnost bodů $(x_n)_{n\geq 0}$, která v X leží a konverguje, v X má také svou limitu.

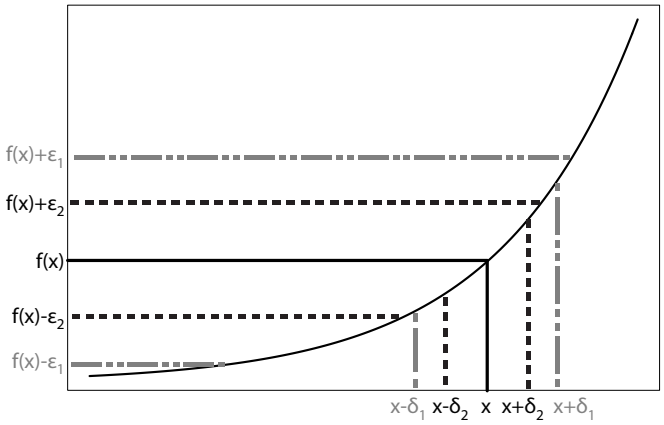
Spojitost a stejnoměrná spojitost

Definice *(spojité zobrazení)*
Pro metrické prostory (X, d_1) a (Y, d_2) je zobrazení $f : X \to Y$ *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d_1(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ekvivalentně pro $\forall$ okolí V bodu $f(x)$ $\exists$ okolí U bodu x tak, že $y \in U \Rightarrow f(y) \in V$.
Zobrazení f je *spojité*, pokud je spojité v každém bodě $x \in X$.

Na obrázku 13 je ilustrována definice spojitosti na funkci $f(x) = e^x$, zobrazující z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pro dvě různá ε u daného x jsem našel odpovídající δ.



Obrázek 13: Spojitost e^x

Věta *(vlastnosti spojitosti)*
Nechť je dáno zobrazení $f : X \to Y$ mezi dvěma metrickými prostory (X, d_1), (Y, d_2). Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

1. f je spojité.
2. Pro každou konvergentní posloupnost $(x_n)_{n\geq 0}$ v X platí $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.
3. Pro každé x a každé okolí U bodu $f(x)$ existuje okolí V bodu x takové, že $f[V] \subseteq U$.
4. Je-li $U \subset Y$ otevřená v Y, pak $f^{-1}(U) \subset X$ je otevřená v X.
5. Je-li $U \subset Y$ uzavřená v Y, pak $f^{-1}(U) \subset X$ je uzavřená v X.
6. Pro každou $A \subseteq X$ platí $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Idea důkazu

1⇒2 f je spojité a $(x_n) \to x$ v X, chceme ukázat, že pro (každé) dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $n \geq n_0 \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$ (neboli $\lim f(x_n) = f(x) = f(\lim x_n)$). Máme f spojité, proto pro dané ε existuje $\delta > 0 :\ d_1(x_n, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. A protože $x_n \to x$ v X, máme pro takové δ vždy nějaké $n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow d_1(x_n, x) < \delta$. Tím jsme získali hledané n_0. (Argumentoval jsem pozpátku od cíle k nalezení potřebného „parametru“ n_0.)
Ještě jednou – protože f je spojité, pro libovolně malou vzdálenost od $f(\lim x_n)$ dostaneme nutnou vzdálenost k $\lim x_n$, ale k té už se přiblížit umíme.

2⇒3 Nepřímo. Nechť máme x a U takové, že okolí V neexistuje. Díky tomu vytvoříme posloupnost, která nesplňuje podmínku 2 (okolí se „nezobrazí“ do okolí).

3⇒4 $U \subset Y$ otevřená, $x \in f^{-1}(U)$, tedy U je okolím $f(x)$, proto existuje okolí V bodu x, že $f(V) \subset U$ a tedy $V \subset f^{-1}(U)$ a proto je otevřená.

4⇔5 Vzor doplňku je doplněk vzoru.

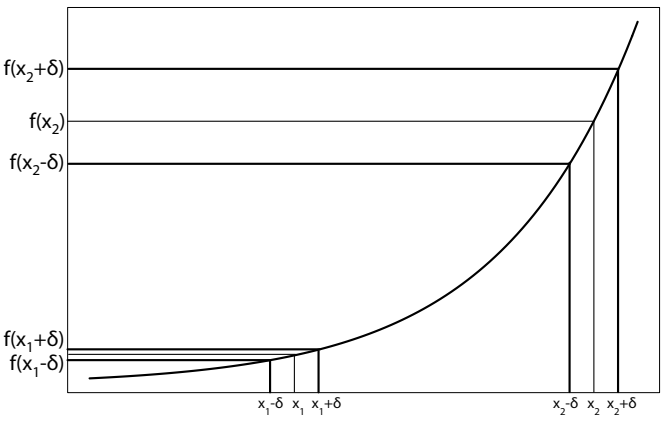
5⇒6 $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ a vzory uzavřených jsou uzavřené, tak máme $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, protože $\overline{A}$ je **nejmenší** uzavřená množina, obsahující A a $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ je uzavřená množina, obsahující A. Proto $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ (ze základní logiky zobrazení).

6⇒1 Nepřímo. Tedy máme $x, \varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ existuje $y \in B(x, \delta)$ takové, že $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Z nich vytvoříme $A = \{y \mid d_2(f(y), f(x)) \geq \varepsilon\}$. Pak ovšem $x \in \overline{A}$ (protože v A jsou body x blízko libovolně malé δ), ale $f(x) \notin \overline{f(A)}$ (protože od $f(a)$ jsme vždy vzdáleni o ε), což je spor s 6.

Definice *(stejnoměrně spojité zobrazení)*
Řekneme, že zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ je *stejnoměrně spojité*, jestliže

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $\forall (x, y) : d_1(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Poznámka
Funkce e^x *není* stejnoměrně spojitá. Nemohu vybrat pro dané ε takové δ, že obraz z δ-okolí kolem x bude ve ε – posouvám-li x směrem „doprava“, obraz δ-okolí se pořád zvětšuje, až přeroste ε, ať zvolím δ libovolně malé. Ilustrováno na obrázku 14.



Obrázek 14: Spojitost e^x není stejnoměrná

Věta *(skládání zobrazení)*
Složení dvou spojitých (nebo stejnoměrně spojitých) zobrazení je spojité (resp. stejnoměrně spojité).

Definice *(homeomorfismus)*
Zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nazveme *(stejnoměrným) homeomorfismem*, pokud

- f je bijekce,
- f je (stejnoměrně) spojité,
- inverzní zobrazení f^{-1} je (stejnoměrně) spojité.

Prostory X a Y pak jsou *(stejnoměrně) homeomorfní*. Pokud je f identické zobrazení z (X, d_1) do (X, d_2), říkáme, že metriky d_1 a d_2 jsou *(stejnoměrně) ekvivalentní*. (Jiná definice ekvivalentních metrik požaduje, aby metrické prostory (X, d_1) a (X, d_2) měli tytéž otevřené množiny).

Poznámka
Nezaměňovat s homomorfismem!

Pro ilustraci, jak jsou si hrníček a americký donut homeomorfní viz `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mug_and_Torus_morph.gif`.

Věta *(aritmetika zobrazení)*
Jsou-li f, g spojité funkce $(X, d) \to \mathbb{R}$ (kde (X, d) je metrický prostor) a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom i funkce $f + g$, $\alpha \cdot f$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ (má-li tato smysl) jsou spojité. Platí i pro spojitost zobrazení v nějakém bodě $x_0 \in X$.
Důkaz
Důkaz této věty je vlastně stejný jako důkaz věty o aritmetice limit pro reálné funkce (jen pracujeme se zobrazeními na metrických prostorech).

Podprostor metrického prostoru

Definice *(podprostor)*
Pro metrický prostor (X, d) a množinu $X_1 \subset X$ vezmeme funkci $d_1 : X_1 \times X_1 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $d_1(x, y) = d(x, y)\ \forall x, y \in X_1$. Pak (X_1, d_1) je *podprostor* metrického prostoru (X, d) (*indukovaný* podmnožinou X_1).

Poznámka
Pro $X_1 \subset X$ je zobrazení vložení $j : (X_1, d) \to (X, d)$, definované předpisem $j(x) = x$ stejnoměrně spojité.

Věta *(vlastnosti podprostorů)*
Buď Y podprostor metrického prostoru X. Potom platí

1. $B_Y(x, \varepsilon) = B_X(x, \varepsilon) \cap Y$, *(o okolí bodů)*
2. U je otevřená v Y, právě když existuje otevřená $V \subset X$ taková, že $U = V \cap Y$ (to samé platí i pro uzavřené množiny),
3. $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$. *(o uzávěru množiny)*

Věta *(podprostor zachovává spojitost)*
Pro $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ (stejnoměrně) spojité zobrazení a $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ takové, že $f[X_1] \subseteq Y_1$ je $f_1 : X_1 \to Y_1$ definované předpisem $f_1(x) = f(x)$ (stejnoměrně) spojité.

6 Základní algebraické struktury

Požadavky

- Grupa, okruh, těleso – definice a příklady
- Malá Fermatova věta – TODO!
- Dělitelnost a ireducibilní rozklady polynomů
- Rozklady polynomů na kořenové činitele pro polynom s reálnými, racionálními, komplexními koeficienty.
- Násobnost kořenů a jejich souvislost s derivacemi mnohočlenu

6.1 Grupa, okruh, těleso – definice a příklady

Definice *(algebra)*
Pro množinu A je zobrazení $\alpha : A^n \to A$, kde $n \in \{0, 1, ...\}$ *n-ární operace* (n je *arita*). Jsou-li $\alpha_i, i \in I$ operace arity Ω_i na A, pak $(A, \alpha_i | i \in I)$ je *algebra*.

Definice *(grupoid, monoid)*
Algebra s 1 binární operací je *grupoid*. V něm může být $e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g \ \forall g \in G$ *neutrální prvek*.

Algebra s jednou asociativní *je možno přezávorkovat* binární operací a neutrálním prvkem vzhledem k ní je *monoid*. Nechť je dán monoid s neutrálním prvkem $(M, \cdot, e)$ a nějakým prvek $m \in M$. Potom řekneme, že prvek $m^{-1} \in M$ je *inverzní* k prvku m, pokud $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = e$. Prvek je *invertibilní*, pokud má nějaký inverzní prvek.

Poznámka
Každý grupoid obsahuje nejvýš 1 neutrální prvek. V libovolném monoidu platí, že pokud $(a \cdot b = e)$ & $(b \cdot c = e)$, pak $a = c$ (tj. inverzní prvek zleva a zprava musí být ten samý). Každý inverzní prvek je sám invertibilní.

Definice *(grupa)*
Algebra $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ je *grupa*, pokud je $(G, \cdot, e)$ monoid a $^{-1}$ je operace inv. prvku (tedy unární operace, která každému prvku přiřadí prvek k němu inverzní). Grupa G je *komutativní (abelovská)*, pokud je operace „$\cdot$“ komutativní.

Příklady
Příklady grup:

- Množina $\mathbb{R}$ s operací sčítání, inverzním prvkem $-x$ a neutrálním prvkem 0
- Množina $\mathbb{R}_+$ (kladných reálných čísel, tedy bez nuly, protože k té bychom inverzní prvek nenašli) s operací násobení, inverzním prvkem x^{-1} a neutrálním prvkem 1
- Množina $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ pro n libovolné přirozené číslo; s operací sčítání modulo n, inverzním prvkem $(-x)$ modulo n a neutrálním prvkem 0
- Množina polynomů stupně $\leq n$ se sčítáním, opačným polynomem (s opačnými koeficienty) a neutrálním prvkem 0
- Množina všech permutací prvků $(1, \ldots, n)$ s operací skládání permutací, opačnou permutací (takovou, že její složení s původní dává identitu) a neutrálním prvkem **id** (na rozdíl od všech předchozích pro permutace délky větší než 3 není abelovská)
- Množina regulárních matic $n \times n$ s operací maticového násobení, inverzními maticemi a jednotkovou maticí (taktéž není obecně abelovská)

Definice *(okruh)*
Nechť $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je algebra taková, že $(R, +, -, 0)$ tvoří komutativní grupu, $(R, \cdot, 1)$ je monoid a platí $a(b + c) = ab + ac$ a $(a + b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in R$ (tedy distributivita násobení vzhledem k sčítání[6]). Pak je $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ *okruh*.[7]

Příklady
Příklady okruhů:

- Množina $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení, inverzem vůči sčítání – unárním minus a neutrálními prvky 0 a 1.
- Množina všech lineárních zobrazení na $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a skládání, „opačným“ zobrazením (kde $(-f)(x) = -(f(x))$), nulovým zobrazením a identitou (pro obecná zobrazení toto nefunguje, neplatí distributivita)

Poznámka *(Vlastnosti okruhů)*
V okruhu $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ pro každé 2 prvky $a, b \in R$ platí:

1. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
2. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
4. $|R| > 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \neq 1$

[6] Žemlička píše ve skriptech sčítání vůči násobení, ale v literatuře se to píše většinou obráceně (asi to ale bude to samé)
[7] "–"je v něm stále unární operace

Definice *(těleso)*

Těleso je okruh $(F, +, -, \cdot, 0, 1)$, pro který navíc platí, že pro každé $x \in F$ kromě nuly existuje $y \in F$ takové, že $x \cdot y = y \cdot x = 1$, tj. pro všechny prvky kromě nuly existuje inverzní prvek vůči operaci „$\cdot$“ – „x^{-1}“. Navíc v F musí platit, že $0 \neq 1$ (vyloučení triviálních okruhů).

Komutativní těleso je takové těleso, ve kterém je operace „$\cdot$“ komutativní.

Příklady

Příklady těles:

- Tělesa $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$, oproti tomu $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}$ nejsou tělesa - nemají inverzní prvek k násobení
- Racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- $\mathbb{Z}_{p^n} = \{0, \ldots, p^n - 1\}$, kde p je prvočíslo a n přirozené číslo – tzv. *Gallois field*, pro dané p a n existuje vždy až na isomorfismus (přejmenování prvků) jen jedno. - *každé kon. těleso má p^n prvků (KAM TO PATRI???)*
- $(\mathbb{Z}_p, +, -, \cdot, 0, 1)$ je komutativní těleso charakteristiky p, ted obor integrity

Všechna uvedená tělesa jsou komutativní.

Ukázka tělesa $GF(4) = GF(2^2)$

Pro čtyřprvkovou množinu $T = \{0, 1, a, b\}$ definujeme operace sčítání a násobení takto:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Pro takto definované operace + a $\cdot$ platí všechny axiomy tělesa.

Jiný pohled na totéž těleso: vezmeme za prvky T polynomy maximálního stupně 1 s koeficienty v $\mathbb{Z}_2$, např. $a = x$, $b = x + 1$. Násobení pak provádíme modulo polynom $x^2 + x + 1$.

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Věta *(Wedderburnova věta)*

Všechna konečná tělesa jsou komutativní.

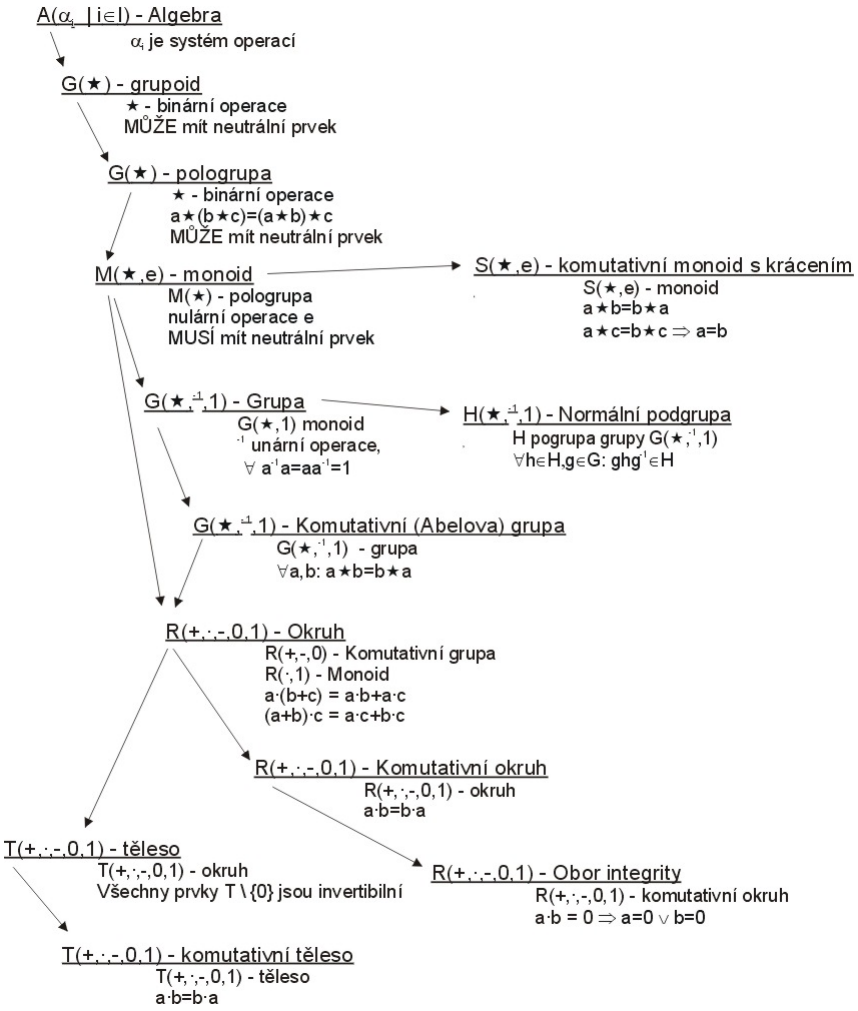
Report *(IOI 10.2.2011)*

Napište definici tělesa. Rozhodnete, zda existuje konene těleso řádu k pro hodnoty k z množiny $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Připomeňme, že řád tělesa je počet jeho prvků. Zvolte si nyní libovolné komutativni těleso T řádu 5,

a) Popište pomocí tabulky, jak jsou v tomto tělese definovány operace sčítání a násobení

b) Vysvětlete, co znamená, že těleso T je komutativni.

c) Udejte příklad nekomutativního tělesa řádu 9 nebo zdůvodněte, proč takové těleso neexistuje



prostě dědičnost jako z C++

6.2 Malá Fermatova věta

TODO !!!

6.3 Dělitelnost a ireducibilní rozklady polynomů

Zdroje následujících sekcí: texty J. Žemličky k přednášce Algebra II
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zemlicka/cvic6-7/algi.htm`
a skripta R. El Bashira k přednášce Algebra I a II pro matematiky
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~bashir/`

Největší společný dělitel

Definice *(Komutativní monoid s krácením)*
Monoid $(S, \cdot, 1)$ je *komutativní monoid s krácením*, pokud operace „$\cdot$“ je komutativní a navíc splňuje

$$\forall a, b, c \in S : a \cdot c = b \cdot c \;\Rightarrow\; a = b$$

Definice *(Dělení, asociovanost)*
O prvcích a, b nějakého komutativního monoidu s krácením S řekneme, že a *dělí* b ($a|b$, b je dělitelné a), pokud existuje takové $c \in S$, že $b = a \cdot c$. Řekneme, že a *je asociován s* b ($a||b$), jestliže $a|b$ a zároveň $b|a$.

Definice *(Obor integrity)*
Obor integrity je takový komutativní okruh $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$, ve kterém platí, že $a \cdot b = 0$ implikuje $a = 0$ nebo $b = 0$.

Příklady

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, -, 0, 1)$ je obor integrity.
2. Pro každý obor integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ komutativní monoid s krácením („multiplikativní monoid“).

Poznámka *(Vlastnosti „$||$“)*
V komutativním monoidu s krácením $(S, \cdot, 1)$ platí pro $a, b \in S$, že $a||b$, právě když existuje invertibilní prvek u z S takový, že $a = b \cdot u$. Relace „$||$“ tvoří kongruenci na S a faktoralgebra $(S/||, \cdot, [1]_{||})$ podle této kongruence je také komutativní monoid s krácením (relace „$|$“ na něm tvoří uspořádání).

Definice *(Největší společný dělitel)*
Mějme komutativní monoid s krácením $(S, \cdot, 1)$ a v něm prvky $a_1, \ldots, a_n$. Prvek c nazveme největším společným dělitelem prvků $a_1, \ldots, a_n$, pokud $c|a_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ a zároveň libovolný prvek $d \in S$, který dělí všechna a_i dělí i c. Píšeme $\mathbf{NSD}(a_1, \ldots, a_n) = c$.

Stejně se definuje největší společný dělitel pro obory integrity (bereme obor integrity $(R, +, \cdot, -, 1, 0)$ jako komutativní monoid s krácením $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$).

Definice *(Ireducibilní prvek, prvočinitelé)*
Prvek c komutativního monoidu s krácením $(S, \cdot, 1)$ nazveme *ireducibilním*, pokud c není invertibilní a zároveň $c = a \cdot b$ pro nějaké $a, b \in S$ vždy implikuje $c||a$ nebo $c||b$. Prvek c nazveme *prvočinitelem*, pokud není invertibilní a zároveň $c|a \cdot b$ pro $a, b \in S$ vždy implikuje $c|a$ nebo $c|b$.

Na oborech integrity se prvočinitelé a ireducibilní prvky definují stejně.

Věta *(Vlastnosti* **NSD***)*
V komutativním monoidu s krácením $(S, \cdot, 1)$ pro prvky a, b, c, d, e platí:

1. $d = \mathbf{NSD}(a, b)$ & $e = \mathbf{NSD}(a \cdot c, b \cdot c) \;\Rightarrow\; (d \cdot c)||e$.
2. $1 = \mathbf{NSD}(a, b)$ & $a|(b \cdot c)$ & $\mathbf{NSD}(a \cdot c, b \cdot c)$ existuje $\;\Rightarrow\; a|c$.

Věta *(Vlastnosti prvočinitelů)*
V komutativním monoidu s krácením je každý prvočinitel ireducibilní. Pokud navíc pro každé dva jeho prvky existuje největší společný dělitel, je každý ireducibilní prvek prvočinitelem.

Polynomy

Definice *(Okruh polynomů)*
Nad okruhem $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ a monoidem $(M, \cdot, e)$ definujme okruh $(R[M], +, \cdot, -, 0, 1)$, kde:

- $R[M] = \{p : M \to R | \{m | p(m) \neq 0\}$ je konečné $\}$
- prvek $p \in R[M]$ se dá zapsat jako $p = \sum_{m \in M}(p(m).m)$
- operace „$+$“ je definována jako: $p + q = \sum_{m \in M}((p(m) + q(m)).m)$
- „$\cdot$“ je definováno následovně: $p \cdot q = \sum_{m \in M}((\sum_{r \cdot s = m} p(r) \cdot q(s)).m)$
- další operace:

– $-p = \sum_{m \in M} (-p(m)) \cdot m$,
– $0 = \sum_{m \in M} 0.m$,
– $1 = (1 \cdot e) + \sum_{m \in M \setminus \{e\}} 0.m$.

Pro okruh $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ a monoid $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ nezáporných celých čísel se sčítáním nazveme $R[\mathbb{N}_0]$ (označme $R[x]$) *okruh polynomů jedné neznámé*. Jeho prvky potom nazveme *polynomy* a budeme je zapisovat ve tvaru $p = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} p(n).x^n$.

Poznámka
$R[x]$ nad okruhem R je obor integrity, právě když R je obor integrity.

Definice *(Stupeň polynomu)*
Pro polynom p v okruhu $R[x]$ nad $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ definujeme *stupeň polynomu* (deg p, st p) následovně:

$$\deg p = \begin{cases} \text{největší } n \in \mathbb{N}_0 : p(n) \neq 0, \text{ je-li } p \neq 0 \\ -1, \text{ je-li } p = 0 \end{cases}$$

Poznámka *(Vlastnosti* deg p*)*
V okruhu $R[x]$ nad $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ platí pro $p, r \in R[x]$:

- deg $-p = \deg p$
- deg $(p + q) = \max(\deg p, \deg q)$
- Je-li $p \neq 0, q \neq 0$, pak deg $(p \cdot q) \leq \deg p + \deg q$ (na oborech integrity platí rovnost)

Věta *(Dělení polynomů se zbytkem)*
Nechť jsou na oboru integrity $(R[x], +, \cdot, -, 0, 1)$ (nad oborem integrity R) dány prvky $a, b \in R[x]$. Nechť navíc $m = \deg b \geq 0$ a b_m je invertibilní v R. Potom existují jednoznačně určené polynomy $q, r \in R[x]$ takové, že $a = b \cdot q + r$ a deg $r <$ deg b.

Poznámka
Polynom q je *podíl* polynomů a a b, polynom r je *zbytek* při dělení.

Největší společný dělitel

Definice *(Eukleidovský obor integrity)*
Obor integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je *eukleidovský*, jestliže existuje zobrazení $\nu : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ (*eukleidovská funkce*), které pro každé $a, b \in R$ splňuje:

1. Jestliže $a|b$ a $b \neq 0$, pak $\nu(a) \leq \nu(b)$
2. Pokud $b \neq 0$, existují $q, r \in R$ taková, že $a = b \cdot q + r$ a $\nu(r) < \nu(b)$

Poznámka
Je-li $(T, +, \cdot, -, 0, 1)$ nějaké komutativní těleso, pak $T[x]$ je eukleidovským oborem integrity s eukleidovskou funkcí danou stupněm polynomů. Příkladem eukleidovského oboru integrity jsou např. i celá čísla (se sčítáním, násobením, unárním minus, jedničkou a nulou), kde eukleidovská funkce je funkce absolutní hodnoty prvku.

Algoritmus *(Eukleidův algoritmus)*
Na eukleidovském okruhu R s eukleidovskou funkcí ν pro dva prvky $a_0, a_1 \in R \setminus \{0\}$ najdeme největší společný dělitel následujícím postupem:

- Je-li $i \geq 1$ a $a_i \not| a_{i-1}$, vezmeme $a_{i+1} \in R$ takové, že $a_{i-1} = a_i \cdot q_i + a_{i+1}$ pro nějaké q_i a $\nu(a_{i+1}) < \nu(a_i)$. i zvýšíme o 1 a pokračujeme další iterací [8].
- Je-li $i \geq 1$ a $a_i | a_{i-1}$, potom $a_i = \mathbf{NSD}(a_0, a_1)$ a výpočet končí.

Dá se dokázat, že se výpočet zastaví a kroky jsou dobře definované (lze nalézt a_{i+1} a q_i), tedy libovolné dva polynomy mají největšího společného dělitele.

Poznámka
Největší společný dělitel je v polynomech $R[x]$ určen až na asociovanost ($||$) jednoznačně. Pro asociované polynomy p, q vždy platí, že deg $p =$ deg q a $p = r \cdot q$ pro nějaké $r \in R$.

Report *(Kratochvíl)*
Dal mi jeste prakticky priklad na delitelnost, jestli jeden zadany polynom je delitelem druheho (ze by zachrana? bo toto pocitaji decka nekde v sexte na gymplu :D). Tak priklad spocitan, k tomu stranka teorie. Myslim, ze jsem nektere hlavni veci mel, NSD, Eukleida, co je to koren a rozklad, co je ireducibilni polynom a take to, ze v C - narozdil od R - ma kazdy polynom koren a polynom stupne ≥ 2 je vzdy reducibilni. No a pak zacal. :) Chtel mimo jine "nejak popsat"vsechny ireducibilni polynomy v R,Q a C. No tady jsem to moc nedaval, dost mi pomahal... Spolecnymi silami jsme to nakonec dali dohromady (pro zvedavce spr. odpoved: polynom je ireducibilni v C $\Leftrightarrow$ je stupne 1, ireducibilni v R $\Leftrightarrow$ je stupne 1 nebo 2, a v Q pro libovolne n existuje ireducibilni - napr $x^n - 2$)

[8] znak $\not|$ znamená nedělí

6.4 Rozklady polynomů na kořenové činitele

Rozklady polynomů

Poznámka *(Ireducibilní polynomy)*
Polynom je ireducibilní, pokud není součinem dvou polynomů nižších stupňů a jeho stupeň je větší nebo roven jedné. Všechny polynomy stupně 1 jsou ireducibilní. Jedinými děliteli ireducibilního polynomu jsou asociované polynomy a nenulové skaláry (tj. polynomy stupně 0).

Věta *(Rozklad polynomu)*
Každý polynom stupně alespoň 1 má až na asociovanost jednoznačný rozklad na součin ireducibilních polynomů.
Důkaz existence: indukcí podle deg p – najdeme vždy dělitel p nejmenšího možného kladného stupně, vydělíme a pokračujeme, dokud nedostaneme polynom, který nemá dělitel kladného stupně menšího než je jeho vlastní.

Definice *(Dosazování do polynomů)*
Nechť $(S, +, \cdot, -, 0, 1)$ je okruh, R jeho podokruh ($R \subset S$) a nechť $\alpha \in S$. Potom zobrazení $j_\alpha : R[x] \to S$, dané předpisem $j_\alpha(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n.x^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \cdot \alpha^n$ je okruhový homomorfismus. Nazývá se *dosazovací homomorfismus*.

Poznámka *(Dosazovaní a* deg *p)*
Pro obor integrity $R[x]$ nad oborem integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je polynom $p[x]$ invertibilní, právě když deg $p = 0$ a $j_0(p) = p(0)$ je invertibilní na R.
Např.: když mám polynom $(x^n + ...)$, kde $n > 0$, ničím ho už nemůžu vynásobit, abych získal 1.

Definice *(Kořen polynomu)*
Pro okruh $(S, +, \cdot, -, 0, 1)$ a jeho podokruh R je *kořen polynomu* $p \in R[x]$ takové $\alpha \in S$, že $j_\alpha(p) = p(\alpha) = 0$ (při dosazení α se polynom p zobrazí na 0).

Definice *(Kořenový činitel, rozklad)*
Je-li $a = c \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots p_n^{k_n}$ rozklad polynomu $p \in R[x]$ na ireducibilní polynomy, potom *kořenovým činitelem* polynomu p nazveme takové p_i, které je ve tvaru $x - \alpha$ (tedy stupně 1 s koeficienty 1 a α). Řekneme, že polynom $p \in R[x]$ se *rozkládá na kořenové činitele* v $R[x]$, jestliže existuje takový jeho rozklad na ireducibilní polynomy, že všechny p_i jsou kořenové činitele. Potom nazveme k_i *násobnostmi kořenů*.

Věta *(kořen a kořenový činitel)*
Na oboru integrity $R[x]$ nad oborem integrity R je $\alpha \in R$ kořenem polynomu $p \in R[x], p \neq 0$, právě když $(x - \alpha)|p$.

Komplexní, reálné a racionální polynomy

Definice *(Algebraicky uzavřené těleso)*
Nechť T je těleso a S jeho nadtěleso. Prvek $a \in S$ je *algebraický* nad T, pokud existuje nějaký nenulový polynom z $T[x]$, jehož je a kořenem. Pokud žádný takový polynom neexistuje, nazývá se prvek *transcendentní*. Těleso T je *algebraicky uzavřené*, pokud všechny nad ním algebraické prvky jsou i jeho prvky (jsou v něm obsaženy).

Poznámka
Každý polynom v okruhu polynomů o jedné neznámé nad algebraicky uzavřeným tělesem se rozkládá na kořenové činitele.

Věta *(Základní věta algebry)*
Těleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel je algebraicky uzavřené [9].

Důsledek
Proto má každý polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupně alespoň 1 v $\mathbb{C}[x]$ rozklad tvaru $p(x) = a(x-\beta_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (x-\beta_s)^{k_s}$, kde $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$ a β_i jsou navzájem různá.

Věta *(Komplexně sdružené kořeny v $\mathbb{C}$)*
Má-li polynom p nad $\mathbb{C}[x]$ s reálnými koeficienty ($a_i \in \mathbb{R}$) kořen $\alpha \in \mathbb{C}$, pak je jeho kořenem i $\overline{\alpha}$, tedy číslo komplexně sdružené s α.

Důsledek
Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ stupně alespoň 1 má v $\mathbb{R}[x]$ rozklad tvaru

$$p(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots (x - \alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 - a_1 x + b_1)^{l_1} \cdot \ldots (x^2 - a_s x + b_s)^{l_s}$$

a polynomy $x^2 + a_j x + b_j$, kde $j \in \{1, \ldots s\}$ mají za kořeny dvojice komplexně sdružených čísel (která nejsou čistě reálná). Navíc deg $p = k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s)$.
V $\mathbb{R}$ existují ireducibilní polynomy stupně max 2!

[9] $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ ne

Důsledek
Každý polynom v $\mathbb{R}[x]$ lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Věta *(Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Q}$)*
V $\mathbb{Q}[x]$ existují ireducibilní polynomy libovolného stupně většího nebo rovného jedné (tj. ne vždy existuje rozklad na kořenové činitele, ani rozklad na polynomy stupně max. 2 jako v reálných číslech).

6.5 Násobnost kořenů a jejich souvislost s derivacemi mnohočlenu

Věta *(o počtu kořenů)*
Každý nenulový polynom $p \in R[x]$, kde $R[x]$ je okruh polynomů nad oborem integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$, má nejvýše deg p kořenů (plyne z vlastností deg p).

Definice *(vícenásobný kořen)*
Pro komutativní okruh $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ a polynom $p \in R[x]$ je $\alpha \in R$ *vícenásobný kořen*, pokud polynom $(x - \alpha)(x - \alpha)$ dělí p.

Definice *(Derivace polynomu)*
Pro polynom $p = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ z okruhu polynomů $R[x]$ nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ definujeme *derivaci* (p', $p' \in R[x]$) předpisem

$$p' = \sum_{i \geq 0} (i + 1) a_{i+1} x^i$$

Poznámka *(Vlastnosti derivace)*
Pro okruh $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$, prvek $\alpha \in R$ a polynomy $p, q \in R[x]$ platí:

- $(p + q)' = p' + q'$
- $(\alpha p)' = \alpha p'$
- $(p \cdot q)' = p' \cdot q + p \cdot q'$

Věta *(derivace a vícenásobný kořen)*
Nad oborem integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ buď $p \in R[x]$ polynom. Je-li $\alpha \in R$ jeho kořen, pak α je vícenásobný kořen, právě když je α kořenem p'.

Definice *(Charakteristika oboru integrity)*
Pro obor integrity $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ definujeme *charakteristiku oboru integrity* $charR$ jako

- 0 (nebo někdy ∞), pokud cyklická podgrupa grupy $(R, +, 0)$ generovaná prvkem 1 je nekonečná.
- p, pokud cyklická pogrupa grupy $(R, +, 0)$ generovaná jedničkou má konečný řád p.

Příklad
$char\mathbb{C} = char\mathbb{R} = char\mathbb{Q} = char\mathbb{Z} = 0$
$char\mathbb{Z}_p = p$

Věta *(derivace snižuje stupeň polynomu)*
Nad oborem integrity charakteristiky 0 $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ buď p polynom ($p \in R[x]$) stupně $n > 0$. Potom p' je polynom stupně $n - 1$.

Věta *(derivace a násobný kořen)*
Nad tělesem charakteristiky 0 $(T, +, \cdot, -, 0, 1)$ buď p polynom ($p \in T[x]$) stupně alespoň 1. Potom prvek $\alpha \in U$, kde U je nějaké nadtěleso T, je k-násobným kořenem p, právě když platí obě následující podmínky:

- $p(\alpha) = j_\alpha(p) = 0$, $p'(\alpha) = 0$, $\ldots$ $p^{(k-1)}(\alpha) = 0$
- $p^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Věta *(derivace a největší společný dělitel)*
Mějme těleso $(T, +, \cdot, -, 0, 1)$ charakteristiky 0 a nad ním polynom $p \in T[x]$ stupně alespoň 1. Potom platí:

- Pokud $\mathbf{NSD}(p, p') = 1$, pak p nemá žádný vícenásobný kořen.
- Každý k-násobný kořen p je $(k - n)$-násobným kořenem n-té derivace p.
- Polynom $q \in R[T]$ takový, že $q \cdot \mathbf{NSD}(p, p') = p$ má stejné kořeny jako p, ale jednoduché.

Věta

Nechť $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je obor integrity a jeho charakteristika nedělí číslo $n \in \mathbb{N}$. Potom polynomy $x^n - 1$ a $x^{n+1} - x$ v $R[x]$ nemají vícenásobný kořen.

Report *(Žemlieka)*

souvislost derivace s viacnasobnym korenom polynomu (tam odo mna chcel zemlicka aj priklad pouzitia a naviedol ma na dake specialne sposoby vypoctu korenov polynomov)

Report *(Zahradnik)*

mi dal suvislost nasobnosti korena a derivacie polynomu. K tej druhej otazke som napisal akurat 2 vety a to im na zaciatok stacilo...

Report *(Majerech)*

Druhá otázka algebra... no todle se mi moc nelíbilo ... ale otázky byly ještě záludnejší.... Mejme reálný polynom, o kterém víte, že žádné dva koreny nemají stejnou násobnost
a) Kolik má takový polynom reálných korenu? má všechny koreny reálné nebo? libovolný komplexní koren a jeho sdružený parták mají shodnou násobnost toto je trivialita... ale prijít na to... mi trvalo... pul hodiny... je to divoce formulované...
b)Najdete všechny koreny tohoto polynomu /presne/
První pozorování: když je kooen násobný tak je kooenem derivace...
Druhé pozorování: derivace puvodního polynomu je tvaru
$Q'(x) = P(x) * balast0$
puvodní polynom je tvaru
$Q(x) = P(x) * balast1$
Tretí pozorování: P(x) je NSD Q(x) a Q'(x), kde P(x) je produkt tech násobných korenu
Řešení: Nalezneme NSD eukleidovým algoritmem a pak rekurzivni pustíme na P(x)

s velkou majerechovou pomocí jsem toto vymyslel... dosti mi zaskoeilo jak matika probíhala... cekal jsem teorii vety definice... žádná teorie se nekonala .) takže poucení... dukazy je dobré znát a praktické príklady aspon lehce prohlédnout... jeden kolega tam invertoval matici

7 Vektorové priestory

Požadavky

- Základné vlastnosti vektorových priestorov, podpriestorov generovania, lineárna závislost a nezávislosť.
- Veta o výmene
- Konečne generované vektorové priestory, báza.
- Lineárne zobrazenie.

Ako zdroj pre vypracovanie otázky boli použité vlastné poznámky z prednášok Lineárna algebra Jiřího Fialu a suborkové texty.

7.1 Definície

Definice
Nech $(T, +, \cdot)$ je teleso a V je množina (jej prvky nazývame *vektory*) s binárnou operáciou + a $\cdot : T \times V \to V$ je zobrazenie, potom $(V, +, \cdot)$ sa nazýva **vektorový prostor** nad telesom T ak je splnených nasledujúcich 8 axiomov.

(SA) $\forall u, v, w \in V: \quad (u + v) + w = u + (v + w)$ *(asociativita súčtu)*
(SK) $\forall u, v \in V: \quad u + v = v + u$ *(komutativita súčtu)*
(S0) $\exists \mathbf{0} \in V: \quad u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ *(neutrálný prvok súčtu)*
(SI) $\forall u \in V \exists - u \in V: \quad u + (-u) = \mathbf{0}$ *(inverzný prvok súčtu)*
(NA) $\forall a, b \in T \forall u \in V: \quad (a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$ *(asociativita súčinu)*
(N1) $\forall u \in V: \quad 1 \cdot u = u$ kde $1 \in T$ je jednotkový prvok telesa T
(D1) $\forall a, b \in T \forall u \in V: \quad (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ *(distributivita)*
(D2) $\forall a \in T \forall u, v \in V: \quad a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *(distributivita)*

Příklady

- $\{\mathbf{0}\}$ ... triviálny vektorový priestor
- T^n aritmetický vektorový priestor dimenzie n nad telesom T. Ide o usporiadané n-tice, kde + je definované predpisom

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

  a násobenie predpisom

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

- Z každého telesa T je možné vybudovať vektorový priestor rovnakej veľkosti $V = T^1$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, ..., $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Q}^2$, ...
- Matice typu $m \times n$ nad T (pre konkrétne m, n)
- Polynomy nad T (napríklad obmedzeného stupňa)

7.2 Vlastnosti vektorových priestorov

Pozorování

1. $\mathbf{0}$, $-u$ sú určené jednoznačne.
2. $\forall a \in T \ \forall u \in V: \quad a \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot u = \mathbf{0}$
3. $\forall a \in T \ \forall u \in V: \quad a \cdot u = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ a = 0 \ \vee \ u = \mathbf{0}$.

Definice
Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad telesom T a $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ taká, že

- $\forall u, v \in U: \quad u + v \in U$ *(uzavretosť na súčet)*
- $\forall u \in U \forall a \in T: \quad a \cdot u \in U$ *(uzavretosť na súčin)*

potom $(U, +, \cdot)$ nazývame **podpriestorom** V.

Pozorování
Podpriestor je tiež vektorový priestor.

Věta
Prienik ľubovolného systému podpriestorov je podpriestor.

Definice *(Lineárny obal, množina generátorov)*
Nech V je vektorový priestor nad telesom T a X je podmnožina V, potom

$$\mathcal{L}(X) = \bigcap \{U | X \subseteq U, U \text{ je podpriestor } V\}$$

je podpriestor V generovaný X nazývaný **lineárny obal** X. Množina X sa potom nazýva *systém generátorov* podpriestoru $\mathcal{L}(X)$.

Keď $\mathcal{L}(X) = V$, potom X je systém generátorov vektorového priestoru V.

Definice
Spojení dvou podprostorů je podprostor

$$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$$

Věta
Lineárny obal $\mathcal{L}(X)$ obsahuje všetky lineárne kombinácie vektorov z X.

$$\mathcal{L}(X) = \{w \big| w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, n \geq 0, n \text{ konečné}, \forall i : a_i \in T, u_i \in X\}$$

Špeciálne v prípade, že $X = \emptyset$ a teda $n = 0$, platí $\mathcal{L}(X) = \{0\}$.

Definice
Nech V je vektorový priestor nad telesom T, potom n-tica vektorov $v_1, \ldots, v_n \in V$ je **lineárne nezávislá**, ak rovnica

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}$$

má iba triviálne riešenie $a_i = 0$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Nekonečná množina vektorov je lineárne nezávislá, ak každá jej konečná podmnožina je lineárne nezávislá.

Pozorování
X je lineárne nezávislá práve keď $\forall u \in X : u \notin \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$

Věta

1. Obsahuje-li systém $x_1, \ldots, x_n$ nulový vektor, je závislý.
2. Obsahuje-li systém $x_1, \ldots, x_n$ dva stejné vektory, je závislý.
3. Pro libovolná reálná čísla $\beta_2, \ldots, \beta_n$ je systém $x_1, \ldots, x_n$ lineárně závislý, právě když je systém $x_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i x_i, x_2, \ldots, x_n$ lineárně závislý. *(Inak povedané, ak pričítame k jednému vektoru ľubovolnú lineárnu kombináciu ostatných vektorov, nezmeníme tým ich lineárnu závislosť.)*

Věta

1. Podsystém lineárně nezávislého systému je lineárně nezávislý.
2. Nadsystém systému generátorů je systém generátorů.

Definice
Nech V je vektorový priestor. Množina $X \subseteq V$ sa nazýva **báza** vektorového priestoru V ak

- je lineárne nezávislá
- $\mathcal{L}(X) = V$

(Inak povedané, báza je lineárne nezávislý systém generátorov.)

Věta
Každý prvok vektorového priestoru možem vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov jeho báze a toto vyjadrenie je jednoznačné.

Definice
Vyjadrenie vektoru $u \in V$ vzhladom k báze X sa nazýva **vektor súradníc**. Značí sa $[u]_X$.
$(x_1, \ldots, x_n) = X$ je báza V, $u \in V : u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$
$[u]_X = (a_1, \ldots, a_n)$

7.3 Veta o výmene

Lemma *(o výmene)*
Nech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je systém generátorov priestoru V a pre $u \in V$ platí $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, potom platí

$$\forall i : a_i \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n) = V$$

(Inak povedané, vektor bázy ktorý sa "podielal" na vytvorení vektoru u, možme s u zameniť.)

Důkaz
Pre ľubovolné $w \in V$, môžme písať $w = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots b_nv_n$. Do tohoto vyjadrenia miesto v_i dosadíme vyjadrenie v_i z rovnice $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, čím dostaneme vyjadrenie ľubovolného w pomocou $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$, z čoho výplýva, že tieto vektory sú tiež systém generátorov.

Věta *(Steinitzova o výmene)*
Nech V je vektorový priestor, $X \subseteq V$ je lineárne nezávislá a $Y \subseteq V$je konečný systém generátorov. Potom existuje $Z \subseteq V$ také, že

- $|Z| = |Y|$
- $\mathcal{L}(Z) = V$
- $Z \setminus X \subseteq Y$
- $X \subseteq Z$

(V krátkosti povedané - každý nezávislý systém vektorov X je možné, pridaním vektorov zo systému generátorov Y, rozšíriť na systém generátorov V.)

Důkaz
Ak $X \subseteq Y$ sme hotoví a $Z = Y$. Inak vezmeme Y a postupne do neho začneme pridávať prvky z $X \setminus Y$. Pri každom pridaní, podľa lemmy o výmene, jeden prvok z tejto množiny odstránime. Po poslednej iterácii získame hľadané Z.
(Pri každej iterácií vyhadzujeme jeden prvok, ktorý nepatrí do X, pretože X je lineárne nezávislá.)

Důsledek
Ak má V konečnú bázu, majú všetky bázy rovnakú veľkosť.

Důsledek
Ak má V konečnú bázu, potom môžme každú lineárne nezávislú množinu X doplniť na bázu.

Definice
Veľkosť bázy konečne generovaného priestoru V sa nazýva **dimenzia** priestoru V. Značíme $\dim(V)$.

Věta
Buďte W_1, W_2 konečně generované podprostory vektorového prostoru V. Potom

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 \oplus W_2)$$

7.4 Lineárne zobrazenie

Definice *(lineární zobrazení)*
Mějme vektorové prostory V, W. Řekneme, že zobrazení $f : V \to W$ je **lineární**, jestliže pro libovolná $x, y \in V$ a $a, b \in T$ platí

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

Definice *(lineární operátor)*
Lineární zobrazení $f : V \to V$ se nazývá *lineární operátor*.

Příklady

1. Identické zobrazení V na V (to je příklad lineárního operátoru).
2. Buď α pevné reálné číslo. Zobrazení $V \to V$ dané předpisem $x \to \alpha x$.
3. Derivace je lineární zobrazení z množiny reálných spojitých funkcí $C_1(J)$ do množiny reálných funkcí $F(J)$.
4. V $\mathbb{R}^2$ jsou lineární zobrazení např. zrcadlení $(x, y) \mapsto (-x, y)$ nebo zkosení $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

Definice *(Hodnost lineárního zobrazení)*
Pro lineární zobrazení $f : U \to V$ mezi dvěma vekt. prostory definujeme *jádro zobrazení* (Ker f) jako množinu Ker $f = f^{-1}[\{0\}]$. *Obraz* zobrazení f (Im f) je množina Im $f = f[U]$. Jako *hodnost zobrazení* f označíme číslo dim(Ker f).

Věta *(Základní vlastnosti lineárního zobrazení)*
Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom platí:

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
2. Im f je podprostor prostoru W
3. Ker (f) je podprostor prostoru V
4. f je prosté, právě když Ker $(f) = \{0\}$
5. je-li $\dim V = \dim W$ a je-li zobrazení f prosté, potom je f bijekce a inversní zobrazení $f^{-1} : W \to V$ je opět lineární.

Věta *(O dimenzi obrazu a jádra)*
Pro $f : U \to V$ mezi dvěma vektorovými prostory konečné dimenze platí:

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(U)$$

Věta *(Báze určuje lineární zobrazení)*
Mějme dány vektorové prostory V, W a bázi $B = b_1, \ldots, b_n$ prostoru V. Potom pro každé lineární zobrazení $f : B \to W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $g : V \to W$ takové, že $f(b_i) = g(b_i)\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Jiná formulace: Pro libovolné vektory $y_1, \ldots, y_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $g : V \to W$ takové, že $g(b_i) = y_i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definice *(Isomorfismus)*
Lineární zobrazení se nazývá *isomorfismus*, existuje-li k němu inversní lineární zobrazení. Pokud existuje isomorfismus $V \to W$, říkáme, že prostory V a W jsou *isomorfní*.

Věta
Je-li lineární zobrazení bijektivní, je to isomorfismus.

Věta *(Isomorfismus vekt. prostorů nad $\mathbb{T}$)*
Každý n-dimensionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ je isomorfní vekt. prostoru $\mathbb{T}^n$ (tj. jehož prvky jsou uspořádané n-tice prvků z $\mathbb{T}$).

Věta *(Další vlastnosti lin. zobrazení)*

1. Je-li lineární zobrazení prosté, zachovává lineární nezávislost.
2. Je-li na (surjekce), zachovává vlastnost „být systémem generátorů“.

Věta *(Skládání lineárních zobrazeni)*
Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení. Potom složené zobrazení $g \circ f : U \to W$ definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pro } x \in U$$

je rovněž lineárním zobrazením.

Věta *(Sčítání a násobky lin. zobrazení)*
Nechť f, g jsou lineární zobrazení z vekt. prostoru V do W, α skalár. Potom zobrazení $f + g : V \to W$ a $\alpha f : V \to W$ definovaná předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in V$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ x \in V$$

jsou lineární zobrazení V do W.

Věta *(Množina lineárních zobrazení je vekt. prostor)*
Množina lineárních zobrazení prostoru V do prostoru W s operacemi sčítání a násobení skalárem, definovanými v předchozí větě, tvoří vektorový prostor, který značíme $L(V, W)$.

Věta
Nechť $\dim V = n$ a $\dim W = m$. Potom prostor $L(V, W)$ je isomorfní prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$. V důsledku toho je

$$\dim L(V, W) = mn$$

8 Skalární součin

Požadavky

- Vlastnosti v reálném i komplexním případě
- Norma
- Cauchy-Schwarzova nerovnost
- Kolmost
- Ortogonální doplněk a jeho vlastnosti

8.1 Vlastnosti v reálném i komplexním případě

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Potom zobrazení (funkce) z kartézského součinu $V \times V \to \mathbb{C}$, které dvojici vektorů x a y přiradí číslo $\langle x, y\rangle$ se nazývá *skalární součin*, pokud splňuje následující axiomy (pro všechny $x, x', y \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

1. $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(positivní definitnost)*
2. $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x', y\rangle$ *(bilinearita)*
   (a) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$
   (b) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *(symetrie - komplexně sdružené)*

Poznámka

Pro V' nad $\mathbb{R}$ a vektory $\forall x, y \in V'$: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

Skalární součin značíme: $\langle x, y\rangle$, $\langle x|y\rangle$, $x.y$ ...

Pozorování

- $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, tedy je nutně reálné ($\in \mathbb{R}$) i pro skalární součiny nad $\mathbb{C}$
- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha}.\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}.\langle x, y\rangle$
- Skalární součin může nabývat záporných hodnot

Definice

Ekvivalentní definice: *Skalární součin* je pozitivně definitní (1) bilineární forma (2). V $\mathbb{R}$ navíc symetrická (3). V $\mathbb{C}$ navíc forma, jejíž matice je hermitovská (3).

Příklady

- „Standardní“ skalární součin pro $\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$
- Jiný součin v $\mathbb{R}^n$ definovaný pomocí regulární matice A řádu n
$$\langle x, y\rangle = x^T A^T A y \qquad (\textit{pozorování: } \langle x, x\rangle = x^T A^T A x = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i^2)$$
- Skalární součin ve vektorovém prostoru $C[a, b]$ (integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$):
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

8.2 Norma

Definice *(Norma)*

Norma na vektorovém prostoru V (nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$) je zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které přiradí vektoru $x \in V$ číslo $\|x\|$ a splňuje axiomy:

1. $\forall x \in V : \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) : \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$
3. $\forall x, y \in V : \|x\| \geq 0, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Norma $\|x\|$ má význam „délky“ vektoru x.

Definice *(Normovaný vekt. prostor)*
Vektorový prostor s nějakou normou nazýváme *normovaný.*

Příklady

- Norma určená skalárním součinem
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Důkaz
(1), (2) plyne z axiomů skalárního součinu, (3):

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \Rightarrow & \quad \langle x, y\rangle \leq & \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle} \\
\Leftrightarrow & \quad \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \leq & (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2 \\
\Leftrightarrow & \quad \langle x + y, x + y\rangle \leq & (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2 \\
\Leftrightarrow & \quad \|x + y\| \leq & \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

Kde první nerovnost je důsledek Cauchy-Swarzovy nerovnosti...
Ze standardního skalárního součinu na $\mathbb{R}^n$ dostaneme euklidovskou normu (tj. „délku“ vektoru podle Pythagorovy věty) a euklidovskou vzdálenost (vzdálenost bodů u a v je $\|u - v\|$). Každý vektorový prostor se skalárním součinem $\langle ., .\rangle$ je normovaným vektorovým prostorem ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$), tedy i metrickým prostorem ($d(x, y) = \|x - y\|$) a tedy i topologickým prostorem.

- L_1 norma na $\mathbb{R}^n$:
$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
- L_2 norma na $\mathbb{C}^n$ - Euklidovská norma:
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}}$$
- L_p norma na $\mathbb{R}^n$:
$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$
- L_∞ norma (stejně jako L_1 norma neodpovídá žádnému skalárnímu součinu):
$$\|x\| = \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i|)$$
- Norma v prostoru integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ - $C[a, b]$
$$\|f(x)\| = \int_a^b f^2(x)dx$$

8.3 Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta *(Cauchyho-Schwarzova nerovnost)*
Nechť V je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ a $\|x\|$ je norma odvozená ze skalárního součinu. Potom platí:
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (\forall x, y \in V)$$

Důkaz
Pro $x = 0$ nebo $y = 0$ máme $0 \leq 0$.
Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\|x + \alpha y\|^2 \geq 0$ (platí i bez $()^2$)

$$\begin{aligned}
\|x + \alpha y\|^2 = \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x, x + \alpha y\rangle + \alpha \langle y, x + \alpha y\rangle = \\
= \langle x, x\rangle + \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + \alpha \langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha} \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Zvolíme $\alpha = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ *(tím se eliminují* $\overline{\alpha} \langle x, y\rangle$ *a* $\alpha\overline{\alpha} \langle y, y\rangle$*)*
Po dosazení:

$$\begin{aligned}
0 \leq & \quad \langle x, x\rangle + \alpha \langle y, x\rangle \\
0 \leq & \quad \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle y, x\rangle \\
\langle x, y\rangle . \langle y, x\rangle \leq & \quad \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle \\
|\langle x, y\rangle|^2 \leq & \quad \|x\|^2 . \|y\|^2
\end{aligned}$$

...a po odmocnění

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

Druhý možný důkaz
Nadefinujeme proměnnou $t \in \mathbb{R}$ a zavedeme funkci

$$p(t) := \langle u + t \cdot v, u + t \cdot v \rangle = ||u + tv||^2$$

Víme: $p(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ (z axiomu 1 skal. součinu). Z linearity plyne, že $\langle u + tv, u + tv \rangle = \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle = \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle = ||u||^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 ||v||^2$. Tj. dostáváme $p(t)$ jako kvadratickou funkci proměnné t:

$$p(t) = t^2 ||v||^2 + 2t \langle u, v \rangle + ||u||^2$$

Protože $p(t)$ má nezáporné hodnoty na celém $\mathbb{R}$, musí mít tato rovnice max. jedno řešení, tj. diskriminant při počítání kořenů nesmí být kladný:

$$D = b^2 - 4ac = 4 \langle u, v \rangle^2 - 4||u||^2 ||v||^2 \leq 0$$

Po vydělení čtyřmi a odmocnění dostáváme:

$$| \langle u, v \rangle | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

Důsledek
Platnost trojúhelníkové nerovnosti pro normy odvozené od skalárního součinu – tj. normy odvozené od skalárního součinu splňují všechny axiomy normy.

Důsledek
Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $y = (1, 1, \ldots, 1)^T$ jsou dva vektory, pak pro standardní skalární součin platí

$$| \langle x, y \rangle | = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|y\| = \sqrt{n}$$

po dosazení do Cauchy-Schwarzovy nerovnosti okamžitě dostaneme nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Důsledek
Ve vektorových prostorech nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ lze definovat *úhel*, svíraný dvěma vektory:

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \ \|v\|}$$

a Cauchyho-Schwarzova nerovnost zaručuje, že $|\cos \varphi| \leq 1$.

Důsledek
Z takto definovaného úhlu mezi dvěma vektory plyne i *kosinová věta*:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \ \|v\| \cos \varphi$$

8.4 Kolmost

Definice *(kolmé vektory)*
Vektory x a y z prostoru se skalárním součinem jsou vzájemně *kolmé* (*ortogonální*), pokud $\langle x, y \rangle = 0$, značíme $x \perp y$.

Definice *(ortogonální a ortonormální systém)*
Soustava (systém) vektorů $v_1, \ldots, v_n$ se nazývá *ortogonální*, jestliže $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ($v_i \perp v_j$) pro $\forall i \neq j$ (tj. všechny její vektory jsou navzájem kolmé).
Platí-li ještě navíc $\|v_i\| = 1$ pro $\forall i = 1, \ldots, n$, jedná se o soustavu *ortonormální* (vektory jsou kolmé a navíc mají jednotkovou normu).

Pozorování
Každý systém nenulových vzájemně kolmých vektorů (tj. i ortonormální nebo ortogonální) je lineárně nezávislý.

Důsledek
Jestliže ortogonální systém generuje celý vektorový prostor, je jeho bází.

Algoritmus *(Gram-Schmidtova ortogonalizace)*
Tento algoritmus zajišťuje převedení libovolné báze $(v_1, \ldots, v_n)$ vektorového prostoru V na ekvivalentní ortogonální bázi $(w_1, \ldots, w_n)$. Ortonormalizace báze už po jeho proběhnutí znamená jen vynásobení každého w_i číslem $\frac{1}{\|w_i\|}$. Jeho průběh:

1. Zvolme $w_1 := v_1$.
2. Pro i postupně od 1 do n opakujme:
   Najdi $w_i = v_i - a_{i,1}w_1 - a_{i,2}w_2 - \ldots - a_{i,i-1}w_{i-1}$ tak, aby pro $\forall j \in \{1, \ldots, i\}$ platilo:
   $$w_i \perp w_j$$
   Dá se ukázat že koeficienty $a_{i,j}$ jsou tvaru
   $$a_{i,j} = \frac{\langle v_i, w_j \rangle}{\|w_j\|^2}$$
3. Po n iteracích dostaneme $w_1, \ldots, w_n$ jako ortogonální bázi prostoru V.

Alternativní postup - Gram-Schmidtova normalizace:

1. Dány: $x_1, \ldots, x_m \in V$ lineárně nezávislé.
2. Pro $k = 1, \ldots, m$ proveď:
   $$y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$$
   $$z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k$$
3. Ukonči: $z_1, \ldots, z_m$ je ortonormální systém ve V a
   $\mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$

Důsledek
Buď $(v_1, \ldots, v_n)$ báze vekt. prostoru se skal. součinem. Potom existuje ortonormální báze $(w_1, \ldots, w_n)$, kdy pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ je $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k)$. Díky tomu se každý ortogonální systém vektorů v konečnědimensionálním vekt. prostoru se skalárním součinem dá rozšířit na ortogonální bázi (to můžeme díky Gram-Schmidtově ortogonalizaci a Steinitzově větě o výměně).

Věta *(Fourierovy koeficienty)*
Máme-li danou nějakou ortonormální bázi $B = b_1, \ldots, b_n$ vektorového prostoru V, pak pro každé $x \in V$ platí:
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle b_i$$
a souřadnice $\langle x, b_i \rangle$ nazveme *Fourierovy koeficienty* vektoru x.

Poznámka
Fourierovy řady jsou souřadnice funkcí ve vektorovém prostoru spojitých funkcí na $[-\pi, \pi]$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

8.5 Ortogonální doplněk a jeho vlastnosti

Definice
Nechť V je množina vektorů ve vektorovém prostoru W se skalárním součinem. *Ortogonálním doplňkem* V (značíme $V^\perp$) rozumíme množinu
$$V^\perp = \{v \in W; \forall x \in V : \langle v, x \rangle = 0\}$$

Lemma *(Vlastnosti)*
Nechť V je podprostor prostoru W konečné dimenze. Potom platí:

1. $V^\perp$ je podprostor W
2. $\dim(V^\perp) = \dim(W) - \dim(V)$
3. $(V^\perp)^\perp = V$ *(z rozšiřitelnosti ortogonální báze)*
4. $V \cap V^\perp = \{0\}, \quad V \oplus V^\perp = W$
   (operace $\oplus$ je spojení dvou podprostorů...$\mathcal{L}(V \cup V^\perp)$)
5. U, V podprostory W. Je-li $U \subseteq V$, pak $U^\perp \supseteq V^\perp$
   $(x \in V^\perp \Leftrightarrow x \perp y \in V \Rightarrow x \perp u \in U \Leftrightarrow x \in U^\perp)$
6. $(U \cap V)^\perp = U^\perp \oplus V^\perp$
7. $(U \oplus V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

Definice *(Ortogonální projekce)*

Ortogonální projekce vekt. prostoru V na podprostor $U \subset V$ je zobrazení, které každému vektoru $v \in V$ přiřadí vektor $u \in U$ tak, že

$$\|v - u\| = \min\{\|v - w\|, w \in U\}$$

tedy vektor $u \in U$, který má ze všech vektorů z U nejmenší vzdálenost od v. Ten se pak nazývá *ortogonální projekcí* vektoru v.

9 Řešení soustav lineárních rovnic

Požadavky

- Lineární množiny ve vektorovém prostoru, jejich geometrická interpretace
- Řešení soustavy rovnic je lineární množina
- Frobeniova věta
- Řešení soustavy úpravou matice
- Souvislost soustavy řešení s ortogonálním doplňkem

Pojem „lineární množina“ moc používaný není, proto se držím výrazu „afinní podprostor“. Vypracováno s použitím poznámek a syllabu z lineární algebry Prof. Matouška a textu Doc. M. Čadka z MU Brno k lineární algebře (`ftp://ftp.math.muni.cz/pub/math/people/Cadek/lectures/linearni_algebra/LA2.pdf`)

9.1 Lineární množiny ve vektorovém prostoru

Definice *(lineární množina / afinní podprostor)*
Podmnožina vektorového prostoru V, která je buď prázdná, nebo tvaru

$$\mathbf{x} + U = \{\mathbf{x} + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}$$

kde $\mathbf{x} \in V$ a $U \subset V$ je nějaký podprostor V, se nazývá *afinní podprostor*, *lineární množina* nebo *lineál*.

Poznámka *(Nejednoznačnost určení afinního podprostoru)*
Jeden afinní podprostor je možné určit více způsoby, např. pro vektorový prostor V s vektorem $\mathbf{v}$ a jeho podprostorem U dávají $\mathbf{v} + U$ a $2\mathbf{v} + U$ stejný afinní podprostor.

Věta *(Afinní podprostor určuje vekt. prostor)*
Mějme nějaký afinní podprostor F ve vektorovém prostoru V. Je-li dáno:

$$F = U + \mathbf{x}$$
$$F = U' + \mathbf{x}'$$

pak jistě $U = U'$.
Důkaz
Označíme $\tilde{U} = \{\mathbf{y} - \mathbf{z} | y, z \in F\}$ a dokážeme, že $\tilde{U} = U$ i $\tilde{U} = U'$.

Věta *(Lin. zobrazení určuje afinní podprostor)*
Budiž dáno lineární zobrazení $f : U \to V$ mezi nějakými dvěma vekt. prostory. Pro libovolné $b \in f[U]$ potom platí:

$$f^{-1}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{u} \in U | f(\mathbf{u}) = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x}_0 + \text{Ker } f\}$$

kde x_0 je libovolný vektor z množiny $f^{-1}(\mathbf{b})$ a Ker f je jádro zobrazení f (tj. Ker $f = f^{-1}(\mathbf{0})$).
Důkaz
Plyne z faktu, že Ker f je vektorový podprostor U a z linearity f.

9.2 Geometrická interpretace

Definice *(dimenze afinního podprostoru, nadroviny)*
Dimenzi afinního podprostoru $\mathbf{x} + U$, kde $U \subseteq V$ je vektorový podprostor nějakého vekt. prostoru V, definujeme jako $\dim(U)$.
Jednodimensionání afinní podprostor se nazývá *přímka*, dvoudimensionální *rovina*, $n-1$-dimensionální afinní podprostor n-dimensionálního prostoru se jmenuje *nadrovina*.

Poznámka
Totéž platí pro afinní podprostory v $n-$rozměrném eukleidovském geometrickém prostoru – takže např. roviny nebo přímky v trojrozměrném eukleidovském prostoru jsou afinní podprostory.

Definice *(Afinní kombinace bodů)*
a, **b** buďte dva body (vektory) ve vektorovém prostoru V nad tělesem T. Potom pro $\alpha, \beta \in T$ lineární kombinace

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b},\ \alpha + \beta = 1_T$$

určující nadrovinu se nazývá *afinní kombinace bodů*. Afinní kombinace několika bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou pro $\alpha_i \in T$ body

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1_T$$

Věta *(Geometrické vyjádření afinního podprostoru)*
V afinním podprostoru F nějakého vekt. prostoru V leží s každými k body $\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_k \in F$ i jejich afinní kombinace. Naopak každá množina F ve vekt. prostoru V, v níž pro každé dva body leží i jejich afinní kombinace, je afinní podprostor.
Důkaz
$F = \{U + \mathbf{x}\}$ pro nějaký podprostor $U \subset V$. Potom

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \mathbf{f}_i = \mathbf{x} + \mathbf{u}_i$$

pro nějaké $\mathbf{u}_i \in U$. Platí:

$$\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x} + \mathbf{u}_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i = 1 \cdot \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i \in F$$

Opačně zvolme $\mathbf{u} \in F$, potom $F = \mathbf{u} + \{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F\}$ a stačí dokazát, že $U = \{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F\}$ je podprostor V (uzavřenost na skalární násobky a součty).

9.3 Řešení soustavy rovnic je lineární množina

Definice *(Maticový zápis soustavy rovnic)*
Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\ldots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\ldots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\ldots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Takovou soustavu lze zapsat jako

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

kde

- A je *matice soustavy* typu $m \times n$ (s m řádky a n sloupci), kde na souřadnicích $[i, j]$ je koeficient $a_{i,j}$,
- $\mathbf{b}$ je sloupcový vektor pravých stran (matice typu $m \times 1$) a
- $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor neznámých (matice typu $n \times 1$)

Maticový součin $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zřejmě dává stejný výsledek jako explicitní zápis soustavy.

Věta *(Řešení soustavy rovnic je afinní podprostor)*
Pro soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde A je matice typu $m \times n$, $\mathbf{b}$ je vektor „pravých stran“ a $\mathbf{x}$ vektor neznámých, platí, že množina jejích řešení je

a) prázdná
b) tvaru $\{\mathbf{x}_0 + L\}$, kde $\mathbf{x}_0$ je jedno z řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a L je množina všech řešení *homogenní* soustavy $A\mathbf{x} = 0$.

Důkaz
Je-li F množina řešení rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ neprázdná, potom platí:

1. řádky matice A generují nějaký podprostor L, $\forall \mathbf{u} \in L : A\mathbf{u} = 0$.
2. jestliže pro nějaké $\mathbf{l}$ platí $A\mathbf{l} = 0$ (tedy $\mathbf{l} \in L$) a mám nějaké $\mathbf{x}_0$, pro které platí $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, potom z distributivity násobení matic plyne $A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}) = \mathbf{b}$.

Věta *(Afinní podprostor lze popsat soustavou rovnic)*
Opačné tvrzení platí také – každý afinní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic.

Důkaz
Ve vekt. prostoru V mějme afinní podprostor $F = \{U + \mathbf{v}\}$, kde $U \subseteq V$ je podprostor V a $\mathbf{x} \in V$. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ buď báze U. Potom každé $\mathbf{x} \in F$ vyhovuje soustavě rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

Důsledek
Je-li dána soustava rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde matice A má n řádků, potom jí určený afinní podprostor má dimenzi $n - \text{rank}(A)$.

Věta *((neprázdný) průnik afinních podprostorů je afinní podprostor)*
Mějme dány afinní podprostory $F_1 = \{U_1 + \mathbf{x}_1\}$ a $F_2 = \{U_2 + \mathbf{x}_2\}$ pro nějaké podprostory U_1, U_2 vektorového prostoru V. Pokud $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, potom $F_1 \cap F_2$ je afinní podprostor V.
Důkaz
Plyne z předchozích vět o vztahu afinních podprostorů a soustav rovnic – vezmeme rovnicové popisy F_1 a F_2 a složíme je pod sebe, tím dostaneme rovnicový popis dalšího afinního podprostoru (pokud daná soustava rovnic má řešení, tedy průnik je neprázdný).

Příklad
Např. průnik přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$ – jeden bod – je afinní podprostor :-).

9.4 Frobeniova věta

Věta *(Frobeniova)*
Soustava lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (kde A je matice s n sloupci) má alespoň jedno řešení, právě když platí

$$\text{rank}(A) = \text{rank}((A\ \mathbf{b}))$$

kde $(A\ \mathbf{b})$ představuje tzv. *rozšířenou matici soustavy*, tj. matici A s „přilepeným“ vektorem pravých stran $\mathbf{b}$ v posledním sloupci.

Důkaz
n-tice skalárů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jinak zapsáno $A_1\alpha_1 + \cdots + A_n\alpha_n = \mathbf{b}$, právě když sloupec $\mathbf{b}$ je lineární kombinací sloupců $A_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, tedy $\mathbf{b} \in \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)$. To znamená, že $\mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n, \mathbf{b}) = \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)$ a tedy

$$\text{rank}(A) = \dim(\mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)) = \dim(\mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n, \mathbf{b})) = \text{rank}((A\ \mathbf{b}))$$

9.5 Řešení soustavy úpravou matice

Definice *(Elementární operace)*
Následující tři operace nazýváme *elementárními operacemi* s maticí A (všechny jsou ekvivalentní vynásobení vhodnou regulární maticí zleva):

1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$
   (zapsáno formou maticového násobení $A' = (I + (\alpha - 1)e_i e_i^T)A$)
2. vynásobení i-tého řádku číslem α a přičtení k j-tému řádku, $j \neq i$
   (maticový zápis $A' = (I + \alpha e_j e_i^T)A$)
3. výměna i-tého a j-tého řádku, $i \neq j$ (je možné „složit“ z předcházejících dvou)
   (maticový zápis $A' = (I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T)A$)

Věta *(O elementárních operacích)*
Elementární operace na rozšířené matici $(A\ \mathbf{b})$ soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemění množinu řešení soustavy.

Důkaz
Důkaz stačí pro operace 1. a 2., protože třetí je jejich kombinací. Pro úpravy:

1. Po úpravě jsou všechny rovnice (řádky matice) až na i-tou nezměněné, tedy každé $\mathbf{x}$ řešení původní soustavy je splňuje. Pro upravený řádek platí
   $$\alpha(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n) = \alpha \cdot b_i$$
   což je zřejmě také splněno. Podobně se dokáže, že každé $\mathbf{x}$ řešení upravené matice splňuje i všechny rovnice původní.
2. Všechny řádky až na j-tý jsou nezměněné a pro j-tý řádek platí:
   $$\alpha(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n) + (a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n) = \alpha b_i + b_j$$
   a to je také splněno. Opačná implikace se dokáže podobně.

Definice *(Odstupňovaný tvar matice)*
Řekneme, že matice A typu $m \times n$ je v (řádkově) *odstupňovaném tvaru*, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. existuje $r : 0 \leq r \leq m$ takové, že řádky $1, \ldots, r$ jsou nenulové a $r+1, \ldots, m$ nulové
2. pro $j(i) = \min\{j | a_{i,j} \neq 0\}$ platí $j(1) \leq j(2) \leq \cdots \leq j(r)$

Algoritmus *(Řešení soustavy lin. rovnic)*
Soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lze řešit následovně

1. Sestavit rozšířenou matici soustavy
2. Převést pomocí elementárních úprav matici do odstupňovaného tvaru
3. Pomocí zpětné substituce popsat všechna řešení

Algoritmus *(Gaussova eliminace)*
Gaussova eliminace je algoritmus pro úpravu dané matice A na odstupňovaný tvar elementárními řádkovými úpravami. Postup:

1. Utřídíme řádky podle délek úseků počátečních nul vzestupně
2. Najdeme-li dva řádky se stejně dlouhým úsekem poč. nul ($j(i) = j(i+1)$), potom k $i+1$-tému řádku přičteme $-\frac{a_{i+1,j(i)}}{a_{i,j(i)}}$-násobek i-tého řádku
3. Kroky 1. – 2. opakujeme, dokud existují dva řádky se stejně dlouhým úsekem poč. nul.

Je zaručeno, že algoritmus skončí, protože s každým cyklem roste součet délek počátečních úseků nul všech řádků minimálně o 1 a ten je omezený číslem $m \times n$. Složitost algoritmu je $O(m \cdot n^2)$.

Algoritmus *(Zpětná substituce)*
Buď E rozšířená matice soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v odstupňovaném tvaru (získaná pomocí elementárních úprav). Pokud počáteční úsek nul na nějakém řádku má délku n (tedy nenulové číslo je jen ve sloupci pravých stran), soustava nemá řešení. Jinak nazveme *bázové proměnné* ty, v jejichž sloupci je v nějakém řádku první nenulové číslo $(x_{j(1)}, \ldots, x_{j(m)})$, ostatní nazveme *volné*. Existuje potom jednoznačné přiřazení hodnot bázovým proměnným tak, že dohromady tvoří řešení soustavy. Každé řešení je navíc možné získat touto metodou.

Postup:
Indukcí podle $i = r, r-1, \ldots, 2, 1$. Nechť $x_{j(i)}$ je i-tá bázová proměnná a hodnoty proměnných x_k pro $k > j(i)$ jsou dané (buď jsou volné, nebo využívám ind. předpoklad). Potom po dosazení do i-té rovnice získám

$$0x_1 + \cdots + 0x_{j(i)-1} + a_{i,j(i)}x_{j(i)} + \cdots + a_{i,j(n)}x_n = b_i$$

tedy jednu rovnici o 1 neznámé, která má jednoznačné řešení. Libovolné řešení této soustavy $x_1, \ldots, x_n$ lze získat touto metodou – stačí nastavit volné proměnné podle něj a bázové vyjdou správně, protože jejich hodnota je určena jednoznačně. Navíc které proměnné jsou volné a které jsou bázové je také určeno jednoznačně – jinak vždy najdu různé množiny řešení (což je pro stejnou soustavu rovnic nesmysl).

Algoritmus *(Gauss-Jordanova eliminace)*
Gauss-Jordanova eliminace je varianta Gaussovy eliminace, která převádí matici na tzv. *redukovaný odstupňovaný tvar*, to je takový tvar, kde v každém sloupci, příslušejícím nějaké bázové proměnné, je pouze jedno nenulové číslo. Zpětná substituce je pak jednodušší, ale je třeba více aritmetických operací (asymptoticky jsou však algoritmy stejné)
TODO: zkontrolovat & doplnit podrobněji

Poznámka
S řešením soustav rovnic Gaussovou metodou nastává problem při strojových výpočtech – i malá zaokrouhlovací chyba může způsobit velmi radikální změnu množiny řešení (takové matice soustav se nazývají *špatně podmíněné*).

9.6 Souvislost soustavy řešení s ortogonálním doplňkem

Definice *(Ortogonální doplněk)*
Ve vektorovém prostoru V se skaláním součinem definujeme *ortogonální doplněk* množiny $M \subseteq V$ jako

$$M^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in M\}$$

Věta *(Množina řešení homogenní soustavy je ortog. doplněk řádků její matice)*
Mějme dánu homogenní soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ potom její množina řešení je ortogonální doplněk množiny jejích řádků

$$\{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}^\perp$$

přičemž uvažujeme standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

TODO: tady je toho dost málo (ač je to všechno co jsme kdy probírali), jestě něco sem doplnit ???

10 Matice

Požadavky

- Matice a jejich hodnost
- Operace s maticemi a jejich vlastnosti
- Inversní matice
- Regulární matice, různé charakteristiky
- Matice a lineární zobrazení, resp. změny souřadných soustav

10.1 Matice a jejich hodnost

Definice
Obdélníkové schéma sestavené z reálných čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme (reálnou) maticí typu $m \times n$. Prvek a_{ij} se nazývá ij-tý *koeficient* matice A. Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m\times n}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu n.

Podobně definujeme množinu komplexních matic typu $m \times n$ a značíme ji $\mathbb{C}^{m\times n}$, lze takto definovat množinu matic nad libovolným tělesem.

Definice *(Jednotková matice)*
Čtvercová matice řádu n tvaru

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*.

Definice *(Nulová matice)*
Čtvercovou matici A typu $m \times n$, pro kterou $a_{i,j} = 0\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ nazveme *nulová matice* a označíme $\mathbf{0}$.

Definice *(Prostory související s maticí)*
Buď A matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom jsou s ní spojené tyto vektorové prostory:

- *sloupcový prostor, též sloupcový modul* – podprostor $\mathbb{K}^m$ generovaný sloupci A
- *řádkový prostor, též řádkový modul* – podprostor $\mathbb{K}^n$ generovaný řádky A
- *jádro matice* (Ker A) – podprostor $\mathbb{K}^n$ generovaný všemi řešeními soustavy $Ax = 0$

Je zřejmé, že elementární maticové úpravy nemění ani řádkový prostor, ani jádro.

Definice *(Hodnost matice)*
Hodnost matice A je maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A (jako vektorů), značíme ji $\operatorname{rank}(A)$. Hodnost matice je rovna dimenzi sloupcového prostoru (to je ekvivalentní definice).

Věta *(O hodnosti matice)*
Pro libovolnou matici A typu $m \times n$ je dimenze jejího sloupcového prostoru rovna dimenzi řádkového prostoru. Tedy hodnost matice je rovna i dimenzi řádkového prostoru a platí

$$\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Důkaz
Pro horní trojúhelníkové matice je tato skutečnost zřejmá, dokazuje se, že Gaussova eliminace (tj. elementární maticové úpravy – násobení vhodnou regulární maticí zleva) nemění hodnost sloupcového prostoru (při operacích s řádky).

Věta *(O dimenzích maticových prostorů)*
Pro matici A s n sloupci platí:

$$\dim(\text{Ker } A) + \operatorname{rank}(A) = n$$

Poznámka
Po provedení *Gaussovy eliminace* na matici A ($\Rightarrow A^R$) je hodnost matice A rovna počtu nenulových řádků matice A^R.

Definice *(Regulární matice)*
Čtvercová matice A se nazývá *regulární*, jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má jediné řešení $x = 0$ (tzv. *triviální*).

V opačném případě se nazývá *singulární* (tj. platí $Ax = 0$ pro nějaký vektor $x \neq 0$).

10.2 Operace s maticemi a jejich vlastnosti

Součet a násobení skalárem

Definice *(Sčítání)*
Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$. Potom jejich *součtem* $A + B$ nazýváme matici typu $m \times n$ s koeficienty

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

pro $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. Jsou-li A, B různých typů, potom součet $A + B$ není definován.

Definice *(Násobení skalárem)*
Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$ a α skalár. Potom $\alpha \cdot A$ je matice typu $m \times n$ s koeficienty

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

pro $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. Nikdy nepíšeme $A \cdot \alpha$.

Lemma *(Vlastnosti součtu matic a násobení matic skalárem)*
Nechť A, B, C jsou matice typu $m \times n$ a α, β skaláry. Potom platí:

1. $A + B = B + A$ *(komutativita)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asociativita)*
3. $A + \mathbf{0} = A$ *(existence nulového prvku)*
4. $A + (-1)A = \mathbf{0}$ *(existence opačného prvku)*
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1 \cdot A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivita)*
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivita)*

Tedy prostor matic typu $m \times n$ odpovídá vektorovému prostoru.

Násobení

Definice *(Maticové násobení)*
Je-li A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$, potom $A \cdot B$ je matice typu $m \times n$ definaná předpisem

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

pro $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.

Lemma *(Vlastnosti součinu matic)*
Nechť A, B, C jsou matice, α skalár. Potom

1. Jestliže součin $(AB)C$ je definován, potom i součin $A(BC)$ je definován a platí $(AB)C = A(BC)$.
2. Jestliže $A(B + C)$ je definován, potom i $AB + AC$ je definován a platí $A(B + C) = AB + AC$.
3. Jestliže $(A + B)C$ je definován, potom i $AC + BC$ je definován a platí $(A + B)C = AC + BC$.
4. Je-li AB definován, je $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. Je-li A typu $m \times n$, potom $I_m A = A I_n = A$.

Násobení matic není komutativní - tj. obecně neplatí $AB = BA$.

Věta *(O hodnosti součinu matic)*
Pro matici A typu $m \times p$ a matici B typu $p \times n$ platí:

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

Důkaz
Řádkový prostor AB je určitě podprostorem řádkového prostoru matice B a sloupcový prostor AB podprostorem sloupcového prostoru matice A.

Transpozice

Definice
Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definujeme *transponovanou matici* $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ předpisem

$$(A^T)_{ji} = A_{ij}\,(i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n)$$

Lemma *(Vlastnosti transpozice)*

1. $(A^T)^T = A$
2. jsou-li A, B stejného typu, je $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$
4. je-li AB definován, je i $B^T A^T$ definován a platí $(AB)^T = B^T A^T$.

Definice *(Symetrická matice)*
Matice A se nazývá *symetrická* jestliže $A^T = A$.

Věta
Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je $A^T A$ symetrická.

Věta
Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí $\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$.

10.3 Inversní matice

Věta
Ke každé regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje právě jedna matice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastností

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Naopak, existuje-li k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice A^{-1} s touto vlastností, potom je A regulární.

Definice
Matici A^{-1} s touto vlastností nazýváme *inversní maticí* k matici A.

Poznámka
Inverzní matici mají tedy právě regulární matice.

Důsledek
Je-li A regulární, je i A^{-1} regulární.

Věta *(Inversní matice je oboustranně inversní)*
Jestliže pro $A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $XA = I$, potom A je regulární a $X = A^{-1}$. Analogicky, jestliže $AX = I$, potom A je regulární a $X = A^{-1}$.

Věta
Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, potom pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy $Ax = b$ dáno vzorcem $x = A^{-1}b$.

Věta *(Výpočet inversní matice)*
Pro čtvercovou matici A řádu n nechť je matice $(A\ I)$ (tj. zřetězení sloupců matice A a jednotkové matice I řádu n) převedena Gauss-Jordanovou eliminací na tvar $(I\ X)$. Potom platí:

$$X = A^{-1}$$

Jestliže Gauss-Jordanova eliminace není proveditelná až do konce, potom A je singulární a nemá inversní matici.

Důkaz
Víme, že Gauss-Jordanova eliminace je vlastně opakované násobení regulárními maticemi zleva. Součin všech těchto matic označme Q. Označme $H_{*,j}$ j-tý sloupec nějaké (obecné) matice. Potom pro $j \in \{1,\ldots,n\}$ platí: $(I\ X)_{*,j} = I_{*,j} = Q(A\ I)_{*,j} = (QA)_{*,j}$, tedy $QA = I$, dále platí $(I\ X)_{*,n+j} = X_{*,j} = (QI)_{*,n+j} = Q_{*,j}$, takže $Q = X$ a tedy $AX = I$.

Věta *(Vlastnosti inversní matice)*
Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou regulární matice. Potom platí:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ *pro* $\alpha \neq 0$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

10.4 Regulární matice, různé charakteristiky

Věta *(Násobení regulární maticí a hodnost)*
Pro čtvercovou regulární matici R řádu m a matici A typu $m \times n$ platí:

$$\text{rank}(RA) = \text{rank}(A)$$

Důkaz
Nerovnost „$\leq$“ plyne přímo z věty o hodnosti součinu matic použité pro RA, opačná nerovnost z téže věty, použité na matici $R^{-1} \cdot (RA) = A$.

Věta *(Násobení regulárních matic)*
Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $q \geq 1$, potom $A_1 A_2 \ldots A_q$ je regulární.

Důkaz
Plyne přímo z předchozí věty.

Poznámka *(Podmínky regularity)*
Čtvercová $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice, právě když:

- Její řádky jsou lineárně nezávislé
- Její sloupce jsou lineárně nezávislé
- Její hodnost je právě n
- A^T je regulární
- A^{-1} je regulární

Další charakteristiky regulárních matic:

- Matice A je regulární právě když je determinant nenulový.
- Právě když po provedení Gaussovy-Jordanovy eliminace dostaneme jednotkovou matici.
- Právě když lze napsat jako součin matic $E_k \times \cdots \times E_2 \times E_1 \times I_n$, kde I_n je jednotková matice a $E_1 \times E_k$ jsou elementární matice (odpovídají elementárním řádkovým úpravám, které matici A převádí na redukovaný, řádkově odstupňovaný tvar).

10.5 Matice a lineární zobrazení, resp. změny souřadných soustav

Definice
Nechť V, W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem (R nebo C). Zobrazení $f : V \to W$ nazýváme *lineárním zobrazením* jestliže

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro každé $x, y \in V$
2. $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ pro každé $x \in V$ a každý skalár α.

Definice *(Souřadnicový vektor)*
Nechť $\mathbb{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V. Každý vektor $x \in V$ lze potom vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathbb{B}$. Potom aritmetický vektor

$$[x]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

nazýváme *souřadnicovým vektorem* vektoru x v bázi $\mathbb{B}$ (a $n = \dim V$ a souřadnicový vektor *závisí na výběru báze*).

Definice *(Matice lineárního zobrazení)*
Nechť $\mathbb{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je báze vektorového prostoru V, $\mathbb{B}' = \{y_1, \ldots, y_m\}$ je báze vekt. prostrou W a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $j = 1, \ldots, n$ lze $f(x_j)$ zapsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_j.$$

Matice $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se nazývá maticí lineárního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ a značí se

$$[f]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}.$$

Pozorování

$[f]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}$. je matice sestavená ze sloupců

$$([f(x_1)]_{\mathbb{B}'}, \ldots, [f(x_n)]_{\mathbb{B}'}),$$

které jsou souřadnicovými vektory vektorů $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ v bázi $\mathbb{B}'$.

Věta

Nechť $\mathbb{B}$ je báze V, $\mathbb{B}'$ je báze W, a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $x \in V$ platí

$$[f(x)]_{\mathbb{B}'} = [f]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}.[x]_{\mathbb{B}},$$

kde napravo stojí maticový součin.

Věta *(Složené zobrazení a maticový součin)*

Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení a nechť $\mathbb{B}, \mathbb{B}', \mathbb{B}''$ jsou báze U, V, W. Potom platí

$$[g \circ f]_{\mathbb{B}\mathbb{B}''} = [g]_{\mathbb{B}'\mathbb{B}''}[f]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}$$

kde napravo stojí maticový součin.

Věta *(Matice inversního zobrazení)*

Je-li $f : V \to W$ isomorfismus, potom inversní zobrazení $f^{-1} : W \to V$ je rovněž isomorfismus a vzhledem k libovolným bázím $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ prostorů V, W platí:

$$[f^{-1}]_{\mathbb{B}'\mathbb{B}} = [f]^{-1}_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}$$

Věta *(Změna souřadnic vektoru při změně báze)*

Nechť jsou dány dvě báze $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ vektorového prostoru V. Potom pro každé $x \in V$ platí:

$$[x]_{\mathbb{B}'} = [\mathrm{id}_V]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}.[x]_{\mathbb{B}}$$

Matice $[\mathrm{id}_V]_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}$ se nazývá *maticí přechodu* od báze $\mathbb{B}$ k bázi $\mathbb{B}'$.

Poznámka

Předchozí vzorec vyžaduje znalost hodnot vektorů staré báze $\mathbb{B}$ v nové bázi $\mathbb{B}'$. Typická situace ale je, že máme jen starou bázi $\mathbb{B}$ a pomocí ní vyjádříme novou bázi $\mathbb{B}'$. V tom případě můžeme použít vzorec

$$[x]_{\mathbb{B}'} = [\mathrm{id}_V]^{-1}_{\mathbb{B}'\mathbb{B}}[x]_{\mathbb{B}}$$

11 Determinanty

Požadavky

- Definice a základní vlastnosti determinantu
- Úpravy determinantů, výpočet
- Geometrický smysl determinantu
- Minory a inversní matice
- Cramerovo pravidlo.

11.1 Definice a základní vlastnosti determinantu

Neformálně

V lineární algebře je *determinant* zobrazení, které přiřadí každé čtvercové matici A skalár $\det A$.

Determinantem čtvercové matice řádu n nazýváme součet všech součinů n prvků této matice takových, že v žádném z uvedených součinů se nevyskytují dva prvky z téhož řádku ani z téhož sloupce. Každý součin přitom násobíme čísly r a s, kde r představuje znaménko permutace příslušného pořadí prvních indexů a s znaménko permutace příslušného pořadí druhých indexů.

Definice *(permutace, znaménko)*

Permutace je libovolná bijekce $\sigma : X \to X$. Množina *inversí* nějaké permutace σ je $I(\sigma) = \{(i,j) : i < j \ \& \ \sigma(i) > \sigma(j)\}$. Znaménko permutace $\operatorname{sgn}(\sigma)$ se pak definuje jako $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{|I(\sigma)|}$. Nejjednodušší permutace – záměna dvou prvků – se pak nazývá *transpozice*. Ta má vždy znaménko -1 a libovolná permutace je složením nějakých transpozic. Množinu všech permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$ značíme S_n.

Poznámka

Pro skládání permutací platí $\operatorname{sgn}(p \circ q) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(q)$. Pro inversní permutaci (inversní zobrazení) platí $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$.

Definice *(determinant)*

Nechť $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ je čtvercová matice řádu n. Determinant je definovaný pomocí *Leibnizova vzorce*:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Poznámka

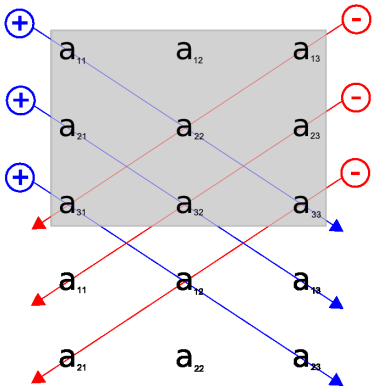
Suma se počítá přes všechny permutace σ čísel {1,2,. . . ,n}, takže tento vzorec obsahuje $n!$ (faktoriál) sčítanců, což jej s růstem n rychle činí prakticky nepoužitelným pro výpočet. V praxi se proto používají jiné způsoby výpočtu.

Poznámka

Konkrétně, pro matici řádu n, kde:

- $n = 1 : \det A = a_{1,1}$
- $n = 2 : \det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$
- $n = 3 : \det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$

Mnemotechnická pomůcka sloužící k zapamatování postupu výpočtu determinantu třetího řádu se nazývá *Sarrusovo pravidlo*:



Poznámka

Obecný vzorec lze také vyjádřit pomocí Levi-Civitova symbolu $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ jako

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \ldots a_{n,j_n} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \ldots a_{j_n,n}$$

Vlastnosti determinantu

Věta *(O determinantu transponované matice)*
Pro čtvercovou matici A řádu n platí:

$$\det A = \det A^T$$

Důkaz
Plyne z faktu že $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$:

$$\begin{aligned}\det(A^T) &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} (A^T)_{i,p(i)} = \\ &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} = \sum_{p^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p^{-1}(i)} = \det(A)\end{aligned}$$

Věta *(Přerovnání matice)*
Přerovnání řádků nebo sloupců podle permutace p nezmění determinant vůbec, pokud $\operatorname{sgn}(p) = 1$ a změní jen jeho znaménko, pokud $\operatorname{sgn}(p) = -1$.
Důkaz
A buď původní matice a B přerovnaná:

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} (B)_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,q^{-1}(p(i))} = \\ &= \operatorname{sgn}(q) \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,q^{-1}(p(i))} = \operatorname{sgn}(q) \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(h) \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,h(i)} = \\ &= \operatorname{sgn}(q) \det(A)\end{aligned}$$

Důsledek
Má-li matice dva shodné sloupce nebo řádky, má automaticky nulový determinant (přehozením právě těch dvou řádků nebo sloupců vzniknou shodné matice se stejným determinantem, ale má se změnit znaménko).

Věta *(Determinant jako lineární funkce)*
Determinant matice A je lineární funkcí každého jejího řádku i každého sloupce, tj. platí

1.
$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1}+c_{i,1} & \dots & b_{i,n}+c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

2.
$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa a_{i,n} & \dots & \kappa a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \kappa \det(A)$$

Důkaz
První část plyne z distributivity sčítání vzhledem k násobení – každý člen sumy (produkt prvků) obsahuje jeden prvek typu $b_{i,p(i)} + c_{i,p(i)}$ pro nějakou permutaci a ten je možné rozepsat. Druhá část se dokáže podobně díky komutativitě násobení – prvek κ je také obsažen v každém členu sumy právě jednou, takže je ho možné „vytknout“.

Věta *(Determinant součinu matic)*
Nechť A a B jsou čtvercové matice stejného řádu n nad tělesem T. Potom platí:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Důkaz
Je-li jedna z matic singulární, je jejich součin singulární a tedy má nulový determinant; stejně jako je nulový součin determinantů původních matic. Jsou-li obě matice regulární, lze A rozložit na nějaký součin $E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots \cdot E_k$ elementárních matic. Potom

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 E_2 \dots E_k B) = \det(E_1) \cdot \det(E_2 \dots E_k B) \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_k) \det(B) = \det(A) \det(B)\end{aligned}$$

protože víme, jakým způsobem elementární úpravy (ekvivalent elementárních matic ve vzorci) mění determinant.

Důsledek
Čtvercová matice je regulární, právě když má nenulový determinant.

11.2 Úpravy determinantů, výpočet

Gaussova eliminace
Gaussova metoda spočívá v provedení takových úprav matice, které nemění hodnotu determinantu, ale zjednoduší výpočet jeho hodnoty. Cílem prováděných úprav je získat trojúhelníkovou matici **A** (kde pro $i > j$ je $a_{i,j} = 0$), neboť pro trojúhelníkové matice platí

$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

tzn. determinant je roven součinu prvků hlavní diagonály matice.
Při úpravách matice pro výpočet determinantu postupujeme podle těchto pravidel:

- Pokud **B** vznikne z **A** výměnnou dvou řádku nebo sloupců potom $\det B = -\det A$
- Pokud **B** vznikne z **A** vynásobením řádku nebo sloupce skalárem c, potom $\det B = c.\det A$
- Pokud **B** vznikne z **A** přičtením násobku jednoho řádku k jinému, nebo přidáním násobku sloupce k jinému sloupci potom $\det B = \det A$

Opakovaným použitím uvedených pravidel převedeme matici na trojúhelníkovou a pro tu poté snadno spočteme determinant.

11.3 Geometrický smysl determinantu

Matice řádu 2
Absolutní hodnotu determinantu matice řádu 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

lze interpretovat jako obsah rovnoběžníku s vrcholy v bodech $(0,0)$, (a,c), (b,d) a $(a+b, c+d)$. Znaménko determinantu určuje vzájemnou orientaci vektorů (a,c), (b,d). $\det A$ je kladný, pokud úhel mezi vektory (a,c), (b,d) měřený v kladném směru (tedy proti směru hodinových ručiček) menší než π, a záporný, pokud je tento úhel větší než π.

Matice řádu 3
Podobný geometrický význam jako pro matici řádu 2 najdeme i pro matice $B = (b_{i,j})$ řádu 3. Řádkové vektory

$$b_1 = (b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}), b_2 = (b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3}), b_3 = (b_{3,1}, b_{3,2}, b_{3,3})$$

určují v třídimenzionálním prostoru rovnoběžnostěn, jehož objem je roven $|\det B|$. Pokud je $\det B$ kladný, tak je posloupnost vektorů b_1, b_2, b_3 pravotočivá, a levotočivá, pokud je $\det B$ záporný.

Matice vyšších řádů
I v reálných prostorech vyšších řádů lze determinant chápat jako objem obecného n-rozměrného rovnoběžnostěnu, případně jako pravotočivost, respektive levotočivost posloupnosti $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Definice *(Pravotočivá a levotočivá soustava prostorových kartézských souřadnic)*
Představte si, že v místě, kde stojíte, je počátek prostorové kartézské soustavy. Osa x nechť směřuje přímo vpřed (směrem, kterým se díváte), osa y nechť směřuje vlevo a osa z nechť směřuje vzhůru. Taková soustava se nazývá *pravotočivá souřadná soustava*.

Zaměníme-li osy x a y, získáme *souřadnou soustavu levotočivou*. Obvykle se pracuje s pravotočivou souřadnou soustavou.

Mnemotechnická pomůcka: Soustava souřadnic je pravotočivá pokud při naznačení kladného směru osy z zdviženým palcem pravé ruky naznačují ostatní prsty směr od kladného směru osy x ke kladnému směru osy y.

11.4 Minory a inversní matice

Definice *(Minor)*
Mějme čtvercovou matici A_{ij}, kterou získáme z matice A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce. Determinant matice A_{ij}, tzn. $\det A_{ij}$ nazýváme *subdeterminantem* (též *minorem*) příslušným k prvku $a_{i,j}$ matice A.

Výpočet determinantu rozvojem podle řádků (sloupců)
Algebraický doplněk lze použít k výpočtu determinantu n-tého řádu. Pro libovolné (pevně dané) i lze determinant matice A vyjádřit pomocí algebraických doplňků jako

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Tento postup je označován jako *rozvoj (rozklad) determinantu podle i-tého řádku.* Ekvivalentně lze determinant vyjádřit *rozvojem (rozkladem) podle j-tého sloupce.* Číslo $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ se někdy nazývá *kofaktorem* nebo *algebraickým doplňkem.*

Definice *(Adjungovaná matice)*
Pro čtvercovou matici A definujeme *adjungovanou matici* adj A předpisem

$$(\text{adj } A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$$

kde A_{ji} jsou minory matice A (s vynechaným j-tým řádkem a i-tým sloupcem – pozor na obrácené pořadí indexů!). Prvky adjungované matice jsou vlastně algebraické doplňky v transponované matici A^T.

Definice *(Inversní matice)*
Pro čtvercovou matici A řádu n definujeme inverzní matici A^{-1} předpisem

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

kde I_n je jednotková matice. Inversní matici lze sestrojit pouze pro regulární matici.

Věta *(Výpočet inversní matice podle minorů)*
Pro každou regulární matici A nad tělesem T platí:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A)$$

$$A^{-1}_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det A}$$

Důkaz
Z maticového součinu $A \cdot \text{adj } A$:

1. i-tý řádek $A \times i$-tý sloupec adj A (obs. determinanty minorů odp. i-tému řádku) dá dohromady $\det A$ (z rozvoje determinantu podle řádku)
2. j-tý řádek $A \times i$-tý sloupec adj A dá dohromady 0, protože jde o stejný princip pro matici, kde i-tý řádek je nahrazen j-tým (2 stejné řádky)

Potom $A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot I_n$ a to už dává $\frac{1}{\det A} \text{adj } A = A^{-1}$.

11.5 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je metoda umožňující nalezení řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.
Postup
Mějme soustavu lineárních rovnic, která obsahuje stejný počet neznámých jako je počet rovnic. Označme matici soustavy A. Dále označme A_i jako matici, kterou získáme z matice A, nahradíme-li v ní i-tý sloupec sloupcem pravých stran soustavy rovnic.

Pokud zapíšeme matice soustavy a vektor pravých stran jako

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

pak má tvar

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,i-1} & b_m & a_{m,i+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pokud je determinant matice soustavy nenulový, $\det A \neq 0$, tzn. matice je regulární, pak má soustava právě jedno řešení, pro které platí

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz

Pro soustavu $Ax = b$ – rozepíšeme $x = A^{-1}b$, ze vzorce pro inversní matici plyne

$$x = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A) \cdot b$$

takže pro x_i vychází

$$x_i = \frac{1}{\det A}((\text{adj } A)b)_i = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} (\text{adj } A)_{i,j} \cdot b_j = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_i$$

Příklad

Úkolem je řešit soustavu rovnic

$$x + y = 3$$

$$x - 2y = 1$$

Determinant matice soustavy je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Poněvadž je $\det A \neq 0$, lze použít Cramerovo pravidlo.
Dále určíme

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Řešení má tedy tvar

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Zkouškou se přesvědčíme, že se skutečně jedná o řešení uvedené soustavy.

12 Vlastní čísla a vlastní hodnoty

Požadavky

- Vlastní čísla a vlastní hodnoty lineárního operátoru resp. čtvercové matice.
- Jejich výpočet.
- Základní vlastnosti.
- Uvedení matice na diagonální tvar.
- Informace o Jordanově tvaru v obecném případě.

Otázka vychází především ze skript pana Jiřího Tůmy a částečně i ze skript pana Jiřího Rohna.

12.1 Definice

Definice
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n s reálnými (komplexními) prvky. Jestliže platí

$$Ax = \lambda x \tag{3}$$

pro jisté $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro *nenulový vektor* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ($\mathbb{C}^{n\times 1}$). Pak λ nazveme *vlastním číslem* matice $\mathbf{A}$ a vektor x *vlastním vektorem* příslušným k tomuto vlastnímu číslu.

Množinu všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ nazýváme *spektrum* matice $\mathbf{A}$ a označujeme ji $\sigma(\mathbf{A})$.

Funkci $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$ nazveme *charakteristický polynom* matice $\mathbf{A}$.

Pozorování
Z definice přímo plyne:

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \quad matice \quad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n \quad je \quad singulární \quad \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$$

Poslední podmínka nám říká, jak najít vlastní čísla matice, pokud existují. Vlastní vektory vypočteme úpravou (3) na:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)x = 0$$

Definice
Je-li $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na reálném (komplexním) vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, pak skalár λ nazýváme *vlastní číslo* lineárního operátoru $\mathbf{V}$, pokud existuje nenulový vektor $x \in \mathbf{V}$, pro který platí $F(x) = \lambda x$. Je-li λ vlastní číslo operátoru F, pak každý vektor $x \in \mathbf{V}$, pro který platí $F(x) = \lambda x$, nazýváme *vlastní vektor* lineárního operátoru F příslušný vlastnímu číslu λ. Množinu všech vlastních čísel operátoru F označujeme $\sigma(F)$ a nazýváme *spektrum* operátoru F.

Definice *(podobné matice, diagonalizovatelnost)*
Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou *podobné*, pokud existuje nějaká regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Reálná(komplexní) matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá *diagonalizovatelná*, pokud existuje regulární reálná(komplexní) matice $\mathbf{P}$ řádu n, pro kterou platí, že součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ je diagonální matice, tj. pokud matice $\mathbf{A}$ je podobná nějaké diagonální matici.

Lineární operátor $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na reálném(komplexním) vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *diagonalizovatelný*, pokud existuje báze $\mathbb{B}$ prostoru $\mathbf{V}$, pro kterou platí, že matice $[F]_B$ operátoru F vzhledem k bázi $\mathbb{B}$ je diagonální.

12.2 Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ spočítáme tedy kdy se } \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \quad \text{dává dvě řešení:} \quad \lambda_1 = 2 \text{ a } \lambda_2 = 7$$

vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = (-2, 1)$$

vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = (1,2)$$

12.3 Vlastnosti

Věta *(vlastnosti vlastních čísel)*
Pro komplexní čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí:

1. charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ řádu n je polynom stupně n s vedoucím koeficientem rovným $(-1)^n$
2. komplexní číslo λ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ právě když je kořenem charakteristického polynomu $p(\lambda)$ matice $\mathbf{A}$
3. matice $\mathbf{A}$ má n vlastních komplexních čísel, počítáme-li každé tolikrát, kolik je jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu
4. pokud $\mathbf{A}$ je reálná matice, pak $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ právě když komplexně sdružené $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A})$

Důkaz

1. plyne z definice determinantu.
2. $\exists x \neq 0 : \mathbf{A}x = \lambda x \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}x - \lambda x = 0 \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)x = 0$, tj. matice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ je singulární, takže musí mít nulový determinant.
3. plyne ze Základní věty algebry.
4. taktéž.

Věta
Determinant čtvercové matice je roven součinu jejích vlastních čísel.

Věta
Vlastními čísly horní(dolní) trojúhelníkové matice jsou právě všechny diagonální prvky.

Věta
Je-li $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice, pak každé vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ je reálné.

Věta
Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová reálná(komplexní) matice řádu n, $\mathbf{P}$ reálná(komplexní) regulární matice stejného řádu a $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, pak obě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejný charakterictický polynom a tedy i stejné spektrum.

Důkaz
$\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - t\mathbf{I}) = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - t\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) \cdot \det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I})$.

Věta
Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ čtvercové matice stejného typu, potom $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ mají stejná vlastní čísla.

12.4 Uvedení matice na diagonální tvar

Věta *(O diagonalizovatelnosti a bázi)*
Čtvercová reálná(komplexní) matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, právě když existuje báze prostoru $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), která je složena z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.

Lineární operátor $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na reálném(komplexním) vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je diagonalizovatelný právě když existuje báze prostoru $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů operátoru F.

Důkaz
Je-li $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná, znamená to, že existuje regulární matice $\mathbf{R}$ taková, že $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{D}$ (a $\mathbf{D}$ je diagonální), což je to samé jako $\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{D}$. Sloupce matice R tvoří vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice $\mathbf{A}$. $\mathbf{R}$ je regulární, takže vlastní vektory jsou lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi.

Mám-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů, mohu z nich sestavit matici $\mathbf{R}$ a pro ní už platí, že $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{D}$.

Důsledek
Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu n a $\mathbf{P}$ regulární matice taková, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$, pak na hlavní diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Věta *(Vlastní čísla a diagonalizovatelnost)*
Platí:

1. Jsou-li $\lambda_1, ..., \lambda_m$ navzájem různá vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ řádu n a $u_i \neq 0$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ_i pro libovolné $i = 1, ..., m$, pak je posloupnost vektorů $u_1, \ldots, u_m$ lineárně nezávislá.
2. Má-li matice $\mathbf{A}$ řádu n celkem n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.
3. Má-li lineární operátor $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ celkem n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelný.

Důkaz

1. indukcí a sporem, $u_1, \ldots, u_k$ dávají nejmenší protipříklad, pak z rovnice $0 = \mathbf{A}0 = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i u_i$ a $0 = \lambda_k \cdot 0 = \lambda_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$, pak dostávám spor (buď byly $u_1, \ldots, u_{k-1}$ závislé, nebo je u_k nulové)
2. z n lineárně nezávislých vlastních vektorů sestrojím matici $\mathbf{R}$ a platí $\mathbf{AR}$=$\mathbf{RD}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále.

Věta *(O diagonalizovatelnosti a násobnostech)*
Čtvercová reálná(komplexní) matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, právě když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{A}$ platí, že algebraická násobnost λ se rovná dimenzi nulového prostoru matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$, tj. číslu $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$.

Neboli: čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, právě když pro každé její vlastní číslo λ_i s násobností r_i platí $\mathrm{rank}(\mathbf{A} - \lambda_i I) = n - r_i$.

Důkaz
Matice je diagonalizovatelná, právě když existuje báze prostoru $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), složená z vlastních vektorů, a tu lze rozložit na k bází $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, které mají dimenzi r_i.

Věta *(spektrální věta pro diagonalizovatelné matice)*
Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n se spektrem $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_t\}$ je diagonalizovatelná právě když existují matice $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_t$ řádu n, pro které platí:

1. $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + ... + \lambda_t\mathbf{E}_t$
2. ${\mathbf{E}_i}^2 = \mathbf{E}_i$ pro každé $i = 1, 2, ..., t$
3. $\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j = 0$ pro libovolné dva různé indexy $i, j = 1, 2, ..., t$
4. $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + ... + \mathbf{E}_t = \mathbf{I}_n$

Dále pro diagonalizovatelnou matici $\mathbf{A}$ platí, že

5. matice $\mathbf{E}_i$ jsou jednoznačně určené maticí $\mathbf{A}$ a vlastnostmi *1,2,3,4*
6. hodnost každé z matic $\mathbf{E}_i$ se rovná algebraické násobnosti vlastního čísla λ_i
7. je-li $f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_kx^k$ libovolný polynom s komplexními koeficienty, pak platí $f(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{I}_n + c_1\mathbf{A} + ... + c_k\mathbf{A}^k = f(\lambda_1)\mathbf{E}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{E}_2 + ... + f(\lambda_k)\mathbf{E}_k$
8. nějaká matice $\mathbf{B}$ komutuje s maticí $\mathbf{A}$ (tj. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) právě tehdy, když komutuje s každou z matic $\mathbf{E}_i$ pro $i = 1, 2, ..., t$

12.5 Jordanův tvar v obecném případě

Definice *(Jordanův tvar)*
Diagonalizovatelné matice mají dobře pochopitelnou strukturu popsanou ve spektrální větě. Matice, které nelze diagonalizovat, nemají bázi složenou z vlastních vektorů, musí mít nějaké vícenásobné vlastní číslo λ, pro které je dimenze nulového prostoru $\mathcal{N}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}_n)$ menší než algebraická násobnost čísla λ. (viz věta o diagonalizovatelnosti a násobnostech)

Příklad takové matice řádu n, pro $n \geq 2$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Všechny prvky na diagonále se rovnají stejnému číslu λ, všechny prvky bezprostředně nad hlavní diagonálou se rovnají 1, ostatní prvky jsou nulové.

Pozorování
Charakteristický polynom matice $\mathbf{J}$ se rovná:

$$p(t) = (\lambda - t)^n$$

Pozorování
Matice $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}_n$ je v řádkově odsťupňovaném tvaru, její hodnost se rovná $n-1$ a její nulový prostor $\mathcal{N}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}_n)$ má proto dimenzi rovnou 1, což se nerovná algebraické násobnosti vlastního čísla λ, matice $\mathbf{J}$ tedy není diagonalizovatelná.

Definice *(Jordanova buňka)*
Matice $\mathbf{J}$ se nazývá Jordanova buňka řádu n příslušná vlastnímu číslu λ.

Věta *(O Jordanově kanonickém tvaru)*
Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ existuje regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}$$

kde každá z matic $\mathbf{J}_i$ pro $i = 1, ..., k$ je Jordanova buňka nějakého řádu n_i příslušná vlastnímu číslu λ_i. Čísla $\lambda_1, ..., \lambda_k$ jsou všechna, nikoliv nutně různá, vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a platí dále $n_1 + ... + n_k = n$. Dvojice n_i, λ_i pro $i = 1, ..., k$ jsou maticí $\mathbf{A}$ určené jednoznačně až na pořadí (tj. reprezentují třídu podobných matic).

Definice *(Hermitovskost)*
Nechť $\mathbf{A}$ je komplexní matice, potom matici $\mathbf{A}^H$, pro kterou platí, že $(\mathbf{A}^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ nazýváme *hermitovskou transpozicí* matice $\mathbf{A}$ (někdy se používá název „konjugovaná matice“).

Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá *unitární*, pokud platí, že $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá *hermitovská*, pokud $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

Pozorování
Platí: $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$ (důkaz je stejný jako pro obyčejnou transpozici).

Věta *(O hermitovských maticích)*
Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná (i když je sama komplexní). Navíc existuje unitární matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální. (tzn. hermitovská matice je diagonalizovatelná).

I *(t)*
erpretace v $\mathbb{R}$:Důsledek00 Pro každou symetrickou matici A platí, že všechna její vl. čísla jsou reálná a navíc existuje ortogonální matice R: $R^{-1}AR$ je diagonální. Příslušný vl. vektor x lze vzít reálný, protože $(A - \lambda I)x = 0$ – soustava lin. rovnic s reálnou singulární maticí – musí mít netriviální reálné řešení.

12.6 Spektrální věta - část důkazu

Tato část není v požadavcích ke zkouškám!

Důkaz
Důkaz spektrální věty je poměrně dlouhý - několik stránek, uvedu zde tedy jen část důkazu, doufám že tu lehčí :)

„A je diagonalizovatelná ⇒ vlastnosti 1,2,3,4“
Nechť m_i je algebraická násobnost vlastního čísla λ_i pro $i = 1, ..., t$. Matice $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná, tedy dle **Definice 3** existuje regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n taková, že součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální matice, a tato diagonální matice má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ dle **důsledku tvrzení 7 TODO**. Tedy

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{I}_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mathbf{I}_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_t\mathbf{I}_{m_t} \end{pmatrix} \tag{4}$$

kde $\mathbf{I}_{m_i}$ jsou jednotkové matice řádu m_i. Označíme pro $i = 1, ..., t$ symbolem $\mathbf{D}_i$ matici, kterou dostaneme z blokové matice na pravé straně poslední rovnosti tak, že nahradíme všechny výskyty vlastního čísla λ_i číslem 1 a výskyty ostatních vlastních čísel λ_j pro $j \neq i$ číslem 0. Například

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Jedná se vlastně o "částečnou"jednotkovou matici, která má pouze na části diagonály čísla 1. Pak platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + ... + \mathbf{D}_t \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \lambda_1\mathbf{D}_1 + \lambda_2\mathbf{D}_2 + ... + \lambda_t\mathbf{D}_t \\ \mathbf{A} &= \lambda_1\mathbf{P}\mathbf{D}_1\mathbf{P}^{-1} + \lambda_2\mathbf{P}\mathbf{D}_2\mathbf{P}^{-1} + ... + \lambda_t\mathbf{P}\mathbf{D}_t\mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

V první rovnosti jsme vlastně jen sečetli "částečné jednotkové matice" $\mathbf{D}_i$ a výsledek je jednotková matice. Pokud všechny matice $\mathbf{D}_i$ vynásobíme vlastními čísly λ_i a sečteme je, dostaneme matici na pravé straně rovnice (4). A ve třetí rovnosti se jen zbavíme matic $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}^{-1}$ na levé straně.

Položíme $\mathbf{E}_i = \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1}$ pro $i = 1, ..., t$ a dostaneme tak z třetí rovnosti vlastnost 1.

Protože ${\mathbf{D}_i}^2 = \mathbf{D}_i$ a $\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j = 0$ pro libovolné různé indexy $i, j, = 1, ..., t$, dostáváme

$$\begin{aligned} {\mathbf{E}_i}^2 &= \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}{\mathbf{D}_i}^2\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_i\mathbf{E}_j &= \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}_j\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}0\mathbf{P}^{-1} = 0 \\ \mathbf{E}_1 + ... + \mathbf{E}_t &= \mathbf{P}\mathbf{D}_1\mathbf{P}^{-1} + ... + \mathbf{P}\mathbf{D}_t\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{D}_1 + ... + \mathbf{D}_t)\mathbf{P}^{-1} = \\ &= \mathbf{P}\mathbf{I}_n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

což dokazuje vlastnosti 2,3,4. V první rovnosti jsme využili, že ${\mathbf{D}_i}^2 = \mathbf{D}_i$, ve druhé jsme využili $\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j = 0$ a ve třetí $\mathbf{I}_n = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + ... + \mathbf{D}_t$.

Opačnou implikaci, tedy že z vlastností 1,2,3,4 plyne diagonalizovatelnost matice nebudu dokazovat. Ze zbývajících vlastností 5,6,7,8 dokážu vlastnosti 6 a 7.

Vlastnost 6

Matice $\mathbf{D}_i$ (z předchozího důkazu), má hodnost m_i, proto má tutéž hodnost i matice $\mathbf{E}_i = \mathbf{P}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{-1}$, což dokazuje 6.

Vlastnost 7

Tento důkaz vypadá na první pohled odporně ale nenechte se odradit :) je to pouze rozepisování sum.

Dle vlastnosti 1 :

$$\mathbf{A}^2 = (\lambda_1\mathbf{E}_1 + ... + \lambda_t\mathbf{E}_t)(\lambda_1\mathbf{E}_1 + ... + \lambda_t\mathbf{E}_t)$$

to se rovná (jen přepsaní na sumu, násobení každý s každým)

$$\sum_{i,j=1}^{t} \lambda_i\mathbf{E}_i\lambda_j\mathbf{E}_j$$

dáme li matice k sobě, vznikne nám $\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j$ což je dle vlastnosti 3 rovno nule (pro různé indexy i a j), tyto násobení tedy můžeme ignorovat a přepsat sumu tak, aby se mezi sebou násobili pouze matice se stejným indexem. Dále víme z vlasnosti 2 že ${\mathbf{E}_i}^2 = \mathbf{E}_i$, tedy

$$\sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^2{\mathbf{E}_i}^2 = \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^2\mathbf{E}_i$$

jestliže nyní předpokládáme

$$\mathbf{A}^l = \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^l\mathbf{E}_i$$

pro nějaké $l \geq 2$, pak dostáváme (a upravujeme stejně jako v předchozím případě)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{l+1} &= (\lambda_1\mathbf{E}_1 + ... + \lambda_t\mathbf{E}_t)({\lambda_1}^l{\mathbf{E}_1}^l + ... + {\lambda_t}^l{\mathbf{E}_t}^l) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{t} \lambda_i\mathbf{E}_i{\lambda_j}^l{\mathbf{E}_j}^l = \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^{l+1}{\mathbf{E}_i}^2 = \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^{l+1}\mathbf{E}_i \end{aligned}$$

Protože rovněž platí

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n = \mathbf{E}_1 + ... + \mathbf{E}_t = {\lambda_1}^0\mathbf{E}_1 + ... + {\lambda_t}^0\mathbf{E}_t$$

tedy jsme dokázali, že rovnost

$$\mathbf{A}^l = \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^l\mathbf{E}_i$$

platí pro každé nezáporné celé číslo l. Pro každé číslo $j = 0, ...k$ dostáváme

$$c_j \mathbf{A}^j = c_j \sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^j \mathbf{E}_i$$

a tedy platí

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{k} c_j \mathbf{A}_j = \sum_{j=0}^{k} c_j (\sum_{i=1}^{t} {\lambda_i}^j \mathbf{E}_i) = \sum_{i=1}^{t} (\sum_{j=0}^{k} c_j {\lambda_i}^j) \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{t} f(\lambda_i) \mathbf{E}_i$$

13 Algebra

Požadavky

- Grupa, okruh, těleso – definice a příklady (podruhé...)
- Podgrupa, normální podgrupa, faktorgrupa, ideál
- Homomorfismy grup a dalších struktur
- Podílová tělesa – TODO!

13.1 Grupa, okruh, těleso – definice a příklady

Definice *(algebra)*
Pro množinu A je zobrazení $\alpha : A^n \to A$, kde $n \in \{0, 1, ...\}$ *n-ární operace* (n je *arita*). Jsou-li $\alpha_i, i \in I$ operace arity Ω_i na A, pak $(A, \alpha_i | i \in I)$ je *algebra*.

Definice *(grupoid, monoid)*
Algebra s 1 binární operací je *grupoid*. V něm může být $e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g \ \forall g \in G$ *neutrální prvek*.

Algebra s jednou asociativní *je možno přezávorkovat* binární operací a neutrálním prvkem vzhledem k ní je *monoid*. Nechť je dán monoid s neutrálním prvkem $(M, \cdot, e)$ a nějakým prvek $m \in M$. Potom řekneme, že prvek $m^{-1} \in M$ je *inverzní* k prvku m, pokud $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = e$. Prvek je *invertibilní*, pokud má nějaký inverzní prvek.

Poznámka
Každý grupoid obsahuje nejvýš 1 neutrální prvek. V libovolném monoidu platí, že pokud $(a \cdot b = e)$ & $(b \cdot c = e)$, pak $a = c$ (tj. inverzní prvek zleva a zprava musí být ten samý). Každý inverzní prvek je sám invertibilní.

Definice *(grupa)*
Algebra $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ je *grupa*, pokud je $(G, \cdot, e)$ monoid a $^{-1}$ je operace inv. prvku (tedy unární operace, která každému prvku přiřadí prvek k němu inverzní). Grupa G je *komutativní (abelovská)*, pokud je operace „$\cdot$“ komutativní.

Příklady
Příklady grup:

- Množina $\mathbb{R}$ s operací sčítání, inverzním prvkem $-x$ a neutrálním prvkem 0
- Množina $\mathbb{R}_+$ (kladných reálných čísel, tedy bez nuly, protože k té bychom inverzní prvek nenašli) s operací násobení, inverzním prvkem x^{-1} a neutrálním prvkem 1
- Množina $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ pro n libovolné přirozené číslo; s operací sčítání modulo n, inverzním prvkem $(-x)$ modulo n a neutrálním prvkem 0
- Množina polynomů stupně $\leq n$ se sčítáním, opačným polynomem (s opačnými koeficienty) a neutrálním prvkem 0
- Množina všech permutací prvků $(1, \ldots, n)$ s operací skládání permutací, opačnou permutací (takovou, že její složení s původní dává identitu) a neutrálním prvkem **id** (na rozdíl od všech předchozích pro permutace délky větší než 3 není abelovská)
- Množina regulárních matic $n \times n$ s operací maticového násobení, inverzními maticemi a jednotkovou maticí (taktéž není obecně abelovská)

Definice *(okruh)*
Nechť $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je algebra taková, že $(R, +, -, 0)$ tvoří komutativní grupu, $(R, \cdot, 1)$ je monoid a platí $a(b + c) = ab + ac$ a $(a + b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in R$ (tedy distributivita násobení vzhledem k sčítání[10]). Pak je $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ *okruh*.[11]

Příklady
Příklady okruhů:

- Množina $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení, inverzem vůči sčítání – unárním minus a neutrálními prvky 0 a 1.
- Množina všech lineárních zobrazení na $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a skládání, „opačným“ zobrazením (kde $(-f)(x) = -(f(x))$), nulovým zobrazením a identitou (pro obecná zobrazení toto nefunguje, neplatí distributivita)

Poznámka *(Vlastnosti okruhů)*
V okruhu $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ pro každé 2 prvky $a, b \in R$ platí:

1. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
2. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
4. $|R| > 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \neq 1$

[10] Žemlička píše ve skriptech sčítání vůči násobení, ale v literatuře se to píše většinou obráceně (asi to ale bude to samé)
[11] ”–”je v něm stále unární operace

Definice *(těleso)*

Těleso je okruh $(F, +, -, \cdot, 0, 1)$, pro který navíc platí, že pro každé $x \in F$ kromě nuly existuje $y \in F$ takové, že $x \cdot y = y \cdot x = 1$, tj. pro všechny prvky kromě nuly existuje inverzní prvek vůči operaci „$\cdot$“ – „x^{-1}“. Navíc v F musí platit, že $0 \neq 1$ (vyloučení triviálních okruhů).

Komutativní těleso je takové těleso, ve kterém je operace „$\cdot$“ komutativní.

Příklady

Příklady těles:

- Tělesa $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$, oproti tomu $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}$ nejsou tělesa - nemají inverzní prvek k násobení
- Racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- $\mathbb{Z}_{p^n} = \{0, \ldots, p^n - 1\}$, kde p je prvočíslo a n přirozené číslo – tzv. *Gallois field*, pro dané p a n existuje vždy až na isomorfismus (přejmenování prvků) jen jedno. - *každé kon. těleso má p^n prvků (KAM TO PATRI???)*
- $(\mathbb{Z}_p, +, -, \cdot, 0, 1)$ je komutativní těleso charakteristiky p, ted obor integrity

Všechna uvedená tělesa jsou komutativní.

Ukázka tělesa $GF(4) = GF(2^2)$

Pro čtyřprvkovou množinu $T = \{0, 1, a, b\}$ definujeme operace sčítání a násobení takto:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Pro takto definované operace + a $\cdot$ platí všechny axiomy tělesa.

Jiný pohled na totéž těleso: vezmeme za prvky T polynomy maximálního stupně 1 s koeficienty v $\mathbb{Z}_2$, např. $a = x$, $b = x + 1$. Násobení pak provádíme modulo polynom $x^2 + x + 1$.

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Věta *(Wedderburnova věta)*

Všechna konečná tělesa jsou komutativní.

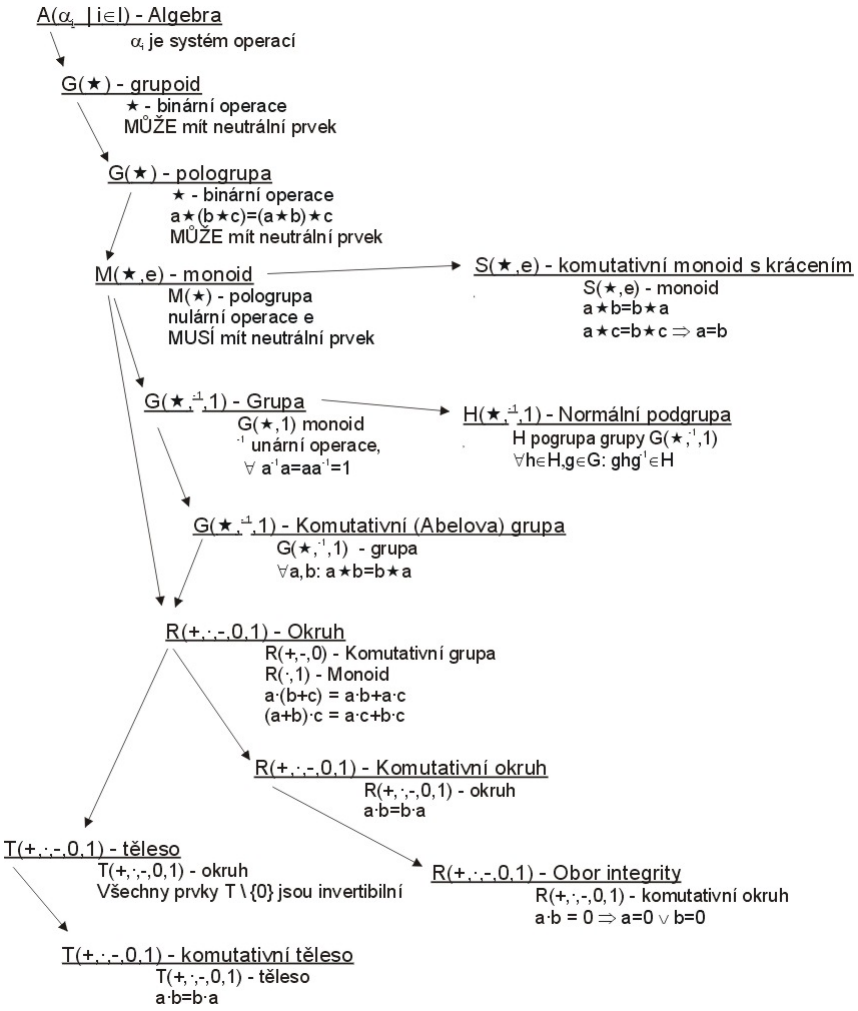
Report *(IOI 10.2.2011)*

Napište definici tělesa. Rozhodnete, zda existuje konene těleso řádu k pro hodnoty k z množiny $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Připomeňme, že řád tělesa je počet jeho prvků. Zvolte si nyní libovolné komutativni těleso T řádu 5,

a) Popište pomocí tabulky, jak jsou v tomto tělese definovány operace sčítání a násobení

b) Vysvětlete, co znamená, že těleso T je komutativni.

c) Udejte příklad nekomutativního tělesa řádu 9 nebo zdůvodněte, proč takové těleso neexistuje



prostě dědičnost jako z C++

13.2 Podgrupa, normální podgrupa, faktorgrupa, ideál

Definice *(podalgebra)*
Množina B je *uzavřená* na operaci α, když $\forall b_1, \dots b_n \in B$ platí $\alpha(b_1, ...b_n) \in B$. Pro algebru $(A, \alpha_i | i \in I)$ je množina $B \subseteq A$ spolu s operacemi α_i *podalgebra* A, je-li množina B uzavřená na operaci $\alpha_i \ \forall i \in I$.

Definice *(podgrupa)*
Podalgebra grupy je *podgrupa* (tj. jde o podmnožinu pův. množiny prvků, uzavřenou na „$\cdot$“ a „$^{-1}$“, spolu s původními operacemi). Podgrupa H grupy G je *normální*, pokud pro každé $g \in G$ (z původní množiny!) a pro každé $h \in H$ platí, že $g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$ (někdy se píše zkráceně $G^{-1}HG \subseteq H$).

Poznámka *(Vlastnosti podgrup)*
Průnik podgrup $G \cap H$ je opět podgrupa. To určitě neplatí o sjednocení $G \cup H$ (to je podgrupou jen pokud je $G \subset H$ nebo $H \subset G$). Každá podmnožina grupy má nějakou nejmenší podgrupu, která ji obsahuje – to je *podgrupa generovaná* touto *množinou*. Podgrupa (i grupa) generovaná jedním prvkem se nazývá *cyklická*. Každá podgrupa cyklické grupy je také cyklická.

Podgrupy každé grupy společně s průnikem jako infimem a podgrupou generovanou sjednocením jako supremem tvoří úplný svaz (algebru se dvěma operacemi se speciálními vlastnostmi, supremem a infimem, definovanými pro všechny její podmnožiny). Úplný svaz se stejnými operacemi tvoří také normální podgrupy (jde o podsvaz prvního).

Poznámka *(Vlastnosti cyklických podgrup)*
Každá cyklická grupa G je komutativní (Abelova).

Důkaz. Protože $x, y \in G$ pak $x, y = a^m.a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = y.x$

Příklady
Příklady podgrup:

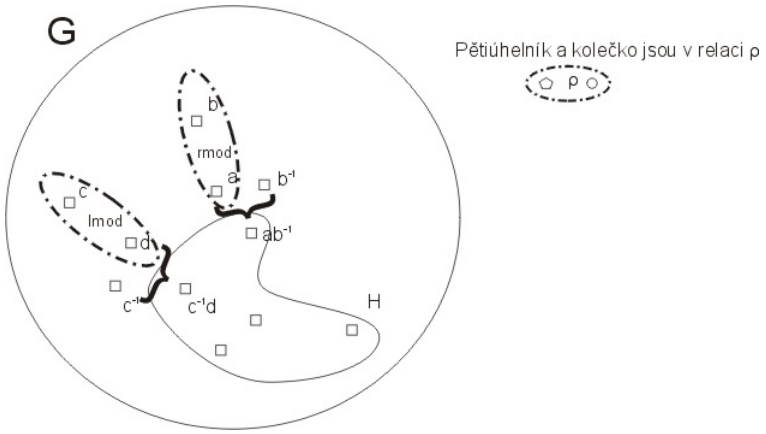
- grupa reálných čísel uzavřená na sčítání není cyklická
- G a $\{e\}$ jsou vždy normální podgrupy grupy $(G, \cdot, ^{-1}, e)$.
- Množina $Z(G) = \{z \in G | gz = zg \ \forall g \in G\}$ je normální podgrupou G („*centrum grupy*“).
- $\mathbb{Z}_8$ má dvě netriviální podgrupy – $\{0, 4\}$ a $\{0, 2, 4, 6\}$ (je sama cyklická, takže obě jsou cyklické), plus samozřejmě triviální $\mathbb{Z}_8$ a $\{0\}$.
- grupa $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot, 1)$ není cyklická[12], skládá se z 4 prvků: $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ a $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1^2 = 1$

[12] $\mathbb{Z}_8^*$ je $\mathbb{Z}_8$ obsahující invertibilní prvky ($[0]_8$ ne)

Definice

Pro grupu G a její podgrupu H se relace rmod_H definuje předpisem $a, b \in G : (a, b) \in \mathrm{rmod}_H \equiv ab^{-1} \in H$. Symetricky se definuje relace lmod_H ($(a, b) \in \mathrm{lmod}_H \equiv a^{-1}b \in H$). Tyto relace jsou ekvivalence. *Index podgrupy v grupě* je $[G : H] = |G/\mathrm{rmod}_H| = |G/\mathrm{lmod}_H|$ (počet tříd ekvivalence podle rmod_H nebo lmod_H).

Řád G (počet jeho prvků grupy) se značí $|G|$.



Věta *(Lagrangeova)*

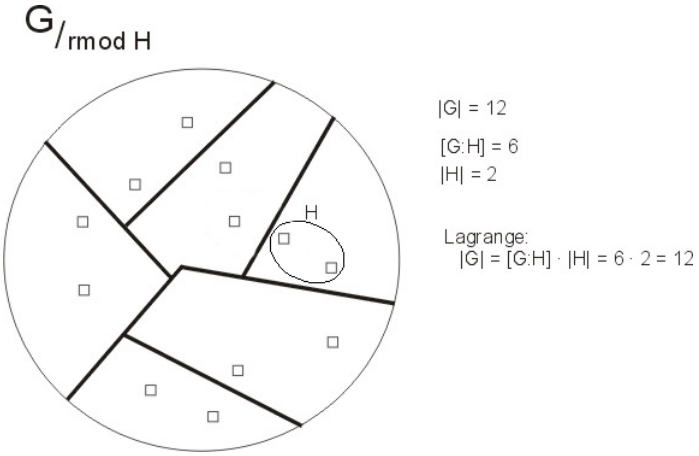
Pro grupu G a její podgrupu H platí: $|G| = [G : H] \cdot |H|$. Z toho plyne, že velikost podgrupy dělí velikost konečné grupy.

Idea důkazu

Nejdříve je nutno dokázat, že lmod H a rmod H jsou ekvivalence (jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní) - vyplývá z vlastností $^{-1}$.

Potom je nutno ukázat, že $[a]_{\mathrm{rmod}H}$, tj. třída ekvivalence určena podle prvku a, je totéž, co Ha (tj. prvky H pronásobeny a „zprava“) – mírně pracné.

Potom se ukáže, že vynásobení zprava je bijekce, tj. $H \to [a]_{\mathrm{rmod}H}$ je bijekce, tj. $|H| = |[a]_{\mathrm{rmod}H}| \, \forall a \in G$, tj. třídy ekvivalence jsou všechny stejně velké, z čehož už věta plyne.

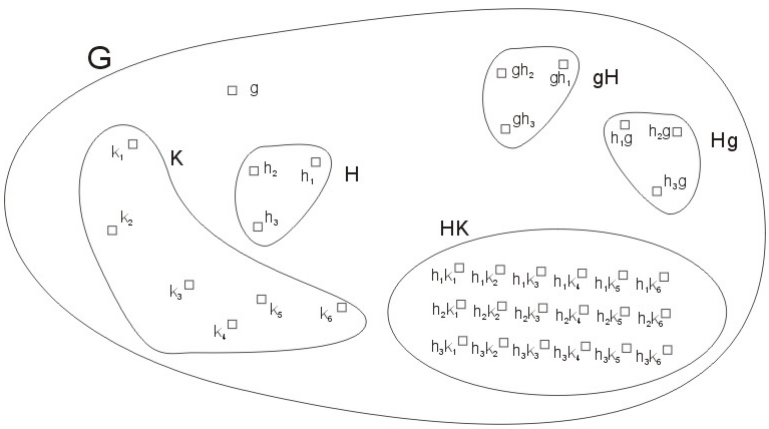


Index podgrupy H v grupě G ($[G : H]$) je prostě počet tříd ekvivalence relace rmod$H$. Dále řád grupy $|G|$ a ukázka Lagrangeovy věty v praxi.

Definice

H, K jsou podgrupy $G(\cdot, ^{-1}, 1)$, $g \in G : \; HK = \{h.k |\; h \in H \, k \in K\}$, $\; gH = \{g\}H$, $\; Hg = H\{g\}$

(tato definice byla použita v minulém důkazu :-))

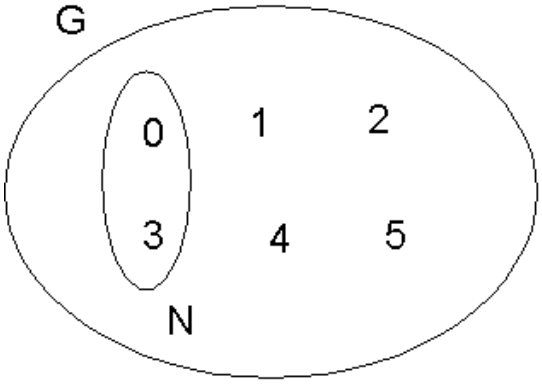


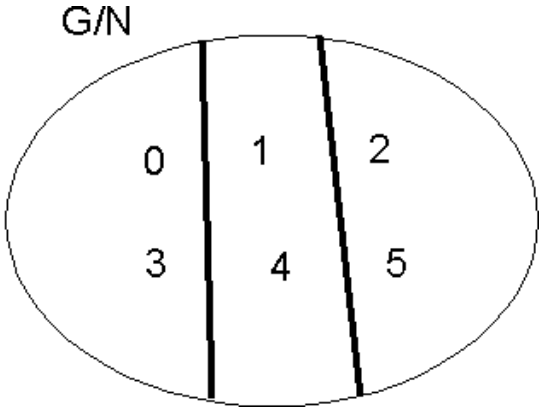
Definice *(faktorgrupa)*
Pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ a nějakou její normální podgrupu N je *faktorgrupa* $G/N = \{gN|g \in G\}$ kde $gN = \{g.n|n \in N\}$ (gN se nazývá levá *rozkladová třída*). $gN = [g]_{\mathrm{lmod}N}$.

Tedy faktorgrupa je množina všech levých rozkladových tříd podle nějaké normální podgrupy. Faktorgrupa cyklické nebo abelovské grupy je také cyklická, resp. abelovská.

Příklady
Příklady faktorgrup:

- Pro grupu celých čísel $\mathbb{Z}$ a její normální podgrupu sudých celých čísel $2\mathbb{Z}$ je $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ faktorgrupou, isomorfní s grupou $\{0, 1\}$. Podobně to platí pro libovolné $n\mathbb{Z}$, kde n je přirozené.
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je faktorgrupa grupy $\mathbb{R}$ (rozkladové třídy jsou tvaru $a + \mathbb{Z}$, kde a je reálné číslo v intervalu $\langle 0, 1)$.
- Faktorová grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$ je isomorfní se $\mathbb{Z}_2$.
- grupa $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ s operací + s mod 6 a její normální podgrupu $N = \{0, 3\}$ pak faktorgrupa je definována jako
  $G/N = \{gN|g \in G\} = \{g\{0, 3\}|g \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\} =$
  $\{0\{0, 3\}, 1\{0, 3\}, 2\{0, 3\}, 3\{0, 3\}, 4\{0, 3\}, 5\{0, 3\}\} =$
  $\{\{(0 + 0) \mod 6, (0 + 3) \mod 6\}, \{(1 + 0) \mod 6, (1 + 3) \mod 6\},$
  $\{(2 + 0) \mod 6, (2 + 3) \mod 6\}, \{(3 + 0) \mod 6, (3 + 3) \mod 6\},$
  $\{(4 + 0) \mod 6, (4 + 3) \mod 6\}, \{(5 + 0) \mod 6, (5 + 3) \mod 6\}\} =$
  $\{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 0\}, \{4, 1\}, \{5, 2\}\} =$
  $\{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\} =$
  $\{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$





- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Zbytkové třídy modulo 6 jako faktorgrupa $(\mathbb{Z}, +)$

Označme $6\mathbb{Z} = \{6k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, 0, 6, 12, \dots\}$

Grupa $(6\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa $(\mathbb{Z}, +)$, protože $6|a \ \& \ 6|b \Longrightarrow 6|(a + b)$.
Navíc $6\mathbb{Z}$ je normální podgrupou, protože + je komutativní.

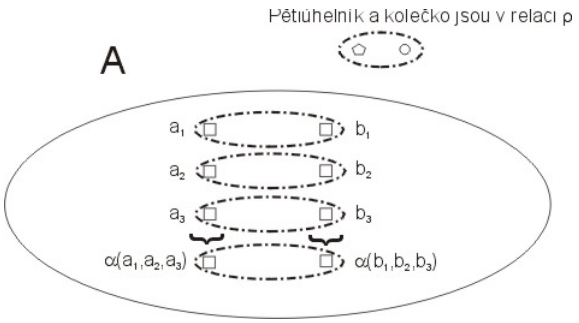
Označme si levé rozkladové třídy $6\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$ následovně:
$T_0 = \{\dots, -6, 0, 6, 12, \dots\}, T_1 = \{\dots, -5, 1, 7, 13, \dots\}, T_2 = \{\dots, -4, 2, 8, 14, \dots\},$
$T_3 = \{\dots, -3, 3, 8, 15, \dots\}, T_4 = \{\dots, -2, 4, 10, 16, \dots\}, T_5 = \{\dots, -1, 5, 11, 17, \dots\}.$

Těchto šest tříd s následovně definovanou binární operaci + tvoří faktorgrupu grupy $(\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $(6\mathbb{Z}, +)$.

Operace sčítání se přenáší, protože $a \in T_i, b \in T_j \Longrightarrow a + b \in T_i + T_j$.

$+$	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_0	T_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_0	T_1	T_2
T_4	T_4	T_5	T_0	T_1	T_2	T_3
T_5	T_5	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4

Definice *(kongruence)*
Obecně v algebrách je *relace ρ slučitelná s operací α* arity n, pokud $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n : (a_i, b_i) \in \rho \ \forall i$ implikuje $(\alpha(a_1, \dots a_n), \alpha(b_1, \dots b_n)) \in \rho$. *Kongruence* je každá ekvivalence slučitelná se všemi operacemi algebry.



Relace ρ slučitelná s operací α, česky řečeno, mám-li n-ární operaci, tak pro každé dvě n-tice pro které platí, že odpovídající si složky n-tice jsou v relaci, tak výsledky operace musí být také v relaci.

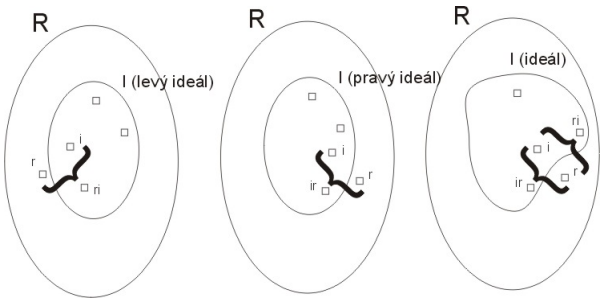
Poznámka

Faktorgrupa je vlastně grupa, v níž jsou jednotlivé prvky třídy ekvivalence na původní grupě podle nějaké kongruence (levé rozkladové třídy tvoří kongruence).

Definice *(ideál)*

Nechť $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ je okruh a $I \subseteq R$. Pak I je *pravý(levý) ideál*, pokud I podgrupa $(R, +, -, 0)$ (je i normální, protože R je z def. okruhu komutativní) a $\forall i \in I, r \in R$ platí $i.r \in I$ (levý $r.i \in I$) (důsledek: uzavřenost I na násobení).

I je *ideál*, pokud je pravý a zároveň levý ideál. Ideál je *netriviální (vlastní)*, pokud $I \neq R$ a $I \neq \{0\}$.



Příklady

Příklady ideálů:

- $\{0\}$ a R jsou (nevlastní, triviální) ideály v každém okruhu R
- Sudá celá čísla tvoří ideál v okruhu $\mathbb{Z}$, podobně to platí pro $n\mathbb{Z}$, kde n je přirozené.
- Množina polynomů dělitelných $x^2 + 1$ je ideálem v okruhu všech polynomů s 1 proměnnou a reálnými koeficienty
- Množina matic $n \times n$ s nulovým posledním sloupcem vpravo je levý ideál v okruhu všech matic $n \times n$, není to ale pravý ideál (podobně s řádky a opačnými ideály)

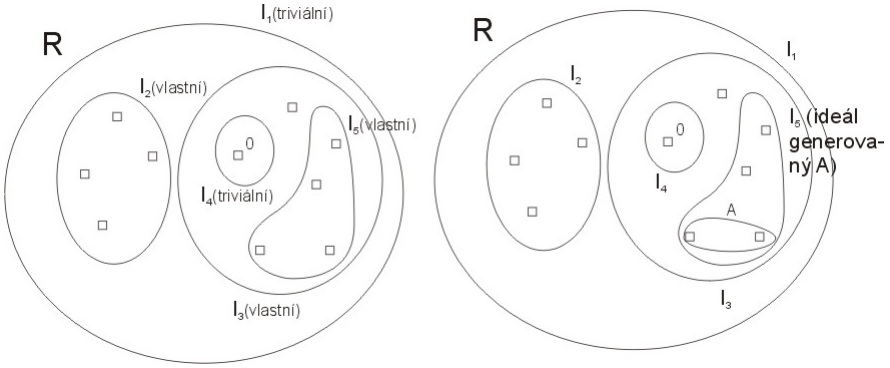
Poznámka *(Vlastnosti ideálů)*

Průnik (levých, pravých) ideálů tvoří opět (levý, pravý) ideál. *Ideál generovaný podmnožinou* A okruhu R je průnik všech ideálů v R, které A obsahují. Všechny ideály nad nějakým okruhem s průniky a ideály generovanými sjednocením tvoří úplný svaz.

I je *maximální ideál*, pokud je netriviální a žádný jiný netriviální ideál není jeho nevlastní nadmnožinou. *Prvoideál* P v okruhu R je takový ideál, že pro každé $a, b \in R$, pokud je $ab \in P$, potom musí být $a \in P$ nebo $b \in P$. Prvoideály mají v některých ohledech podobné vlastnosti jako prvočísla. Každý max.ideál je prvoideál.(fakt??)

Je-li ideál vlastní, pak neobsahuje 1. Každý ideál je neprázdný, protože jako podgrupa $(R, +, -, 0)$ musí obsahovat 0.

Ideál $n\mathbb{Z}$ je prvoideál $\Leftrightarrow$ n je prvočíslo.



Report *(Kral)*
*zda lze z definice neutrálního prvku, který je nadefinovaný e*x=x vyvodit i x*e=x, když je * jen asociativní (podle me nelze, te definici se rika levy neutralni prvek)*

Report *(IP 21.6.2011)*
Vypsat všechny podgrupy grupy S_3 (grupa permutací na 3 prvcích) a jejich index. Definovat index podgrupy a vyslovit vitu o vztahu velikosti grupy, její podgrupy a indexu (to měla být Lagrangeova vita).

Report *(Žemlička KSI)*
Grupa, okruh, teleso. Definice, priklady nakreslil jsem na papir toto:(obrazek dedicnosti) a podebatovali jsme

Report *(Fiala)*
Normalni grupy a faktorgrupy - normalni grupu jsem dal dohromady, jednoduchy priklad taky. U faktorgrupy jsem poradne nevedel, co to je [docela ostudne po vsech tech vetach o homomorfismu/isomorfismu apod z Algebry I], malem jsem byl proto odejit, kvuli ostatnim znamkam ale 3-

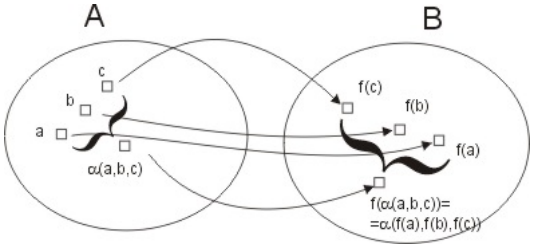
Report *(Matousek)*
grupy, hodne prikladu + normalni podgrupy a priklady (normalnich a nenormalnich) definici grupy jsem tak nejak popsal pres algebru a monoid (u monoidu jsem zapomel na asociativitu, na to se me pak zeptal), priklady grup jsem nejake vedel, normalnich podgrup ani moc ne, ale trosku mi pomohl a nejak jsme to dali dohromady

13.3 Homomorfismy grup

Obecná tvrzení o homomorfismech algeber (platí i pro grupy)

Definice *(homomorfismus)*
O zobrazení $f : A \to B$ řekneme, že je *slučitelné* s operací α, pokud pro každé $a_1, \dots a_n \in A$ platí $f(\alpha_{(A)}(a_1, ...a_n)) = \alpha_{(B)}(f(a_1), ...f(a_n))$. Pro algebry stejného typu (se stejným počtem operací stejné arity) je zobrazení $f : A \to B$ *homomorfismus*, pokud je slučitelné se všemi jejich operacemi.

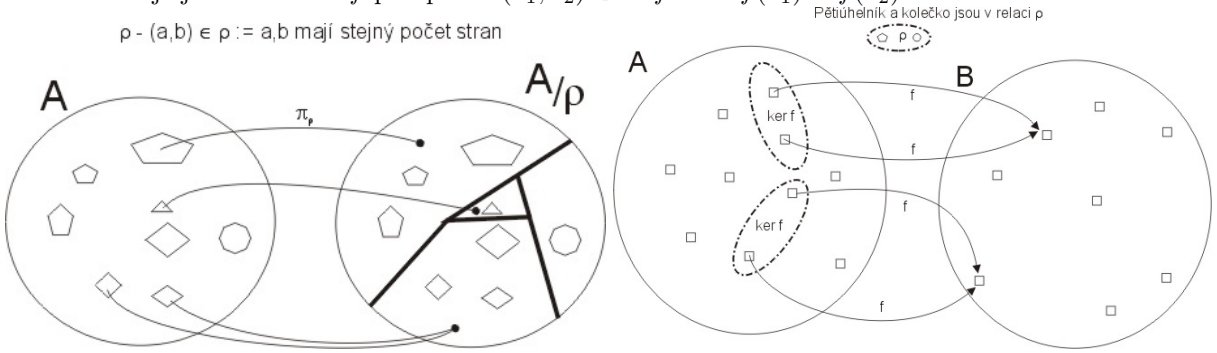
Bijektivní homomorfismus se nazývá *isomorfismus*, algebry stejného typu jsou *isomorfní*, existuje-li mezi nimi aspoň 1 isomorfismus.



Slučitelnost s operací - pokud to nejprve zobrazím a pak aplikuji operaci, musí mi vyjít to samé jako kdybych nejprve použil operaci a zobrazil až výsledek.

Poznámka *(Vlastnosti homomorfismů)*
Složení homomorfismů je homomorfismus. Je-li f bijekce a homomorfismus, je f^{-1} taky homomorfismus.

Definice *(přirozená projekce, jádro zobrazení)*
Přirozená projekce množiny A podle kongruence ρ je $\pi_\rho : A \to A/\rho$, kde $\pi_\rho(a) = [a]_\rho$. Pro zobrazení $f : A \to B$ se *jádro zobrazení* definuje jako relace $\ker f$ předpisem $(a_1, a_2) \in \ker f \equiv^{def} f(a_1) = f(a_2)$.



Přirozená projekce prostě zobrazí prvek na jeho třídu ekvivalence.

Poznámka *(homomorfismy a kongruence)*
Pro každou kongruenci ρ na libovolné algebře A je přirozená projekce $\pi_\rho : A \to A/\rho$ homomorfismus.

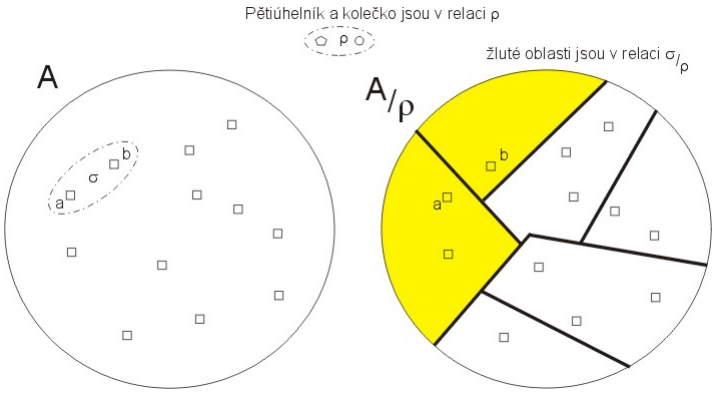
Věta *(O homomorfismu)*
Nechť $f : A \to B$ je homomorfismus algeber stejného typu a ρ kongruence na A. Potom:

1. existuje homomorfismus $g : A/\rho \to B$ takový, že $f = g\pi_\rho$ právě když $\rho \subseteq \ker f$,[13]
2. g je navíc isomorfismus, právě když f je na (surjekce) a $\rho = \ker f$.[14]

Definice *(faktor-ekvivalence)*

$\rho \subseteq \sigma$ 2 ekvivalence na A. Pak σ/ρ - *faktor-ekvivalence* je relace definovaná: $([a]_\rho, [b]_\rho) \in \sigma/\rho \overset{\text{def}}{\equiv} (a, b) \in \sigma$.

Relace ρ *slučitelná s* α, pak α na A/ρ def.: $\alpha([a_1]_\rho, ...[a_n]_\rho) = [\alpha(a_1, ...a_n)]_\rho$. Kongruence ρ na A, pak stejným způsobem def. na A/ρ strukturu algebry.



Česky řečeno, snažím se dát do relace chlívky, takže se neprve mrknu jestli jsou v relaci jejich reprezentanti.

Věta *(Věty o isomorfismu)*

1. Nechť $f : A \to B$ je homomorfismus algeber stejného typu, pak $f(A)$ je podalgebra B a $A/\ker f$ je isomorfní algebře $f(A)$.
2. Nechť $\rho \subseteq \eta$ jsou dvě kongruence na algebře A. Pak algebra $(A/\rho)/(\eta/\rho)$ je isomorfní algebře A/η.

Homomorfismy grup a dalších struktur

Věta *(O homomorfismu grup)*
Je-li zobrazení $f : G \to H$, kde G, H jsou grupy, slučitelné s bin. operací, pak je homomorfismus. (Důkaz: nejdřív dokázat slučitelnost s „e“ a pak „$^{-1}$“, oboje přímo z definice grupy.)

Definice *(mocnina prvku)*
V grupě lze definovat g^n (kde $n \in \mathbb{Z}$) jako:

- $g^0 = 1$,
- $g^{n+1} = g \cdot g^n \quad (n > 0)$,
- $g^n = (g^{-1})^{-n} \quad (n < 0)$.

Mocninná podgrupa grupy G je potom cyklická podgrupa – pro nějaký prvek $g \in G$ jde o množinu $\{\dots, g^{-1}, g^0, g, g^2, \dots\}$.

Poznámka *(O mocnině prvku)*
Je-li zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ definováno předpisem $\varphi_g(n) = g^n$ (tj. jde o mocniny prvku g), kde $g \in (G, \cdot, ^{-1}, 1)$, pak je φ grupový homomorfismus $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ a $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Poznámka *(Vlastnosti cyklických grup)*
Nechť grupa $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je cyklická. Potom platí:

1. Je-li G nekonečná, pak $G \simeq (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ (je isomorfní s celými čísly).
2. Je-li $n = |G|$ konečné, pak $(G, \cdot, ^{-1}, 1) \simeq (\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ (je isomorfní s grupou zbytkových tříd odpovídající velikosti).

[13] přirozená projekce je taky homomorfismus
[14] surjekce je rozbrazení na celou cílovou množinu

13.4 Podílová tělesa

14 Diskrétní matematika

Požadavky

- Uspořádané množiny
- Množinové systémy, párování, párování v bipartitních grafech (systémy různých reprezentantů)
- Kombinatorické počítání
- Princip inkluze a exkluze
- Latinské čtverce a projektivní roviny.

14.1 Uspořádané množiny

Definice *(Kartézský součin)*
Nechť X a Y jsou množiny. Symbolem $X \times Y$ označíme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in X$ a $y \in Y$. Formálně zapsáno: $X \times Y = \{(x,\ y); x \in X, y \in Y\}$ se nazývá *kartézský součin* množin X a Y.

Kartézský součin $X \times X$ někdy značíme jako X^2.

Definice *(relace)*
Relace R je množina uspořádaných dvojic. Jsou-li X a Y množiny, nazývá se libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times Y$ *relací* mezi X a Y. Zdaleka nejdůležitější případ je $X = Y$. V takovém případě mluvíme o relaci na X, což je tedy libovolná podmnožina X^2.

Náleží-li (x, y) relaci R, tedy $(x, y) \in R$, říkáme, že x a y jsou v relaci R. Značíme xRy.

Definice *(druhy relací)*
Relace X může být:

- *reflexivní*, jestliže pro každné $x \in X$ platí xRx
- *ireflexivní*, jestliže platí $xRy \ \Rightarrow \ x \neq y$
- *symetrická*, jestliže $xRy \Rightarrow yRx$
- *tranzitivní*, jestliže $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- *antisymetrická*, jestliže $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Definice *(ekvivalence)*
Řekneme, že relace R na X je *ekvivalence* na X, jestliže je symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Definice *(uspořádání, uspořádaná množina)*
Uspořádání na nějaké množině X je každá relace na X, která je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. *Uspořádaná množina* je dvojice (X, R), kde X je množina a R je uspořádání na X.

Pro uspořádání se používá značení $\leq$ nebo $\preceq$. Pro každé uspořádání lze odvodit „ostrou nerovnost“ $<$ nebo $\prec$, kde platí, že $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

Příklady
Uspořádané množiny:

- $(\mathbb{N}, \leq)$
- $(\mathbb{N}, |)$, kde „$|$“ je relace „dělí“
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}(X)$ označuje množinu všech podmnožin a $\subseteq$ normální množinovou inkluzi
- orientovaný acyklický graf (V, E) s relací $\rho : (a, b) \in \rho \equiv^{def}$ *existuje cesta z a do b*

Definice *(lineární uspořádání)*
Lineární uspořádání je takové uspořádání, kde pro každé dva prvky x a y platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Někdy se také nazývá *úplné uspořádání.*

Uspořádání, které není úplné, nazýváme *částečným uspořádáním.*

Definice *(bezprostřední přechůdce)*
Bezprostřední předchůdce prvku y je takový prvek x, pro který platí $x < y$, a neexistuje žádné takové t, že $x < t < y$.

Poznámka *(Hasseův diagram)*
Při znázorňovaní se uspořádaná množina zakresluje pomocí bodů a šipek, jako kterákoliv jiná relace. Protože těchto šipek by bylo mnoho, vychází se z tranzitivity a znázorňují se šipky pouze mezi prvky a jejich bezprostředními předchůdci. Přijmeme-li navíc konvenci, že v obrázku povedou všechny šipky nahoru, není třeba zakreslovat směr šipek, pouze spojnice bodů. Takovéto znázornění se pak nazývá *Hasseův diagram.*

Poznámka *(uspořádání na kartézském součinu)*
Mám-li dvě množiny A a B a na nich uspořádání $\leq_A$ a $\leq_B$ můžu definovat „složené uspořádání“

- „po složkách“ – $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \equiv^{\text{def}} a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2$
- „lexikograficky“ – $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \equiv^{\text{def}} a_1 \leq_A a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2)$

Definice
Říkáme, že (X, R) a (Y, P) jsou *isomorfní uspořádané množiny*, pokud existuje nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to Y$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí xRy právě když $f(x)Pf(y)$.

Definice *(Předuspořádání)*
Předuspořádání nazveme každou relaci, která je reflexivní a transitivní (nebudeme tedy požadovat antisymetrii – mohou vznikat „cykly“).

Poznámka
Mám-li množinu X s relací $\sim$, která je předuspořádání, potom relace $\sim$ je uspořádání na množině X/ρ (rozklad podle tříd ekvivalence ρ), kde $a\rho b \equiv (a \sim b \wedge b \sim a)$.

Definice
Nezávislý systém M podmnožin množiny X je podmnožina $P(X)$ taková, že každé dvě množiny $A, B \in M$ jsou neporovnatelné relací náležení.

Věta *(Spernerova)*
Libovolný nezávislý systém podmnožin n-prvkové množiny má nejvýš $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ množin.

TODO: Patří sem dobré uspořádání a Zernelova věta??? (to by znamenalo přidat sem i supremum, infimum, řetězec, nejmenší a největší prvek)

14.2 Množinové systémy, párování, párování v bipartitních grafech (systémy různých reprezentantů)

Definice
Nechť X a I jsou množiny. *Množinovým systémem nad X* nazveme $|I|$-tici $M = \{M_i; i \in I\}$, kde $M_i \subseteq X$
Je tedy možné, aby se tam táž množina objevila víckrát.

Definice *(systém různých reprezentantů)*
Systém různých reprezentantů (SRR) je funkce $f : I \to X$ taková, že $\forall i \in I : f(i) \in M_i$ a f je prostá.
Jinými slovy, SRR je výběr jednoho prvku z každé množiny M_i tak, že všechny vybrané prvky jsou navzájem různé. Obecně se tedy neuvažují nekonečné systémy.

Definice *(párování)*
Párování v grafu G je množina hran $F \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol grafu G patří nejvýše do jedné hrany z F.
Ekvivalentní definice jsou přes stupeň vrcholu (každý vrchol má stupeň nejvýše 1) nebo přes disjunktnost hran (každé dvě jsou disjunktní - žádné dvě nemají společný vrchol).

Definice *(bipartitní graf)*
Bipartitní graf je takový graf G, kde množinu vrcholů $V(G)$ můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny V_1 a V_2 takové, že každá hrana z $E(G)$ spojuje vždy vrchol z V_1 s vrcholem z V_2.

Definice
Incidenčním grafem množinového systému M nad množinou X nazveme bipartitní graf

$$B_M = (I \cup X, \{\{i, x\}, x \in M_i\})$$

V podstatě si každý prvek z X i každý index I označíme vrcholem a spojíme každý index i s prvky x, které náleží do M_i. Z incidenčního grafu pak lze nahlédnout existenci SRR - ten existuje, právě když v incidenčním grafu existuje párování velikosti $|I|$.

Věta *(Hallova)*
Systém různých reprezentantů v M existuje, právě když pro každou $J \subseteq I$ je

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|$$

Definice *(perfektní párování)*
Perfektním párováním nazveme párování M v grafu G, pro které platí

$$|M| = \frac{|V(G)|}{2}$$

Tedy perfektní párování je takové, kde je každý vrchol spárovaný s nějakým jiným vrcholem. Dalším důležitým pojmem je *maximální párování*, což je v podstatě nejlepší možné párování (pokrývá největší možný počet vrcholů), jakého jsme v daném grafu schopni dosáhnout.

Věta *(O párování v bipartitním grafu)*
Buď $G = (A \cup B, E)$ graf se dvěma partitami A a B a E neprázdná množina hran. Jestliže platí $\deg u \geq \deg v \; \forall u \in A, \forall v \in B$, potom existuje párování velikosti $|A|$. Díky tomu pokud má bipartitní graf všechny vrcholy stejného stupně, pak má perfektní párování.
Důkaz
Převede se na Hallovu větu s použitím „okolí“ vrcholů (tj. bodů přímo spojených s vrcholem hranou).

Věta *(Tutteova)*
Graf (V, E) má perfektní párování, právě když pro každou množinu vrcholů $A \subseteq V$ platí:

$$c_l(G \setminus A) \leq |A|$$

(tj. počet komponent souvislosti s lichých počtem vrcholů v indukovaném podgrafu je menší než velikost množiny vrcholů). Této vlastnosti se také někdy říká *Tutteova podmínka*.

Algoritmus *(Edmondsův algoritmus na perfektní párování)*
Vstupem algoritmu je graf $G = (V, E)$ a libovolné párování M (i prázdné). Výstupem je párování M', které alespoň o 1 větší než M, pokud je něčeho takového možné dosáhnout. Postup výpočtu:

1. Vybudujeme maximální možný „Edmondsův les“ párování M – do nulté hladiny umístíme volné vrcholy a prohledáváním do šířky sestrojíme max. strom takový, že se střídají párovací a nepárovací hrany (mezi sudou a lichou hladinou jen nepárovací, mezi lichou a sudou jen párovací).
   Některé vrcholy se v lese vůbec neobjeví – nazveme je „kompost“. Ty jsou už nějak spárovány mezi sebou a nebudeme je potřebovat.
2. Pokud existuje hrana mezi sudými hladinami různých stromů, máme „volnou střídavou cestu“ (tj. cestu liché délky mezi 2 volnými vrcholy, na které se střídají nepárovací a párovací hrany), na níž můžeme zalternovat hrany párování a to tak zvětšit o 1 a skončit.
3. Pokud existuje hrana mezi sudými hladinami téhož stromu, máme „květ“ (tj. kružnici liché délky, na které se střídají párovací a nepárovací hrany). Květ můžeme zkontrahovat a algoritmus rekurzivně pustit na takto získaný graf. Pokud dostaneme
   (a) staré párování beze změny, vrátíme $M' = M$
   (b) jiné (větší) párování $\hat{M}$, prohodíme párování na cestě v $\hat{M}$ od vrcholu květu v nejvyšší hladině (kam jsme květ zkontrahovali) k volnému vrcholu a přidáme květ zpátky (a párování sedí a je větší než M)
4. Není-li žádná hrana mezi sudými hladinami, vydej $M' = M$.

Hlavní algoritmus jen opakuje výše popsaný krok, dokud vrací větší párování než bylo předchozí. Celková složitost jednoho kroku je $O((m+n)n)$ a pro celý algoritmus $O((m+n)n^2)$.

14.3 Kombinatorické počítání

Věta
Nechť N je nějaká n-prvková množina a M je m-prvková množina ($m > 0$). Potom počet všech zobrazení $f : N \to M$ je m^n.

Věta
Libovolná n-prvková množina X má právě 2^n podmnožin.

Věta
Nechť $n > 0$. Každá n-prvková množina má právě 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a právě 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Věta
Pro $m, n \geq 0$ existuje právě $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ prostých zobrazení n-prvkové množiny do m-prvkové množiny.

Definice
Prostá zobrazení množiny X do sebe se nazývá *permutace množiny* X. Tato zobrazení jsou zároveň na.

Permutace si můžeme představit jako přerovnání množiny - např. $\{4213\}$ je permutací množiny $\{1234\}$. Jiný zápis permutací je pomocí jejich cyklů (*cyklus* v permutaci je pořadí prvků, kde začnu u nějakého prvku, pokračuji jeho obrazem v permutaci a toto opakuji, dokud nenarazím na první prvek). U cyklů znázorníme každý prvek množiny jako bod. Z každého bodu vychází a do každého vchází právě po jedné šipce. Šipka vycházející z prvního prvku množiny ukazuje na první prvek permutace, šipka z druhého prvku množiny na druhý prvek permutace atd. Zápis se pak provádí tak, že každou kružnici zapíšeme po řadě zvlášť (např. $p = ((1,4,5,2,8)(3)(6,9,7))$ je zápis permutace (483529617).

Věta *(Faktoriál)*
Počet permutací na n-prvkové množině je $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$. Toto číslo pojmenujeme *faktoriál* n a značíme $n!$.

Definice *(Binomické koeficienty)*
Nechť $n \geq k$ jsou nezáporná celá čísla. *Binomický koeficient* neboli kombinační číslo $\binom{n}{k}$ (čteme n nad k) je funkce proměnných n, k, daná jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

nebo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definice
Nechť X je množina a k je nezáporné celé číslo. Pak $\binom{X}{k}$ budeme značit *množinu všech k-prvkových podmnožin* množiny X.

Věta
Pro každou konečnou množinu X je počet všech jejích k-prvkových podmnožin roven $\binom{|X|}{k}$.

Věta *(Vlastnosti kombinačních čísel)*
Platí:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Důkaz
První je zřejmé ze vzorce pro kombinační čísla, druhé se ukaže jednoduše pro použití komb. čísel – mějme množinu X a v ní prvek a. Kolik je podmnožin X obsahujících, resp. neobsahujících a?

Důsledek
Z druhé vlastnosti plyne vzhled *Pascalova trojúhelníku*, tedy že v $n+1$. řádku jsou vždy právě binomické koeficienty $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

Věta *(O počtu způsobů zápisu)*
Nezáporné celé číslo m lze zapsat jako součet r nezáporných sčítanců právě $\binom{m+r-1}{r-1}$ způsoby.
Důkaz
Důkazem je onen pokus s rozdělováním m kuliček mezi r přihrádek (nebo spíš vkládání přihrádek mezi kuličky v řadě).

Věta *(Binomická věta)*
Pro nezáporné celé číslo n a libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Věta *(Multinomická věta)*
Pro libovolná čísla $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1,\dots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_m^{k_m}$$

kde ta věc uprostřed v tom vzorci je *multinomický koeficient*, definovaný:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

14.4 Princip inkluze a exkluze

Věta *(Princip inkluze a exkluze)*
Pro každý soubor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečných množin platí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Důkaz
Nechť x je libovolný prvek $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Kolikrát přispívá x vlevo a kolikrát vpravo?

Vlevo: jednou - triviální *Vpravo*: Nechť j $(1 \leq j \leq n)$ označuje počet množin A_i, do kterých patří x. Můžeme množiny přejmenovat aby platilo $x \in A_1, A_2, \ldots, A_j$ a $x \notin A_{j+1}, \ldots, A_n$. Prvek se tedy objevuje v průniku každé k-tice množin $A_1, A_2, \ldots, A_j$ (a v žádných jiných). Protože existuje právě $\binom{j}{k}$ k-prvkových podmnožin j-prvkové množiny, bude se x objevovat v $\binom{j}{k}$ průnicích k-tic vybraných ze všech n prvků. Velikosti k-tic jsou přitom započteny se znaménkem $(-1)^{k-1}$, tudíž x na pravé straně přispívá veličinou

$$\begin{aligned} j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \cdots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j} = \\ = 1 - \binom{j}{0} + \binom{j}{1} - \binom{j}{2} \cdots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j} = \\ = 1 - \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(-1)^i = 1 - (1-1)^j = 1 \end{aligned}$$

□

14.5 Latinské čtverce a projektivní roviny

Definice *(Projektivní rovina)*
Konečná projektivní rovina je množinový systém (B, P), kde B je konečná množina a P je systém podmnožin množiny B, splňující:

1. $\forall p \neq p' \in P : |p \cap p'| = 1$
2. $\forall x \neq y \in B \; \exists p \in P : x, y \in p$
3. $\exists$ *4 body* $a, b, c, d \in B : \forall p \in P : |\{a, b, c, d\} \cap p| \leq 2$

Projektivní rovinu si lze představit jako množinu bodů B a množinu *přímek* P (jak se ostatně prvky těchto množin nazývají). Pak si lze podmínky představit takto:

1. Každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě.
2. Pro každé dva různé body x a y existuje přímka, která jimi prochází.
3. Existují čtyři body tak, že žádné 3 z nich neleží na jedné přímce (body v obecné poloze).

Věta
Buď (B, P) projektivní rovina. Potom všechny její přímky mají stejný počet bodů, tedy $\forall p, q \in P : |p| = |q|$

Definice
Řád projektivní roviny (B, P) je číslo $|p| - 1$, kde p je libovolná přímka z P $(p \in P)$.

Věta
Nechť (B, P) je projektivní rovina řádu n. Potom platí, že každým bodem prochází právě $n+1$ přímek a $|B| = |P| = n^2 + n + 1$

Věta
Jestliže $n = p^2$, kde p je prvočíslo, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

Definice *(Latinský čtverec)*
Latinský čtverec řádu n je matice $A \in \{1, \ldots, n\}^{n \times n}$, $\forall i, j \neq j' : A_{ij} \neq A_{ij'}$ a $A_{ji} \neq A_{j'i}$.

V podstatě se jedná o čtverec n krát n, kde v každém řádku i sloupci jsou vepsaná všechna čísla od 1 do n.

Definice

Mějme dva latinské čtverce A, B stejných rozměrů $n \times n$. Pak řekneme, že je *ortogonální* (značíme $A \perp B$), jestliže platí:

$$\forall a, b \in \{1, \ldots, n\}\ \exists i, j : A_{ij} = a, B_{ij} = b$$

Pokud tedy ty dva latinské čtverce „položíme přes sebe“, vznikne nám na každé pozici dvojice čísel od 1 do n s tím, že každá dvojice je unikátní.

Věta

Nechť M je množina latinských čtverců řádu n, z nichž každé dva jsou navzájem ortogonální. Potom $|M| \leq n - 1$

Věta

Pro $n \geq 2$, projektivní rovina řádu n existuje právě tehdy, když existuje soubor $n - 1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu n.

Důkaz

1. *Implikace* $\Leftarrow$*:* Vezmu jednu – „vnější“ – přímku projektivní roviny. Na ní leží $n + 1$ bodů, které nazvu $A_0, \ldots, A_n$. Přímky jdoucí z krajních bodů A_0 a A_n tvoří mřížku (nazvu ji T) – protínají se v n^2 bodech.

   Potom každý z vnitřních bodů A_i $(1?i?n - 1)$ definuje lat. čtverec: každá přímka jdoucí z nějakého z vnitřních bodů A_i se s přímkami z A_0 a z A_n protne právě jednou a každé 2 přímky z A_i prochází mimo vnější přímku různými body. Každá přímka proch. každým řádkem i sloupcem mřížky T právě jednou $\Rightarrow$ dostávám latinský čtverec:

   $$(L^k)_{ij} = l \Leftrightarrow T_{ij} \in p_l^k$$

   kde L^k značí k-tý lat. čtverec, T_{ij} bod mřížky T na souřadnicích (i, j) a p_l^k l-tou přímku jdoucí z bodu A_k.

   Čtverce jsou ortogonální - sporem nechť pro mají dva čtverce (k-tý a k'-tý) na souřadnicích stejnou uspořádanou dvojici hodnot (a, b) na dvou různých místech. Pak by se přímky p_a^k a $p_b^{k'}$ protínaly ve 2 bodech.

2. *Implikace* $\Rightarrow$*:* Vytvořím přímku q s body $A_0, \ldots, A_n$ a mřížku T o $n \times n$ bodech. Do ní přidám přímky $p_{1,1}, \ldots, p_{n-1,n}$:

   $$p_l^k = \{A_k\} \cup \{T_{ij} | L_{ij}^k = l\}$$

   Pak je třeba ověřit axiomy projektivní roviny.

15 Teorie grafů

Požadavky

- Základní pojmy teorie grafů, reprezentace grafu.
- Stromy a jejich základní vlastnosti, kostra grafu.
- Eulerovské a hamiltonovské grafy.
- Rovinné grafy, barvení grafů.

15.1 Základní pojmy teorie grafů, reprezentace grafu

Definice *(Graf)*
Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je nějaká množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V (takže neuspořádaných dvojic). Prvky množiny V se jmenují **vrcholy grafu** G a prvky množiny E **hrany grafu** G.

Definice *(Orientovaný graf)*
G je dvojice (V, E), kde E je podmnožina kartézského součinu $V \times V$. Prvky E (tj. uspořádané dvojice prvků z V) nazýváme orientované hrany grafu.

Definice *(Symetrizace grafu)*
Orientovanému grafu $G = (V, E)$ přiřadíme neorientovaný graf $\mathrm{sym}(G) = (V, \bar{E})$ kde $\bar{E} = \{\{x, y\};\ (x, y) \in E \vee (y, x) \in E\}$. Graf $\mathrm{sym}(G)$ se nazývá **symetrizace** grafu G. *(Z orientovaného grafu se odstraní údaje o směru hran.)*

Definice *(Důležité typy grafů)*

- **úplný graf K_n:** $V = \{1, \ldots, n\}, E = \binom{V}{2}$ *(Každý vrchol je spojen hranou s každým např. K_5 — „pentagram“.)*
- **kružnice C_n:** $V = \{1, \ldots, n\}, E = \{\{i, i+1\}; i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$ *(V kružnici se nesmí opakovat vrcholy.)*
- **cesta P_n:** $V = \{0, 1, \ldots, n\}, E = \{\{i-1, i\}; i = 1, \ldots, n\}$ *(Jako kružnice, ale bez poslední hrany.)*
- **bipartitní graf:** $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$, $E \subseteq \{\{u_i, v_j\}; i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$; v **úplném bipartitním grafu** je $E = \{\{u_i, v_j\}; i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$ *(Každý vrchol z jedné partity je spojen hranou pouze s některými (v úplném z každým) vrcholem druhé partity. Např. $K_{3,3}$, úplný bipartitní graf na 3 a 3 vrcholech.)*

Definice *(Sled, tah)*
Pro graf $G = (V, E)$ definujeme **sled** jako posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ pro $i = 1, \ldots, n$. **Tah** je sled, ve kterém se žádná hrana neopakuje.

Definice *(Isomorfismus grafů)*
Dva grafy G, G' považujeme za **isomorfní** (značíme $G \simeq G'$), pokud se liší jen v označení vrcholů a hran, tj. pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : G \to G'$ tak, že platí $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$.

Definice *(Podgraf, indukovaný podgraf)*
Graf G je **podgrafem** grafu G', jestliže $V(G) \subseteq V(G')$ a $E(G) \subseteq E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$. Pro **indukovaný podgraf** G grafu G' platí, že $V(G) \subseteq V(G')$ a $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$. *(Indukovaný podgraf dostaneme vymazáním některých vrcholů původního grafu a všech hran tyto vrcholy obsahujících.)*

Definice *(Souvislost)*
Neorientovaný graf je **souvislý**, jestliže mezi každými jeho dvěma vrcholy v něm existuje cesta. Pro orientované grafy definujeme **slabou souvislost** — po symetrizaci se z něj stane souvislý neorientovaný graf — a **silnou souvislost** — každé dva vrcholy lze spojit orientovanou cestou v obou směrech.

Poznámka
Pro orientované grafy není samotný pojem „souvislost“ definován.

Definice *(n-souvislost)*
Graf je vrcholově **n-souvislý**, pokud má alespoň $n + 1$ vrcholů a po odebrání libovolných $n - 1$ vrcholů dostaneme vždy souvislý graf. Podobně (přes odebírání hran) definujeme **hranovou n-souvislost.**

Poznámka
Vrcholová n-souvislost je silnější podmínka než hranová n-souvislost, protože při odebírání $n - 1$ vrcholů můžeme (a většinou musíme) odebrat více než $n - 1$ hran.

Definice *(Komponenta souvislosti)*
Komponenta souvislosti grafu je jeho maximální souvislý podgraf. (Sjednocením všech komponent grafu dostaneme původní graf).

Definice *(Most)*
Most je hrana, která neleží ve 2-souvislém podgrafu (po jejím odstranění se zvětší počet komponent).

Definice *(Blok)*
Blok je maximální vrcholově 2-souvislý podgraf grafu. Samotný graf o 2 vrcholech spojených jednou hranou je také blok. *(2-souvislý podgraf, ke kterému se nedá přidat žádný vrchol, protože by přestal být 2-souvislý.)*

Definice *(Artikulace)*
Artikulace je vrchol v souvislého grafu G takový, že $G - v$ není souvislý.

Definice *(Blokový graf)*
je graf incidence (sousednosti) bloků a artikulací — artikulacím a blokům odpovídají vrcholy, hrany značí incidenci bloků a artikulací.

Věta
Blokový graf souvislého grafu je strom.

Definice *(Hranové pokrytí)*
Množinu $C \subseteq E$ v grafu $G = (V, E)$ nazveme **hranovým pokrytím,** pokud každý vrchol $v \in V$ je obsažen alespoň v jedné hraně $e \in C$.

Definice *(Stupeň vrcholu)*
Stupeň vrcholu, $\deg_G(v)$, je počet hran grafu G obsahujících vrchol v. V případě orientovaného grafu rozlišujeme **vstupní stupeň vrcholu,** $\deg^+_G(v)$, což je počet vstupních hran, podobně **výstupní stupeň vrcholu.**

Definice *(Párování)*
Každá množina vzájemně disjunktních hran v grafu se nazývá **párování**.

Definice *(k-faktor grafu)*
k-faktor je podgraf $G' = (V, E')$ grafu $G = (V, E)$ takový, že $(\forall v \in V)\deg_{G'}(v) = k$.

Poznámka *(1-faktor grafu)*
1-faktor je vlastně párování na všech vrcholech (úplné párování).

Věta *(Princip sudosti)*
$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E(G)|$

Definice *(Skóre grafu)*
Skóre grafu je posloupnost stupňů vrcholů grafu, přičemž nezáleží na pořadí, v jakém jsou uváděny.

Věta *(Věta o skóre)*
Nechť $D = (d_1, \ldots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ a označme symbolem D' posloupnost $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$, kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu, právě když je D' skóre grafu. *(Jakoby odebereme poslední vrchol (V_n) a myslíme si, že byl propojen s předchozími d_n vrcholy.)*

Důkaz
Jedna implikace je triviální, druhá (máme D skóre grafu – a tedy k němu nějaký graf G a dokazujeme, že D' je taky skóre grafu G') není o moc těžší – „přepojíme“ hrany tak, aby z vrcholu v_n šly právě do $v_{n-d_n}, \ldots v_{n-1}$ a v_n odebereme.

Definice *(Metrika grafu)*
Pro souvislý graf G definujeme **metriku** jako funkci $d_G : V \times V \to \mathbf{R}$, kde číslo $d_G(v, v')$ představuje délku nejkratší cesty z v do v'. Funkce d_G má následující vlastnosti (tj. splňuje axiomy metriky, jak ji známe z metrických prostorů):

1. $d_G(v, v') \geq 0$, a $d_G(v, v') = 0 \Leftrightarrow v = v'$;
2. $(\forall v, v' \in V)(d_G(v, v') = d_G(v', v))$ *(symetrie)*
3. $(\forall v, v', v'' \in V)(d_G(v, v'') \leq d_G(v, v') + d_G(v', v''))$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Definice *(Některé grafové operace)*
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Definujeme

- **odebrání hrany:** $G - e = (V, E \setminus \{e\})$, kde $e \in E$ je hrana grafu G
- **přidání nové hrany:** $G + \bar{e} = (V, E \cup \{\bar{e}\})$, kde $\bar{e}$ je dvojice vrcholů, která není hranou v G
- **odebrání vrcholu:** $G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E; v \notin e\})$, kde $v \in V$ (odebereme vrchol v a všechny hrany do něj zasahující)
- **dělení hrany:** $G\%e = (V \cup \{z\}, ((E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\})$, kde $\{x, y\} \in E$ je hrana a $z \notin V$ je nový vrchol (na hranu $\{x, y\}$ „přikreslíme“ nový vrchol z).

Řekneme, že graf G' je **dělení** grafu G, pokud G' je isomorfní grafu vytvořenému z grafu G postupným opakováním operace dělení hrany.

15.2 Reprezentace grafu

Definice *(Nakreslení)*
Graf lze reprezentovat např. jeho nakreslením – lze si pod tím představit i grafické znázornění na papír. Formální definici nakreslení provedeme v sekci o rovinných grafech.

Definice *(Matice sousednosti)*
Mějme graf $G = (V, E)$ s n vrcholy $v_1, \ldots, v_n$. **Matice sousednosti** grafu G je čtvercová matice $A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ řádu n definovaná předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(Po umocnění matice sousednosti A^k představuje číslo $a_{ij}^{(k)}$ počet sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j v grafu G.)

Definice *(Matice vzdáleností)*
Pro grafy s ohodnocenými hranami lze zkonstruovat **matici vzdáleností** — je to matice sousednosti, do které se v případě, že hrana existuje, ukládá místo jedničky její ohodnocení.

Definice *(Laplaceova matice)*

$$(L_G)_{uv} = \begin{cases} \deg u & u = v \\ -1 & \{u, v\} \in E \\ 0 & u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

(Na hlavní diagonále je stupeň vrcholu, kde vede hrana, tam je -1, jinde 0.)
Poznámka
Laplaceovu matici lze použít mj. k výpočtu počtu koster grafu, jak uvidíme v následující sekci.

Definice *(Matice incidence)*
Řádky matice odpovídají vrcholům, sloupce odpovídají hranám. Prvek matice se rovná -1, pokud v tomto vrcholu začíná daná hrana, $+1$ pokud tam tato hrana končí, 0 jinak. Neorientované grafy mají u obou vrcholů hrany hodnotu $+1$.

Definice *(Seznam sousedů)*
Pomocí dvou polí; v jednom čísla všech následníků, v druhém poli indexy určující, kde začíná sekvence sousedů daného vrcholu.

Definice *(Seznam hran)*
Pole s prvky o dvou složkách, zaznamenávají se do něj hrany ve formě obou jejich vrcholů; pro orientované grafy lze stanovit, že první složka bude reprezentovat počáteční a druhá koncový vrchol hrany.

15.3 Stromy a jejich základní vlastnosti

Definice *(Strom, list)*
Strom je souvislý graf neobsahující kružnici. **List** (koncový vrchol) je vrchol stupně 1.

Věta
Počet stromů na n-vrcholové množině je n^{n-2}.

Věta *(Charakterizace stromů)*
Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. G je strom.
2. Pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y. *(jednoznačnost cesty)*
3. Graf G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf. *(minimální souvislost)*
4. Graf G neobsahuje kružnici a každý graf vzniklý z G přidáním hrany již kružnici obsahuje. *(maximální graf bez kružnic)*
5. G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.
6. G je acyklický a $|V| = |E| + 1$.

Definice *(Kostra grafu)*
Kostra grafu G je strom, který je podgrafem G a obsahuje všechny vrcholy grafu G.

Věta *(Počet koster)*
Počet koster grafu G je $\det(L'_G)$, kde L'_G je matice, která vznikne odstraněním i-tého řádku a i-tého sloupce z Laplaceovy matice charakterizující graf.
??? Dukaz

Report
Representace grafu byla docela jednoducha, popsal jsem ty representace, hlavni rozdil byl v casove narocnosti nalezeni sousedu vrcholu, bavili jsem se o BFS, DFS, jak jednotlive representace tedy ovlivni casovou narocnost. Popsal jsem a dokazal, co jsou mocniny matice sousednosti.

Report *(Majerech)*
teorie grafu: zakl. pojmy, souvislost, stromy (jen definice), kostry (chtel obecnou definici i pro nesouvisle grafy); eulerovy & hamilt. grafy, rovinne grafy a barveni - definice a informace o tom, jak jsou problemy tezke z algoritmickeho hlediska.

Report *(Fiala)*
Začal jsem stromy a kostrami, prakticky to, co je v materiálech + napsal jsem důkaz Cayleyho formule (je opravdu lehký a zabere hodně papíru). Měl jsem ještě dokázat nějakou implikaci u těch stromů. Tam jsem se trošičku zamotal, ale nakonec +-

Report *(Fiala)*
Stromy, min. kostra - Uvedl jsem definice, ekvivalentní podmínky, že graf je stromem (bez důkazu), Kruskalův a Primův algoritmus. U Kruskalova alg. jsem se zamotal při vysvětlování, proč je korektní, o Primově alg. ani složitosti obou mě nenechal mluvit (ale měl jsem něco na papíře a četl si to).

Report *(Surynek)*
napsal jsem ekvivalentni definice stromu, par ekvivalenci dokazal, par obecnych kydu, definoval jsem kostru a vyslovil par vet pro kostry (pocet koster uplnaku, pocet koster grafu pres Laplaceovu matici), rekl jsem, jak se algoritmicky hleda kostra. Krom tech ekvivalenci u stromu jsem neumel nic dokazat (pocet koster uplnaku jsem tusil obrysy Obratlovců, ale jinak nic moc, prý že je to "takové nějaké podivné"), proto za 2.

Report *(Mlček)*
Definice, základní tvrzení. Nebylo toho moc, tak jsem pro jistotu připsal ještě něco o minimální kostře a nastínil algoritmy (Jarník, Borůvka, Kruskal). U tvrzení o počtu koster úplného grafu o (resp. počtu stromů na) n vrcholech se mě ptal na důkaz, nevěděl jsem ho, ale to zřejmě nevadilo (ostatní bylo snad bez výtek). Pár obecných otázek kolem.

Report *(Mlček)*
Na stromy jsem řekl ideu důkazu Cayleyho formule a fakt sem se divil, když se mě po drsnostech z diferenciálních rovnic zeptal "No a víte prosímvás, co je to indukovaný podgraf??".. takže z trivialit prváku sem dostal jedničku, celkově jedna.

Report *(IOI 10.2.2011)*
Teorie grafů: stromy s)Uvedte alespoň dvě definice stromu a ukažte jejich ekvivalenci.
b)Popište pojem kostra grafu a uveďte algoritmus pro její naleni včetně analýzy potřebného času a paměti

15.4 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Definice *(Eulerovský graf)*
Graf $G = (V, E)$ se nazývá **eulerovský**, jestliže existuje takové pořadí všech hran $e_1, \ldots, e_n$, že $e_i \cap e_{i+1} \neq 0 \wedge e_1 \cap e_n \neq 0$, tedy každé dvě po sobě jdoucí hrany mají společný vrchol a rovněž první a poslední hrana se protínají, žádná hrana se neopakuje. Jinými slovy: graf je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$, v němž se každá hrana vyskytuje právě jednou. Takový tah nazýváme **uzavřeným eulerovským tahem.**

Věta *(Charakteristika eulerovského grafu)*
Graf $G = (V, E)$ je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a každý vrchol G má sudý stupeň.

Důkaz
„⇒“: tato implikace je triviální — eulerovský graf musí být souvislý, do každého vrcholu musím vstoupit i z něj vystoupit, což zvýší stupeň vždy o 2.

„⇐“: Mějme tah maximální délky $v_0, e_1, \ldots, e_m, v_m$. První a poslední vrchol tahu jsou totožné, jinak by do prvního vrcholu vedl lichý počet hran, a jelikož graf má všechny stupně sudé, dal by se tah prodoužit. Vidíme, že každou hranou v grafu vede nějaký uzavřený tah (nejdelší tah hranou je uzavřený, protože jinak by šel z vrcholu ze sudým stupněm prodlužovat).

Náš maximální tah obsahuje všechny hrany a vrcholy, protože pokud ne, ze souvislosti jistě existuje vrchol, který je v max. tahu, z něhož vede hrana, která v max. tahu není. Tou vede uzavřený tah a pokud ho spojíme s naším maximálním tahem, dostaneme delší, což je spor.

Definice *(k-hamiltonovský graf)*
Graf je **k-hamiltonovský**, pokud existuje posloupnost všech vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ taková, že $d_G(v_i, v_{i+1}) \leq k \wedge d_G(v_n, v_1) \leq k$. *(Do každého vrcholu smíme jen jednou.)* O grafu říkáme jednoduše, že je **hamiltonovský**, pokud je 1-hamiltonovský.

Definice *(Hamiltonovská kružnice)*
Hamiltonovská kružnice je kružnice procházející každým vrcholem grafu právě jednou. Graf má takovou kružnici, právě když je hamiltonovský. Její nalezení je NP-úplný problém.
Poznámka
Problém nalezení hamiltonovské kružnice se dá upřesnit na problém nalezení hamiltonovské kružnice s nejmenší vahou v ohodnoceném grafu, což je známý problém obchodního cestujícího. Je tedy také NP-úplný, ale existují algoritmy, jejichž řešení jsou blízká optimálnímu.

Věta *(Diracova)*
Graf $G = (V, E)$ je hamiltonovský, pokud platí:

$$\forall v \in V : \deg v \geq \frac{|V|}{2}$$

Důkaz
Dokážeme o něco silnější lemma pro jeden vrchol, z kterého Diracova věta plyne: pro dva vrcholy u, v v grafu G nespojené hranou platí, že pokud $\deg u + \deg v \geq |V|$, potom je graf G hamiltonovský, právě když G s přidanou hranou je hamiltonovský.

Jedna implikace je triviální, takže vezmeme tu druhou. Máme v grafu $G + \{u, v\}$ hamiltonovskou kružnici C. Pokud ta neobsahuje $\{u, v\}$ tak je i v grafu G a končíme, pokud tuto hranu obsahuje, označíme pro vrcholy grafu v pořadí, v jakém je prochází hamiltonovská kružnice $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$:

$$A := \{i, \{u, v_i\} \in E\}$$
$$B := \{i + 1, \{v, v_i\} \in E\}$$

Pokud mají tyto množiny neprázdný průnik, nalezneme vrcholy v_k a v_{k+1}, přes které můžeme kružnici „přepojit“. A ani B neobsahují „1“, takže $|A \cup B| \leq n - 1$. Potom

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq |V| - |A \cup B| \geq 1$$

takže takový bod v_k existuje.

Věta
Každý souvislý graf je 3-hamiltonovský.

Důkaz
$G = (V, E)$ je souvislý, existuje v něm tedy kostra $T = (V, E')$, která je souvislá. Kostra vznikla ubráním některých hran, takže $d_T(x, y) \geq d_G(x, y) (\forall x, y \in V)$. Stačí tedy dokázat, že kostra T je 3-hamiltonovská.

Lemma
Každý strom je 3-hamiltonovský.

Důkaz
Indukcí:

1. pro $n \leq 4$ triviální
2. Máme dvě komponenty T_1, T_2, každá je 3-hamiltonovská. Graf je souvislý → existuje most z T_1 do T_2. Most vede přes vrcholy x', x, y, y', kde $x, x' \in T_1, y, y' \in T_2$. Potom existuje 3-hamiltonovské propojení komponent $T_1, T_2 : x, (T_1), x', y', (T_2), y$.

Věta
Graf je vrcholově 2-souvislý, právě když v něm mezi každými dvěma různými vrcholy existují dvě vrcholově disjunktní cesty.

Důkaz
Implikace $\Leftarrow$ je zřejmá, opačná se dá ukázat sporem – nechť ve dvousouvislém grafu mezi nějakými dvěma vrcholy neexistují dvě vrcholově disjunktní cesty. Pak vezmu vrchol, který je na každé cestě mezi těmito dvěma a odeberu ho – a tím se graf stane nesouvislým, což je spor.

Věta
Graf je vrcholově 2-souvislý, právě když jej lze vytvořit z trojúhelníku (t.j. z K_3) posloupností dělení a přidávání hran (definice těchto operací jsou na začátku kapitoly).

Věta
Každý 2-souvislý graf je 2-hamiltonovský.

Důkaz
??? Do každého vrcholu vedou 2 vrcholově i hranově disjunktní cesty — při zpáteční cestě použiju druhou. Důkaz podobně jako u věty o 3-hamiltonovských grafech.

15.5 Rovinné grafy

Definice *(Oblouk)*
Oblouk je podmnožina roviny tvaru $o = \gamma(\langle 0,1\rangle) = \{\gamma(x); x \in \langle 0,1\rangle\}$, kde $\gamma : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ je nějaké prosté spojité zobrazení intervalu $\langle 0,1\rangle$ do roviny. Přitom body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme **koncové body** oblouku o.

Definice *(Nakreslení grafu)*
Nakreslením grafu $G = (V, E)$ rozumíme přiřazení, které každému vrcholu v grafu G přiřazuje bod $b(v)$ roviny a každé hraně $e = \{v, v'\}$ přiřazuje oblouk $o(e)$ v rovině s koncovými body $b(v)$ a $b(v')$. Zobrazení $b(v)$ je prosté (různým vrcholům odpovídají různé body) a žádný z bodů tvaru $b(v)$ není nekoncovým bodem žádného z oblouků $o(e)$. Graf spolu s nakreslením nazýváme **topologický graf.**

Definice *(Rovinný graf)*
Nakreslení grafu G, v němž oblouky odpovídající různým hranám mají společné nanejvýš koncové body, se nazývá **rovinné nakreslení**. Graf G je **rovinný,** má-li alespoň jedno rovinné nakreslení.

Definice *(Stěna grafu)*
Mějme G rovinný topologický graf. Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$ bodů roviny (kde X je množina všech bodů všech oblouků nakreslení grafu G) nazveme **souvislou,** pokud pro libovolné dva body $x, y \in A$ existuje oblouk $o \subseteq A$ s koncovými body x, y. Relace souvislosti rozdělí množinu všech bodů roviny, které neleží v žádném z oblouků nakreslení, na třídy ekvivalence. Ty nazýváme **stěnami** topologického rovinného nakreslení grafu G.

Definice *(Topologická kružnice)*
Uzavřená křivka v rovině neprotínající sebe sama; formálně se definuje jako oblouk, jehož koncové body splývají.

Věta *(Jordanova, o kružnici)*
Každá topologická kružnice k rozděluje rovinu na právě dvě souvislé části („vnitřek“ a „vnějšek“), přičemž k je jejich společnou hranicí.

Věta *(Kuratowského)*
Graf G je rovinný, právě když žádný jeho podgraf není isomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ ani K_5.

Věta *(Eulerův vzorec)*
Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf, a nechť s je počet stěn nějakého rovinného nakreslení G. Potom platí $|V| - |E| + s = 2$.

Důkaz
Indukcí podle počtu hran. Pro graf sestávající pouze z jednoho vrcholu vzorec platí.

1. Pokud přidaná hrana nevytvoří kružnici, nezměnil se počet stěn, ale o jednu se zvětšil počet vrcholů a hran (graf musí být vždy souvislý, takže jediná možnost jak tohoto dosáhnout, je připojit další vrchol).
2. Pokud přidaná hrana vytvoří kružnici, zvětší se počet stěn o jednu (přidaná hrana sousedí se dvěma různými stěnami — podle Jordanovy věty o kružnici — které před přidáním byly stěnou jedinou), počet hran také o jednu, a počet vrcholů se nezmění.

Vzorec tedy v obou případech platí.

Věta *(2-souvislý rovinný graf)*
Dvousouvislý rovinný graf má hranice libovolné stěny libovolného nakreslení jako kružnice.

Věta *(Maximální počet hran rovinného grafu)*
Nechť G je rovinný graf s alespoň 3 vrcholy. Potom $|E| \leq 3|V| - 6$. Rovnost nastává pro každý maximální rovinný graf, t.j. rovinný graf, ke kterému nelze již přidat žádnou hranu (při zachování množiny vrcholů) tak, aby zůstal rovinný. Pokud graf G navíc neobsahuje trojúhelník (t.j. K_3 jako podgraf) a má-li alespoň 3 vrcholy, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.

Důkaz
Obě tvrzení můžeme dokázat pro maximální rovinný graf. V prvním případě je určitě dvousouvislý, protože jinak můžu ještě nějaké dva body spojit. Navíc každá stěna musí být trojúhelník (je-li čtverec nebo něco většího, také jdou ještě nějaké dva body spojit). Tím dostanu, že $3s = 2|E|$ a zbytek vyjde z Eulerova vzorce.

Druhý případ má jednu zvláštnost – takový graf může být hvězda. Pro tu je ale tvrzení splněno. Pokud není hvězda, už musí být dvousouvislý a všechny stěny musí být čtverce, takže dostanu $4s = 2|E|$ a z Eulerova vzorce i celý výsledek.

Důsledek
Rovinný graf má alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

15.6 Barvení grafu

Definice *(Neorientovaný graf s násobnými hranami (multigraf))*
je trojice (V, E, ε), kde V a E jsou disjunktní množiny a $\varepsilon : E \to \binom{V}{2} \cup V$ je zobrazení *(hrany prohlásíme za „abstraktní“ objekty a ε určuje pro každou hranu dvojici vrcholů, které jsou jejími „konci“).*

Poznámka
Pro orientovaný graf je pojem definován obdobně, pouze hrany jsou přiřazeny uspořádané dvojici vrcholů, tedy: $\varepsilon : E \to \langle v_1, v_2 \rangle \cup V$.

Definice *(Geometrický duál grafu)*
Nechť G je topologický rovinný graf. Označme S množinu stěn G. Jako **(geometrický) duál grafu** definujeme multigraf tvaru (S, E, ε), kde ε se definuje předpisem $\varepsilon(e) = \{S_i, S_j\}$, jestliže hrana e je společnou hranicí stěn S_i a S_j (přičemž může být $S_i = S_j$, jestliže z obou stran hrany e je tatáž stěna). Značíme jej G^*. *(Sice opravdu platí $G^{**} = G$, ale pak již pro spočítání druhého duálu potřebujeme znát duál i pro multigrafy!)*

Úloha *(barvení mapy)*
Uvažme politickou mapu, na níž jsou vyznačeny hranice států. Předpokládejme, že každý stát tvoří souvislou oblast ohraničenou nějakou topologickou kružnicí. Dvě oblasti pokládáme za sousední, jesliže mají společný aspoň kousek hranice. Každý stát na takové mapě chceme vybarvit nějakou barvou tak, že sousední státy nikdy nebudou mít stejnou barvu. Jaký minimální počet barev je potřeba?

Definice *(Barevnost grafu)*
Buď $G = (V, E)$ graf, k přirozené číslo. Zobrazení $b : V \to \{1, \ldots, k\}$ nazveme **obarvením grafu** G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. **Barevnost (chromatické číslo) grafu** G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev potřebný k obarvení G.

Lemma
Duální graf rovinného grafu je rovinný graf.

Převod úlohy barvení mapy na úlohu hledání barevnosti grafu
Máme-li mapu, kterou chápeme jako nakreslení nějakého grafu G, potom otázka obarvitelnosti mapy pomocí k barev je ekvivalentní s obarvitelností duálního grafu G^* pomocí k barev. Na druhé straně platí, že každý rovinný graf se vyskytne jako podgraf duálního grafu nějakého vhodného grafu. Takto lze převést problém barvení map na problémy barevnosti rovinných grafů.

Věta *(Věta o pěti barvách)*
Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 5$.

Důkaz
Indukcí dle počtu vrcholů grafu. Pro $|V| \leq 5$ je tvrzení triviální. Podle důsledku věty o počtu hran v rovinném grafu existuje vrchol stupně ≤ 5. Pokud má vrchol v stupeň < 5, použijeme indukční předpoklad: obarvíme graf $G - v$ 5 barvami a v přiřadíme barvu, která není mezi barvami jeho (nejvýše čtyř) sousedů. Zbývá tedy případ, kdy má v stupeň 5 a jeho sousedi jsou obarveni různými barvami. Graf G má pevně zvolené rovinné nakreslení a v tomto nakreslení budou t, u, x, z, y sousedé vrcholu v v takovém pořadí, v jakém příslušné hrany vycházejí z vrcholu v (např. po směru hodinových ručiček). Uvažme vrcholy x a y a nechť $V_{x,y}$ je množina všech vrcholů grafu $G' = G - v$ obarvených barvami $b(x)$ nebo $b(y)$. Zřejmě $x, y \in V_{x,y}$.

Nastávají dva případy:

1. Neexistuje cesta z x do y používající pouze vrcholů z $V_{x,y}$. Mějme $V'_{x,y}$ množinu vrcholů, které jsou v G' spojeny s x cestou používající jen vrcholy z $V_{x,y}$. Definujeme nové obarvení b' takto: $b'(s) = b(s)$, pokud $s \notin V'_{x,y}$; a pokud $s \in V'_{x,y}$, změníme barvu s z $b(y)$ na $b(x)$ nebo z $b(x)$ na $b(y)$ (tzn. na množině $V_{x,y}$ zaměníme barvy). Zřejmě b' je obarvení, a protože $b'(x) = b'(y) = b(y)$, můžeme položit $b'(v) = b(x)$. Tedy b' je obarvení grafu G 5 barvami.
2. Pokud taková cesta existuje (označme ji P), uvažme vrcholy t a z. Zřejmě $V_{x,y}$ a $V_{t,z}$ jsou disjunktní množiny. Cesta P spolu s hranami $\{v, x\}$ a $\{v, y\}$ tvoří kružnici, která odděluje t a z, a proto by každá cesta z t do z musela použít některý vrchol této kružnice. Neexistuje tedy cesta z t do z používající pouze vrcholů z $V_{t,z}$ a obarvení grafu G 5 barvami lze zkonstruovat stejně jako v předchozím případě, pouze musíme začít s vrcholy z a t.

Věta *(Problém čtyř barev)*
Je možné každou mapu obarvit 4 barvami?

Důkaz
Věta platí, ale je velmi těžké ji dokázat (probírání mnoha případů počítačem).

Poznámka
NP-úplné problémy: je dán neorientovaný graf G a číslo k.

1. Je možné G obarvit k barvami?
2. Totéž, ale předem víme, že k=3.
3. Totéž, ale graf je rovinný.
4. Totéž, ale stupeň libovolného vrcholu je nejvýše 4.
5. Je dáno obarvení třemi barvami, dotaz na netriviálně jiné.

15.7 Základní grafové algoritmy

Tato sekce není požadovaná ke zkoušce!

(Nebo teda je požadovaná, ale v informatice, kde je vypracovaná zvlášť)

V tomto oddíle zavedeme pro odhady časových složitostí algoritmů značení $n = |V(G)|$ a $m = |E(G)|$.

Algoritmus *(Dijkstrův algoritmus pro hledání nejkratší cesty)*
Máme graf G, jehož hrany jsou ohodnoceny kladnými čísly, tzn. že je dáno zobrazení $w : E(G) \to (0, \infty)$. (Ohodnocení $w(e)$ hrany e si představujeme jako její délku. Délka cesty je rovna součtu délek jejích hran a vzdálenost $d_{G,w}(u, v)$ vrcholů u, v je rovna nejmenší z délek všech cest spojujících u, v. „Obyčejná“ grafová vzdálenost je speciální případ, totiž je-li $w(e) = 1$ pro každou hranu e.) Hledáme nejkratší cestu z vrcholu s do všech ostatních vrcholů.

1. (Inicializace)
„Odhad“ vzdálenosti $d(\cdot)$ u počátečního vrcholu s nastavíme na 0, odhady u všech ostatních vrcholů na ∞ (známe cestu délky 0 z s do s, délky ostatních cest neznáme). Do množiny A vrcholů, u nichž ještě není odhad definitivní, dáme všechny vrcholy kromě s.
2. (Volba množiny N)
Do množiny N právě zpracovávaných vrcholů uložíme všechny vrcholy z A, které mají ze všech vrcholů z A minimální odhad vzdálenosti; tyto vrcholy z A vyřadíme.
3. (Aktualizace odhadů)
Pro každou hranu $e = \{v, y\} \in E$, kde $v \in N, y \in A$, porovnáme hodnoty $d(y)$ a $d(v) + w(v, y)$. Pokud $d(v) + w(v, y) < d(y)$ (přes vrchol v vede do y kratší cesta, než jsme zatím znali), nastavíme $d(y)$ na tuto hodnotu. Po vyčerpání všech takových hran pokračujeme dalším krokem.
4. (Test ukončení)
Jestliže odhady vzdáleností všech vrcholů v množině A jsou ∞, algoritmus končí, jinak pokračuje krokem 2.

Po skončení algoritmu je buď $A = 0$ (je-li G souvislý) nebo A obsahuje pouze vrcholy nedosažitelné cestou z vrcholu s.
??? Algoritmus jsem opravil, i když je to vcelku zbytečné ... kdyžtak to někdo zkontrolujte.

Věta *(Složitost Dijkstrova algoritmu)*
Lze ho implementovat v čase $O(n \log n + m)$ — např. pomocí Fibonacciho hald.

Poznámka
Pokud hledáme nejkratší cestu pouze do jednoho zadaného vrcholu c, můžeme ukončit Dijkstrův algoritmus hned poté, co tento vrchol opustí množinu A (jeho vzdálenost se stane definitivní). Výpočet také můžeme urychlit následující heuristikou: máme funkci $h : V(G) \to \langle 0, \infty)$ splňující $h(c) = 0$ a pro každou hranu $e = \{u, v\} \in E$ platí $|h(u) - h(v)| \leq w(e)$ (v problémech dopravního spojení to může být např. vzdálenost vzdušnou čarou od cíle). Potom při volbě množiny N vybíráme prvky s minimálním součtem dosavadního odhadu a heuristické funkce — $d(v) + h(v)$. Je-li h kvalitní, dá se čekat, že algoritmus najde definitivní vzdálenost do c rychleji.

Algoritmus *(Prohledávání do šířky)*
Máme graf $G = (V, E)$ a počáteční vrchol s. Na začátku položíme $V_0 = \{s\}$, v dalších krocích položíme $V_{i+1} = \{v \in V \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_i) : \exists u \in V_i, \{u, v\} \in E\}$. Složitost algoritmu je $O(n + m)$.

Algoritmus *(Prohledávání do hloubky)*
??? Poměrně jasné, často vede k exponenciální složitosti. Nutno rozlišovat metodu zpracování prvků — **preorder, inorder** nebo **postorder.**

Algoritmus *(Hladový (Kruskalův) algoritmus na hledání minimální kostry)*
Mějme souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran w. Hrany máme uspořádány vzestupně podle váhy, $w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_n)$.

1. Položme $E_0 = 0$
2. Z množiny E_{i-1} spočítáme množinu E_i následovně:

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{neobsahuje-li graf } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ kružnici} \\ E_{i-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

Algoritmus se zastaví, pokud E_i má $n - 1$ hran. Poslední množina E_i jsou hrany minimální kostry grafu G.

Věta *(Složitost Kruskalova algoritmu)*
Při implementaci potřebujeme v podstatě vyřešit úlohu udržování ekvivalence (UNION-FIND): máme množinu vrcholů, na počátku je rozdělena do jednoprvkových tříd ekvivalence. Navrhněte datové struktury a algoritmus, který efektivně vykonává dvě operace:

1. Sjednocení tříd (UNION): učinit dva vrcholy ekvivalentními t.j. nahradit třídy je obsahující jejich sjednocením.
2. Testování ekvivalence (FIND): Pro dané dva vrcholy rozhodnout, zda jsou momentálně ekvivalentní.

V průběhu algoritmu hledání minimální kostry vykonáme $n - 1$ operací UNION — jednu při každém přidání hrany, a m operací FIND — při každém testování, zda přidávaná hrana nevytvoří kružnici. *(pozn.: Vrcholy této hrany musí ležet v různých komponentách.)*

Řešení: vrcholy mají přiřazenu značku určující třídu ekvivalence, do které patří; a pro každou třídu ekvivalence existuje seznam jejích vrcholů. Testování ekvivalence je pak porovnání dvou značek o složitosti $O(1)$ a při sjednocení tříd musím přeznačit a přemístit vrcholy jedné ze tříd, což zabere $O(n)$ času. Pokud přeznačujeme vždy menší třídu, vyjde odhad potřebného času $O(n \log n + m)$.

Algoritmus *(Jarníkův (Primův) algoritmus na hledání minimální kostry grafu)*
Je dán souvislý graf $G = (V, E)$. Budeme postupně vytvářet množiny $V_0, V_1, \cdots \subseteq V$ vrcholů a $E_0, E_1, \cdots \subseteq$ hran, přičemž $E_0 = 0$ a $V_0 = \{v\}$, kde v je libovolně zvolený vrchol. V i-tém kroku algoritmu vybereme z množiny hran $\{\{x, y\} \in E(G); x \in V_{i-1} \wedge y \in V \setminus V_{i-1}\}$ tu s minimálním ohodnocením (bude to $e_i = \{x_i, y_i\}$) a položíme $V_i = V_{i-1} \cup \{y_i\}$ a $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$. Pokud žádná taková hrana neexistuje, algoritmus končí, to nastane v $(n-1)$-ním kroku a E_{n-1} je množina hran minimální kostry grafu. *(Kostru tedy začínám budovat od jediného vrcholu a v každém kroku k ní přidám nejkratší z hran mezi vrcholy kostry a zbytkem vrcholů.)* [15]

Algoritmus *(Topologické třídění)*
Problém: V orientovaném grafu $G = (V, E)$ sestrojte prosté zobrazení $f : V \to \{1 \ldots |V(G)|\}$ tak, aby $\forall (v_1, v_2) \in E; f(v_1) < f(v_2)$. *(Tedy máme očíslovat vrcholy prvními přirozenými čísly tak, aby hrany vedly jen z vrcholu s nižším číslem do vrcholu s vyšším číslem.)*
Algoritmus: Nejprve nastavíme čítač na 1. Nalezneme vrchol, do kterého nevede žádná hrana; tento vrchol očíslujeme čítačem a odtrhneme ho od grafu (sestrojíme indukovaný podrgraf) a zvýšíme čítač. Tento krok opakujeme, dokud množina vrcholů grafu není prázdná. Pokud nemůžeme v nějakém kroku nalézt bod, do kterého nevede žádná hrana, nelze graf topologicky setřídit.
Využití: Odpovídají-li vrcholy grafu jednotlivým krokům nějakého postupu a hrany časovým závislostem, které je třeba zachovat, odpovídá topologické setřídění tohoto grafu (jednomu z) pořadí, ve kterém je nutné kroky vykonávat.

[15] Jarníkův algoritmus lze implementovat v čase $O((n + m) \log n)$.

16 Pravděpodobnost a statistika

Požadavky

- Náhodné jevy, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost náhodných jevů
- Náhodné veličiny, střední hodnota, rozdělení náhodných veličin, normální a binomické rozdělení
- Lineární kombinace náhodných veličin
- Bodové odhady, intervaly spolehlivosti, testování hypotéz, t-test, chí-kvadrát test, lineární regrese

TODO !!!

16.1 Náhodné jevy, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost náhodných jevů

16.2 Náhodné veličiny, střední hodnota, rozdělení náhodných veličin, normální a binomické rozdělení

16.3 Lineární kombinace náhodných veličin

16.4 Bodové odhady, intervaly spolehlivosti, testování hypotéz, t-test, chí-kvadrát test, lineární regrese

17 Kompaktnost, úplnost, posloupnosti a řady funkcí

Požadavky

- Kompaktní metrické prostory
- Kompaktní topologické prostory
- Úplné metrické prostory
- Aplikace metrických a topologických prostorů
- Stejnoměrná konvergence
- Mocninné a Taylorovy řady
- Fourierovy řady
- Aplikace

17.1 Kompaktní metrické prostory

Definice *(kompaktní prostor)*
Řekneme, že metrický prostor je *kompaktní*, jestliže v něm lze z každé posloupnosti bodů vybrat konvergentní podposloupnost.

Příklady

- Každý konečný prostor je kompaktní.
- Každý omezený uzavřený interval (v $\mathbb{R}$!) je kompaktní.

Věta *(zachování kompaktnosti)*
Kompaktnost se zachovává:

1. přechodem k uzavřenému podprostoru,
2. obrazem spojitým zobrazením,
3. kartézským součinem.

Idea důkazu
1. – mám vybranou s limitou, musí zůstávat všechny limity v něm (díky uzavřenosti). 2. – dokážu za chvíli v jiné větě :-)
3. – u konečně mnoha bych vybral z každé konvergentní, aby byly se stejnými indexy („postupně“), a jejich součin by měl být asi taky konvergentní. U nekonečného součinu nevím.

Definice *(omezená podmnožina)*
Podmnožina A metrického prostoru (M, d) je *omezená*, pokud existuje konečné K takové, že

$$x, y \in A \;\Rightarrow\; d(x, y) < K$$

Věta *(uzavřenost kompaktního prostoru)*
Každý kompaktní podprostor Y libovolného metrického prostoru X je uzavřený a omezený (v X).
Idea důkazu

- Uzavřenost: Z definice (kompaktní prostory vždy mají konvergentní podposloupnosti a tudíž v nich leží i příslušné limity).
- Omezenost: sporem, nechť není omezený.

  Pokud není omezený, můžeme pro nějaký pevně daný bod a pro libovolně velké K vzít bod $b \in X$, že $d(a, b) > K$ – vezmeme dva body, vzdálené od sebe $3K$, a díky trojúhelníkové nerovnosti alespoň jeden z nich je od a vzdálen K.

  Pak vytvoříme induktivně posloupnost (a_n) bez konvergentní podposloupnosti. Začněme v libovolném a_1. Máme k prvních členů, vezmu $R = \max\limits_{i \in \{2..k\}} \{d(a_1, a_i)\} + 1$. Jak jsem uvedl výše, existuje a_{i+1}, že $d(a, b) > R$. Díky trojúhelníkové nerovnosti pak $\forall i \neq j :\; d(a_i, a_j) \geq 1$ a proto (a_n) nemá konvergentní podposloupnost.

Věta *(spojitá zobrazení a kompaktní množiny)*
Buď $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ spojité zobrazení a X kompaktní metrický prostor. Potom platí:

1. Zobrazení f je stejnoměrně spojité.
2. $f[X]$ je kompaktní podmnožina Y.
3. Je-li f navíc bijekce, pak je inverzní zobrazení f^{-1} nutně spojité.
4. Je-li f navíc bijekce, je f stejnoměrný homeomorfismus.

Idea důkazu

1. Sporem. Kdyby nebylo stejnoměrně spojité, existovalo by ε, že pro každé δ existují body x, y, které jsou si blíž, než δ, ale jejich zobrazení jsou od sebe minimálně ε (negace definice).

   δ můžeme pořád zmenšovat, dostaneme tak dvě posloupnosti ($\{x_n\}$ a $\{y_n\}$), vybereme z $\{x_n\}$ konvergentní a z $\{y_n\}$ také, tak, aby měly stejné indexy k_n (nejdřív vybereme z jedné konvergentní, z druhé vybereme tytéž indexy, z ní ještě znovu vybereme konvergentní) – to můžeme udělat, protože jsme v kompaktním prostoru.

   Potom $\lim x_{k_n} = \lim y_{k_n}$, ale $\lim f(x_{k_n}) \neq \lim f(y_{k_n})$, protože jsou od sebe vždy zobrazení vzdálena minimálně ε. To je ale spor s jedním z následků spojitosti zobrazení.

2. Vezměme si posloupnost bodů v $f[X]$, ty musí mít vzory v X, z těch vzorů lze vzít vybranou konvergentní (díky spojitosti), musí být konvergentní i limita jejího obrazu (z následků spojitosti zobrazení).

3. Dívejme se na inverzní zobrazení f^{-1}. Chceme ukázat, že obraz uzavřené množiny v X zobrazením $f^{-1^{-1}}$ je uzavřený, z čehož by plynulo, že zobrazení f^{-1} je prosté (díky jedné z předchozích vět).

   Vezměme M uzavřené v X. Je kompaktní (protože každá uzavřená množina X je kompaktní). Podle 2. je i $f[X]$ kompaktní. Protože f je bijekce, $f^{-1^{-1}}[X] = f[X]$, tedy je kompaktní a (díky předchozí větě) je omezený.

4. je totéž, co 3. (viz definice homeomorfismu).

Věta *(omezený euklidovský podprostor)*

1. Podprostor X euklidovského prostoru dimenze n ($\mathbb{E}_n$) je kompaktní, právě když je uzavřený a omezený.
2. Kompaktní podprostor $X \subseteq \mathbb{R}$ ($\equiv \mathbb{E}_1$) má největší a nejmenší prvek.

Důsledek

Z bodů 2. předchozích dvou tvrzení plyne, že spojitá reálná funkce nabývá na kompaktním prostoru minima i maxima. (Což platí i pro spojité reálné funkce na konečném definičním oboru, jelikož konečnost $\Rightarrow$ kompaktnost.)

17.2 Kompaktní topologické prostory

Je to to samé jako nadpis???

Definice *(otevřené pokrytí, konečné podpokrytí)*
Pro množinu X v metrickém prostoru (M, d) nazveme systém množin $\{O_i | i \in I\}$ v M jejím *otevřeným pokrytím*, když jsou všechny množiny O_i otevřené a $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. *Konečné podpokrytí* je konečný podsystém $\{O_j | j \in J, J \subset I, J \text{ konečná}\}$ stále pokrývající X.

Definice *(topologická kompaktnost)*
Množina X je *topologicky kompaktní*, pokud každé její otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Věta
Množina v metrickém prostoru je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.

17.3 Úplné prostory

Definice *(cauchyovská posloupnost bodů)*
Posloupnost (x_n) bodů z metrického prostoru (M, d) budiž *cauchyovská*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Poznámka
Je-li posloupnost (x_n) konvergentní, pak je cauchyovská. Obrácená implikace obecně neplatí.

Definice *(úplný prostor)*
Prostor je *úplný*, pokud v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Věta *(o podposloupnosti)*
Pokud má cauchyovská posloupnost nějakou konvergentní podposloupnost, pak konverguje sama.

Příklady

- $\mathbb{R}$ je úplný prostor (díky Bolzanově-Cauchyově podmínce).
- Každý kompaktní prostor je úplný (podle předchozí věty).
- $\mathbb{E}_n$ je úplný prostor (bez důkazu; vyžaduje součiny prostorů).
- Prostor $C[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ s maximovou metrikou je úplný. Je-li totiž posloupnost (f_n) cauchyovská, splňuje stejnoměrnou Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a tedy na $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k jisté funkci f. Funkce f je na M spojitá, protože je stejnoměrnou limitou spojitých funkcí. Tedy $f \in \mathcal{C}(M)$ a v supremové metrice máme $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
- Opět pro $\mathcal{C}[a, b]$ teď ovšem s integrální metrikou. Vzniklý metrický prostor není úplný. Sestrojíme cauchyovskou posloupnost, která nemá limitu. Položíme $a = -1, b = 1$ a uvážíme funkce

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \leq x \leq -n^{-1} \\ nx & \text{pro } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1} \\ 1 & \text{pro } n^{-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

  Pak $(f_n) \subset \mathcal{C}[-1, 1]$ a (f_n) je cauchyovská, protože pro $m \leq n$ máme $d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| dx \leq \int_{-1/m}^{1/m} 1 dx = 2/m$. Neexistuje však funkce $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$, pro níž by $f_n \to f$ pro $n \to \infty$. Taková funkce f by podle definice f_n musela být na intervalu $[-1, 0)$ identicky rovna -1 a na intervalu $(0, 1]$ identicky rovna 1, což je pro funkci spojitou na $[-1, 1]$ nemožné.
- Uvažme euklidovské metrické prostory $\mathbb{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$. Bijekce $f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ je homeomorfismus, f i $f^{-1}(x) = \tan(x) : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení. Ovšem $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor, ale $(-\pi/2, \pi/2)$ nikoli. Úplnost metrického prostoru není, na rozdíl od kompaktnosti, topologická vlastnost, není určena pouze otevřenými množinami, závisí i na metrice. Nicméně se úplnost se zachovává homeomorfismem, který je v obou směrech stejnoměrně spojitý (funkce $\tan x$ není na $(-\pi/2, \pi/2)$ stejnoměrně spojitá).

Věta *(zachování úplnosti)*
Úplnost metrického prostoru se zachovává:

1. obrazem stejnoměrně spojitým prostým zobrazením, pokud je i inverzní zobrazení stejnoměrně spojité,
2. přechodem k uzavřenému podprostoru,
3. kartézským součinem.

Poznámka
Používá se zejména při nahrazování metriky metrikou s ní stejnoměrně ekvivalentní. Tvrzení pro „obyčejnou“ spojitost neplatí.

Věta *(o úplném podprostoru)*
Podprostor Y úplného prostoru X je úplný, právě když je Y v X uzavřená množina.

Důsledek
Kompaktní metrický prostor je vždy úplný.

17.4 Aplikace metrických a topologických prostorů

Základní věta algebry

Věta

Nechť $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ je polynom s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ (tedy $a_i \in \mathbb{C}$ a $a_n \neq 0$). Pak existuje takové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$. **Důkaz**

Komplexní rovina $\mathbb{C}$ se standardní metrikou je isometrická euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$. Existence kořene α polynomu $p(z)$ plyne okamžitě z následujících dvou kroků.

1. Pro každý komplexní polynom $p(z)$ nabývá funkce $f(z) = |p(z)|$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, na $\mathbb{C}$ svého minima.
2. Nechť nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ splňuje v bodu $\alpha \in \mathbb{C}$ nerovnost $|p(\alpha)| > 0$ (tj. $p(\alpha) \neq 0$). Pak existují $\delta > 0$ a polopřímka $l \subset \mathbb{C}$ vycházející z α tak, že $z \in l \& 0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |p(z)| < |p(\alpha)|$.

Pro nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ pak vezmeme α, v němž se podle kroku 1 nabývá nejmenší hodnota modulu $|p(z)|$. Podle kroku 2 musí platit $|p(\alpha)| = 0$, takže $p(\alpha) = 0$ a α je kořenem $p(z)$.

Věta o pevném bodě

Poznámka

O mnohých rovnicích lze dokázat, že v úplném metrickém prostoru mají řešení. Typickým příkladem je rovnice $x^2 = 2$, která sice nemá řešení v oboru racionálních čísel, ale v širším oboru reálných čísel se díky úplnosti dokáže existence řešení. Popíšeme obecný postup, který zaručuje existenci řešení jisté třídy rovnic v úplných metrických prostorech.

Definice *(kontrahující zobrazení)*

Zobrazení $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ mezi dvěma metrickými prostory nazveme *kontrahující*, pokud existuje číslo $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ takové, že

$$\forall x, y \in X : d_2(f(x), f(y)) \leq q \cdot d_1(x, y).$$

Takové zobrazení je jistě stejnoměrně spojité.

Definice *(pevný bod, posloupnost iterací)*

Pevný bod zobrazení $f : X \to X$ z nějaké množiny do sebe sama je takový bod $x \in X$, že $f(x) = x$. Posloupnost $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$ nazveme *posloupností iterací* zobrazení $f : X \to X$, pokud pro $\forall i \geq 1$ platí $x_i = f(x_{i-1})$ (a x_0 je libovolný *startovací bod* posloupnosti iterací).

Věta *(Banachova o pevném bodě)*

Kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M, d) do sebe má právě jeden pevný bod. Navíc každá posloupnost iterací $(x_n)_{n \geq 0}$ tohoto zobrazení konverguje k tomuto pevnému bodu.

Aplikace Banachovy věty

Newtonova numerická metoda pro hledání kořene a Picardova věta o existenci řešení diferenciální rovnice (viz níže).

Úloha (*)

Chceme najít funkci rovnou své derivaci ($y'(x) = y(x)$). Řešením této rovnice je exponenciála $y(x) = \exp(x)$ a spousta dalších funkcí, jako třeba $-3\exp(x + 10)$. Pro každou dvojici reálných čísel a, b dokonce existuje takové řešení, že $y(a) = b$, sice $y(x) = b\exp(x - a)$. Jak uvidíme, s tímto požadavkem je řešení (lokálně) jednoznačné. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu se dá lokální existence a jednoznačnost řešení dokázat pro širokou třídu diferenciálních rovnic

$$(*) \begin{cases} y(a) &= b \\ y'(x) &= f(x, y(x)). \end{cases}$$

Zde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zadaná funkce (pravá strana rovnice) a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou zadaná čísla. Hledáme reálnou funkci $y(x)$ a otevřený interval I obsahující a, že $y(x)$ je na I definovaná, $y(a) = b$ (říkáme, že $y(x)$ splňuje počáteční podmínku $y(a) = b$) a $y(x)$ má I derivaci splňující pro každé $x \in I$ druhý vztah v (*), tj. vlastní diferenciální rovnici.

Věta *(Picardova věta)*

Pokud je $f : \mathbb{R}^{\not=} \to \mathbb{R}$ spojitá a existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ platí $|f(u, v) - f(u, w)| \leq M|v - w|$, pak každý bod $a \in \mathbb{R}$ má okolí $I = (a - \delta, a + \delta)$, na němž má úloha (*) jednoznačné řešení $y(x)$.

17.5 Stejnoměrná konvergence

Úmluva
V dalším budeme o f a f_n předpokládat, že jsou definované na nějaké neprázdné množině $M \subseteq \mathbb{R}$.

Definice *(tři konvergence posloupnosti zobrazení)*

- Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *konverguje bodově k funkci f na množině M* (značíme $f_n \to f$ na M), jestliže pro každé $x \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Explicitně jestliže

$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

  Tedy pro dané $\varepsilon > 0$ může n_0 záviset na bodu x.
- Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M* (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0, x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

  Zde naopak pro dané $\varepsilon > 0$ musí být n_0 univerzální pro všechny body x. Řekneme že posloupnost funkcí je *stejnoměrně konvergentní* na M, jestliže konverguje k nějaké funkci na M.
- Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *konverguje lokálně stejnoměrně k funkci f na množině M* (značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M), jestliže pro každé $x \in M$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Tedy každé $x \in M$ má okolí (které může záležet na daném x), na němž $f_n \rightrightarrows f$.

Důsledek
Z definic plyne síla uvedených pojmů:

$$(f_n) \rightrightarrows f \text{ na } M \Rightarrow (f_n) \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M \Rightarrow (f_n) \to f \text{ na } M$$

Příklad

- $M = [0, 1]$ a $f_n = x^n$, pak $(f_n) \to f$ splňující

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

  Ale není stejnoměrně konvergentní, jelikož v bodech $1 - 1/n$ je posloupnost (f_n) rostoucí a pro každé $n \geq 2$ je $f_n(1 - 1/n) \geq 1/4$. Proto není ani lokálně stejnoměrná, protože body $1 - 1/n$ konvergují k 1, a proto nemůže existovat žádné okolí, na němž by byla (f_n) stejnoměrně konvergentní.
  Ovšem pro $M = [0, 1 - \delta]$ pro pevné $\delta > 0$ máme $0 \leq f_n(x) = x^n \leq (1 - \delta)^n$. A jelikož pro $n \to \infty$ jde $(1 - \delta)^n \to 0$, dostaneme $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \to 0$ nezávisle na $x \in [0, 1 - \delta]$. Proto $(f_n) \rightrightarrows f$ na $M = [0, 1 - \delta]$.
  Pro $M = [0, 1)$ opět kvůli bodům $1 - 1/n$ máme pouze lokálně stejnoměrnou konvergenci, jelikož každý bod $a \in [0, 1)$ je obsažen v okolí typu $[0, 1 - \delta]$.
- $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ na $M = \mathbb{R}$ konverguje bodově ke konstantní funkci $f \equiv 0$. Body $x_n = 1/n$ jdou k nule, ale funkční hodnota zůstává $f_n(x_n) = 1/2$. Proto nejde ani o lokální stejnoměrnou konvergenci. Kvůli tomu je (f_n) na každé M neobsahující nulu lokálně stejnoměrně konvergentní. Konečně pro každou M neobsahující nějaké okolí nuly získáváme stejnoměrnou konvergenci.
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0$ na $M = \mathbb{R}$, jelikož $|f_n(x)| \leq 1/n$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Věta *(spojitost limitního zobrazení)*
Jsou-li f_n spojité a $f_n \rightrightarrows f$, pak je i f spojité.

Věta *(Kritérium stejnoměrné konvergence)*
Nechť M je (neprázdná) množina, f funkce definovaná na M a (f_n) posloupnost funkcí definovaných na M. Pak $f_n \rightrightarrows f$, právě když:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0,$$

tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\sup_{x\in M} \{|f_n(x) - f(x)|\}$ definováno (a konečné) a tato posloupnost má limitu 0.

Příklad

- V metrickém prostoru se supremovou metrikou je stejnoměrná konvergence totéž jako bodová.
- Metrickém prostor omezených funkcí na $M \subset \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný a spojité funkce v něm tvoří uzavřenou podmnožinu.

Věta *(Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)*
Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f, právě když:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ m, n \geq n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Definice *(monotónní bodová konvergence)*
Řekneme, že bodová konvergence $f_n \to f$ na M je *monotónní*, když pro každý bod $a \in M$ je posloupnost čísel $(f_n(a))$ neklesající nebo když pro každý bod $a \in M$ je tato posloupnost nerostoucí.

Věta
Platí následující tvrzení:

1. Když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b) pro $-\infty \leq a < b \leq \infty$, potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ pro každý kompaktní podinterval $[c, d] \subset (a, b)$.
2. (Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ na kompaktním intervalu I, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Věta *(Mooreova-Osgoodova o záměně pořadí limity* $\lim_{n\to\infty}$ *a* $\lim_{x\to x_0}$*)*
Nechť f i f_n jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(x_0, \delta)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který může být i nevlastní. Dále nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $P(x_0, \delta)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a rovnají se:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důsledek *(Spojitost limitní funkce)*
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, f_n spojité funkce definované na I a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I, pak f je spojitá na I.

Věta *(záměna pořadí limity a integrování)*
Buďte funkce f_n a f definované na (omezeném) intervalu $[a, b]$, $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Pak i $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Věta *(záměna pořadí limity a derivace)*
Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a (f_n) je posloupnost funkcí definovaných na intervalu (a, b), které mají v každém bodě (a, b) vlastní derivaci f_n'. Nechť dále platí:

1. Existuje takové $x_0 \in (a, b)$, že posloupnost $(f_n(x_0))$ je konvergentní.
2. Posloupnost (f_n') je stejnoměrně konvergentní na (a, b).

Pak posloupnost $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), funkce f má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní derivaci a platí $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Věta *(Weierstrassova věta o aproximaci polynomy)*
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na kompaktním intervalu. Pak $p_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro nějakou posloupnost polynomů (p_n). Jinak řečeno,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ polynom } p :\ \forall x \in [a, b] :\ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice *(Bodová/stejnoměrná konvergence řady funkcí)*
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje bodově na množině* M, pokud posloupnost jejich částečných součtů je bodově konvergentní na M, tj, pro každé $x \in M$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazveme funkci

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M,$$

pokud řada konverguje bodově na M. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na množině* M, pokud posloupnost jejich částečných součtů je stejnoměrně konvergentní na M. Je-li navíc $M \subset \mathbb{R}$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje lokálně stejnoměrně na množině* M, pokud posloupnost jejich částečných součtů je lokálně stejnoměrně konvergentní.

(*Pozn. autora: Dále platí i věty ekvivalentní větám o záměně limit při posloupnostech...*)

Věta *(nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)*
Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M. Pak $f_n \rightrightarrows 0$ na M.

Věta *(srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)*
Nechť M je (neprázdná) množina a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na M, pro které platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro všechna $x \in M$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na M, pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta *(Weierstrassovo kritérium)*
Nechť M je (neprázdná) množina, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí definovaných na M a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentní řada reálných čísel. Pokud pro každé $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq c_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.
(verze M. Klazar:)
Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že řada nezáporných čísel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$

konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Důsledek *(důsledek Diniho věty)*
Jsou-li funkce $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a, b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a, b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Věta *(Dirichletovo a Abelovo kritérium)*
Nechť M je (neprázdná) množina a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na M. Nechť navíc platí alespoň jedna z podmínek.

- (Abelovo kritérium)
  1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M,
  2. pro každé pevné x je posloupnost hodnot funkcí $(g_n(x))$ monotónní (klidně pro každé x jinak),
  3. existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : |g_n(x)| < K$ (tj. (g_n) je *stejnoměrně (/stejně) omezená* na M).
- (Dirichletovo kritérium)
  1. Existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ je $|f_1(x) + \cdots + f_n(x)| \leq K$ (tj. posloupnost část. součtů $(\sum_{i=1}^{n} f_i(x))$ je *stejnoměrně (/stejně) omezená* na M),
  2. pro každé pevné x je posloupnost hodnot funkcí $(g_n(x))$ monotónní (klidně pro každé x jinak),
  3. $g_n \rightrightarrows 0$ na M (konverguje stejnoměrně k nulové funkci).

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta *(Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)*
Nechť M je (neprázdná) množina, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí definovaných na M splňujících *obě* podmínky:

1. Pro všechna $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$
2. $f_n \rightrightarrows 0$ na M

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

17.6 Mocninné řady

Táto otázka je vypracovaná hlavne podľa skrípt prof. Kalendu, takže je možné že niektoré vety (napr. od prof. Pultra) budú mať iné znenie. Hlavne časť o Fourierových funkciách vyzerá byť prednášaná odlišne (menej obecne)...;-(

andree

Definice
Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ nazýváme *mocninnou řadou o středu a.*

Definice
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a. Jejím *poloměrem konvergence* rozumíme číslo

$$R = \sup\{r \in \langle 0, +\infty) \,; \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \, konverguje\},$$

je-li uvedená množina shora omezená. Není-li shora omezená, klademe $R = +\infty$.

Věta
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a a R její poloměr konvergence.

1. Je-li $|x-a| < R$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konverguje absolutně;
   Je-li $|x-a| > R$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ diverguje.
2. Je-li $r \in (0, R)$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konverguje stejnoměrně na množině $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| \leq r\} = \langle a-r, a+r\rangle$.
3. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konverguje lokálně stejnoměrně na množině $B(a,R) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < R\}$.

   Body 2. a 3. jsou vlastně ekvivalentní. Je-li $R = \infty$, pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.

Poznámka
Množině $B(a,R)$, kde R je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, se říká *kruh konvergence.*

Věta *(Výpočet poloměru konvergence)*
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a a R její poloměr konvergence.

1. Jestliže $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, pak
$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0 \end{cases}$$
2. Týž vzoreček platí, je-li $L = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

První bod plyne z Cauchyova odmocninového kritéria konvergence řady, druhý z D'Alembertova podílového kritéria. Stejné tvrzení platí i pro limity daných výrazů v případě, že existují.

Věta *(...„jen" pomocná pro následující)*
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a a R její poloměr konvergence. Pak i mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} n.c_n(x-a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ mají poloměr konvergence R.

Věta *(Derivace a integrace mocninné řady)*
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a a $R > 0$ její poloměr konvergence. Definujme funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, x \in B(a,R)$. Pak platí:

1. Funkce f je spojitá na $B(a,R)$.
2. Funkce f má v každém bodě $x \in B(a,R)$ vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(x-a)^{n-1}$.
3. Funkce $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ je primitivní funkcí k f na $B(a,R)$.

17.7 Taylorovy řady

Definice
Nechť funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Pak řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ nazýváme *Taylorovou řadou funkce f o středu a v bodě x.*

Poznámka
Nechť funkce f má v bodě a derivace všech řádů a $x \in \mathbb{R}$. Pak funkce f je v bodě x součtem své Taylorovy řady o středu a, právě když $\lim_{n\to\infty}(f(x) - T_n^a(x)) = 0$.

Věta
Nechť $x > a$ a funkce f má v každém bodě intervalu $\langle a, x\rangle$ derivace všech řádů. Jestliže platí podmínka

- existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t \in (a, x)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $|f^{(n)}(t)| \leq C$,

pak funkce f je v bodě x součtem své Taylorovy řady o středu a. Analogicky pro případ $x < a$.

Věta
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je mocninná řada o středu a a $R > 0$ její poloměr konvergence. Definujme funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, x \in B(a, R)$. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

je *Taylorovou řadou funkce* f o středu a, tj. pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Význam Taylorových řad:

- aproximace funkcí – příklady (Taylorovy řady elementárních funkcí):

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad \dots$$

- zjednodušení důkazů – příklad (Důkaz binomické věty):

  Rozvineme funkci $f(x) = (1+x)^\alpha$ v okolí nuly. Indukcí lze ověřit, že $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)\cdot(1+x)^{\alpha-k}$. Taylorova řada funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$ konverguje na $(-1, 1)$ a je rovna hodnotě $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

  a to dává binomickou větu.

17.8 Fourierovy řady

17.8.1 Obecné Fourierovy řady

Definice
Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí na $\langle a, b\rangle$, z nichž žádná není konstantně nulová. Řekneme, že tato posloupnost tvoří *ortogonální (krátce OG) systém na* $\langle a, b\rangle$, jestliže pro každá dvě různá $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_a^b \varphi_m \overline{\varphi_n} = 0$$

Pokud navíc

$$\int_a^b |\varphi_n|^2 = 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že jde o *ortonormální systém.*

Poznámka
Příklady OG systémů:

- Systém tvořený funkcemi $\exp \frac{2k\pi i x}{p}, k \in \mathbb{Z}$ je OG na intervalu $\langle a, a+p\rangle$ pro každé $a \in \mathbb{R}$
- Systém tvořený funkcemi $1, \cos \frac{2k\pi x}{p}, \sin \frac{2k\pi x}{p}, k \in \mathbb{N}$ je OG na intervalu $\langle a, a+p\rangle$ pro každé $a \in \mathbb{R}$

Věta
Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí na $\langle a, b\rangle$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Jestliže

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),\ x \in \langle a, b\rangle\,,$$

a uvedená řada konverguje stejnoměrně na $\langle a, b\rangle$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{\int_a^b f\overline{\varphi_n}}{\int_a^b |\varphi_n|^2}.$$

Definice *(po částech spojitá funkce)*
Řekneme, že funkce f je *po částech spojitá na* $\langle a,b\rangle$, jestliže existuje $D=\{x_i\}_{j=0}^{N}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že pro každé $j\in\{1,\dots,N\}$ je funkce f spojitá na intervalu (x_{j-1},x_j) a v krajních bodech tohoto intervalu má vlastní jednostranné limity.

Definice
Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je OG systém na $\langle a,b\rangle$ a funkce f je po částech spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pro $n\in\mathbb{N}$ položme

$$a_n=\frac{\int_a^b f\overline{\varphi_n}}{\int_a^b|\varphi_n|^2}.$$

Tato čísla nazýváme *Fourierovými koeficienty funkce f vzhledem k OG systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $\langle a,b\rangle$* a řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

nazýváme *Fourierovou řadou f vzhledem k OG systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $\langle a,b\rangle$*.

17.8.2 Trigonometriké Fourierovy řady

Definice *(po částech spojitá periodická funkce)*
Buď funkce f periodická s periodou $p>0$. Řekneme, že je *po částech spojitá*, je-li po částech spojitá na intervalu $\langle 0,p\rangle$.

Poznámka
Nechť f je p-periodická funkce a $a,b\in\mathbb{R}$.

1. Pak f je počástech spojitá na $\langle a,a+p\rangle$, právě když je po částech spojitá na $\langle b,b+p\rangle$.
2. $\int_a^{a+p}f=\int_b^{b+p}f$, pokud alespoň jeden z těchto integrálů existuje.

Definice
Nechť funkce f je p-periodická po částech spojitá funkce. Jejími *trigonometrickými Fourierovými koeficienty* rozumíme čísla

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{2\pi nx}{p}dx,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{2\pi nx}{p}dx,\ n\in\mathbb{N}$$

Definice
Trigonometrickou Fourierovou řadou funkce f pak rozumíme řadu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{p}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{p}\right)$$

Poznámka *(Besselova nerovnost)*
Besselova nerovnost pro trigonometrické Fourierovy řady má tvar

$$\frac{|a_0|^2}{4}p+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\frac{p}{2}\le\int_0^p|f|^2.$$

Podobná nerovnost platí i pro obecné Fourierovy řady.

(Riemann-Lebesgue) důsledkem této nerovnosti je fakt, že $\lim a_n=\lim b_n=0$.

Věta *(Persevalova rovnost)*
Pro trigonometrické Fourierovy řady platí v Besselově nerovnosti rovnost. Pro funkce s periodou 2π potom platí:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\ \textit{(jedna z variant zápisu)}$$

Poznámka
Nechť f je p-periodická po částech spojitá funkce taková, že všechny její trigonometrické Fourierovy koeficienty jsou nulové. Pak $f(x)=0$ pro všechna $x\in\langle 0,p\rangle$ s výjimkou konečně mnoha bodů.

Věta *(Symetrie funkce a Trigonometrické Fourierovy koeficienty)*
Nechť f je p-periodická po částech spojitá funkce, $a_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $b_n, n \in \mathbb{N}$, její trigonometrické Fourierovy koeficienty. Pak platí

1. Pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n = 0$, právě když $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \langle 0, p \rangle$ s výjimkou konečně mnoha bodů.
2. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = 0$, právě když $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in \langle 0, p \rangle$ s výjimkou konečně mnoha bodů.

Definice
Nechť f je p-periodická po částech spojitá funkce. Řekneme, že f je *po částech hladká*, jestliže f' je po částech spojitá.

Věta *(O konvergenci Fourierových řad)*
Nechť f je po částech hladká p-periodická funkce. Pak platí:

1. Trigonometrická Fourierova řada funkce f konverguje bodově na $\mathbb{R}$ a její součet v bodě $x \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t)\right)$
2. Je-li f navíc spojitá na intervalu (a, b), pak její trigonometrická Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) a její součet je $f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.
3. Je-li navíc spojitá na $\mathbb{R}$, pak její trigonometrická Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a její součet je $f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

17.9 Aplikace mocninných řad

18 Optimalizační metody

Požadavky

- Minimaxové věty
- Geometrická interpretace - mnohostěny
- Základy lineárního programování, věty o dualitě, algoritmy - simplexová a elipsoidová metoda

18.1 Minimaxové věty

18.2 Geometrická interpretace - mnohostěny

18.3 Základy lineárního programování, věty o dualitě, algoritmy - simplexová a elipsoidová metoda

TODO – dodělat!!! Zde jen kopie toho, co bylo pořadováno po pre2007 studentech, což je výrazně méně, než je nyní!!!

Lineární programování je označení pro úlohu maximalizovat jistou funkci n reálných proměnných na množině bodů polytopu v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nejprve si udělejme malý výlet do geometrie. *Polytop* je zobecněním polygonu (mnohoúhelníku) do vyšších dimenzích. Pro dimenzi 3 se ale používá ještě speciální název *polyhedron* a pro dimenzi 4 *polychoron*. My se v dalším textu omezíme na *konvexní polytopy*, což jsou konvexní obaly konečně mnoha bodů. Vzhledem k tomu, že tyto konvexní polytopy jsou průnikem jistého množství poloprostorů, můžeme je popsat maticovou rovnicí tvaru

$$Ax \leq b,$$

kde A je matice řádu $m \times n$ a m je počet poloprostorů, jejichž průnikem je daný polytop, a n je dimenze podprostoru, ve kterém polytop máme.

Simplex je „n–dimenzionální“ trojúhelník (průnik několika poloprostorů). Podle rostoucí dimenze je to tedy po řadě bod, úsečka, trojúhelník, čtyřstěn, pentachoron (viz obrázek 1) atd. Může být omezený i neomezený.

Obrázek 15: Pentachoron

Nyní přistupme k formální definici úlohy lineárního programování.

Úloha lineárního programování
Je dán konvexní polytop v prostoru $\mathbb{R}^n$ popsaný m nerovnostmi. Maticově to můžeme zapsat ve tvaru $Ax \leq b$, kde A je reálná matice řádu $m \times n$ a b je vektor m reálných čísel. Dále je dán vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Funkce, kterou chceme maximalizovat, je $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, neboli vektorově $c^T x$. Ještě navíc hledáme pouze mezi body se všemi souřadnicemi nezápornými (tj. $x_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, n$).

Terminologie

1. Vektoru c říkáme *cenový vektor*, funkci $c^T x$ pak *účelová funkce*.
2. Nerovnosti $Ax \leq b$ a $x \geq 0$ jsou *omezující podmínky*, vektor b je *pravá strana úlohy*.
3. Konkrétní zadání úlohy lineárního programování (tj. matice A a vektory b, c) je *přípustné*, pokud existuje nějaký bod splňující $x \geq 0$ a $Ax \leq b$. Jinak je zadání *nepřípustné*.
4. Úloha je *neomezená*, pokud můžeme účelovou funkcí dosáhnout na přípustných bodech libovolně veliké hodnoty. Jinak je *omezená*.

Věta
Pro přípustnou a omezenou úlohu lineárního programování[16] existuje bod, ve kterém účelová funkce nabývá maxima. Těchto bodů obecně může být více a říkáme jim optimální řešení.

[16] Tedy existuje alespoň jedno řešení a účelová funkce je shora omezená.

18.4 Simplexová metoda

Simplexová metoda je označení pro algoritmus řešící úlohu lineárního programování. Byla publikována v roce 1947 jedním ze zakladatelů lineárního programování američanem Georgem Dantzigem.

Idea

Zkonstruujeme přípustné řešení v některém vrcholu polytopu. Poté jdeme po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.

Omezující podmínku $Ax \leq b$ tedy změníme na $Ax = b$. Toho docílíme přidáním jedné nezáporné proměnné pro každou podmínku ($\sum x < b$ je totiž ekvivalentní $\sum x + y = b$ kde $y \in \mathbb{R}^+$). Tuto úpravu lze také zapsat jako $A := (A\ I)$. Dále předpokládáme, že matice A má lineárně nezávislé řádky. Pro podmnožinu indexů $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ označme A_I matici A, ze které ponecháme pouze sloupce, které jsou v I. Analogicky pro libovolný vektor $w \in \mathbb{R}^n$ označme jako w_I vektor, z něhož ponecháme jenom souřadnice z I (má dimenzi $n - |I|$).

Báze (a to nemá nic společného s bází vektorového prostoru) je libovolná podmnožina indexů $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že matice A_B je regulární. Navíc řekneme, že báze je *přípustná*, pokud rovnice $A_B x_B = b$ má nezáporné řešení. Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je tzv. *bazické řešení*[17], pokud existuje báze B taková, že $A_B x_B = b$ a $x_i = 0$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash B$.

Poznamenejme jen, že bazické řešení ještě nemusí být přípustné. Je-li navíc i přípustné, říkáme mu přirozeně *přípustné bazické řešení*. Proměnným x_j pro $j \in B$, kde B je báze, říkáme bazické.

Věta
Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ je přípustné řešení. Pak x je bazické řešení, právě když sloupce matice A odpovídající kladným proměnným jsou lineárně nezávislé.

Věta
Nechť B je m–prvková indexová množina $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ a A_B je regulární. Pak existuje nejvýše jedno přípustné bazické řešení x ($x_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in B$).

Mezi první tvrzeními jsme uvedli, že má-li daná úloha lineárního programování nějaké přípustné řešení a je-li zároveň účelová funkce na množině přípustných řešení omezená, pak existuje optimální řešení (tj. nabývá se maxima). Dá se ale dokázat dokonce následující.

Věta
Má-li daná úloha optimální řešení, pak i některé bazické řešení je optimální.

Tato věta má obrovskou důležitost, neboť je jasné, že **bazických řešení je jen konečně mnoho**. Ukažme si fungování simplexové metody na konkrétním příkladu. **Příklad**
Maximalizujte funkci $z(x_1, \ldots, x_5) = x_1 + x_2$ za omezujících podmínek $x_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, 5$) a

$$\begin{array}{|ccccccc|} \hline -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = 1 \\ +x_1 & & & +x_4 & & & = 3 \\ & +x_2 & & & +x_5 & & = 2 \\ \hline \end{array}$$

Řešení. Nejprve najdeme libovolné přípustné bazické řešení. Matice A a vektor b této úlohy jsou ze zadání

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a $m = 3, n = 5$. Vidíme tedy, že jedním z bazických řešení je $R_1 = (0, 0, 1, 3, 2)^T$. Odpovídající báze indexů je $B = \{3, 4, 5\}$ (matice A_B je jednotková, a tedy regulární). Na základě tohoto vytvoříme tzv. *simplexovou tabulku* (počáteční přípustnou tabulku) tak, že vyjádříme bazické proměnné pomocí nebazických a přidáme jeden řádek s vyjádřenou účelovou funkcí pomocí nebazických proměnných.

$$\begin{array}{r|ccc} x_3 = & 1 & +x_1 & -x_2 \\ x_4 = & 3 & -x_1 & \\ x_5 = & 2 & & -x_2 \\ \hline z = & & x_1 & +x_2 \end{array}, \quad R_1 = (0, 0, 1, 3, 2)^T, \quad z = 0$$

V bodě R_1 je $z(R_1) = 0$. Nyní budeme, jak bylo naznačeno, postupně zvyšovat hodnotu funkce z, dokud nezjistíme, že jsme nalezli optimální řešení. Hodnotu funkce z budeme zvětšovat zvětšením hodnoty některé nebazické (volné) proměnné.

Ponechejme $x_1 = 0$ a zvětšeme x_2 z 0 na 1 (jednička je nejlepší možná, viz první rovnici a $x_3 \geq 0$). Pak pomocí tabulky dostaneme nové přípustné řešení, konkrétně $R_2 = (0, 1, 0, 3, 1)^T$. Z první rovnice teď vyjádříme x_2:

$$x_2 = 1 + x_1 - x_3$$

a nahradíme touto rovnicí původní první rovnici $x_3 = 1 + x_1 - x_2$. Toto řešení odpovídá bázi $B = \{2, 4, 5\}$. Snadno zjistíme, že $z(R_2) = 0 + 1 = 1$. Nyní se stalo, že proměnná x_2 nahradila proměnnou x_3 v bázi. Tomuto procesu říkáme, že proměnná x_2 „vstoupila do báze“, x_3 z ní „vystoupila“.

Dostáváme tak novou simplexovou tabulku

$$\begin{array}{r|lll} x_2 = & 1 & +x_1 & -x_3 \\ x_4 = & 3 & -x_1 & \\ x_5 = & 1 & -x_1 & +x_3 \\ \hline z = & 1 & +2x_1 & -x_3 \end{array}, \quad R_2 = (0, 1, 0, 3, 1)^T, \quad z = 1$$

Nyní budeme zvyšovat x_1. První rovnice x_1 neomezuje, druhá říká $x_1 \leq 3$ a třetí nyní říká $x_1 \leq 1$ (jelikož $x_3 = 0$). Položme tedy $x_1 = 1$. Dostáváme nové řešení $R_3 = (1, 2, 0, 2, 0)^T$, $z(R_3) = 3$. Proměnná x_1 vstoupí do báze místo proměnná x_5. Nová báze je $B = \{1, 2, 4\}$.

Dostáváme další simplexovou tabulku

$$\begin{array}{r|lll} x_1 = & 1 & +x_3 & -x_5 \\ x_2 = & 2 & & -x_5 \\ x_4 = & 2 & -x_3 & +x_5 \\ \hline z = & 3 & +x_3 & -2x_5 \end{array}, \quad R_3 = (1, 2, 0, 2, 0)^T, \quad z = 3$$

Zvětšíme x_3 z 0 na 2 ($x_3 \leq 2$ plyne ze třetí rovnice tabulky) a tím obdržíme další řešení $R_4 = (3, 2, 2, 0, 0)^T$, báze je $B = \{1, 2, 3\}$, $z(R_4) = 5$. Odpovídající nová simplexová tabulka je

$$\begin{array}{r|lll} x_1 = & 3 & -x_4 & \\ x_2 = & 2 & & -x_5 \\ x_3 = & 2 & -x_4 & +x_5 \\ \hline z = & 5 & -x_4 & -x_5 \end{array}, \quad R_4 = (3, 2, 2, 0, 0)^T, \quad z = 5$$

Nyní je jasné, že libovolné zvýšení volné proměnné x_4 nebo x_5 sníží hodnotu účelové funkce. Z konstrukce simplexové metody plyne, že řešení R_4 je již optimální, neboť jsme prováděli pouze ekvivalentní rovnicové úpravy. Optimálním řešením dané úlohy je tedy bod $(3, 2, 2, 0, 0)$.

□

Časová složitost simplexové metody je $O(2^n)$. Jeden z nejhorších případů můžeme vzít n–dimenzionální krychli, která má přesně 2^n vrcholů. Na této krychli algoritmus může postupně navštívit všechny její vrcholy.

Simplexová metoda nachází uplatnění převážně při řešení optimalizačních úloh v inženýrství nebo ekonomii.

18.5 Duální úloha

Problém lineárního programování tak, jak byl popsán výše, označujeme jako *primární*. Ke každému primárnímu problému můžeme zkonstruovat *duální úlohu*. Připomeňme, že primární úloha byla najít

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Duální úloha k této pak je najít

$$\min\{b^T y : y \in \mathbb{R}^m, A^T y \geq c, y \geq 0\}.$$

Základem teorie duality lineárního programu jsou následující dvě věty – *(Slabá) věta o dualitě*.

Věta *(Slabá věta o dualitě)*

Pokud je x přípustné řešení primární úlohy a y přípustné řešení duální úlohy, pak hodnota duální účelové funkce v bodě y je alespoň tak veliká jako hodnota primární účelové funkce v bodě x.

Věta *(Věta o dualitě)*

Nechť x_* je optimální řešení primární úlohy. Pak existuje optimální řešení y_* duální úlohy takové, že

$$c^T x_* = b^T y_*.$$

Duální úloha ze života

...