BA.1 Booleovy algebry.

BA.1.1. Struktury ${}^I\underline{2}$.

Buď
$$\underline{2} = \langle 2, -_1, \vee_1, \wedge_1, 0, 1\rangle, \tag{1}$$
kde $2 = \{0,1\}$ a dále:

Funkce	Definice
$-_1 : 2 \to 2$	$-_1(0) = 1,\ -_1(1) = 0$
$\vee_1 : 2 \times 2 \to 2$	$\vee_1(x,y) = \max(x,y)$
$\wedge_1 : 2 \times 2 \to 2$	$\wedge_1(x,y) = \min(x,y)$

(1) je L-struktura, kde $L = \langle -, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ s unárním $-$, binárními $\vee$, $\wedge$ a nulárními 0, 1; L je signatura Booleových algeber.

Obecněji pro $I \neq \emptyset$ buď
$${}^I\underline{2} = \langle {}^I2, -_I, \vee_I, \wedge_I, 0_I, 1_I\rangle, \tag{2}$$
kde každá uvedená operace se bere po složkách v $\underline{2}$. Struktura ${}^I\underline{2}$ je I-tá mocnina struktury $\underline{2}$. $\underline{2}$ snadno ztotožníme s ${}^1\underline{2}$, tj. prokážeme jejich izomorfizmus. (Přitom $1 = \{0\}$.) ${}^I\underline{2}$ můžeme také chápat jako strukturu všech pravdivostních ohodnocení prvovýroků, tvořících právě množinu I.

BA.1.2. Booleovy algebry.

Pro struktury ${}^I\underline{2}$ platí *booleovské zákony* (též *axiomy*), tj. pro x, y, z z jejích univerz máme, vynecháme-li dolní index ${}_I$:

asociativita	$x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$	$\diamond$ je $\vee$ nebo $\wedge$
komutativita	$x \diamond y = y \diamond x$	$\diamond$ je $\vee$ nebo $\wedge$
distributivita	$x \diamond (y \diamond' z) = (x \diamond y) \diamond' (x \diamond z)$	$\diamond$ [$\diamond'$] je $\vee$ [$\wedge$] nebo $\wedge$ [$\vee$]
absorbce	$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$	
komplementace	$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0$	

Každá struktura $\underline{B} = \langle B, -^B, \vee^B, \wedge^B, 0^B, 1^B\rangle$, o jejíchž funkcích (operacích) platí booleovské zákony (kde místo operace $\diamond$ píšeme $\diamond^B$) se nazývá *Booleova algebra.* Platí-li navíc $0 \neq 1$, je *netriviální*, když $0 = 1$, je *triviální*

To, že ${}^I\underline{2}$ je Booleova algebra vidíme ihned např. z toho, že $\underline{\mathcal{P}(I)}$ je izomorfní s ${}^I\underline{2}$, píšeme
$$\underline{\mathcal{P}(I)} \cong {}^I\underline{2},$$
kde $\underline{\mathcal{P}(I)}$ je *potenční Booleova algebra*:
$$\underline{\mathcal{P}(I)} = \langle \mathcal{P}(I), -, \cup, \cap, \emptyset, I\rangle.$$
kde $-, \cup, \cap$ jsou operace komplementu, sjednocení a průniku, zúžené na $\mathcal{P}(I)$; tedy $-u = I - u$ pro $u \subseteq I$. Izomorfizmem je $u \mapsto \mathrm{ch}_u$, přičemž ch_u je charakteristická funkce u na I.

V Booleově algebře $\underline{B} = \langle B, -, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ (vynechali jsme pro jednoduchost index ^{B}) definujeme *kanonické uspořádání* $\leq$ na B vztahem $a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$. Dále definujeme binární operaci $-$ rozdíl resp. $\dot{-}$ symetrická diference vztahy $a - b = a \wedge (-b)$ resp. $a \dot{-} b = (a - b) \vee (b - a)$ a dále (booleovskou) implikaci $\to$ resp. ekvivalenci $\leftrightarrow$ takto: $a \to b = -a \vee b$ resp. $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$.

BA.1.3. V Booleově algebře $\langle B, -, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ pro $x, y, z, x', y' \in B$ platí:

Idempotence:	$x \vee x = x,\ x \wedge x = x$
	$x \vee y = x \Leftrightarrow x \wedge y = y$
	$\leq$ je uspořádání, $\ x \vee y = \sup_{\leq}\{x,y\},\ \ x \wedge y = \inf_{\leq}\{x,y\}$
Monotonie:	$x \leq y$ a $x' \leq y' \Rightarrow x \vee x' \leq y \vee y'$ a $x \wedge x' \leq y \wedge y'$
Extremalita:	$x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 0 = 0$
Neutralita:	$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$

$$\begin{array}{ll} & x \wedge y = 0 \text{ a } x \vee y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = -x, \quad 0 = -1, \;\; 1 = -0 \\ \textit{De Morgan:} & x \wedge y = -(-x \vee -y), \qquad\quad x \vee y = -(-x \wedge -y) \\ & -(-x) = x, \quad -x = -y \;\Rightarrow\; x = y, \quad x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x \\ & x \dot{-} y = y \dot{-} x, \qquad\qquad\quad (x \dot{-} y) \dot{-} z = x \dot{-} (y \dot{-} z) \\ & -(x - y) = x \rightarrow y, \qquad\quad -(x \dot{-} y) = x \leftrightarrow y \end{array}$$

Důkaz se provede zcela rutinně. □

Vidíme, že kanonické uspořádání $\leq$ Booleovy algebry $\underline{B}$ má nejmenší prvek 0 a největší 1 a každá konečná množina $s \subseteq B$ má supremum a infimum, $\langle B, \leq \rangle$ je tedy svaz. Definujeme operace $\bigvee$ a $\bigwedge$ z $\{s \subseteq B;\ s \text{ je konečná}\}$ do B:

$$\bigvee s = \sup_{\leq} s, \quad \bigwedge s = \inf_{\leq} s; \qquad \text{speciálně} \quad \bigvee \emptyset = 0, \quad \bigwedge \emptyset = 1.$$

Platí ovšem $\bigwedge\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} = x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$, $\bigvee\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} = x_0 \vee \cdots \vee x_{n-1}$; závorky v uvedených výrazech díky asociativitě a komutativitě vynecháváme.

Podstruktura Booleovy algebry $\underline{B}$ je struktura $\underline{A} = \langle A, -^A, \vee^A, \wedge^A, 0^A, 1^A \rangle$, kde $A \subseteq B$ a operace $\diamond^A$ jsou zúžením $\diamond^B$ na A (speciálně $0^A = 0^B$, $1^A = 1^B$.) Každá podstruktura Booleovy algebry je Booleova algebra, neboť v ní jasně platí všechny booleovské zákony.

Pro $0 < m < n \in \mathbb{N}$ je každá Booleova algebra $\underline{{}^m 2}$ až na izomorfizmus podalgebrou $\underline{{}^n 2}$ a také podalgebrou $\underline{{}^{\mathbb{N}} 2}$.

BA.1.4. Atomy v Booleově algebře.

1. *Atom* v Booleově algebře je nenulový prvek x, pod kterým leží jen nula a on sám. Množinu všech atomů Booleovy algebry $\underline{B}$ označíme At_B.

2. Booleova algebra je *atomární*, leží-li pod každým jejím nenulovým prvkem atom. Booleova algebra je *bezatomární*, neexistuje-li v ní žádný atom.

Zřejmě atomy Booleovy algebry jsou právě minimální prvky množiny jejich nenulových prvků v kanonickém uspořádání. Dále je každá konečná netriviální Booleova algebra atomární.

TVRZENÍ BA.1.5. *Buď $\underline{B}$ atomární Booleova algebra. Zobrazení $h : B \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{At}_B)$, kde $h(b) = \{a;\ a \leq b, a \text{ je atom v } B\}$, je izomorfizmus $\underline{B}$ a nějaké podalgebry potenční algebry $\underline{\mathcal{P}(\mathrm{At}_B)}$. Je-li $\underline{B}$ konečná, je h izomorfizmus B a $\underline{\mathcal{P}(\mathrm{At}_B)}$. Speciálně jsou každé dvě konečné Booleovy algebry izomorfní, právě když mají týž počet atomů; tedy $\underline{\mathcal{P}(n)}$ je izomorfní s $\underline{{}^n 2}$.*

Důkaz. Buďte $b, b' \in B$. h je prosté, neboť když $b - b' \neq 0$, existuje atom $a \leq b - b'$; pak není $a \leq b'$ a tedy $h(a) \neq h(b)$. Zřejmě $h(-^B b) = \mathrm{At}_B - h(b)$, $h(b \wedge^B b') = h(b) \cap h(b')$, $h(b \vee^B b') = h(b) \cup h(b')$. $h(0^B) = \emptyset$ a $h(1^B) = \mathrm{At}_B$; h je tedy izomorfizmus B a podalgebry $\mathcal{P}(\mathrm{At}_B)$ s univerzem $\{h(b);\ b \in B\}$. Je-li $\underline{B}$ konečná, je At_B konečné a h je zřejmě na $\underline{\mathcal{P}(\mathrm{At}_B)}$. □

BA.1.6. Spočetná bezatomární Booleova algebra.

Buď $\underline{K}$ podalgebra algebry $\underline{{}^{\mathbb{N}} 2}$ s univerzem $K \subseteq {}^{\mathbb{N}} 2$ tvořeným právě všemi funkcemi $f : \mathbb{N} \rightarrow 2$, které mají nějakou periodu p, $0 < p \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ. *$\underline{K}$ je spočetná bezatomární Booleova algebra a je to až na izomorfizmus jediná spočetná bezatomární Booleova algebra.*

Algebra AP výroků nad spočetně prvovýroky je spočetná bezatomární. AP je tvořená třídami $\varphi/\!\sim\, = \{\psi;\ \varphi \sim \psi\}$ výroků nad danou spočetnou množinou prvovýroků $\mathbb{P}$; přitom

$$\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Booleovským operacím odpovídají $\neg$, $\vee$, &, $\bot$ (falešný výrok), $\top$ (tautologie).