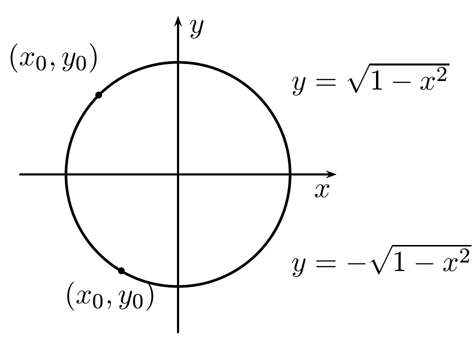
Kapitola 8

Funkce zadané implicitně

Začneme několika příklady. Prvním je známá rovnice pro jednotkovou kružnici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Tato rovnice popisuje křivku, kterou si však nelze představit jako *graf* funkce $y = y(x)$. Nicméně kolem každého bodu (x_0, y_0), $y_0 > 0$ na této kružnici lze najít alespoň jistý úsek, který už *je* grafem funkce. A co víc, grafem diferencovatelné funkce.



Obr. 8.1

V tomto jednoduchém případě lze příslušnou funkci explicitně vyjádřit, obr.8.1. Pro $y_0 > 0$ to je $y = \sqrt{1 - x^2}$ a pro $y_0 < 0$ pak $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Uvažujme nyní rovnici

$$\sin xy - x + y = 0. \tag{8.1}$$

Určitě existují body, které této rovnici vyhovují, např. bod $(0, 0)$. Ale v tomto případě už nelze z rovnice přímo vyjádřit y jako výše. I kdybychom již odněkud věděli, že křivka definovaná rovností (8.1) je v okolí bodu $(0, 0)$ popsatelná jistou funkcí $y = y(x)$, tak její explicitní tvar nezjistíme. Přesto bychom mohli chtít znát tečnu k této křivce v bodě $(0, 0)$. Způsob, jak to provést je obsahem této kapitoly.

Obecně vyšetřujeme rovnice typu $f(x,y) = 0$. Intuitivně předpokládáme, že tato rovnice zadává křivku. Následujících několik příkladů ukazuje, že tato představa může být někdy chybná.

Příklad 8.1. (i) Rovnice $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$ zadává pouze jediný bod $(-1,2)$.
(ii) Rovnice $x^2 + y^2 + 1 = 0$ je jiné zadání prázdné množiny, neboť žádný bod v $\mathbb{R}^2$ ji nevyhovuje.
(iii) Nechť $f(x,y) = |xy| - xy$. Je-li součin $xy \geq 0$, je rovnice $f(x,y) = 0$ splněna. Je-li $xy < 0$, tak nikoliv. Rovnost $f(x,y) = 0$ zadává množinu skládající se z 1. a 3. kvadrantu.

1 Věta o implicitní funkci

Následující věta přináší kritérium, jak poznat, zda rovnice $f(x,y) = 0$ definuje v okolí jistého bodu funkci $y = y(x)$. Tomuto způsobu zadání funkce $y(x)$ se říká *implicitní.*

Věta 8.2. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0) \in G$ takový, že $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, pak existuje okolí $I \subset \mathbb{R}$ bodu x_0 a funkce $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1, že*

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{a} \quad f(x, y(x)) = 0$$

pro všechna $x \in I$. Pro derivaci $y'(x)$ navíc platí

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Důkaz. Je-li $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, pak buď je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ nebo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) < 0$. Budeme uvažovat první možnost. Druhá se totiž řeší zcela analogicky.

Protože f je třídy C^1, tak $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá funkce na G. Existuje tedy okolí Q bodu $\boldsymbol{x}_0$, na kterém je $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nejenom stále kladná, ale dokonce platí

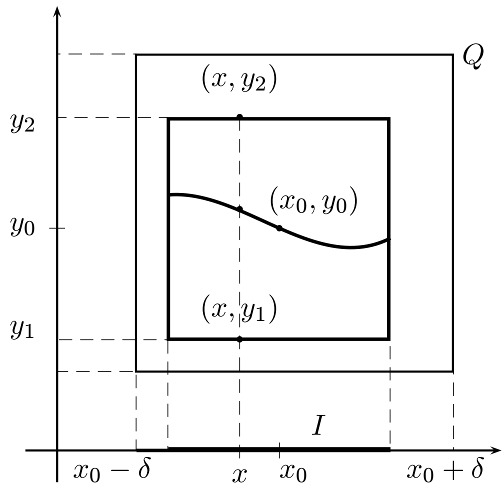
$$\frac{\partial f}{\partial y} \geq \varepsilon \tag{8.2}$$

pro jisté malé $\varepsilon > 0$. Toto okolí Q si můžeme představit např. jako otevřený čtverec

$$Q = (x_0 - \delta, x_0 + \delta_0) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$$

pro nějaké $\delta > 0$, viz obr.8.2. Funkce $f(x_0, y)$ je v proměnné y rostoucí, neboť její derivace je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) > 0$. Protože $f(x_0, y_0) = 0$, existují čísla $y_1 \in (y_0 - \delta, y_0)$ a $y_2 \in (y_0, y_0 + \delta)$, že $f(x_0, y_1) < 0$ a $f(x_0, y_2) > 0$. Ze spojitosti plyne, že

$$f(x, y_1) < 0 \quad \text{a} \quad f(x, y_2) > 0 \tag{8.3}$$



Obr. 8.2

i pro další body $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, kde $0 < \delta_1 \leq \delta$. Mějme nyní takové pevně zvolené $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Funkce $f(x, y)$ proměnné y roste na intervalu (y_1, y_2) a přitom podle (8.3) má na obou koncích opačné znaménko. Existuje tak právě jedno $y \in (y_1, y_2)$, pro něž je hodnota $f(x, y) = 0$. Označíme toto y ležící nad zvoleným bodem x jako $y(x)$. Tím jsme získali funkci y definovanou na intervalu $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, která vyhovuje podmínce

$$f(x, y(x)) = 0.$$

Zbývá ukázat, že y je také třídy C^1 na I, tj. derivace y' je spojitá. Mějme $x \in I$ a $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že i bod $x + h$ leží v I. Označíme si

$$\omega(h) = y(x + h) - y(x), \text{ tj. } y(x + h) = y(x) + \omega(h).$$

Nyní užijeme Větu 5.7 o střední hodnotě. Existují čísla ϑ_1 a ϑ_2 z intervalu $(0, 1)$, že

$$\begin{aligned} &f(x + h, y(x) + \omega(h)) - f(x, y(x)) \\ &\qquad = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2 \omega(h)\Big)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2 \omega(h)\Big)\, \omega(h). \end{aligned}$$

Protože výraz nalevo je nulový, máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2 \omega(h)\Big)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2 \omega(h)\Big)\, \omega(h) = 0.$$

Podle (8.2) je $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nenulová, můžeme z poslední rovnice vyjádřit $\omega(h)$.

$$\omega(h) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h)\Big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h)\Big)}\, h. \tag{8.4}$$

Pomocí (8.2) lze dále vyvodit

$$\lim_{h\to 0}|\omega(h)| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h)\Big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h)\Big)}\, h\right|$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon}\lim_{h\to 0}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h)\Big)\right|\,|h| = 0.$$

Tím jsme dokázali, že funkce $y(x)$ je spojitá na I, neboť z definice $\omega(h)$ plyne

$$\lim_{h\to 0} y(x+h) - y(x) = \lim_{h\to 0}\omega(h) = 0.$$

Vydělíme nyní rovnici (8.4) číslem h a provedeme limitu $h \to 0$. Dostaneme

$$y'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}$$
$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+\vartheta_1 h, y(x)+\vartheta_2\omega(h))} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Z této poslední rovnosti jsme zjistili, že jednak derivace y' existuje, dále vidíme, čemu se rovná. Protože $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité, je y třídy C^1 na I. □

Příklad 8.3. Podíváme se na případ ze začátku kapitoly, který zůstal otevřený. Máme rovnici

$$\sin xy - x + y = 0.$$

Zjistíme, zda v okolí bodu $(0,0)$ zadává tato rovnice implicitně funkci $y = y(x)$. Podle Věty 8.2 k tomu stačí ověřit, zda funkce $f(x,y) = \sin xy - x + y$ splňuje podmínku $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x\cos xy + 1\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

Protože funkce f je třídy C^1, je rovněž $y(x)$ diferencovatelná a platí

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Funkce $y(x)$ zadaná implicitně rovnicí (8.1) má v nule drivaci rovnou -1.

Pro zapamatování vzorce pro $y'(x)$ z Věty 8.2 je výhodná následující úvaha. Kdybychom odněkud už věděli, implicitní funkce $y(x)$ existuje a je diferencovatelná, tak hodnotu její derivace spočteme takto. Rovnici

$$f(x, y(x)) = 0$$

zderivujeme podle x podle vzorce pro derivaci složené funkce:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

Je-li $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dostáváme z této rovnice ihned tvar y'. Můžeme si všimnout i další věci. Kdyby $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, tak lze naopak vyjádřit x pomocí y, $x = x(y)$. Obecně je možné vyjádřit jednu proměnnou jako funkci té druhé, jestliže alespoň jedna z parciálních derivací je nenulová. Jsou-li obě parciální derivace nulové, pak nelze bez dalšího zkoumání říci nic.

Pro funkci f tří (a více) proměnných je jak tvrzení věty o implicitní funkci, tak i důkaz podobný. Uvedeme si proto pouze znění příslušné věty v $\mathbb{R}^3$.

Věta 8.4. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ takový, že $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, pak existuje okolí $J \subset \mathbb{R}^2$ bodu (x_0, y_0) a funkce $z\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1, že*

$$z(x_0, y_0) = z_0, \quad a \quad f(x, y, z(x, y)) = 0$$

pro všechna $(x, y) \in J$. Pro derivace platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Jako ilustraci uvedeme následující příklad.

Příklad 8.5. Zjistěte, zda rovnice $3x - 2y + z^2 - \ln z = 0$ zadává implicitní funkci $z(x, y)$ v okolí bodu $(1, 1, 1)$. V kladném případě určete její gradient.

Ověříme předpoklady Věty 8.4.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 2z - \frac{1}{z}\bigg|_{z=1} = 1.$$

Teď víme, že funkce $z(x, y)$ existuje a je třídy C^1. Takže

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\right).$$

V bodě $(1, 1)$ pak dostaneme

$$\operatorname{grad} z(1, 1) = (-3, 2).$$

2 Cvičení

Úloha: Vypočtěte první a druhou derivaci implicitní funkce dané rovnicí

$$xe^y + ye^x - 2 = 0. \tag{8.5}$$

v bodě $x = 0$.

Řešení: Nejprve musíme zjistit hodnotu $y(0)$. Dosadíme $x = 0$ do rovnice (8.5):

$$0e^y + ye^0 - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 2.$$

Ověříme, že pro $f(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 2) \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) = xe^y + e^x \Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = 1.$$

Místo přímého použití Věty 8.2 si ukážeme alternativní postup. Zderivujeme rovnici (8.5) dvakrát podle x. První derivace dává

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^y + ye^x - 2) = e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x. \tag{8.6}$$

A ještě jednou zderivováno:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(xe^y + ye^x - 2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x) \\ &= 2y'e^y + xy''e^y + xy'^2e^y + y''e^x + 2y'e^x + ye^x. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Z rovnice (8.6) získáme

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}.$$

(Ten samý vztah bychom dostali ze vzorce ve Větě 8.2.) Pro bod $x = 0$ máme $y'(0) = -e^2 - 2$. Nyní všechny hodnoty $x = 0$, $y = 2$ a $y' = -e^2 - 2$ dosadíme do (8.7).

$$0 = -2(e^2 + 2) + y'' - 2(e^2 + 2) + 2.$$

Odtud $y'' = 2e^2(e^2 + 2) + 2(e^2 + 2) - 2 = 2e^4 + 6e^2 + 2$.

Závěr: funkce y má hodnoty derivací $y'(0) = -e^2 - 2$ a $y''(0) = 2e^4 + 6e^2 + 2$.

Úloha: Nalezněte tečnou rovinu k elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

v bodě (x_0, y_0, z_0).

Řešení: Položíme $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$. Příslušné parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{2x_0}{a^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{2y_0}{b^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{2z_0}{c^2}.$$

Je-li $z_0 \neq 0$, tak jistá část elipsoidu kolem (x_0,y_0,z_0) je popsána grafem funkce $z = z(x,y)$. (V tomto případě si funkci $z(x,y)$ můžeme dokonce z rovnice elipsoidu vypočítat.) Tečná rovina je

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0).$$

Po dosazení za derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dostaneme

$$z - z_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(y - y_0).$$

Upravíme tuto rovnici do výsledného symetrického tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{8.8}$$

Tato rovnice udává obecný tvar tečné roviny. V našem případě nemohou být všechny derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ v bodě (x_0,y_0,z_0) současně nulové (to by (x_0,y_0,z_0) nemohl ležet na elipsoidu). Můžeme tak vždy provést výše uvedený postup pro příslušnou nenulovou parciální derivaci. Pokaždé skončíme u rovnice (8.8). Pro elipsoid tak získáme

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

1. Zjistěte derivace $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ funkcí zadaných implicitně.
   a) $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$ v bodě $(1,?)$,
   b) $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$ v bodě $(?,0)$,
   c) $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ v bodě $(\pm 2, 0)$,
   d) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ v obecném bodě,
   e) $e^x\cos y + e^y\cos x = 1$ v obecném bodě,
   f) $xe^x = y^2 + xy$ v obecném bodě.
2. Vypočtěte y' (a eventuelně y'') pro funkci zadanou rovnicí

$$x^y = y^x.$$

3. Vypočtěte derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ v obecném bodě pro implicitně zadané funkce.

   a) $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$,
   b) $z = xy \sin zx$,
   c) $z + e^z = xy + 1$,
   d) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = 5$.

4. Ověřte, že funkce $z(x, y)$ daná rovnicí

$$g\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

   splňuje

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

5. Nechť $f(x, y, z)$ je třídy C^1 a platí, že $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Čemu se rovná $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}$?

6. Nechť rovnice $f(x, y) = 0$ zadává funkci $y(x)$, která má druhou derivaci. Ukažte, že

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

7. Vypočtěte všechny první a druhé parciální derivace funkce $z(x, y)$ zadané

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

8. Napište rovnici tečny k zadané křivce v zadaném bodě.

   a) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $(2, 0)$,
   b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ v bodě $(8, 1)$.

9. Nalezněte tečnou rovinu k dané ploše.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ v bodě $(1, -2, 3)$,
   b) $xy + yz + zx = -1$ v bodě $(?, 2, -1)$,
   c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)+1}$ v bodě $(1, ?, -1)$.

10. Spočtěte úhel mezi dvěma plochami v daném bodě.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$ v bodě $(2, 0, 2)$,
   b) $z^2 + x^2 - y^2 = 4$, $2x + y - z = 1$ v bodě $(1, 1, 2)$.

11. Nechť funkce $z(x, y)$ je implicitně zadána rovnicí $f(x, y, z) = 0$. Nechť funkce $u(x, y)$ je zadána rovnicí $g(x, y, z, u) = 0$ Vypočtěte Du.

12. Nechť $z = z(x, y)$. Zavedeme novou funkci $w = w(u, v)$ tak, že platí

$$x + y = u,$$
$$\frac{y}{x} = v,$$
$$\frac{z}{x} = w.$$

Pomocí implicitního derivování ukažte, že rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

se transformuje na tvar

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

Výsledky

1.a) $-1/2+(\ln\sqrt{8})/16$, b) $1/(\ln 8-16)$, c) 1, d) $y' = -y/x$, e) $(e^y \sin x - e^x \cos y)/(e^y \cos x - e^x \sin y)$, f) $(e^x + xe^x - y)/(2y + x)$; 2. $y' = \frac{y^2}{x^2}\frac{1-\ln x}{1-\ln y}$; 3.a) $\frac{y\cos xy+z\cos xz}{x\cos xz+y\cos yz}$, $-\frac{x\cos xy+z\cos yz}{x\cos xz+y\cos yz}$, b) $\frac{y\sin zx+xyz\cos zx}{1-x^2y\cos zx}$, c) $y/(e^z + 1)$, $x/(e^z + 1)$, d) $-\frac{1+z^2}{1+x^2}$, $-\frac{1+z^2}{1+y^2}$; 5. -1; 7. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\frac{xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2z\frac{z^4-2xyz^2-x^2y^2}{(z^2-xy)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\frac{x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; 8.a) $y = 0$, b) $x + 2y = 10$; 9.a) $x - 2y + 3z = 14$, b) $x + 3z + 2 = 0$, c) $x + y + z = 1$; 10. a) $\pi/2$, b) $\cos\alpha = 1/6$, tj. $\alpha \approx 80^o$; 11. $Du = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\right) Dx + \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\right) Dy.$

Literatura

[1] J. Hamhalter, J. Tišer *Integrální počet funkcí více proměnných*, skripta FEL ČVUT

[2] J. Klíma *Smrt má ráda poezii*, edice Spirála, Československý spisovatel, Praha, 1968

[3] V. Jarník *Diferenciální počet II*, Academia, Praha 1976