Kapitola 1

Základní vlastnosti množiny $\mathbb{R}$

Úmluva 1. $\mathbb{R}$ doplníme o další dva prvky $\{+\infty, -\infty\}$ a vzniklou množinu označíme $\mathbb{R}^*$. Rozšíříme na ni uspořádání a základní početní úkony (vzájemné sčítání, násobení, odčítání, dělení) takto:

1. $-\infty \quad < \quad x \quad < \quad \infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\begin{array}{rclrcll} x+\infty &=& \infty, & x+(-\infty) &=& -\infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \\ x\cdot(\infty) &=& \infty, & x\cdot(-\infty) &=& -\infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x>0 \\ x\cdot(\infty) &=& -\infty, & x\cdot(-\infty) &=& \infty & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x<0 \\ \infty\cdot(-\infty) &=& -\infty, & \frac{x}{\infty} &=& \frac{x}{-\infty} \ = \ 0 & \text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

   $\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se nezavádí.

Definice 2. Množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme zdola (shora) omezenou, jestli je takové $K \in \mathbb{R}$, že $K \leq x \ \forall x \in M$ ($K \geq x \ \forall x \in M$). Pak řekneme, že K omezuje M zdola (shora). K se taky říká dolní (horní) odhad, mez, hranice, omezení, závora množiny M.

Je-li M omezená shora i zdola, říkáme jí omezená.

Definice 3. Největším prvkem množiny M nazveme takové n, kde $x \leq n \ \forall x \in M$. Značíme $\max M$. Obdobně se zavádí $\min M$ – nejmenší prvek M.

Poznámka 4. $\max (0,1\rangle = 1$, $\max (0,1)$ nemá největší prvek. Má-li $M \subset \mathbb{R}$ nejmenší, případně největší prvek, je shora, příp. zdola omezená a sice číslem $\max M$, případně $\min M$.

Základní vlastnost množiny $\mathbb{R}$ vyjadřuje následující věta:

Věta 5 (O suprému)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M shora omezená. Pak je jediné číslo s takové, že platí*

1. *$x \leq s$ pro $\forall x \in M$ (s omezuje M shora)*

2. *$\forall s' < s \ \exists x \in M$, že $s' < x$ (s je nejmenší horní mez)*

Důkaz. Jedná se pouze o důkaz jednoznačnosti. Má-li s vlastnosti 1 a 2, pak je-li $t < s$, t nemá vlastnost 1 (podle 2) a je-li $t > s$, nemá vlastnost 2. Tedy číslo s s oběma vlastnostmi 1 a 2 je nejvýše jedno. $\square$

Důsledek 6 (věta o infímu). Je-li $\emptyset \neq M \in \mathbb{R}$ zdola omezená, pak existuje jediné číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že:

1. $x \geq d$ pro $\forall x \in M$ (d omezuje M zdola)

2. $\forall d' > d \ \exists x \in M$, že $d' < x$ (d je největší dolní mez)

Důkaz. Dokážeme úplnou větu, za předpokladu, že víme, že platí věta o suprému.

Množina $-M = \{-x|x \in M\}$ je shora omezená a podle věty 5 je $s \in \mathbb{R}$, že

$\tilde{1}$ $y \leq s$ pro $\forall y \in -M$

$\tilde{2}$ $\forall d' > d \; \exists x \in -M : x < d'$

Ukážeme, že číslo $-s$ má vlastnosti 1 a 2 (z důsledku věty 5).

Je-li $d' > -s$, je $-d' < s$ a podle $\tilde{2}$ je $y \in -M$, že $y > -d'$. Je však $y = -x$ pro nějaké $xinM$ a tak $-x > -d'$, odkud $x < d'$, což je vlastnost 2 čísla $-s$ vůči M, o které předpokládáme, že platí.

Tím se dokázalo, že pokud platí věta o suprému, platí i věta o infímu. Důkaz jednoznačnosti je podobný jako u věty o suprému. □

Definice 7. Číslu s z věty 5 a číslu d z důsledku věty 5 se říká suprémum (infímum) množiny M a značí se $\sup M$ ($\inf M$).

Položíme ještě $\sup M = \infty$ ($\inf M = -\infty$), není-li M shora (zdola) omezená.

Dále $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = \infty$ a $\emptyset = M$ je jediný případ, kdy $\inf M > \sup M$.

Poznámka 8. Každá $M \subset \mathbb{R}^*$ má tedy definovanou hodnotu $\sup M$, $\inf M$. Je-li množina neprázdná, shora (zdola) omezená, je $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$).

Každá shora (zdola) omezená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$ tam tedy má své suprémum (infímum). To ale neplatí v $\mathbb{Q}$. Například množina $M = \mathbb{Q} \cap (0, \pi)$ má $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

Má-li M největší (nejmenší) prvek, je tento zároveň suprémem (infímem) množiny M. Je $\sup M \in M \Leftrightarrow M$ má největší prvek. Je-li to tak, je $\sup M = \max M$. Obdobně to platí o infímu a nejmenším prvku.

Důkaz důsledku věty 5 ukazuje, že $\inf M = -\sup -M$, obdobně $\sup M = -\inf -M$.

Kapitola 2

Limity posloupností

Definice 9. Zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N} \to \mathbb{C}$) nazveme posloupností reálných (komplexních čísel). Místo $a(n)$ značíme a_n.

Definice 10. Číslo $a \in \mathbb{C}$ nazveme limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ($\lim a_n = a$, $a_n \to a$) a říkáme, že $\{a_n\}$ má (konečnou) limitu, konverguje k a.

Posloupnostem, které mají konečnou limitu, se říká konvergentní.

Jestli pro reálnou posloupnost platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n > K \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ($\lim a_n = \infty$, $a_n \to \infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ jde k nekonečnu; diverguje.

Obdobně, jestli pro reálnou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n < K \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ($\lim a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje k $-\infty$.

Poznámka 11. Platí-li některá z podmínek v definici 10 pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak platí pro všechna $\varepsilon' > \varepsilon$.

Vlastnosti posloupností

Věta 12. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Jestli $a_n \to a \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k$$

takže to platí i pro $\varepsilon = 1$, tj. $\exists k \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < 1 \ \forall n \geq k$. Neboli $|a| - 1 < |a_n| < |a| + 1 \ \forall n \geq k$. Je tedy $|a_n|$ omezená zdola (shora) číslem $|a| - 1$ ($|a| + 1$) od nějakého konečného indexu k dál $\forall n \geq k$. Načež je $|a_n|$ zdola (shora) omezená číslem $\min(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k-1}|, |a| - 1)$ ($\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k-1}|, |a| + 1)$) $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 13. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť $a_n \to a$, $a_n \to b$ a buďte třeba $a, b \in \mathbb{C}$.

Protože $a_n \to a$, platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k'$$

protože $a_n \to b$, platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{k} \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - b| < \varepsilon\ \forall n \geq \tilde{k}$$
Zvolme $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq k$: $\max\Big(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon)\Big)$, pak je $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon$ (ty absolutní hodnoty jsou obě $< \varepsilon$).

Je tedy $|a - b| < 2\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$, nezbývá tedy, než že $|b - a| = 0$, tj. $a = b$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, je $\{a_n\}$ podle věty 12 omezená, ale $a_n \to b = \infty$ dává neomezenost $\{a_n\}$, což je spor.

Jestli $a = \infty$, $b = -\infty$, pak $a_n \to \infty$ znamená, že
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n > K\ \forall n \geq k'(K) \tag{2.1}$$
a $a_n \to -\infty$ znamená, že
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \tilde{k} \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n < K\ \forall n \geq \tilde{k}(K) \tag{2.2}$$
takže, zvolíme-li $K = 0$ v (2.1) a (2.2) máme pro $n \geq k = \max\Big(k'(0), \tilde{k}(0)\Big)$: $a_n > 0$ podle (2.1), ale $a_n < 0$ podle (2.2). □

Věta 14 (Vztah limit posloupností a základních početních úkonů)**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$, pak*

1. $a_n \pm b_n \to a \pm b$
2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ *(nelze $0 \cdot \infty$)*
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ *($b \neq 0$ nebo zlomek $\frac{a}{b}$ není ve tvaru $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)*

má-li pravá strana smysl, tj. například má-li $\frac{a}{b}$ smysl, má posloupnost $\frac{a_n}{b_n}$ limitu a ta se rovná $\frac{a}{b}$; obdobně ostatní případy.

Důkaz. 1. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, takže
$$\forall \sigma > 0\ \exists k'(\sigma), \text{ že } |a_n - a| < \sigma\ \forall n \geq k' \tag{2.3}$$
$$\forall \sigma > 0\ \exists \tilde{k}(\sigma), \text{ že } |b_n - b| < \sigma\ \forall n \geq \tilde{k} \tag{2.4}$$
Abychom ukázali, že $a_n + b_n \to a + b$, máme ukázat, že platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon), \text{ že } |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon\ \forall n \geq k$$
Buď tedy $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq k = \max\Big(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon)\Big)$, pak je $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

(b) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a b je třeba ∞ (pro $-\infty$ se dokáže obdobně). Podle věty 12 je a_n omezená, je tedy i omezená zdola. Nechť $L \in \mathbb{R}$ je takové, že $a_n > L$ pro kažné $n \in \mathbb{N}$. Podle definice 10 ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_1(K) \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n > K - L$ pro $n > n_1(K)$. Pro taková n je ovšem $a_n + b_n \geq L + b_n > L + K - L = K$.

2. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Podle věty 12 je $\{a_n\}$ omezená. Buď $K > 0$ nějaká konstanta, jež ji omezuje ($|a_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$). Pak je $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \leq K \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon = (K + |b|) \cdot \varepsilon$.

(b) Nechť $a \in \mathbb{R}^+$ a b je třeba ∞ (pro $a \in \mathbb{R}^-, a = \infty, a = -\infty$ a $b = -\infty$ se dokáže obdobně).

Víme, že pro nějaké $\alpha < a, \alpha > 0$ platí, že pro $\varepsilon = a - \alpha\ \exists k'$, že $|a_n - a| < a - \alpha\ \forall n \geq k'$, takže $a_n > \alpha\ \forall n \geq k'$ (pro $a = \infty$ platí totéž pro libovolně zvolené α).

Je-li $b = \infty$, pro libovolné L a $K = \frac{L}{\alpha}\ \exists \tilde{k}$, že $b_n > \frac{L}{\alpha}\ \forall n \geq \tilde{k}$. Pro $k = \max(k', \tilde{k})$ platí $a_n b_n > \alpha b_n > L$ pro libovolná L.

3. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Buďte $K > 0$, $L > 0$ nějaké konstanty, které omezují $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ podle věty 12. Pak je $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - a_n b_n + a_n b_n - a b_n}{b_n b}\right| \leq \frac{|a_n||b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b_n|}{|b_n b|} < \frac{(K+L)}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} \cdot \varepsilon$.

Teď potřebujeme dokázat, že $\frac{1}{|b_n|}$ je omezené.

Protože $\frac{a}{b}$ má smysl, je $b \neq 0 \Rightarrow |b| \neq 0$, načež $||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \varepsilon$ takže $|b_n| \geq |b| - \varepsilon$. Je-li $|b| - \varepsilon > 0$, tj. $\varepsilon < |b|$, je $\frac{1}{|b| - \varepsilon} > 0$ a tak

$$\frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{1}{|b| - \varepsilon}$$

Je-li dokonce $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$, je $\frac{1}{|b| - \varepsilon} < \frac{1}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}$ a tak je

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{(K+L) \cdot \varepsilon}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|}$$

a podle poznámky 11 je důkaz hotový.

(b) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $|b| = \infty$.

Dokážeme, že $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = 0$ a pak můžeme použít již dokázaného tvrzení o součinu.

Ke každému $\frac{1}{\varepsilon}$ existuje $k(\frac{1}{\varepsilon})$, že $|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geq k(\frac{1}{\varepsilon})$. Ale $|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ je totéž, co $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \varepsilon$.

□

Věta 15 (2. věta o limitě součinu)**.** *Buď $\{a_n\}$ omezená, $\{b_n\} \to 0$. Pak má $\{a_n \cdot b_n\}$ limitu a ta se rovná nule.*

Důkaz. $\exists k > 0$, že $|a_n| < K$ (omezenost $\{a_n\}$, definice 2). To, že $b_n \to 0$, znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ a že } |b_n| < \varepsilon\ \forall n \geq k$$

Pro $n \geq k\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$ pak je $|a_n b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. □

Věta 16 (2. věta o limitě převrácené hodnoty)**.** *Nechť $a_n \to 0$ a $\exists \tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $a_n > 0$ ($a_n < 0$) $\forall n \geq \tilde{k}$. Pak $\frac{1}{a_n} \to \infty$ ($-\infty$).*

Důkaz. Buď $a_n > 0\ \forall n \geq \tilde{k}$ a buď $K > 0$. Ježto $a_n \to 0$, číslo $\frac{1}{K}$, $k' \in \mathbb{N}$, že $|a_n| < \varepsilon = \frac{1}{K}\ \forall n \geq k'$, takže $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > K$ pro tato n.

Je-li $a_n < 0\ \forall n \geq \tilde{k}$, je $b_n = -a_n > 0\ \forall n \geq \tilde{k}$ a podle právě dokázaného je $\frac{1}{b_n} \to \infty$, odkud $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{-b_n} = -\frac{1}{b_n} \to -\infty$. □

Věta 17 (O přenášení nerovnosti z limit na posloupnosti)**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$ a $a < b$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n < b_n\ \forall n \geq k$.*

Důkaz. Buď třeba $a, b \in \mathbb{R}$. Platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq k' \tag{2.5}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |b_n - b| < \varepsilon\ \forall n \geq \tilde{k} \tag{2.6}$$

Pro $n \geq k = \max\left(k'\left(\frac{b-a}{2}\right), \tilde{k}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)$ je podle (2.5)

$$a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

a podle (2.6) je

$$b_n > b + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

dohromady $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, platí (2.5) a $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \tilde{k}(K)$, že $b_n > K\ \forall n \geq \tilde{k}$.

Pro $n \geq k = \max\left(k'(1), \tilde{k}(a+1)\right)$ je $a_n < a + 1 < b_n$. □

Věta 18. *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$ a nechť $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq b_n\ \forall n \geq k$. Pak $a \leq b$.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. $b < a$, existuje podle věty 17 index $k' \in \mathbb{N}$, že $b_n < a_n$ pro každé $n \geq k'$.

Pro $n \geq \max(k, k')$ je tedy $b_n < a_n$ a $a_n \leq b_n$ a to je spor. □

Věta 19 (O majorizované konvergenci (o dvou policajtech))**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to a$ a existuje $k^* \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq k^*$. Pak $\{c_n\}$ má limitu a ta se rovná a.*

Důkaz. Buď třeba $a \in \mathbb{R}$ máme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |c_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq k$$

Buď tedy $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to a$, existuje $k' \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq k'$ a tak $a - \varepsilon < a_n\ \forall n \geq k'$. Protože $b_n \to a$, existuje $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $|b_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq \tilde{k}$ a tak $b_n < a + \varepsilon\ \forall n \geq \tilde{k}$.

Pro $n \geq k = \max\left(k', \tilde{k}\right)$ pak je $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$, tj. $|c_n - a| < \varepsilon$. □

Definice 20. Řekněme, že reálná posloupnost $\{a_n\}$ roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řekněme, že $\{a_n\}$ má některou z (těchto) vlastností od $k \in \mathbb{N}$, má-li ji $\forall n \geq k$.

Posloupnostem, které neklesají či nerostou se říká monotónní, těm co dokonce jenom rostou či klesají, se říká ryze monotónní.

Věta 21 (O existenci limity monotónní posloupnosti)**.** *Jestli $\{a_n\}$ neklesá (neroste), má limitu. Ta se rovná* $\sup\{a_n\}$ *(*$\inf\{a_n\}$*).*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ třeba neklesá. Je-li $a = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$, zvolme $\varepsilon > 0$. Je $a - \varepsilon < a$ a podle podle 2. vlastnosti suprému (věta 5) je nějaké $a_k > a - \varepsilon$.

Pro $n \geq k$ pak je $a - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, tedy $|a_n - a| < \varepsilon$ pro tato n. Je-li $\sup\{a_n\} = \infty$, není posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená, a tak $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{N}$, že $a_k > K$ (definice 2). Ale $\{a_n\}$ neklesá a tak $a_n \geq a_k > K\ \forall n \geq k$.

Jestli $\{a_n\}$ neroste, tak $\{-a_n\}$ neklesá a tak $-a_n \to \sup\{-a_n\} = -\inf\{a_n\} \Rightarrow a_n \to \inf\{a_n\}$. □

Definice 22. Vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$ je posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Říká se jí též podposloupnost.

Věta 23 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $a_n \to a$ a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je z ní vybraná. Pak má limitu a ta se rovná a.*

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$. Pak $\exists t \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq t$. Buď $s \in \mathbb{N}$ taková, že $n_s > t$ (takové s existuje, neboť $\{n_k\}$ roste). Pro $k \geq s$ pak je $n_k \geq n_s \geq t$. Takže $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Nechť $a = \infty$. Buď $K \in \mathbb{R}$. Pak $\exists t \in \mathbb{R}$, že $a_n > K\ \forall n \geq t$. Opět existuje $s \in \mathbb{N}$, že $n_s \geq t$. Pro $k \geq s$ pak je $n_k \geq n_s \geq t$ a tak $a_{n_k} > K$.

Jestli $a_n \to -\infty$, tak $-a_n \to \infty \Rightarrow -a_{n_k} \to \infty \Rightarrow a_{n_k} \to -\infty$. □

Důsledek 24. Obsahuje-li $\{a_n\}$ dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, nemá limitu.

Věta 25. *Buďte $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ vybrané z $\{a_n\}$, přičemž $\forall n \in \mathbb{N}$ je jedním z m_k nebo n_l (tj. $\{m_l\} \cup \{n_l\} = \mathbb{N}$).*

Jestli $a_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$, $a_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} a$, tak má $\{a_n\}$ limitu a ta se rovná a.

Důkaz. Buď $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists \tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $|a_{m_k} - a| < \varepsilon\ \forall k \geq \tilde{k}$. $\exists \tilde{l} \in \mathbb{N}$, že $|a_{n_l} - a| < \varepsilon\ \forall l \geq \tilde{l}$. Tudíž pro $n \geq \max\left(m_{\tilde{k}}, n_{\tilde{l}}\right)$ je buďto $n = m_k$ a protože je $n \geq m_{\tilde{k}}$, odkud $k \geq \tilde{k}$, takže $|a_n - a| = |a_{m_k} - a| < \varepsilon$ odkud plyne $l \geq \tilde{l}$, takže $|a_n - a| = |a_{n_l} - a| < \varepsilon$. □

Definice 26. Hromadnou hodnotou (hromadným bodem) posloupnosti $\{a_n\}$ nazveme limitu její vybrané posloupnosti.

Věta 27. *Množina všech hromadných hodnot každé reálné posloupnosti $\{a_n\}$ je neprázdná, má největší prvek s a nejmenší d. Přitom je $s = \lim s_n$ a $d = \lim d_n$ kde $s_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, $d_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$.*

Důkaz.

1. Posloupnost $\{s_n\}$ ($\{d_n\}$) neroste (neklesá) a tak má podle věty 21 limitu. Označme ji s (d).
2. Dokážeme, že s je hromadným bodem $\{a_n\}$ (tj. limitou nějaké posloupnosti) takto:

   Podle věty 21 je $s = \inf\{s_n\}$ a buď $s \neq \infty$; to je pak $s_n \neq \infty\ \forall n$. Pak je

   (a) $s_1 - 1 < s_1 = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists$index $n_1 \in \mathbb{N}$, že $s_1 - 1 < a_{n_1} \leq s_{n_1}$

   (b) $s_{n_1+1} - \frac{1}{2} < s_{n_1+1} = \sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, že $s_{n_1+1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq s_{n_2}$

   (c) $s_{n_2+1} - \frac{1}{3} < s_{n_2+1} = \sup\{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \ldots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_3 \in \mathbb{N}$, že $s_{n_2+1} - \frac{1}{3} < a_{n_3} \leq s_{n_3}$

   $\vdots$

   Mějme už $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots < n_k$, že

   $$s_{n_j+1} - \frac{1}{j+1} < a_{n_{j+1}} \leq s_{n_{j+1}} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots k (k \geq 1) \tag{2.7}$$

   Je $s_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} < s_{n_k+1} = \sup\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \ldots\}$ a tak podle 2. bodu věty 5 $\exists n_{k+1} \in \mathbb{N}$, že $s_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq s_{n_{k+1}}$.

   Tím se dostane rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, takže $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je z $\{a_n\}$ vybraná a že (2.7) platí pro $\forall j \in \mathbb{N}$.

   Protože je s_{n_j+1} z $\{s_n\}$ vybraná, jde podle věty 18 a 14 levá i pravá strana v (2.7) k s a podle věty 19 je $a_{n_j} \xrightarrow{j \to \infty} s$.

   Je-li $s = \infty$, pak z toho, že $s = \inf\{s_n\}$ plyne, že $s_n = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) $1 < s_1 = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$, takže podle věty 5 je index $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} > 1$,

   (b) $2 < s_{n_1+1} = \sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$, takže podle věty 5 je index $n_2 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_2} > 2$,

   (c) $3 < s_{n_2+1} = \sup\{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \ldots\}$, takže podle věty 5 je index $n_3 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_3} > 3$,

   $\vdots$

   Vzniklá vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $k < a_{n_k}\ \forall k \in \mathbb{N}$ a podle věty 19 je $a_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$, tj. $a_{n_k} \to s$.
3. s je největší hromadný bod $\{a_n\}$.

   Je-li h hromadný bod $\{a_n\}$, je limitou z ní vybrané posloupnosti, již označíme $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Pak je $a_{n_k} \leq \sup\{a_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots\} = s_{n_k}$, $h = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s$.

□

Definice 28. Největší (nejmenší) hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá její horní limitou nebo také *limes superior* (dolní limitou nebo také *limes inferior*) a značí se $\overline{\lim}\, a_n$ nebo $\limsup a_n$ ($\underline{\lim}\, a_n$ nebo $\liminf a_n$).

Věta 29. *$\{a_n\}$ má limitu právě když $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$. Ta je pak rovna jejich společné hodnotě.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Existuje-li $\lim a_n$, má podle věty 23 každá z $\{a_n\}$ vybraná posloupnost limitu a rovnou $\lim a_n$. Protože $\overline{\lim}\, a_n$ i $\underline{\lim}\, a_n$ jsou limitami vybraných posloupností, platí to i pro ně. Takže jsou stejné a rovné limitě a_n.

$\Leftarrow$ Jelikož $d_n = \inf\{a_n, \ldots\} \le \{a_n\} \le \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = s_n$ a $d = \lim d_n = \underline{\lim}\, a_n$, $s = \lim s_n = \overline{\lim}\, a_n$, je $d_n \le a_n \le s_n$ a tak má $\{a_n\}$ limitu rovnou společné hodnotě limit $\lim s_n$, $\lim d_n$.

□

Věta 30. *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní.*

Důkaz. Buď $\{a_n\}$ omezená a nechť je nejdřív reálná. Pak existuje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, že $a \le a_n \le b\ \forall n \in \mathbb{N}$. Rozdělme $\langle a, b\rangle$ jeho středem s_1; je-li $a_n \in \langle a, s_1\rangle$ pro nekonečně indexů n, buď n_1 jeden z nich a položme $p_1 = a$, $q_1 = s_1$. Jinak musí být $a_n \in \langle s_1, b\rangle$ pro nekonečně indexů n. Buď n_1 jeden z nich a položme $p_1 = s_1$, $q_1 = b$.

V obou případech je $a \le p_1 \le a_{n_1} \le q_1 \le b$.

Rozdělme $\langle p_1, q_1\rangle$ jeho středem s_2; buď je $a_n \in \langle p_1, s_2\rangle$ pro nekonečně indexů n, buď $n_2 > n_1$ jeden z nich a položme $p_2 = p_1$, $q_2 = s_2$. Nebo je $a_n \in \langle s_2, q_1\rangle$ pro nekonečně indexů n. Buď $n_2 > n_1$ jeden z nich a položme $p_2 = s_2$, $q_2 = q_1$. Je $a \le p_1 \le p_2 \le a_{n_2} \le q_2 \le q_1 b$.

Vznikne tak posloupnost $\underbrace{\{p_k\}}_{\text{neklesá}}$, $\{a_{n_k}\}$, $\underbrace{\{q_k\}}_{\text{neroste}}$ a $a \le p_k \le a_{n_k} \le q_k \le b\ \forall k \in \mathbb{N}$. Je

$$|p_k - q_k| = \frac{b-k}{2^k}$$

Podle věty 21 má $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ limitu $p_k \to p$, $q_k \to q$. Ježto $0 \le |p_k - q_k| = \frac{b-k}{2^k}$, je $|p-q| = \lim |p_k - q_k| = \lim \frac{b-k}{2^k} = 0 \Rightarrow p = q$. Podle věty 19 má limitu i $\{a_{n_k}\}$ rovnou $p = q$ díky nerovnosti $a \le a_{n_k} \le b$ konečnou. □

Věta 31 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence)**.** *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní (tj. konečnou) limitu právě když splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \textit{že}\ |a_m - a_n| < \varepsilon\ \forall n, m \ge k(\varepsilon) \tag{2.8}$$

Důkaz.

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$ měj konečnou limitu, označme ji $a \in \mathbb{C}$. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \ge k$, takže pro $m, n \ge k$ je $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| \le 2\varepsilon$, což je (2.8).

$\Leftarrow$ Ukážeme nejdřív, že splňuje-li a_n podmínku (2.8), je omezená. Nechť tedy platí (2.8). Zvolíme-li tam třeba $\varepsilon = 1$, pak tedy existuje index $k(1) \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < 1\ \forall n, m \ge k(1)$. To tudíž platí i pro $n = k(1)$, takže $\left|a_m - a_{k(1)}\right| < 1\ \forall m \ge k(1)$. To je $a_{k(1)} - 1 < a_m < a_{k(1)} + 1\ \forall m \ge k(1)$. Je tedy $\{a_n\}$ omezená shora (zdola) číslem $a_{k(1)} + 1$ ($a_{k(1)} - 1$) od $n = k(1)$, je tedy omezená.

Podle věty 30 existuje $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}$, která konverguje, její limitu označme a. Ukážeme, že $a_n \to a$. Buď $\varepsilon > 0$, podle (2.8) existuje $\tilde{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že

$$|a_m - a_n| < \varepsilon\ \forall m, n \ge \tilde{k}(\varepsilon) \tag{2.9}$$

Protože $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$, je $k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon\ \forall k \ge k'(\varepsilon)^1 \tag{2.10}$$

[1]lze vzít $k'(\varepsilon) \ge \tilde{k}(\varepsilon)$

Pro $n \geq n_{k'(\varepsilon)}$, pak je (protože $n_{k'} \geq k' \geq \tilde{k}$) $|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_{k'}}|}_{< \varepsilon \text{ podle (2.9)}} + \underbrace{|a_{n_{k'}} - a|}_{< \varepsilon \text{ podle (2.10)}} < 2\varepsilon$

□

Věta 32 (Stolzova)**.** *Nechť* $\{y_n\}$ *roste a* $y_n \to \infty$. *Pak existuje-li* $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, *existuje i* $\lim \frac{x_n}{y_n}$ *a jsou stejné.*

Důkaz. 1. Jsou-li zlomky $\frac{p_1}{q_1}$ a $\frac{p_2}{q_2}$ mezi reálnými čísly a a b, $a < b$ $(a < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < b)$ a je-li $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, je $a < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < b$.

Skutečně, je-li $a < \frac{p_1}{q_1} < b$, $a < \frac{p_2}{q_2} < b$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, je $aq_1 < p_1 < bq_1$, $aq_2 < p_2 < bq_2$, takže $a\,(q_1 - q_2) < p_1 + p_2 < b\,(q_1 + q_2)$, odkud už přímo dostaneme $a < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < b$.

2. Pomocí dokázaného v 1. se budeme snažit z $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ dostat pryč x_{n-1} a y_{n-1}.

Nechť existuje $l = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ a buď nejdřív l konečné. Pak

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l \right| < \varepsilon\ \forall n > k' \tag{2.11}$$

Skutečně, buď $\varepsilon > 0$. Existence a konečnost l zaručuje, že

$$\exists k' \in \mathbb{N}, \text{ že } \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \varepsilon\ \forall n > k' \tag{2.12}$$

tj. $l - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \varepsilon\ \forall n \geq k'$. Je ale

$$\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} = \frac{x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \cdots + x_{k'+1} - x_{k'}}{y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + y_{n-2} - \cdots + y_{k'+1} - y_{k'}}$$

a protože $y_j - y_{j-1} > 0\ \forall j \geq k'$, plyne (2.11) z (2.12) podle bodu 1.

3. Je $\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} = \frac{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{k'}}{y_n}}{1 - \frac{y_{k'}}{y_n}}$ což umožňuje vyjádřit $\frac{x_n}{y_n}$ pomocí $\frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}}$:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \cdot \left(1 - \frac{x_{k'}}{y_n}\right) + \frac{x_{k'}}{y_n}$$

a tak

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l - \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \cdot \frac{y_{k'}}{y_n} + \frac{x_{k'}}{y_n}$$

načež

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} - l \right| + \left| \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \right| \cdot \left| \frac{y_{k'}}{y_n} \right| + \left| \frac{x_{k'}}{y_n} \right| \qquad \text{pro } n > k' \tag{2.13}$$

4. Buď $\varepsilon > 0$. Podle (2.11) je posloupnost $\left\{ \frac{x_n - x_{k'}}{y_n - y_{k'}} \right\}$ $n > k'$ omezená (omezující konstantu označme K a buď $K > 0$).

Protože $y_n \to \infty$, existuje, např. díky aritmetice limit, $\tilde{k}(\varepsilon)$, že

$$\left| \frac{y_{k'}}{y_n} \right| < \varepsilon,\ \left| \frac{x_{k'}}{y_n} \right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \tilde{k}(\varepsilon) \tag{2.14}$$

Pro $n \geq k = \max\Big(k'(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon)\Big)$ je pak podle (2.11), (2.12), (2.13) a (2.14)

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \varepsilon + K \cdot \varepsilon + \varepsilon = (2 + K) \cdot \varepsilon$$

Čímž máme důkaz pro $l \neq \infty$ hotov.

5. Pokud máme $l = \infty$, pak ke $K = 1$ existuje $k \in \mathbb{N}$, že

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \qquad \forall n \geq k$$

odkud $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \ \forall n \geq k$.
Takže jednak $x_n > x_{n-1} \ \forall n \geq k$ a

$$\begin{aligned} x_n - x_k &= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \dots + x_{k+1} - x_k > \\ &> y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + y_{n-2} - \dots + y_{k+1} - y_k = \\ &= y_n - y_k \qquad \forall n \geq k \end{aligned}$$

a z toho plyne, že $x_n > y_n + x_k - y_k$ a protože $y_n \to \infty$, tak podle věty 19 $x_n \to \infty$ a navíc podle věty 17 $x_n > 0 \ \forall n \geq k^* \in \mathbb{N}$.
Je tedy $x_n > x_{n-1} \ \forall n \geq k$ a $x_n \to \infty$, navíc $\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ má konečnou limitu $\frac{1}{l} = \frac{1}{\infty} = 0$ a tak lze na posloupnost $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ použít už dokázaného, což dává: $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ má limitu a ta je rovna nule. Je však $\frac{y_n}{x_n} > 0 \ \forall n \geq k^*$ a tak podle věty 16 má převrácená hodnota $\frac{x_n}{y_n}$ limitu ∞.

□

Důsledek 33.

1. Jestli $a_n \to a$, pak $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ má limitu a ta se rovná a.
2. $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$
4. $\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) \to \frac{1}{2}$

Důkaz.

1. Ve větě 32 položíme $x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $y_n = n$.
2. V předchozím bodě položíme $a_n = \sqrt[n]{n}$ a užijeme toho, že $\sqrt[n]{n} \to 1$. To platí, protože $\sqrt[n]{=} 1 + h_n \Rightarrow n = (1 + h_n)^n > 1 + \binom{n}{2} h_n^2 \Rightarrow \frac{n-1}{\binom{n}{2}} > h_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > h_n^2 \Rightarrow h_n \to 0$ (věta 19).
3. Ve větě 32 položíme $x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$. Pak je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)\, n^k + \dots_{\text{(bin. věta)}}} = \frac{1}{k+1}$$

4.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1) \cdot \left(1^k + 2^k + \dots + n^k\right) - n^{k+1}}{(k+1)\, n^k} \end{aligned}$$

Podle věty 32 to je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)\, n^k - n^{k+1} + (n-1)^{k+1}}{(k+1)\left(n^k - (n-1)^k\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+1}{2} n^{k-1} + \dots}{(k+1) \cdot k \cdot n^{k-1} + \dots} = \frac{\binom{k+1}{2}}{k\,(k+1)} = \frac{1}{2}$$

□

Příklad 34. Posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ roste a je shora omezená, má tedy podle věty 21 konečnou limitu, která se označuje e. Platí $2 < e \leq 3$. Navíc je $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

Důkaz.

1. Důkaz monotónnosti

   $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\right] = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$

   $a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \cdots = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!}$

   $\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)$ až $\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \geq \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$, navíc má součet o jeden prvek navíc, tedy $a_{n+1} \geq a_n$.

2. $$a_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{1-k-1}{n}\right)}{k!} \tag{2.15}$$

   $1+1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{1-k-1}{n}\right)}{k!} < 2 + \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 2 + \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 1 - 2^{\frac{1}{n+1}} < 2 + 1 < 3$

   Je tedy $2 \leq a_n \leq 3$, odkud $2 \leq \lim a_n \leq 3$ dle 18, ale $\{a_n\}$ roste a tak $a_n < a_n < 3\,\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$, limitou $n \to \infty$ a připevněním k plyne: $a_k < e < 3\,\forall k \in \mathbb{N}$ a pro $k = 2$ dává $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 > 2$, takže $2 < a_2 \leq e \leq 3$.

3. Označíme-li $b_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ a nahradíme v (2.15) v součtu závorky jedničkami, dá to $a_n \leq b_n\,\forall n \geq 2$, odkud $e \leq \lim b_n$ ($\{b_n\}$ má limitu, neb očividně roste).

$\square$

Kapitola 3

Ohleduplný úvod do základů teorie množin

Definice 35. Zobrazení f množiny A do množiny B nazveme prostým jestli platí: mají-li dva prvky z A stejný obraz, jsou totožné, tj. $x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (nebo $x, y \in A, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$).

Také se říká, že f zobrazuje A do B prostě.

Řekneme, že f zobrazuje A na B jestli $f(a) = \{f(x), x \in A\} = B$, tj. $\forall y \in B\ \exists x \in A$, že $f(x) = y$.

Důsledek 36. Jestli f zobrazuje prostě A na B, pak $\forall y \in B\ \exists! x \in A$, že $f(x) = y$. Lze tedy ke každému prvku z B jednoznačně přiřadit jeho vzor $x \in A$ (tj. takové $x \in A$, že $f(x) = y$). Vznikne tak zobrazení B na A (opět prosté), jež se označuje f^{-1} a říká se mu inverzní zobrazení k f. Je tedy $f^{-1} : B \to A$. Vztahy $y = f(x)$ a $x = f^{-1}(y)$ jsou pro $x \in A, y \in B$ rovnocenné.

Definice 37. Řekněme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje prosté zobrazení A na B a B na A.

Definice 38. Množinu A nazveme spočetnou, existuje-li prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na A. Tj. zobrazení $a : \mathbb{N} \to A$. Jinak řečeno, jestli lze A uspořádat do posloupnosti, nebo jestli A lze „očíslovat“, tj. jestli $A = \{a(1), a(2), \dots\}$.

Nazveme ji nejvýše spočetnou, je-li spočetná nebo konečná. (Někdy se spočetnou rozumí nejvýše spočetná)

Věta 39. *Buď A_n spočetná $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná (spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina)*

Důkaz. Uspořádáme spočetné množiny $A_1, A_2, \dots$ do posloupností

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, \dots\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Prosté zobrazení $b : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty}$ buď třeba takovéto: $b(1) = a_{11}$, $b(2) = a_{12}$, $b(3) = a_{21}$, $b(4) = a_{13}$, $b(5) = a_{22}$, $b(6) = a_{31}$, $b(7) = a_{14}$, ... dál od rohu. □

Důsledek 40. Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ spočetné, je i $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ spočetná.

Důkaz. Je-li $n = 2$, $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, je

$$\begin{array}{rcl} A_1 \times A_2 & = & \{[a_{11}, a_{21}], [a_{11}, a_{22}], [a_{11}, a_{23}], \dots\} \cup \\ & \cup & \{[a_{12}, a_{21}], [a_{12}, a_{22}], [a_{12}, a_{23}], \dots\} \cup \\ & \cup & \{[a_{13}, a_{21}], [a_{13}, a_{22}], [a_{13}, a_{23}], \dots\} \cup \\ & \cup & \dots \end{array}$$

Je to $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{[a_{1i}, a_{21}], [a_{2i}, a_{22}], \dots\}$, což je spočetné sjednocení spočetných množin a podle věty 39 je tedy rovněž spočetné. □

Věta 41. *Každá (nekonečná) část spočetné množiny je spočetná.*

Důkaz. Je-li $B \subset A = \{a_1, a_2, \dots\}$, buď $f(1)$ první index pro který je $a_{f(1)} \in B$, $f(2)$ první index, pro který je $a_{f(2)} \in B - \{a_{f(1)}\}$, ... Máme-li už $a_{f(k)} \in B - \{a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(k-1)}\}$, $k \geq 2$, buď $f(k+1)$ nejmenší index, že $a_{f(k+1)} \in B - \{a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(k)}\}$ a tak f prostě zobrazuje $\mathbb{N}$ na B. □

Důsledek 42 (věty 39). Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Důkaz. $\mathbb{Q} \subset \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} \equiv \mathbb{N} \times Z$, obě množiny jsou spočetné a můžeme uplatnit důsledek 40. □

Tvrzení 43. *Množina všech posloupností z nul a jedniček není spočetná.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Označme tu množinu P a předpokládejme, že je spočetná. Tj. lze ji uspořádat do posloupnosti $\{p^1, p^2, \dots\}$. Je tedy

$$\begin{array}{rcl} p^1 & = & \{p_1^1, p_1^2, \dots\} \\ p^2 & = & \{p_2^1, p_2^2, \dots\} \\ p^3 & = & \{p_3^1, p_3^2, \dots\} \\ \dots & & \end{array}$$

Nyní vytvořme posloupnost $q = \{q_1, q_2, \dots\}$, kde $q_j = 0$ jestli $p_j^i = 1$ a $q_j = 1$ jestli $q_j = 0$. Posloupnost q pak není žádná z $p^1, p^2, \dots$, co □

Důsledek 44. $\mathbb{R}$ není spočetná.

Důkaz. Buď P množina všech posloupností z nul a jedniček, každé $a = \{a_1, a_2, \dots\} \in P$ přiřadíme číslo $s(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$. Je $s(a) \in \langle 0, 1\rangle$ a tak vzniká zobrazení $s : P \to \langle 0, 1\rangle$. To však není prosté: jsou-li $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots\} \in P$ takové, že pro nějaké $k \geq 1$ je $a_k = 0$, $b_k = 1$ a $a_j = 1$, $b_j = 0\ \forall j > k$ a je-li $k > 1$, je $a_j = b_j\ \forall j = 1, \dots, k-1$, pak $s(a) = s(b)$.

Příklad takových a a b je následující:

$$\begin{array}{rcl} a & = & \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 1, 0, 0, \dots\} \\ b & = & \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 0, 1, 1, \dots\} \end{array}$$

Označme $P' = \{\{a_1, a_2, \dots\} \in P | a_k = 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 1 \text{ pro nějaké } k \geq 1\}$. Je $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, kde $P_k = \{\{a_1, a_2, \dots\} \in P | a_k = 0, a_j = 1\ \forall j > k\}$. Je P_k spočetná (dokonce konečná) $\forall k$, a tak P je spočetná a $P - P'$ tedy není spočetná, jinak by $P = (P - P') \cup P'$ byla spočetná.

$s' : (P - P') \to \langle 0, 1\rangle$ je prosté: je-li $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots\} \in P - P'$, $a \neq b$, existuje k, že $a_k \neq b_k$. Buď třeba $a_k < b_k$, tj. $a_k = 0$, $b_k = 1$. Protože $a \in P - P'$, není $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 1$ a tedy $s'(a) < s'(b)$, takže s' je prosté zobrazení nespočetné množiny $P - P'$ do $\langle 0, 1\rangle$, je tedy $s'(P - P')$ nespočetná a tak $\langle 0, 1\rangle$ obsahuje nespočetnou podmnožinu, nemůže být tedy podle věty 41 spočetná. Podle téže věty je tedy i $\mathbb{R}$ nespočetná. □

Poznámka 45. Řekněme, že mohutnost množiny A je menší než mohutnost množiny B ($\operatorname{moh} A < \operatorname{moh} B$), jestliže je nějaké prosté zobrazení A do B, ale žádné B do A. Tzv. hypotéza kontinua předpokládá, že není množina C, pro níž platí $\operatorname{moh} \mathbb{N} < \operatorname{moh} C < \operatorname{moh} \mathbb{R}$.

Kapitola 4

Limity funkcí

Definice 46. Reálnou (komplexní) funkcí na množině M se rozumí zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Funkci f nazveme shora (zdola) omezenou na M, jestli existuje nějaké číslo $k(K) \in \mathbb{R}$, že $f(x) \leq K\ \forall x \in M$, resp. $f(x) \geq k\ \forall x \in M$. Nazveme ji omezenou, je-li omezená jak shora, tak zdola.

To je totéž jako to, že $\exists K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K\ \forall x \in M$.

Definice 47. Buďte $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu A (resp. $\pm\infty$), jestli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

resp.

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

Píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = A(\text{resp. } \pm\infty)$.

Řekneme, že f má v a limitu A ($\pm\infty$) zprava, jestli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

Píše se $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Obdobně se zavádí limita f v a zleva (místo $a < x < a+\delta$ se bere $a - \delta < x < a$) a píše se $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Místo příslušných limit zprava (zleva) se někdy psává $f(a+)$, resp. $f(a-)$.

Řekneme, že f má v ∞ limitu $A \in \mathbb{R}$ (resp. $\pm\infty$) jestli $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ ($\forall K\ \exists k \in \mathbb{R}$, že $f(x) > k$, resp. $f(x) < k$). Píše se $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). U $-\infty$ se místo $x \geq k$ bere $x \leq k$ a píše se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$).

Poznámka 48.

1. Aby měla f limitu (zleva, zprava), musí být dána na nějakém $P(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - a| < \delta\}$ ($(a - \delta, a)$, $(a, a - \delta)$), $\delta > 0$. Této množině se říká prstencové (levé, pravé) δ-okolí bodu a. Není-li δ nutné uvádět, píše se jen $P(a)$ ($P^+(a)$, $P^-(a)$).

   Množině (K, ∞) ($(-\infty, K)$) lze říkat okolí nekonečna ($-\infty$).

2. Definice $\lim_{x\to a} f(x) = A$ má smysl i pro komplexní funkci komplexní proměnné x pro $a, A \in \mathbb{C}$.

3. Má-li f v bodě a vlastní (tj. konečnou) limitu, je na nějakém $P(a, \delta)$ omezená (totéž pro lim v $\pm\infty$), například čísly $A - 1$ a $A + 1$.

Věta 49. *f má v $a \in \mathbb{R}$ limitu právě když tam má limitu zprava i zleva a jsou stejné. V tom případě je hodnota limity rovna hodnotě obou jednostranných limit.*

Důkaz. Nechť $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = A$ a buď třeba $A \in \mathbb{C}$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$ a tak tím spíš $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$, což znamená, že $A = \lim_{x\to a+} f(x)$ $(A = \lim_{x\to a-} f(x))$.

Jestli naopak existuje $f(a+)$, $f(a-)$ a jsou stejné (označme je $A \in \mathbb{C}$), pak to znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta' > 0,\text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall a < x < a + \delta' \tag{4.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{\delta} > 0,\text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall a - \tilde{\delta} < x < a \tag{4.2}$$

takže je-li $\varepsilon > 0$, položme $\delta = \min \delta(\varepsilon), \tilde{\delta}(\varepsilon)$. Pro $0 < |x - a| < \delta$ pak platí (4.1) i (4.2) a tedy $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in P(a, \delta)$.

Případy, kdy $A = \infty$ $(-\infty)$ se dokážou obdobně. □

Důsledek 50. Má-li f v $a \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ vlastní (tj. konečnou) limitu (zleva, zprava), je na nějakém prstencovém okolí $P(a, \delta)$ $(P^+(a, \delta), P^-(a, \delta))$ omezená. Má-li ji u ∞ $(-\infty)$, je omezená na nějakém okolí ∞ $(-\infty)$.

Důkaz. Buď třeba $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak k $\varepsilon = 1\ \exists \delta > 0$, že $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$, tj. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon\ \forall x \in P(a, \delta)$ a tak pro $x \in P(a, \delta)$ je $||f(x)| - |A|| \le |f(x) - A| < \varepsilon$, odkud $|f(x)| < |A| + \varepsilon$.

Ostatní případy se dokáží obdobně. □

Věta 51 (Heineho o vztahu limity funkce a posloupnosti)**.** *Funkce f má v $a \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ limitu právě když platí*

$$\forall \{a_n\} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}) \textit{ takové, že } a_n \to a, \textit{ ale } a_n \neq a\ \forall n, \textit{ existuje } \lim f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ stejná $\forall$ takové posloupnosti a $\lim_{x\to a} f(x)$ se jí rovná.

Důkaz. $\Rightarrow$: Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A$, kde třeba $a, A \in \mathbb{C}$, Buď $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $a_n \to a$, $a_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{f(a_n)\}$ má limitu a.

Buď $\varepsilon > 0$. Protože $f(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $a \subset \mathbb{C}$, existuje $\delta > 0$, že

$$|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta \tag{4.3}$$

Protože $a_n \to a$, tak $\exists k(\delta) \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < \delta\ \forall n \ge k$. Ježto $a_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je navíc $0 < |a_n - a| < \delta$ a podle (4.3) je $|f(a_n) - A| < \varepsilon\ \forall n \ge k$ a tak má $\{f(a_n)\}$ limitu (rovnou A).

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka věty 51. Jestli $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $a_n \to a$, $b_n \to a$, $a_n \neq a$, $b_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\{f(a_n)\}$ i $\{f(b_n)\}$ má limitu. Posloupnost $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$ opět jde k a (podle věty 25) a má členy různé od $a\ \forall n$, takže podle podmínky věty 51 má posloupnost

$$\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), \dots\}$$

limitu. Ale $\{f(a_n)\}$ a $\{f(b_n)\}$ z ní jsou vybrané a tak mají limitu stejnou (věta 23). Označme ji A a buď třeba $A \in \mathbb{C}$. Ukážeme, že $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

K důkazu (sporem) předpokládáme, že $\lim_{x\to a} f(x)$ není A. To pak

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta_n = \frac{1}{n}\ \exists x_n \in \mathbb{C},\ 0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n},\text{ že } |f(x) - A| \ge \varepsilon$$

Jelikož $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}\ \forall n$ a $\frac{1}{n} \to 0$, je jednak $x_n \to a$ (19), jednak $x_n \neq a\ \forall n$. Ale protože $|f(x_n) - A| \ge \varepsilon_0$, není $f(x_n) \to A$, což je spor. □

Poznámka 52. Věta 51 pro jednostranné limity má tvar: Funkce reálné proměnné má v $a \in \mathbb{R}$ limitu zleva (zprava) právě když

$$\forall \{a_n\} \subset \mathbb{R} \text{ takové, že } a_n \to a, \text{ ale } a_n < a\ \forall n \quad (a_n > a\ \forall n), \text{ existuje } \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ stejná pro všechny takové posloupnosti $\{a_n\}$ z této podmínky a $\lim_{x\to a-} f(x)$ ($\lim_{x\to a+} f(x)$) je rovna jejich společné hodnotě.

Důsledek 53. Značka lim nechť znamená v každém tvrzení kteroukoliv z $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a+}$, $\lim\limits_{x\to a-}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

1. f má nejvýše jednu limitu.
2. (aritmetika limit): existuje-li $\lim f$ a $\lim g$, pak
   (a) $\lim (f+g) = \lim f + \lim g$
   (b) $\lim fg = \lim f \cdot \lim g$
   (c) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$

   má-li pravá strana smysl (tj. pak existuje lim nalevo a platí rovnost).

Důkaz.

1. Nechť třeba

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = B, \qquad a \in \mathbb{C} \tag{4.5}$$

   Buď $\{a_n\}$ takové, že $a_n \to a$, $a_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$. Podle věty 51 plyne z (4.4), že $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$ a podle (4.5) $\lim_{x\to a} f(x) = B$ a podle věty 13 je $A = B$.

2. Nechť třeba jde o limitu $\lim_{x\to a-} f(x)$ funkce reálné proměnné. Je-li $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n < a\ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ tak podle věty 51 implikace $\Rightarrow$ platí $f(a_n) \to \lim f$, $g(a_n) \to \lim g$.

   Má-li třeba smysl součin $\lim f \cdot \lim g$, má $\{f(a_n) \cdot g(a_n)\}$ limitu, a to $\lim f \cdot \lim g$. Podle věty 51 implikace $\Leftarrow$ ji má i $f \cdot g$ a dokonce tutéž, je tedy dokázáno (b). Obdobně i pro další body (1) a (3).

□

Věta 54 (2. věta o limitě součinu)**.** *Jestli je* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a* $g(x)$ *je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak existuje i limita* $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ *a je rovna* 0.

Důkaz. Důkaz je podle věty 51. □

Věta 55 (2. věta o limitě převrácené hodnoty)**.** *Jestli je* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a* $f(x) > 0$ *(*< 0*) na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak existuje i limita* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ *a je rovna* ∞ *(*$-\infty$*).*

Důkaz. Důkaz je podle věty 51. □

Věta 56 (o přenosu nerovností z funkce na limity)**.** *Buď* $f(x) \leq g(x)$ *na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť existuje* $\lim_{x\to a} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a} g(x)$*. Pak platí* $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí věty 51 sporem. Nechť $A = \lim_{x\to a} f(x) > B = \lim_{x\to a} g(x)$. Je-li $\{x_n\}$ taková posloupnost, že $x_n \to a$, $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. Je $f(x_n) \,|\leq g(x_n)\ \forall n > k$, protože existuje $\delta > 0$, že na $P(a,\delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}$ je $f(x) < g(x)$ a ježto $x_n \to a$, tak k $\delta > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$, že $|x_n - a| < \delta\ \forall n \geq k$. Navíc $x_n \neq a\ \forall a$ a tak $0 < |x_n - a| < \delta$, tj. $x_n \in P(a,\delta)$, odkud $A \leq B$, což je ale spor. □

Věta 57 (o přenosu nerovnosti z limity na funkce)**.** *Nechť* $\exists A = \lim_{x\to a} f(x)$*,* $B = \lim_{x\to a} g(x)$ *a buď* $A < B$*. Pak* $\exists \delta > 0$*, že* $f(x) < g(x)\ \forall x \in P(a,\delta)$*.*

Důkaz. Větu si dokážeme sporem. Předpokládáme tedy, že takové $\delta > 0$ není.

$$\forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in P(a, \delta), \text{ že } f(x_\delta) \geq g(x_\delta)$$

Mezi jiným to tedy platí i pro $\delta_n = \frac{1}{n}$, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in P\left(a, \frac{1}{n}\right), \text{ že } f(x_n) \geq g(x_n)$$

Je teda $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a tak $x_n \to a$ (pro $n \to \infty$). Navíc $x_n \neq a$ $\forall n$ a tak podle věty 51 $\exists \lim f(x_n) = A$, $\lim g(x_n) = B$ a je $A \geq B$, což je spor. □

Věta 58 (o sevřené konvergenci)**.** *Na nějakém okolí $P(a, \delta)$ buď $f \leq g \leq h$ a nechť $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} h(x) = A$, pak $\exists \lim_{x\to a} g(x)$ a ta se rovná jejich společné hodnotě.*

Důkaz. Větou 51. □

Definice 59. O reálné funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$) $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Je-li f některá z těchto čtyř, nazveme ji monotónní. Jestli roste nebo klesá, nazveme ji ryze monotónní.

Věta 60. *Buď f monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Není-li a jeho levý (pravý) krajní bod, existuje konečná limita funkce $f(a-)$ ($f(a+)$). Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ jeho levý (pravý) krajní bod, existuje $f(a-)$ ($f(a+)$) - ta ale nemusí být konečná.*

Přitom jestli f na I neklesá (neroste), je $f(a-) = \sup_{x\in I, x<a} f(x)$ ($\inf_{x\in I,x<a} f(x)$) a $f(a+) = \inf_{x \in I, x>a} f(x)$ ($\sup_{x\in I, x>a} f(x)$).

Důkaz. Nechť třeba f na I neklesá a $a \in I$ není levý krajní bod. Ukážeme třeba, že $\exists f(a-)$ a je to $s = \sup_{x\in I, x<a} f(x)$.

Protože je $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in I$, $x < a$, je i $s \leq f(a)$ a a není levý krajní v I a tak $\exists \tilde{x} \in I$, $\tilde{x} < a$, odkud $f(\tilde{x}) \leq s$. A tak $f(\tilde{x}) \leq s \leq f(a)$, tzn. s je konečné. Ukážeme, že $s = f(a-)$.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak $s - \varepsilon < s$, proto $\exists x' \in I$, $x' < a$, že $f(x') > s - \varepsilon$ (věta 5) a protože f neklesá, je $f(x') \leq f(x)$ $\forall x' < x < a$. Takže $s - \varepsilon \leq f(x) \leq s < s + \varepsilon$ $\forall x \in (x', a)$, což dokazuje žádané. Ostatní případy lze rozebrat obdobně. □

Definice 61. O funkci f řekneme, že roste zleva (zprava) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestli $\exists \delta > 0$, že $f(x) < f(a)$ $\forall x \in (a - \delta, a)$ ($f(x) > f(a)$ $\forall x \in (a, a + \delta)$).

Obdobně se zavádí klesání f v a zleva a zprava.

Věta 62. *f roste (klesá) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ právě když*

- *roste (klesá) zleva v každém $a \in I$ který není případným levým krajním bodem I*
- *roste (klesá) zprava v každém $a \in I$ který není případným pravým krajním bodem I*

Důkaz. $\Rightarrow$ zjevné

$\Leftarrow$ je-li splněna podmínka věty, třeba v případě růstu, zvolme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$; ukážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$.

Označme $A = \{x \in (x_1, x_2\rangle \,|f(x) > f(x_1)\}$. Platí

(a) $A \neq \emptyset$ neb $(x_1, x_1 + \delta') \subset A$ s nějakým $\delta' > 0$ (růst f v x_1 zprava)

(b) jestli $\alpha \in A$, $\alpha < x_2$, tak $\exists \delta > 0$, že $(\alpha, \alpha + \delta\rangle \subset A$ (růst f v α zprava)

(c) $\sup A \in A$: nechť $b = \sup A$, je $b \geq x_1 + \delta'$ (z podbodu (a)) a tak je $b > x_1$, tudíž $\exists \delta > 0$, že

$$f(x) < f(b)\ \ \forall x \in (b - \delta, b) \tag{4.6}$$

(růst f v b zleva)

Protože $b - \delta < b = \sup A$, existuje podle 2. vlastnosti supréma prvek $p \in A$, že $p > b - \delta$, takže $f(x_1) < f(p) \leq f(b)$, což znamená, že $b \in A$.

Dokážeme, že $b = x_2$: je $b \leq x_2$ a předpokládejme, že $b < x_2$. Protože $b \in A$ podle (c), je podle (b) $\langle b, b+\delta) \subset A$ pro nějaké $\delta > 0$ a tak $b < \sup A = b$ a docházíme ke sporu.

Je tedy $f(x_2) = f(b) > f(x_1)$. □

Spojitost

Definice 63. Funkci f nazveme spojitou v $a \in \mathbb{C}$ jestli

1. f je v a definovaná
2. existuje $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Funkci reálné proměnné nazveme spojitou v $a \in \mathbb{R}$ zprava (zleva) jestli

1. je v a definovaná
2. existuje $f(a+)$ $(f(a-))$
3. $f(a+) = f(a)$ $(f(a-) = f(a))$

Je-li f daná na okolí (pravém, levém) bodu a a neplatí bod 2 nebo 3, řekneme, že není v a spojitá nebo že je v a nespojitá, má v a nespojitost, a je jejím bodem nespojitosti, …(zprava, zleva).

Definice 64. Nechť má f v $a \in \mathbb{R}$ nespojitost. Jestli existuje konečná $f(a-)$ a $f(a+)$, nazveme ji nespojitostí 1. druhu (ten skok), jinak jde o tzv. nespojitost 2. druhu.

Důsledek 65. Funkce monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má v každém bodě z I nejvýš nespojitost 1. druhu.

Důsledek 66. Množina všech bodů nespojitosti monotónní funkce na intervalu je nejvýše spočetná.

Důkaz. Buď f monotónní na intervalu I, $A \subset I$ množina jejích bodů nespojitosti. Je-li A konečná, je důkaz hotov, jinak každému $a \in A$ přiřadíme interval I_a mezi $f(a-)$ a $f(a+)$. Nechť třeba f neklesá, to pak je $I_a = (f(a-), f(a+))$.

V každém I_a vybereme racionální číslo $r(a)$. Je-li $a, a' \in A$, $a \leq a'$, je $f(a+) < f(a'-)$ (zvolme $b \in (a, a')$, pro $a < x < b < x' < a'$ je $f(x) \leq f(x')$, odkud $f(a+) = \lim_{x \to a+} f(x) \leq f(x')$ $\forall b < x' < a'$, načež $f(a+) \leq \lim_{x \to a'-} f(x') = f(a'-)$).

Je tedy $r(a) < f(a+) \leq f(a'-) < r(a')$, takže r je prosté zobrazení A do $\mathbb{Q}$. Protože je $\mathbb{Q}$ spočetná (důsledek 42), $r(a) \subset \mathbb{Q}$, je i $r(A)$ a i tedy A spočetná. □

Věta 67 (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí na intervalu)**.** *Je-li f spojitá na intervalu I, $a, b \in I$, pak nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ (přesněji, je-li $a, b \in I$ a d mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak je c mezi a a b, že $f(c) = d$).*

Důkaz. Buď $a, b \in I$, $a < b$ a třeba $f(a) \leq f(b)$. Je-li d jedno z $f(a)$ nebo $f(b)$, je buďto $d = f(a)$ a pak $c = a$ nebo $d = f(b)$ a pak $c = b$.

Buď tedy $f(a) < d < f(b)$ a označme $A = \{x \in \langle a, b\rangle, \text{ že } f(x) < d\}$, $c = \sup A$. Je $A \neq \emptyset$ (neb $a \in A$) a nemá největší prvek: je-li totiž $\alpha \in A$, pak z toho, že $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (spojitost f), existuje $\delta > 0$, že $f(x) < d$ $\forall x \in (\alpha, \alpha + \delta)$, takže α není největší v A. Odtud plyne, že $c \notin A$, takže jednak $c > a$ a jednak $f(c) \geq d$.

Kdyby bylo $f(c) > d$, existovalo by $\delta > 0$, že $f(x) > d$ $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ (spojitost f), takže $A \cap (c - \delta, c + \delta) = \emptyset$. Je $A \cap \langle c + \delta, b\rangle = \emptyset$ (jinak by bylo $c = \sup A \geq c + \delta$), načež $A \cap \langle c + \delta, b\rangle = A \cap [(c - \delta, c + \delta) \cup (c + \delta, b)] = [A \cap (c - \delta, c + \delta)] \cup [A \cap \langle c + \delta, b\rangle] = \emptyset$.

Tedy $c = \sup A \leq c - \delta$, což je spor a platí $f(c) = d$. □

Důsledek 68. Je-li f spojitá reálná funkce, na intervalu I, je $f(I)$ interval.

Důkaz. Je-li $p = \inf f(I)$, $q = \sup f(I)$, je buď $p = q$ a pak $f(I) = \{p\}$ nebo je $p < q$. Je-li pak $p < d < q$, existuje $a, b \in I$, že $f(a) < d < f(b)$ a tedy podle věty 67 existuje c mezi a a b, že $f(c) = d$. Je tedy $(\inf f(I), \sup f(I)) \subset f(I) \subset \langle \inf f(I), \sup f(I) \rangle$, tedy $f(I)$ je jedním z intervalů $\langle p, q)$, $(p, q\rangle$, $\langle p, q\rangle$, (p, q). □

Věta 69. *Reálná funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ tam nabývá supréma a infíma – má tam tedy své maximum a minimum.*

Důkaz. Buď $s = \sup f(\langle a, b\rangle)$. Podle 2. vlastnosti supréma ke každému $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in \langle a, b\rangle$, že $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$.

Podle věty 30 (z každé posl. lze vybrat konvergentní) vybereme z $\{x_n\}$ konvergentní $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a její limitu označíme l (pozor, vybrali jsme z x, l není limita ani hromadný bod f!). Pak $s - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq s$ a limitou ($k \to \infty$) odtud plyne: $s \leq \lim f(x_{n_k}) = f(l) \leq s$ (rovnost plyne ze spojitosti funkce), tj. $f(l) = s$. □

Věta 70 (O limitě složené funkce)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nechť*

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \tag{4.7}$$

$$\lim_{x \to b} f(x) = A \tag{4.8}$$

Pak $\lim_{x \to a} f(g(x)) = A$ *jestli buďto*
$g(x) \neq b$ na nějakém okolí $P(a)$ nebo
f je v b spojitá.

Důkaz. Buďte třeba $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť platí podmínka, že $g(x) \neq b$ na nějakém okolí $P(a)$. Buď $\varepsilon > 0$. Podle (4.8) je

$$\delta > 0, \text{ že } |f(y) - A| < \varepsilon \ \forall 0 < |y - b| < \delta \tag{4.9}$$

Podle (4.7) je

$$\eta' > 0, \text{ že } |g(x) - b| < \delta \ \forall 0 < |x - a| < \eta' \tag{4.10}$$

Podle podmínky zvolme

$$\tilde{\eta} > 0, \text{ aby } g(x) \neq b \ \forall 0 < |x - a| < \tilde{\eta} \tag{4.11}$$

Pro $0 < |x - a| < \eta = \min(\eta', \tilde{\eta})$ je pak $0 < |g(x) - b| \overset{(4.10)}{<} \delta$ a podle (4.9) je $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$.

Jestli platí podmínka, že f je v b spojitá, pak (4.9) platí $\forall |y - b| < \delta$ (s hodnotou $A = f(b)$) a tak pro $0 < |x - a| < \eta'$ je $|g(x) - b| < \delta$ podle (4.10), načež podle (4.9) je $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$. □

Poznámka 71. ,,Dodatečné" poznámky

1. K rekurentním posloupnostem: Buď $-\infty \leq a < b \leq \infty$, buď I interval s krajními body a, b. Nechť f na I neklesá a spojitě jej zobrazuje do sebe (tj. $f(I) < I$). Pro $c \in I$ zaveďme posloupnost $\{a_n\}$ takto: $a_1 = c, a_{n+1} = f(a_n)$. Pak má $\{a_n\}$ vždy limitu, ozmačme ji l.

   Je-li $f(c) \geq c$ ($f(c) \leq c$) a má li f na $\langle c, b)$ ($(a, c\rangle$) pevný bod, tj. takové p, že $f(p) = p$, má $P^+ = \{x \in I | f(x) = x | x \geq c\}$ ($P^- = \{x \in I | f(x) = x | x \leq c\}$) nejmenší (největší) prvek $\alpha(\beta)$ a je $l = \alpha$ ($l = \beta$). Nemá-li f na $\langle c, b)$ ($(a, c\rangle$) pevný bod, je $l = b$ ($l = a$)..

2. Svaté skutečnosti: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Důsledek 72 (Důsledek Heineho věty pro spojitost)*.* Fce f je v a spojitá, právě když:

1. je v a daná

2. pro všechna $\{x_n\}, x_n \to a$ existuje $\lim f(x_n)$ a rovná se $f(a)$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li f v a spojitá, je v a daná dle definice, má v a limitu a $\lim f(x) = f(a)$. Tedy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ že } |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \tag{4.12}$$

a pro $x = a$ je $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, takže platí $\forall |x - a| < \delta(\varepsilon)$, tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ že } |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \forall\, |x - a| < \delta(\varepsilon) \tag{4.13}$$

Buď $\{x_n\}$ taková, že $x_n \to a$, tj.

$$\forall \vartheta > 0\ \exists k(\vartheta) \in \mathbb{N}, \text{ že } |x_n - a| < \vartheta\ \forall n \geq k(\vartheta) \tag{4.14}$$

Máme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon\ \forall n \geq k(\varepsilon) \tag{4.15}$$

Buď $\varepsilon > 0$. Podle (4.13) k němu najdeme $\delta(\varepsilon)$, že platí (4.13) a k číslu $\delta(\varepsilon)$ zvolme $k(\delta(\varepsilon))$ dle (4.14). Pak pro $n \geq k(\delta(\varepsilon))$ je $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)\ \forall n \geq k(\delta(\varepsilon))$ podle vlastnosti (4.14), a $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ podle (4.13), což je (4.15) s $k(\varepsilon) = k(\delta(\varepsilon))$.

$\Leftarrow$ Z platnosti 2. plyne její platnost $\forall \{x_n\}$, kde $x_n \to a$ a $x_n \neq a$ pro všechna n, takže podle 51 existuje $\lim_{x \to a} f(x)$, navíc rovná společné hodnotě takových $\lim f(x_n)$, ale to je $f(a)$. □

Věta 73. *Prostá a spojitá f na intervalu I je ryze monotónní.*

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Nechť pro $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(y_1) > f(y_2)$. Pak je buďto

1. $\langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle y_1, y_2 \rangle$ nejvýš jednobodový a tedy $x_1 < x_2 \leq y_1 < y_2$ (či $y_1 < y_2 \leq x_1 < x_2$) nebo
2. jeden z těchto intervalů je částí druhého a tedy $x_1 \leq y_1 < y_2 \leq x_2$ (či $y_1 \leq x_1 < x_2 \leq y_2$) nebo
3. nenastává ani první, ani druhá možnost a tedy $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ (či $y_1 < x_1 < y_2 < x_2$)

1. Je-li $f(y_1) < f(x_2)$, nabývá f maxima na $\langle x_1, y_1 \rangle$, ale ne v krajních bodech
   Je-li $f(y_1) > f(x_2)$, nabývá f maxima na $\langle x_2, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
   Je-li $f(y_1) = f(x_2)$ (a pak $y_1 = x_2$), nabývá f maxima na $\langle x_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
2. Je-li $f(y_1) < f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, x_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
   Je-li $f(y_1) > f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
3. Je-li $f(y_1) < f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle y_1, y_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech
   Je-li $f(y_1) > f(x_1)$, nabývá f minima na $\langle x_1, x_2 \rangle$, ale ne v krajních bodech

Ve všech případech má funkce extrém na nějakém intervalu $\langle p, q \rangle \subset I$ $p < q$, ale ne v krajních bodech, tedy v nějakém $r \in (p, q)$. Přitom $f((p, r\rangle)$ i $f(\langle r, q))$ jsou podle věty 68 intervaly. Je tehdy $f(r)$ jejich společným krajním bodem.

Protože je v r extrém funkce f na $\langle p, q \rangle$, je v r týž extrém jak na $(p, r\rangle$ tak i na $\langle r, q)$ a tak je $f(r)$ současně pravým, nebou současně levým krajním bodem intervalů $f((p, r\rangle)$, $f(\langle r, q))$. Ty se tedy protínají přinejmenším bodem $f(r)$. Ale ani $f((p, r\rangle)$ ani $f(\langle r, q))$ není jednobodový (jinak by byla f na $(p, r\rangle$ nebo na $\langle r, q)$ konstantní, což nelze, neb f je prostá), takže existuje $t \in f((p, r\rangle) \cap f(\langle r, q))$, $t \neq f(r)$, načež existuje $v_1 \in (p, r\rangle$ a $v_2 \in \langle r, q)$, že $f(v_1) = t = f(v_2)$. Protože je $v_1 \neq v_2$, jedná se o spor s prostotou f. □

Poznámka 74 (Inverzní zobrazení, inverzní funkce). Podle 36 je-li f prosté zobrazení množiny A do B, tj. jestli pro $x_1, x_2 \in A$, pro něž je $f(x_1) = f(x_2)$, je $x_1 = x_2$, platí:

$$\forall y \in f(A)\ \exists!^1 x \in A, \text{ že } f(x) = y \tag{4.16}$$

Přiřadíme-li každému $y \in f(A)$ toto jediné $x \in A$, pro něž je $f(x) = y$, vzniká jedno zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$, kde pro $y \in f(A)$ je $f^{-1}(y) = x$, pro které $f(x) = y$. Říká se mu inverzní zobrazení k f, zobrazuje prostě $f(A)$ na A a vztahy $f(x) = y$ a $f^{-1}(y) = x$ jsou pro $x \in A, y \in f(A)$ rovnocenné.

Je-li f funkcí, t.j. zobrazením $A \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, mluvíme o inverzní funkci.

1. Funkce $f(x) = \sin x$ ($\cos x$;$\tan x$;$\cot x$) prostě zobrazuje $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$ ($\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ na $\mathbb{R}$;$\langle 0, \pi\rangle$ na $\mathbb{R}$) a tak má na $\langle -1, 1\rangle$ ($\langle -1, 1\rangle$, $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) inverzní funkci $\arcsin y$ ($\arccos y$;$\arctan y$;$\operatorname{arccot} y$).

2. Funkce $f(x) = x^n$ pro sudá (lichá) $n \in \mathbb{N}$ prostě zobrazuje $\langle 0, \infty)$ ($\mathbb{R}$) na $\langle 0, \infty)$ ($\mathbb{R}$), a tam má inverzní funkci zvanou n-tou odmocninou a značenou $\sqrt[n]{y}$.

3. Funkce $f(x) = e^x$ prostě zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$, a tak má inverzní funkci zvanou $\ln y$.

4. Funkce $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ($\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$;$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$) prostě zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ ($\langle 0, \infty)$ na $\langle 1, \infty)$; $\mathbb{R}$ na $(-1, 1)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$), a tak tam má inverzní funkci zvanou $\operatorname{arsinh} y$ ($\operatorname{arcosh} y$; $\operatorname{artanh} y$, $\operatorname{arcoth} y$) [2]

Věta 75. *Nechť je funkce f na intervalu I prostá a zobrazuje každý interval $J \subset I$ na interval. Pak je f^{-1} spojitá.*

Důkaz. Buď $b \in f(I)$, který třeba není jeho případným krajním bodem.

Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $I_\varepsilon = \left(f^{-1}(b) - \varepsilon, f^{-1}(b) + \varepsilon\right) \subset f(I)$.

Pak je $f(I_\varepsilon)$ interval a bod $b = f\left(f^{-1}(b)\right) \in f(I_\varepsilon)$ není jeho krajním bodem. Kdyby totiž byl, bylo by $b = \max f(I_\varepsilon)$ nebo $b = \min f(I_\varepsilon)$, buď to třeba maximum.

Pak $P = f\left(\left(f^{-1}(b) - \varepsilon, f^{-1}(b)\right\rangle\right)$, $b \in Q = f\left(\left\langle f^{-1}(b), f^{-1}(b) + \varepsilon\right)\right)$ a tak $b = \max P$, $b = \max Q$, ale P a Q jsou intervaly, a tak $P \cap Q \neq Q$ - spor s prostotou funkce.

Je $\delta > 0$, že $(b - \delta, b + \delta) \subset f(I_\varepsilon)$, tj. $f^{-1}((b - \delta, b + \delta)) \subset I_\epsilon$, což je spojitost f^{-1} v b. □

Důsledek 76. Inverzní funkce ke spojité a prosté funkci f na intervalu I je na $f(I)$ spojitá.

Důkaz. Podle 68 zobrazuje f každý interval $J \subset I$ na interval a užijeme 75. □

Důsledek 77. Prostá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, která zobrazuje každý interval $J \subset I$, je spojitá.

Důkaz. Podle věty 75 je f^{-1} na $f(I)$ spojitá, podle 68 zobrazuje každý interval $K \subset f(I)$ na interval, a tak podle 75 užité na f^{-1} je $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ na $f^{-1}\left(f\left(I\right)\right) = I$ spojitá. □

Definice 78. Buď $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ takový, že $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$. Řekneme, že f má v a limitu $L \in \mathbb{R}$ vůči A, jestli $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (píšeme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = L$)

Věta 79. *Buď $A, B \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a nechť $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$, $P(a, \delta) \cap B \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$. Pak $\lim_{x \to a, x \in A \cup B}$ existuje právě tehdy, když existují $\lim_{x \to a, x \in A}$ a $\lim_{x \to a, x \in B}$ a jsou stejné.*

Je-li tato podmínka splněna, je hodnota $\lim_{x \to a, x \in A \cup B} f(x)$ rovna společné hodnotě obou zmíněných limit.

Existuje-li navíc $\sigma > 0$, že $P(a, \sigma) \subset A \cup B$, existuje $\lim_{x \to a} f(x)$ a rovná se s.

Důkaz. $\Rightarrow$ zjevné

[1] existuje právě jedno

[2] zvolil jsem rozšířenější a obvyklejší značení, ale na přednáškách se používá zápis sh, ch, th, cth, argsh, argch, je to totéž co napsané výše

$\Leftarrow$ Buď $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists \delta' > 0, \text{ že } |f(x) - a| < \varepsilon \ \forall 0 < |x - a| < \delta', \ x \in A \tag{4.17}$$

a také

$$\exists \tilde{\delta} > 0, \text{ že } |f(x) - a| < \varepsilon \ \forall 0 < |x - a| < \tilde{\delta}, \ x \in B \tag{4.18}$$

a pro $0 < |x-a| < \delta = \min(\delta', \tilde{\delta})$, $x \in A \cup B$ platí jak (4.17) tak (4.18), takže $|f(x)-s| < \varepsilon$, což bylo dokázat.

Je-li navíc $P(a,\sigma) \subset A \cup B$, je i pro $\delta = \min(\delta', \tilde{\delta}, \sigma)$ $P(a,\delta) = (P(a,\delta) \cap A) \cup (P(a,\delta) \cap B)$, a tak pro $x \in P(a,\delta)$ je $x \in P(a,\delta) \cap A$ nebo $x \in P(a,\delta) \cap B$, načež $|f(x) - s| < \varepsilon$ v prvním případě podle (4.17), ve druhém případě podle (4.18).

$\square$

Kapitola 5

Derivace

Definice 80. Derivací funkce f v a (zleva, zprava) se rozumí

$$\lim_{x \to a(a+,a-)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5.1}$$

pokud existuje. Značíme $f'(a)$ nebo $\frac{\mathrm{d}\, f(a)}{\mathrm{d}\, x}$ (resp. $f'_+(a)$, $f'_-(a)$). Je-li konečná (∞, $-\infty$), říká se jí vlastní (nevlastní) derivace.

Poznámka 81.

1. Položíme-li v (5.1) $x - a = t$, máme podle věty 70

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \tag{5.2}$$

   má-li jedna strana smysl (tj. existuje-li limita vlevo (vpravo), tak i vpravo (vlevo)) a jsou stejné.

2. f má v $a \in \mathbb{R}$ derivaci právě tehdy, když existuje derivace zleva a zprava a tyto dvě derivace jsou si rovny.

   Je-li podmínka splněna, je $f'(a)$ rovna jejich společné hodnotě.

Důkaz. Důkaz pomocí věty 49. □

Věta 82. *Má-li f v a vlastní derivaci (zleva, zprava), je v a spojitá (zleva, zprava).*

Důkaz. f měj třeba vlastní derivaci $f'(a)$. Pak $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$ a tak $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a) + f(a)) = f(a)$ □

Věta 83. *Nechť existuje $f'(a)$, $g'(a)$. Pak*

1. $(f(a) + g(a))' = f'(a) + g'(a)$
2. $(f(a)g(a))' = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Má-li příslušná pravá strana smysl (v bodě 2 je-li navíc jedna z funkcí v a spojitá a v bodě 3 je-li funkce g v a spojitá). Totéž platí s jednostrannými derivacemi.

Důkaz. Třeba bod 2 (a buď v a spojitá třeba f).

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{fg(x)-fg(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(x)-f(x)\,g(a)+f(x)\,g(a)-f(a)\,g(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\left(f(x)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\end{aligned}$$

Nebo bod 3:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)\,(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(x)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

□

Věta 84 (O derivaci složené funkce)**.** *Funkce g měj derivaci v bodě a, funkce f v $g(a)$ a buď g v a spojitá. Pak má $f(g(x))$ v a derivaci a je $(f\circ g)(a) = f'(g(a))g'(a)$, má-li součin napravo smysl.*

Důkaz. Zkoumejme $\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$. Pro ta x, kde $g(x)\neq g(a)$, je

$$\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \tag{5.3}$$

Označme $A=\{x|g(x)\neq g(a)\}$, $B=\{x|g(x)=g(a)\}$. Protože je g v a spojitá, je $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ a tak položíme-li $g(x)=y$, je

$$\lim_{x\to a, x\in A}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} = \lim_{y\to g(a)}\frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} = f'(g(a)) \tag{5.4}$$

podle věty 70 použité na $F(g(x))$ s $F(y)=\frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)}$ ($\lim_{y\to g(a)}F(y)=f'(g(a))$) a $\lim_{x\to a}g(x) = g(a)$, $g(x)\neq g(a)$ všude na A, takže existuje $F(g(x)) = f'(g(a))$.

Dále

$$\text{existuje } \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \tag{5.5}$$

a tak z 5.3 plyne podle věty o limitě součinu

$$\lim_{x\to a,x\in A}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a,x\in A}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(g(a))g'(a) \tag{5.6}$$

Pro $x\in B$ je zlomek nalevo v (5.3) a tedy jeho limita $\lim_{x\to a,x\in B}$, jakož i zlomek $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ napravo nula. Protože existuje $g'(a)$, je podle věty 79

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a,x\in B}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = 0$$

tj. $g'(a)=0$. Protože $f'(g(a))g(a)$ má smysl, je $f'(g(a))g'(a)=0$ a tak platí dotazovaná rovnost.

$$\lim_{x\to a,x\in B}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = f'(g(a))g'(a) \tag{5.7}$$

Podle (5.6) a (5.7) a věty 79 platí dokazovaná rovnost. □

Věta 85 (O derivaci inverzní funkce)**.** *Buď f^{-1} inverzní funkce ke spojité funkci f na intervalu $I\subset\mathbb{R}$, $a\in I$ a nechť existuje $f'(a)\neq 0$. Pak má f^{-1} v $b=f(a)$ derivaci a je*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \left(=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\right)$$

má-li pravá strana smysl (tj. je-li $f'(a)\neq 0$), jinak je $\left(f^{-1}\right)'(b)=\infty(-\infty)$, jestli f na I roste (klesá).

Důkaz. K použití věty 70 položme vnější funkci $V(x) = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ a vnitřní $v(y) = f^{-1}(y)$. Platí

1. $\lim_{x\to a} V(x) = \frac{1}{f'(a)}$
2. $\lim_{x\to b} v(y) = f^{-1}(b)$ (f^{-1} je spojitá podle věty 76)
3. $v(y) = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ na $P(b)$ (dokonce všude na $f(I) - b$, neb f^{-1} je prostá a tak $f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ jen pro $y = b$).

Podle věty 70 existuje

$$\begin{aligned}\lim_{y\to b} V(v(y)) &= \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)-b)}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \\ &= \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \left(f^{-1}\right)'(b)\end{aligned}$$

□

Věta 86. *Je-li $f'(a) > 0$ (< 0), f v bodě a roste (klesá). Obdobné tvrzení platí s derivací a růstem (klesáním) jednostranným.*

Důkaz. Buď třeba $f'(a) > 0$, tj. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Podle věty 57 je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ na nějakém $P(a, \delta)$. Pro $x \in (a, a+\delta)$ je však $x > a$ a tak i $f(x) > f(a)$, pro $x \in (a-\delta, a)$ je $x < a$ a tak i $f(x) < f(a)$. □

Důsledek 87. Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I$ (v případných krajních bodech se myslí příslušná jednostranná derivace), tak f na I roste (klesá).

Důkaz. Podle věty 86 f roste (klesá) v každém $x \in I$ a podle věty 62 roste (klesá) na I. □

Kapitola 6

Obecné věty o derivaci

Věta 88 (Rolleova)**.** *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f buď spojitá reálná funkce na $\langle a, b\rangle$, která má derivaci na (a, b), taková, že $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Je-li f na $\langle a, b\rangle$ konstantní, splňuje tvrzení každé $c \in (a, b)$.

Buď třeba $f(a) = f(b) = 0$ a předpokládejme, že třeba $f(p) > 0$ pro nějaké $p \in (a, b)$. Podle věty 69 je $c \in \langle a, b\rangle$, že $f(c) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Je $f(a) = f(b) = 0$, $f(p) > 0$ a tak $c \neq a$ a $c \neq b$, takže $c \in (a, b)$.

Protože existuje $f'(c)$, ale podle věty 86 není $f'(c) > 0$, ani $f'(c) < 0$, takže $f'(c) = 0$.

Je-li $f(a) = f(b) \neq 0$, použijeme už dokázaného na $h(x) = f(x) - f(a)$. Je $h(a) = h(b) = 0$ a tak $0 = h'(c) = f'(c)$ pro nějaké $c \in (a, b)$. □

Věta 89 (O střední hodnotě, tzv. Lagrangeova)**.** *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f spojitá reálná funkce na $\langle a, b\rangle$, která má na (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Důkaz. Od f odečteme lineární funkci $l(x)$ takovou, že $l(a) = f(a)$, $l(b) = f(b)$. Vzniklá funkce h splňuje podmínky a tedy pro ni platí závěr věty 88.

Funkce l má tvar $l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$. Pro $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a) - f(a)$ tedy existuje $c \in (a, b)$, že $h'(c) = 0$, tj. $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, což bylo dokázat. □

Věta 90 (Zobecněná věta o střední hodnotě, tzv. Cauchyova)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f a g spojité reálné funkce na $\langle a, b\rangle$, které mají všude na (a, b) derivaci, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Pak je $c \in (a, b)$, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Důkaz. $h(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))$ splňuje podmínky věty 88. Tedy existuje c, že $h'(c) = \frac{h(a)-h(b)}{a-b}$.

$h'(c)$ dává $f'(x)\,(g(a) - g(b)) - g'(x)\,(f(a) - f(b))$, po dosazení $\frac{h(a)-h(b)}{a-b} = 0$ a tak $f'(x)\,(g(a) - g(b)) = g'(x)\,(f(a) - f(b))$ □

Poznámka 91. Funkce f měj derivaci v každém bodě otevřené úsečky (a, b) a buď f spojitá v každém bodě uzavřené úsečky $\langle a, b\rangle$.

Pak $|f(b) - f(a)| \leq \sup |f'(c)| \cdot |b - a|$, kde $c \in (a, b)$.

Je-li tedy f' na (a, b) omezená číslem K, je $|f(b) - f(a)| \leq K\,|b - a|$

Důsledek 92. Nechť je $f'(x) > 0$ (≥ 0, < 0, ≤ 0) na intervalu I (obsahuje-li některý z krajních bodů, rozumí se v něm příslušná jednostranná derivace). Pak $f(I)$ roste (neklesá, klesá, neroste).

Důkaz. Buď $f' > 0$ na I a buďte $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Pak je $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$ (použitá věta 89 na $\langle x_1, x_2\rangle$) a pak $f(x_2) > f(x_1)$. Zbytek obdobně. □

Důsledek 93. Buď f spojitá a nechť existuje $\lim_{x\to a} f'(x) = A$. Pak existuje $f'(a)$ a rovná se A. ($f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$) Totéž s jednostrannými limitami i derivacemi.

Důkaz. Třeba pro $f'_-(a)$: existence $\lim_{x\to a-} f'(x)$ dává existenci $f'(x)$ na $P(a)$, kde je tedy $f(x)$ konečná a tedy f spojitá (věta 82). Protože je f zleva spojitá i v a, je spojitá na $\langle x, a\rangle$ $\forall x \in P(a)$. Navíc existuje $f'(x)$ na $P^-(a)$ a tak podle věty 89 existuje $c(x) \in (x, a)$, tj. $x < c(x) < a$, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$.

Použijeme teď větu 70 na vnější funkci $F(y) = f'(y)$ a vnitřní funkci $g(x) = c(x)$. Je $x \le c(x) \le a$ a tak $\lim_{x\to a} c(x) = a$ (věta o majorizované konvergenci). □

Důsledek 94 (l'Hospitalovo pravidlo). Buď $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Pak existuje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna A jestli

1. buďto $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$, nebo
2. $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$

Podobně pro jednostranné limity.

Důkaz.

1. Nechť nejdřív platí 1. Buď třeba $a \in \mathbb{R}$ a dokážeme tvrzení pro limitu zprava. Z existence $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ plyne, že existuje konečná f' i g' na nějakém $(a, a+\Delta)$, takže tam je f i g spojitá a navíc $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, a+\Delta)$. Položme $F(x) = f(x)$ na $(a, a+\Delta)$, $F(x) = 0$ pro $x = a$. Dále $G(x) = g(x)$ na $(a, a+\Delta)$ a rovna 0 pro $x = a$. Z toho, že $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ plyne spojitost F a G v a zprava a tak jsou F i G spojité na $\langle a, x\rangle$, mají konečnou derivaci na (a, x) $\forall x \in (a, a+\Delta)$ a tak podle věty 90 $\forall x \in (a, a+\Delta)$ $\exists c(x) \in (a, x)$, tj. $a < c(x) < x$, že
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c(x))}{G'(c(x))} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$
Podle věty 70 (s vnitřní funkcí $c(x)$ a vnější $V(y) = \frac{f'(y)}{g'(y)}$) je
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to a+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$
což byl dokázáti.

2. Nechť platí 2. Buď ale třeba $a \in \mathbb{R}$ a dokážeme tvrzení pro limitu zprava. Je-li $a < x < x_1 < a+\Delta$, splňuje f na $\langle x, x_1\rangle$ podmínky věty 90 a tak existuje $c(x) \in (x, x_1)$, že $f(x_1) - f(x) = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}(g(x_1) - g(x))$. Po odečtení $f(x_1)$ a vydělení $-g(x)$ ($\neq 0$ na $(a, a+\Delta)$) to dá
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} \qquad \text{pro } a < x < x_1 < a+\Delta \tag{6.1}$$
Buď třeba $A \in \mathbb{R}$. Z (6.1) pak plyne
$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} - A - \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\frac{g(x_1)}{g(x)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} - A\right| + \left|\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\right|\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| \qquad \forall a < x < x_1 < a+\Delta \tag{6.2}$$
Zvolme $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). Protože $\lim_{y\to a+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = A$, lze zvolit $\Delta > 0$ tak malé, aby
$$\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - A\right| < \varepsilon \qquad \forall y \in (a, a+\Delta) \tag{6.3}$$

Zvolme $x_1 \in (a, a+\Delta)$, takže (6.2) platí pro všechna $x \in (a, x_1)$. Protože $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$, je $\lim_{x \to a+} \frac{|f(x_1)|}{|g(x)|} = 0$, takže existuje δ ($\delta < \Delta$), že $\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| < \varepsilon \ \forall x \in (a, a+\delta)$. Podle (6.3) pak pro toto x je $\left|\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\right| < |A| + \varepsilon$ (neb $c(x) \in (a, a+\Delta)$) načež podle (6.2) je

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon)\,\varepsilon + \varepsilon < \varepsilon + |A|\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (|A| + 3)\,\varepsilon \ \forall x \in (a, a+\delta)$$

3. Je-li třeba $a = \infty$, je podle věty 70 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y \to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}$, což je podle už dokázaného $\lim_{y \to 0+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}$ a to je opět podle věty 70 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

□

Věta 95. *Pro $n \geq 1$ nechť existuje $f^{(n)}(c)$, $g^{(n)}(c)$ a $0 = f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = g(c) = g'(c) = \cdots = g^{(n-1)}(c)$. Pak existuje*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

má-li tento podíl smysl.

Důkaz. Důkaz provedem indukcí. Pro $n = 1$ je

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(podle věty o limitě podílu).

Nechť dále tvrzení platí pro $n \geq 1$ a buďte podmínky věty splněny pro $n+1$. Pak $F(x) = f'(x)$, $G(x) = g'(x)$ splňují podmínky věty s n a platnost tvrzení pro n dá

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(c)}{G^{(n)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

tj. $\lim_{x \to c} g(x) = g(c) = 0$, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = 0$ (existuje konečná $f'(c)$, $g'(c)$ a tak je f i g v c podle věty 82 spojitá), načež věta 94 dává, že

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

□

Věta 96 (Darbouxova vlastnost derivace spojité funkce)**.** *Buď $-\infty < a < b < \infty$, f Buď spojitá na $\langle a, b \rangle$ a měj tam všude derivaci (v krajních bodech měj příslušné jednostranné derivace). Je-li d mezi $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$, pak existuje $c \in \langle a, b \rangle$, že $f'(c) = d$.*

Důkaz. Je-li $d = f'_+(a)$, je $c = a$. Je-li $d = f'_-(b)$, je $c = b$. Buď tedy $d \neq f'_+(a), d \neq f'_-(b)$, tedy $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ a buď třeba $f'_+(a) < f'_-(b)$, takže $f'_+(a) < d < f'_-(b)$.

Buď $F(x) = f(x) - dx$ na $\langle a, b \rangle$, je tam spojitá a $F'_+(a) = f'_+(a) - d < 0$, $F'_-(b) = f'_-(b) - d > 0$, takže F v a zprava klesá a v b zleva roste. Protože je F na $\langle a, b \rangle$ spojitá, nabývá tam podle věty 69 (na intervalu nabývá minima i maxima) minima v nějakém $c \in \langle a, b \rangle$. Protože F v a klesá, je $c \neq a$ a v b roste, je $c \neq b$.

Je tedy $c \in (a, b)$. Podle věty 86 je $F'(c) = 0$, tj. $f'(c) = d$. □

Kapitola 7

Mnohočleny

Tvrzení 97. *Buď P mnohočlen stupně n a $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Důkaz. Je $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_a (x-a)^k$, protože

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a+a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (x-a)^l a^{k-l} = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ 0\le l\le k}} a_k \binom{k}{l} a^{k-l} (x-a)^l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} a_k \binom{k}{l} a^{k-l} \right) (x-a)^l = \sum_{l=0}^{n} b_c (x-a)^l \end{aligned}$$

a tak $P^{(k)}(a) = k! b_k$, tj. $b_k = \frac{P^{(n)}(a)}{k!}$

Má-li f n-tou derivaci v a, napišme $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$. □

Definice 98. Existuje-li $f^{(n)}(a)$ pro nějaké $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, pak mnohočlen

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

nazveme Taylorovým mnohočlenem stupně n (funkce f se středem v a).

Rozdílu $R_{n+1,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$ se říká zbytek (funkce po $T_{n,f,a}(x)$).

Věta 99 (Taylorova)**.** *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$, $a \neq x$, n celé, $n \geq 0$. Reálná funkce f měj $n+1$. na otevřeném intervalu I^0 a spojitou derivaci na uzavřeném intervalu I s krajními body a a x. Buď φ spojitá reálná funkce na I, která má na I^0 všude nenulovou derivaci.*

Pak

$$c \in I^0,\ \text{že}\ R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \tag{7.1}$$

Volba $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \tag{7.2}$$

(tzv. Lagrangeův tvar zbytku).

Volba $\varphi(t) = t$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a) \tag{7.3}$$

(tzv. Cauchyův tvar zbytku).

Důkaz. Položme ve vyjádření $R_{n+1}(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$ místo a proměnné t, tj.

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Pak f je spojitá na I, má

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f(t) - \left(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) - \left(-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) - \\ &\quad - \dots - \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \text{ na } I^0, F(x) = 0, F(a) = R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

a tak podle věty 90 je $c \in I^0$, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{-R_{n+1}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\varphi'(c)}$$

což je (7.1) a zmíněná volba φ dává (7.2) a (7.3). □

Příklad 99. Máme najít sínus 1 s přesností 10^{-6}.

Najdeme hodnotu $T_{n,\sin,0}(1)$ funkce $\sin x$, s takovým n, aby $|R_{n+1,\sin,0}(1)| < 10^{-6}$. Je $T(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k$. Použijeme-li Lagrangeova tvaru zbytku, je $R_{n+1}(x) = \frac{\sin^{(n+1)} c}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$ a tak $|R_{n+1}(1)| = \frac{\left|\sin^{(n+1)} c\right|}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!}$ a hledejme tedy n, aby $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$.

To je už pro $n + 1 = 10$, tj. $n = 9$. Spočítáme tedy ($\sin^{(2k)} 0 = 0$, $\sin^{(2k+1)} 0 = (-1)^k$)

$$T_{9,\sin,0}(0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$$

Definice 100. Funkce f a g buďte dány na $P(a)$. Budeme psát $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ jestli $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Obdobně jednostranné případy.

Poznámka 101.

1. $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$, pak $\alpha f_1 + \beta f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$ (α, β konst.)
2. $f_1(x) = o(g_1(x))$, $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$, pak $f_1 \cdot f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \to a$
3. $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a $h(x)$ buď omezená na $P(a)$, pak $f(x)\,h(x) = o(g(x))$, $x \to a$
4. $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(h(x))$, $x \to a$, pak $f(x) = o(h(x))$, $x \to a$

Důkaz. Snadné ověření dle definice. □

Věta 101 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$, pak $R_{n+1,f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.*

Důkaz. Funkce $F(x) = R_{n+1,f,a}(x)$ a $g(x) = (x-a)^n$ splňují podmínky věty 95 ($F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a)$, $g^{(n)}(a) = n! \ne 0$). Takže $\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{R^{(n)}_{n+1}(a)}{((x-a)^n)^{(n)}} = \frac{R^{(n)}_{n+1}(a)}{n!} = 0$. □

Lemma 102. *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$. Pak je*

$$f(x) = o((x-1)^n) \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

Důkaz. Nejprve si ukážeme implikaci $\Rightarrow$. Ve větě 95 vezmeme $F(x) = f(x)$, $g(x) = (x-a)^n$. Je $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = g(a) = g'(a) = \ldots g^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n)}(a) = n! \neq 0$ a tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

Teď dokážeme obrácenou implikaci nepřímým důkazem. Je-li $f^{(j)}(a) \neq 0$ pro nějaké $1 \leq j \leq n$, buď l nejmenší takové j. Pak pro $F(x) = f(x)$, $g(x) = (x-a)^l$ je podle věty 95

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{l!} \neq 0$$

a tak není $f(x) = o\Big((x-a)^l\Big)$ pro toto $l < n$. Je však $(x-a)^n = o\Big((x-a)^l\Big), x \to a$ a tak podle poznámky 101.3 není ani $f(x) = o((x-a)^n)$. □

Důsledek 103. Nechť existuje $f^{(n)}(a)$ a P buď takový mnohočlen stupně n, že $f(x) - P(x) = o((x-a)^n), x \to a$. Pak $P(x) = T_{n,f,a}(x)$.

(Existuje-li tedy $f^{(n)}(a)$, pak pro mnohočlen P stupně n je $f(x) - P(x) = o((x-a)^n), x \to a$ právě když $P(x) = T_{n,f,a}(x)$).

Důkaz. Napišme podle tvrzení 97

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, (x-a)^k$$

Jestli $f - P(x) = o((x-a)^n)$, je $f(x) - P(x) = o\Big((x-a)^k\Big)$ $\forall k = 0, 1, \ldots n$. Pro každé takové k je podle věty 102 $(f(x) - P(x))^{(k)}(a) = 0$, tj. $f^{(k)}(a) = k! a_k = 0$. □

Kapitola 8

Ohýbání

Tvrzení 104. *Buď f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou rovnocenné:*

1. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \qquad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
2. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \qquad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
3. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \qquad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
4. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2} \qquad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
5. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} \qquad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Důkaz. není nutný □

Definice 105. Má-li f na I některou z vlastností 1 až 5 z tvrzení 104 (a tedy všechny), nazveme ji konvexní na I. Platí-li s ostrou (opačnou, ostrou opačnou) nerovností, nazveme ji ryze konvexní (konkávní, ryze konkávní) na I.

Věta 106. *Buď f na I konvexní. Pak*

1. *má jednostranné derivace v každém $x \in I$, v němž má smysl, tj. $\exists f'_-(x)$ $(f'_+(x))$ v každém $x \in I$, který není levý (pravý) krajní. Přitom je $f'_-(x)$ $(f'_+(x))$ konečná v každém x, který není levým (pravým) krajním v I; je tedy f v každém takovém x spojitá zleva (zprava) a tak je spojitá v každém $x \in I$, jenž není krajním.*
2. *Pro $a, b \in I$, $a < b$ je $f'_+(a) \leq f'_-(b)$.*
3. *Funkce $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$ na I neklesá, takže existuje-li f' na intervalu $J \subset I$ tak f' neklesá na J.*
4. *$f'_-(a) \leq f'_+(b)$ $\forall x \in I$ který není krajní. Množina $D = \{x \in I | f'(x)$ neexistuje$\}$ je spočetná.*
5. *Tato tvrzení platí pro konkávní funkce na I, v B, C, D se jen obrátí nerovnosti a slova neklesá nahradíme slovy neroste.*

Důkaz.

1. Buď $a \in I$, který není pravý krajní. Pak $\exists \delta > 0$, že $a + \delta \in I$ a na $(a, a + \delta)$ funkce $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ neklesá (konvexnost f), takže existuje $\varphi(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_+(a)$.

   Není-li a ani levý krajní, existuje $b \in I$, $b < a$, a je $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \varphi(x) \leq \frac{f(a+\delta)-f(a)}{(a+\delta)-a}$ pro $a < x < a + \delta$, odkud $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'_+(a) \leq \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}$, takže $f'_+(a)$ je konečná, tudíž je f v a zprava spojitá.

2. Je-li $a, b \subset I$, $a < b$, pak pro všechny $y, z \in (a, b)$, $y < z$ je
$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \le \frac{f(z) - f(b)}{z - b}$$
Odtud limita $\lim_{y \to a+}$ při pevném z dává $f'_+(a) \le \frac{f(z)-f(b)}{z-b}$ $\forall z \in (a, b)$ a pak limita $z \to b-$ dává $f'_+(a) \le f'_-(b)$.

3. Je-li $a, b \in I$, $a < b$, je $f'_+(a) \le f'_-(b) \le f'_+(b)$ (první nerovnost podle druhého bodu a z následujícího bodu)

4. Je-li $x < b < y$, je $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \le \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$, zde $\lim_{x \to b-}$ dá $f'_-(b) \le \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$ a zde $lim_{y \to b+}$ dá $f'_-(b) \le f'_+(b)$. Dále jestli pro $a \in I$, který není krajní, neexituje derivace, je $f'_-(a) < f'_+(a)$. Lze proto každému takovému a přiřadit neprázdný interval $I_a = \big(f'_-(a), f'_+(a)\big)$.

   Přitom jsou-li a, b dva takové body, je $f_+(a) \le f_-(b)$ podle bodu 2, takže $f'_-(a) < f'_+(a) \le f'_-(b) < f'_+(b)$, takže $I_a \cap I_b = \emptyset$. Zvolíme-li v každém I_a racionální číslo a označíme $\psi(a)$, je pak ψ prosté zobrazení D do množiny $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a tak je D spočetná.

5. Je-li f na I konkávní, je $-f$ na I konvexní a tak tvrzení pro konkávní funkce plyne použitím věty na $-f$.

□

Věta 107. *Buď f na intervalu I konvexní, $a, b \in I$, $a < b$ a nechť b není pravý krajní. Je-li $f(a) \le f(b)$, pak f neklesá na intervalu $J = \langle b, \infty) \cap I$.*

Důkaz. Pro $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_3$ je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ježto je $b > a$, $f(b) \ge f(a)$, je levý a tak i pravý zlomek nezáporný, takže i $f(x_2) \ge f(x_1)$. □

Důsledek 108. Konvexní f na (a, b) $(a < b \le \infty)$ buď klesá, nebo existuje $c \in (a, b)$, že na (c, b) neklesá. V obou případech existuje $\lim_{x \to b-} f(x)$ a ta není $-\infty$ je-li $b < \infty$.

Důkaz. Jestli f na (a, b) klesá, tvrzení platí. Jinak $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, že $f(x_1) \le f(x_2)$ a podle věty 107 použité na $I = \langle x_1, b)$ f na (x_2, b) neklesá.

Je-li $b < \infty$, zvolme $p, q \in (a, b)$, $p < q$. Pak $\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \le \varphi(x) = \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$, $x > q$, odkud
$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p}\,(x - q) \le \varphi(x)\,(x - q) = f(x) - f(q) \text{ na } (q, b) \tag{8.1}$$
Protože φ na (q, b) neklesá, má limitu a ježto $\lim_{x \to b-} (x - q) = b - q$ je konečná, má ji i $\varphi(x)\,(x - q)$, tj. $f(x) - f(q)$ a (8.1) dává: $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}\,(b - q) \le \lim_{x \to b-} (f(x) - f(q))$ odkud $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} (f(x) - f(q)) + f(q) > -\infty$. □

Věta 109. *Konvexní f na I může mít ostré lokální maximum najvýše v případných krajních bodech. Ryze konvexní funkce na I může mít lokální maximum nejvýše tamtéž.*

Důkaz. Je-li v $c \in I$ ostré lokální maximum a c není krajní, je $\delta > 0$, že $f(y) < f(c)$, $f(z) < f(c)$ $\forall y, z$, $c - \delta < y < c < z < c + \delta$, načež $\frac{f(c)-f(y)}{c-y} \le \frac{f(z)-f(c)}{z-c}$ (z konvexnosti), ale levý zlomek je nezáporný a pravý záporný, což je spor. □

Věta 110. *Konvexní funkce f má na I nejvýše jedno ostré lokální minimum. Má-li je, je minimem globálním.*

Důkaz. Měj f v $a, b \in I$ ostré lokální minimum pro $a \ne b$ a buď třeba $a < b$. Pak existuje $\delta > 0$, že $f(a) < f(x)$ $\forall a < x < a + \delta$, $f(b) < f(y)$ $\forall b < y < b + \delta$. Načež (z konvexnosti) víme, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(y)}{b-y}$, ale zlomek vlevo je kladný a zpravo záporný. To je spor.

Má-li funkce v $c \in I$ ostré lokální minimum, existuje $\delta > 0$, že
$$f(c) < f(x) \qquad \forall x \in [(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)] \cap I \tag{8.2}$$

Zvolme $b \in (c, c+\delta) \cap I$, takže $f(c) < f(b)$. Podle věty 107 f neklesá na $\langle a, b) \cap I$. Je-li tedy $x \in (c, \infty)$, je buďto $c < x \leq b$ a tedy $f(c) < f(x)$ podle (8.2), nebo je $b < x$ a tak $f(c) < f(b) \leq f(x)$, takže $f(c) < f(x)\ \forall x \in I,\ x > c$.

Je-li c levý krajní v I, je tedy $f(c)$ nejmenší hodnotou f na I. Není-li, předpokládejme, že pro nějaké $c' \in I$, $c' < c$, je $f(c') \leq f(c)$. Pak je $c' \leq c - \delta$. Zvolme $x_1 \in I$ aby $c - \delta < x_1 < c$, $c' < x_1$. Pak je $f(c) < f(x_1)$ podle (8.2) a $0 \leq \frac{f(c)-f(c')}{c-c'} \leq \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} < 0$, ale to je spor.

Je tedy $f(x) > f(c)\ \forall x \in I,\ x < c$ a tak je $f(c) = \min_{x\in I} f(x)$. □

Věta 111. *Je-li f konvexní na $I \subset \mathbb{R}$ a $f'(x) = 0$ (pro krajní body se opět míní příslušná jednostranná derivace), nabývá $f(c)$ své nejmenší hodnoty na I.*

Pro konkávní f platí totéž, jen tentokrát je $f(c) = \max_{x\in I} f(x)$.

Důkaz. Není-li $c \in I$ pravý (levý) krajní, pak funkce $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ na $I^+ = \langle c, \infty) \cap I$ ($I^- = (-\infty, c\rangle \cap I$) neklesá, takže $0 = f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \varphi(x) = \inf_{x\in I^+} \varphi(x)$ ($0 = f'_-(c) = \varphi(c-) = \sup_{x\in I^-} \varphi(x)$. Tudíž $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ (≤ 0) na I^+ (I^-), kde však $x - c > 0$ ($x - c < 0$) a tak $f(x) \geq f(c)\ \forall x \in I$. □

Věta 112. *Buď f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pro vlastnosti*

A $f''(x) > 0$ *(*≥ 0, < 0, ≤ 0*) na* I,

B f' *na* I *roste (neklesá, klesá, neroste),*

C f *je na* I *ryze konvexní (konvexní, ryze konkávní, konkávní)*

platí $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

Důkaz.

1. $A \Rightarrow B$: Použije se důsledek 92 na f'.
2. $B \Rightarrow C$: Je-li $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, je podle věty 89

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$$

kde $x_1 < c < x_2 < d < x_3$. Protože $f'(c) < f'(d)$ je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (respektive obdobně pro $\leq$, $>$, $\geq$).

□

Definice 113.

A. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme inflexním bodem funkce f, jestli

(a) f je spojitá,

(b) existuje $f'(a)$ a je-li konečná, pak

$$\exists\delta > 0, \text{ že } f(x) \leq f'(a)\,(x-a) + f(a) \quad (\geq) \quad \forall a - \delta < x < a, \text{ a}$$
$$\exists\delta > 0, \text{ že } f(x) \geq f'(a)\,(x-a) + f(a) \quad (\leq) \quad \forall a < x < a + \delta$$

tj. f je na $(a - \delta, a)$ pod (nad) a na $(a, a+\delta)$ nad (pod) tečnou grafu f v $[a, f(a)]$.

B. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme silně inflexním bodem funkce f, jestli

(a) f je v a spojitá,

(b) existuje $f'(a)$,

(c) existuje $\delta > 0$, že je f konkávní (konvexní) na $(a - \delta, a)$ a konvexní (konkávní) na $(a, a + \delta)$

Věta 114. *Každý silně inflexní bod funkce f je taky inflexní.*

Důkaz. Buď f v a spojitá, měj $f'(a)$ a buď třeba na $(a-\delta,a)$ konkávní a na $(a,a+\delta)$ konvexní, $\delta>0$. Pak $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ na $(a-\delta,a)$ neroste, na $(a,a+\delta)$ neklesá a tak $\varphi(x)\geq\varphi(a-)=f'_-(a)=f'(a)$ pro $x\in(a-\delta,a)$, také $\varphi(x)\geq\varphi(a+)=f'_+(a)=f'(a)$ pro $x\in(a,a+\delta)$.

Tj. na $(a-\delta,a)$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq f'(a)$, odkud $f(x)-f(a)\leq f'(a)\,(x-a)$, tj. $f(x)\leq f'(a)\,(x-a)+f(a)$, a na $(a,a+\delta)$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq f'(a)$ odkud $f(x)\geq f'(a)\,(x-a)+f(a)$. □

Věta 115. *Je-li $f''(a)\neq 0$, není a pro f inflexní.*

Důkaz. Buď třeba $f''(a)>0$. Podle věty 86 f' roste, existuje tedy

$$\delta>0,\text{ že } f'(x)<f'(a)<f'(y)\ \forall x,y,a-\delta<x<a<y<a+\delta$$

Podle věty 89 tedy je $f(x)-f(a)=f'(c)\,(x-a)$, kde $x<c<a$, je tedy $a-\delta<c<a$ a tak $f'(c)<f'(a)$, načež $f(x)-f(a)=f'(c)\,(x-a)<f'(a)\,(x-a)$, tj. $f(x)<f'(a)\,(x-a)+f(a)$.

Analogicky pro $f(y)-f(a)=f'(d)\,(y-a)$, kde $a<d<y$, je tedy $a<d<a+\delta$ a tak $f'(a)<f'(d)$, načež $f(y)-f(a)=f'(d)\,(y-a)>f'(a)\,(y-a)$, tj. $f(y)>f'(a)\,(y-a)+f(a)$. □

Důsledek 116. Je-li $a\in\mathbb{R}$ pro f inflexní a existuje $f''(a)$, je $f''(a)=0$. Inflexní body funkce f mohou být jen tam, kde je 2. derivace nulová, nebo kde není.

Kapitola 9

Průběh funkce

Věta 117. *Nechť existuje* $f'(x)$ *na* $P(a)$, $f'(a) = 0$.

1. *Jestli* f' *mění znaménko, tj.* $\exists\delta > 0$, *že* $f' \leq 0$ (≥ 0) *na* $(a-\delta, a)$ *a* $f' \geq 0$ (≤ 0) *na* $(a, a+\delta)$, *má* f *v* a *extrém a sice lokální minimum (maximum). Při ostrých nerovnostech je příslušný extrém ostrý.*

2. *Jestli má* f *stejné znaménko na obou stranách bodu* a, *tj.* $f' > 0$ (< 0) *na* $(a-\delta, a)$ *i* $(a, a+\delta)$, f *v* a *roste (klesá) a tak* f *v* a *extrém nemá.*

Důkaz. Je-li třeba $f'(a) < 0$ na $(a-\delta, a)$, $f' > 0$ na $(a, a+\delta)$. Podle věty 86 f na $(a-\delta, a)$ klesá, na $(a, a+\delta)$ roste, f je v a spojitá ($f'(a) = 0$, tedy je konečná) a je-li $a - \delta < u < v < w < a$, je $f(u) > f(v) > f(w)$, odkud limitou $w \to a-$ plyne $f(u) > f(v) \geq f(a-) = f(a)$.

Je-li však třeba $f' < 0$ na $(a-\delta, a)$ i na $(a, a+\delta)$, pak $f(u) > f(a)$ $\forall u \in (a-\delta, a)$ jak výše dokázáno, ale také obdobně $f(a) > f(u)$ $\forall u \in (a, a+\delta)$ a tak f v a extrém nemá. □

Věta 118. *Je-li* $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, *má* f *v* a *ostrý extrém a sice min. (max.) je-li* $f''(a) > 0$ (< 0).

Důkaz. Je-li třeba $f''(a) > 0$, tak f' v a roste, takže existuje $\delta > 0$, že $f'(x) < f'(a) = 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f'(x) > f'(a) = 0$ na $(a, a+\delta)$ a viz větu 117.1. □

Věta 119. *Pro* $n \geq 1$, $1 \leq k < n$ *buď* $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ *(tj.* $f^{(n)}(a) \neq 0$ *a pro* $n > 1$ *buď* $f^{(k)}(a) = 0$ $\forall 1 \leq k < n$*). Pak*

1. *pro sudé* n *a* $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) *má* f *v* a *ostré lokální minimum (maximum),*

2. *pro liché* n *v* a *nemá extrém; při* $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) f *v* a *roste (klesá)*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ (2) to je věta 86 (118).

Nechť tvrzení platí pro $n \geq 2$. a buď $f^{(k)}(a) = 0$ pro $1 \leq k < n$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, třeba $f^{(n+1)}(a) > 0$. Pak je funkce $g(x) = f'(x)$ splňuje požadavky věty pro n, takže

1. pro sudé $n+1$ je n liché a tak g v a roste, existuje tedy $\delta > 0$, že $g(x) < g(a)$ na $(a-\delta, a)$, $g(x) > g(a)$ na $(a, a+\delta)$. Je tedy $f'(x) < f'(a) = 0$ na $(a-\delta, a)$, $f'(x) > f'(a)$ na $(a, a+\delta)$ a viz větu 117.2.

2. pro liché $n+1$ je n sudé a tak g v a má ostré minimum, existuje tedy $\delta > 0$, že $g(x) > g(a)$ na $(a-\delta, a)$ i $(a, a+\delta)$. Je tedy $f'(x) < f'(a) = 0$ na $(a-\delta, a)$, $f'(x) < f'(a)$ na $(a, a+\delta)$ a viz větu 117.1.

□

Věta 120. *Pro* $1 < k < n$ *buď* $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Je-li* n *liché (sudé), má (nemá)* f *v* a *inflexní bod.*

Důkaz. Buď $[x, f(x)]$ je nad či pod tečnou

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a) \tag{9.1}$$

právě když je $g(x) = f(x) - f'(a)\,(x-a) - f(a)$ kladné či záporné. Je $g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$ a buď třeba $f^{(n)}(a) > 0$ takže pak je $g^{(n)}(a) > 0$ a podle věty 119 má funkce g

1. pro sudé n ostré lokální minimum, tj. existuje $\delta > 0$, že $g(x) > g(a) = 0$ na $(a-\delta, a)$ a $(a, a+\delta)$, tedy a není inflexní.

2. pro liché n g v a podle věty 119.2 roste, tj. existuje $\delta > 0$, že $g(x) < g(a) = 0$ na $(a-\delta, a)$, $g(x) > g(a) = 0$ na $(a, a+\delta)$, takže $[x, f(x)]$ je pro $x \in (a-\delta, a)$ pod, ale pro $x \in (a, a+\delta)$ nad tečnou (podle (9.1)), tedy a je inflexní.

□

Věta 121. *Je-li $f'(a) = 0$, $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) na okolí bodu a, je v a lokální minimum (maximum).*

Důkaz. Podle věty 112 je f na okolí bodu a konvexní (konkávní) a tak na něm má podle věty 111 minimum (maximum). □

Definice 120. Buď f dána na intervalu (a, ∞) ($(-\infty, b)$). Přímku $y = kx + q$ nazveme její pravou (levou) asymptotou, nebo taky asymptotou u ∞ (u $-\infty$) jestli $\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx + q| = 0$ ($\lim_{x\to-\infty} |f(x) - kx + q| = 0$.

Někdy se za asymptotu považuje ještě přímka $x = a$, je-li f dána na nějakém $(a-\delta, a)$ nebo $(a, a+\delta)$ a $f(a-) = \pm\infty$, nebo $f(a+) = \pm\infty$.

Věta 120. *f má pravou asymptotu právě když platí: exstuje konečná limita $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a označíme ji k, existuje konečná $\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.*

Je-li podmínka splněna a označíme-li druhou z limit q, je $y = kx + q$ pravou asymptotou. (Má tedy f nejvýš jednu pravou asymptotu.)

Existuje-li $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, pak existuje i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a rovná se jí, takže je-li konečná, je $k = \lim_{x\to\infty} f'(x)$.

Stejné tvrzení (s limitami u $-\infty$) platí pro levou asymptotu.

Důkaz. Důkaz implikace $\Rightarrow$: je-li $y = kx + q$ asymptota u ∞, je $\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - q|$, takže $0 = \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)-kx-q|}{x} = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - k\right|$ odkud $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0$, takže $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k\right) + k = k$. Dále je $\lim_{x\to\infty} (fx - kx - q) = 0$, takže $f(x) - kx = (f(x) - kx - q) + q = q$, odkud $\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = q$.

Důkaz opačné implikace $\Leftarrow$: existuje-li konečná $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$ a položíme $y = kx + q$, je $\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - q| = 0$.

Existuje-li $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a rovná se jí (věta 94), takže je-li konečná, je $k = \lim_{x\to\infty} f'(x)$ □

Věta 121. *Buď g derivací spojité funkce na intervalu I. Je-li monotónní, tak je spojitá.*

Důkaz. Buď bod $a \in I$, který není pravý krajní a buď $g = f'$ na I. Pak existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$ (f' je monotónní) a je $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x)$. Je tedy $g = f'$ v a spojitá zprava. Obdobně se ukáže, že je v a spojitá zleva (není-li a levý krajní) tak je v a spojitá. □

Příklad 121 (Průběh funkce). Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme po následujících bodech:

1. Určíme definiční obor,

2. skládá-li se D_f z více intervalů, spočteme příslušné jednostranné limity u každého z jejich krajních bodů, který nepatří do D_f, včetně případných limit v nevlastních bodech $\pm\infty$,

3. f': najdeme stacionární body, intervaly monotónie (podle věty 92) a body, kde f nemá derivaci; zjistíme, kde jsou extrémy a jaké
4. f'': najdeme body, které mohou být inflexní a intervaly konkávnosti a konvexnosti (věta 112)
5. najdeme případné asymptoty
6. nakreslíme graf

Máme-li zkoumat celkové extrémy spojité funkce na $\langle a, b\rangle$, stačí srovnat její hodnoty ve všech případných stacionárních bodech, v bodech, kde případně nemá derivaci a v bodech a a b. Kde je hodnota největší (nejmenší), je globální maximum (minimum) funkce f na $\langle a, b\rangle$.[1]

[1]kdybyste znal někdo správné očíslování vět 117-121, napište na icq 310109616. díky

Kapitola 10

Řady

Definice 122. Součtem členů posloupnosti a_n se rozumí limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, kde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ je takzvaný n-tý částečný součet členů posloupnosti. Pokud tato limita existuje. Označíme-li ji v takovém případě s, píšeme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; místo součet ($n$. částečný součet) členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zvykem říkat součet (n. částečný součet) řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li konečný, říkáme, že řada konverguje, jinak diverguje; zde ještě rozeznáváme divergence k ∞ ($-\infty$) jestli $s = \infty$ ($-\infty$) a jestli $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, říká se, že řada nemá součet, nebo že osciluje.

Věta 123 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Jestli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $a_n \to 0$.

Důkaz. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$. □

Věta 124 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence řad)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N},\ \text{že}\ |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ \forall m, n \geq k$$

kterážto podmínka je rovnocenná podmínce

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N},\ \text{že}\ |a_{k+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq k$$

Důkaz. Použití Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pousloupnosti částečných součtů (věta 31). □

Příklad 125. Harmonická řada ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) konverguje k nekonečnu.

Důkaz.

$$\left| \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(2^{n+1} - 2^n\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Protože toto platí $\forall n$, tak podle BC podmínky řada diverguje. □

Věta 126 (Srovnávací příznak (kritérium) pro řady s nezápornými členy)**.** *Nechť pro* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *existuje* $l \in \mathbb{N}$, *že* $0 \leq a_n \leq b_n\ \forall n \geq l$. *Pak konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *tak i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(či naopak, diverguje-li* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *tak i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*).*

Důkaz. Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak podle věty 124

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |b_m + \cdots + b_n| < \varepsilon \ \forall m, n \geq k \tag{10.1}$$

lze brát $k \geq l$. Ukážeme, že podmínku věty 124 splňuje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Buď tedy $\varepsilon > 0$. Vezměme k němu k podle (10.1). Pro $m, n \geq k$ pak je $|a_m + \cdots + a_n| = a_m + \ldots a_n \leq b_m + \cdots + b_n = |b_m + \cdots + b_n| < \varepsilon$ podle (10.1). □

Důsledek 127 (tzv. odmocninový či Cauchyův příznak).

A Nechť pro $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy $\exists k \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q \ \forall n \geq k$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestli $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (k ∞).

B (limitní podoba) Jestli $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ (> 1), řada konverguje (diverguje).

Důkaz.

A Z $\sqrt[n]{a_n} \leq q \ \forall n \geq k$ plyne, že $a_n < q^n \ \forall n \geq k$ a geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ při $0 \leq q < 1$ konverguje, takže podle věty 126 totéž platí pro $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n, je $a_n \geq 1$ pro tyto n a tak nejde $a_n \to 0$, proto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůže podle věty 123 konvergovat.

B Je-li $l = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, zvolme q, aby $l < q < 1$. Pak existuje k, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q \ \forall n \geq k$ a případ A dává konvergenci.

Je-li $l > 1$, existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sqrt[n]{a_n} > 1 \ \forall n \geq k$ a bod A dává divergenci.

□

Věta 128 (tzv. podílový srovnávací příznak konvergence řad s kladnými členy)**.** *Nechť pro* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *existuje* $l \in \mathbb{N}$, *že* $a_n, b_n > 0$ *a* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n \geq l$. *Pak jestli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(a naopak, jestli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, tak i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*).*

Důkaz. Pro $n \geq l$ je

$$\frac{a_n}{a_l} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{l+1}}{a_l} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{b_n}{b_l}$$

odkud $a_n \leq \frac{a_l}{b_l} b_n$ a z konvergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_l}{b_l} b_n$ a tak konverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ podle věty 126. □

Důsledek 129 (tzv. d'Alembertův podílový příznak).

A Nechť pro $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy je $k \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \forall n \geq k$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; jestli je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \geq k$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

B (limitní tvar) Jestli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (> 1), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

Důkaz.

A Použije se věta 128 na $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Ta druhá při $q \in (0, 1)$ konverguje.

Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\forall n \geq k$, je $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_k$ $\forall n \geq k$ a tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ a viz větu 123.

B Jestli $l = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, zvolme q, aby $l < q < 1$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ $\forall n \geq k$ a bod A dává konvergenci.

Je-li $l > 1$, existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ $\forall n \geq k$ a viz bod A.

□

Věta 130 (Kummerův příznak). *Pro posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *nechť je* $l \in \mathbb{N}$*, že* $a_n > 0$, $c_n > 0$ $\forall n \geq l$. *Položíme*

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \qquad \text{pro } n \geq l \tag{10.2}$$

A Jestli existuje $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, *že* $K_n \geq \delta$ $\forall n \geq k$, *tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

B Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *diverguje a existuje* $k \in \mathbb{N}$, *že* $K_n \leq 0$ $\forall n \geq k$, *tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Limitní tvar: Jestli $K = \lim\limits_{n\to\infty} K_n > 0$ (< 0), *tak řada konverguje (diverguje).*

Důkaz.

A Z $K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta$ pro $n \geq k, l$ plyne

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} \tag{10.3}$$

takže $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$, tj. $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$ a tak $\{c_n a_n\}$ klesá, má tedy konečnou limitu L.

Pro částečné součty σ_n řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}) \tag{10.4}$$

je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma_n &= \lim_{n\to\infty} [(c_1 a_1 - c_2 a_2) + (c_2 a_2 - c_3 a_3) + \cdots + (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})] = \\ &= \lim_{n\to\infty} [c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}] = c_1 a_1 - L \end{aligned}$$

a tak řada (10.4), načež podle (10.3) a věty 126 i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

B Z $K_n \leq 0$ plyne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$$

a tak divergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ dává podle věty 128 totéž pro $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Limitní podoba stejné jako u vět 127 a 129.

□

Důsledek 131.

1. Položíme ve větě 130 $c_n = 1$, dostáváme podílový příznak z věty 129.
2. Položíme-li $c_n = n$, dostáváme tzv. Raabeho příznak:

   A Existuje-li $k \in \mathbb{N}$, $q > 1$, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) \geq q$ $\forall n \geq k$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

   Je-li $n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) \leq 1$ $\forall n \geq l$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

   B (limitní tvar) Jestli $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) > 1$ (< 1), řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).
3. Položíme-li $c_n = n \ln n$, dostáváme tzv. Bertrandův příznak:

$$\text{jestli } \lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] > 1 \ (< 1), \text{ řada konverguje (diverguje).}$$

Důkaz. 1 a 2 plyne ihned z věty 130, limitní tvary obdobně jako v důkazu vět 127 a 129. ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje).

Třetí bod: $c_n = n \ln n$ vyhovuje předpokladům věty 130 a tak

$$\begin{aligned}
K_n &= c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \\
&= n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \ln n - n \ln n + n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \\
&= n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ln n + n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \\
&= n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ln n - \ln n + \ln n + n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \\
&= \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - 1$ a věta 130 dává tvrzení. (divergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ dodatečně v příkladu) □

Věta 132 (Gaussův příznak)**.** *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ měj kladné členy a nechť existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$ $\forall n \geq k, \lambda, \mu > 0$ a $\{\theta_n\}$ je omezená ($\theta_n \leq L$ $\forall n \geq l$).*

Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje je-li $\lambda > 1$, nebo $\lambda = 1$ a $\mu > 1$. Diverguje při $\lambda < 1$ nebo $\lambda = 1$ a $\mu \leq 1$.

Důkaz. $\lambda < 1$ $(\lambda > 1)$ – věta 129, protože pak je limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$. Buď $\lambda = 1$, pak $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \mu$ a tak případy $\mu > 1$ $(\mu < 1)$ dává důsledek 131.2 (Raabe). Při $\mu = 1$ je $B_n = \ln n\,(R_n - 1) = \frac{\ln n}{n}.\ \theta_n$ a tak $B_n \to 0$ a odpověď dává důsledek 131.3. □

Věta 133 (sdružování členů řady)**.** *Buď $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupností přirozených čísel. Pro posloupnosti částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ položme $b_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ $(= a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})$.*

A Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tak i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

B Jestli je $a_n \geq 0$ (≤ 0) od nějakého $l \in \mathbb{N}$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$ právě když $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

Důkaz.

A Posloupnost $\{\sigma_n\}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je vybraná z $\{s_n\}$, takže podle věty 23 jestli $s_n \to s$, tak i $\sigma_n \to s$.

B Zde je $\{s_n\}$ i $\{\sigma_n\}$ monotónní od l a tak mají limitu; označíme je s a σ. Podle věty 23 je $s = \sigma$.

□

Věta 134 (tzv. kondenzanční příznak konvergence)**.** *Nechť existuje $l \in \mathbb{N}$, že $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \geq l$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ je (s_n je částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$)

$$\frac{1}{2} 2^{n+1} \cdot a_{2^{n+1}} \leq s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n} \tag{10.5}$$

Proto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje právě když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (s_{2^{n+1}} - s_{2^n})$, která podle věty 133B konverguje právě když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Příklad 135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje.

Důkaz. $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ vyhovuje požadavkům věty 134 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$$

diverguje (příklad 125). □

Řady s nestejnými znaménky

Věta 136 (Leibnitzův příznak)**.** *Buď $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$ $\forall n$ od nějakého $l \in \mathbb{N}$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje právě tehdy když $b_n \to 0$.*

Důkaz. Jestli $b_n \to 0$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ a $\{b_n\}$ splňují podmínky věty 140B a tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje.

Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje, tak $(-1)^{n+1} b_n \to 0$ a tak $b_n \to 0$. □

Definice 137. Variací posloupnosti $\{a_n\}$ se rozumí číslo $\operatorname{var}\{a_n\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$. Je-li konečná, říkáme, že posloupnost má konečnou variaci.

Tvrzení 138.

A Monotónní a omezená posloupnost má konečnou variaci.

B Má-li $\{a_n\}$ konečnou variaci, je omezená.

Důkaz.

A Nechť $\{a_n\}$ třeba neklesá, $a_n \leq K$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 \leq K - a_1$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \leq K - a_1$$

B $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$ a tak $|a_n| \leq |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| + |a_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| + |a_1| = \mathrm{var}\{a_1\} + |a_1|$.

□

Lemma 139 (Abelova parciální sumace)**.** *Pro* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, *(*$n > 1$*) buď* $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$. *Pak je*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= a_1 \cdot b_1 + (s_2 - s_1)\, b_2 + (s_3 - s_2)\, b_3 + \cdots + (s_n - s_{n-1})\, b_n = \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \end{aligned}$$

Věta 140 (Abel-Dirichletův příznak konvergence)**.** *Posloupnost* $\{b_n\}$ *měj konečnou variaci (třeba buď monotónní a omezená),* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje jestli*

A Buďto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (Abellův příznak), nebo*

B $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů a* $b_n \to 0$ *(Dirichletův příznak).*

Důkaz. Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje BC podmínku věty 124. Pro $k, p \in \mathbb{N}$, položme $\sigma_{k,p} = \sum_{l=1}^{p} a_{k+l}$. Podle tvrzení 139 je

$$|a_{k+1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+p} b_{k+p}| = |\sigma_{k,1} (b_{k+1} - b_{k+2}) + \cdots + \sigma_{k,p-1} (b_{k+p-1} - b_{k+p}) + \sigma_{k,p} b_{k+p}| \tag{10.6}$$

A Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|\right)$ konverguje, existuje podle věty 124 $r \in \mathbb{N}$ ($s \in \mathbb{N}$), že pro $\varepsilon < 1$

$$|\sigma_{r,p}| = \left| \sum_{l=1}^{p} a_{r+l} \right| < \varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \tag{10.7}$$

$$\left(\sum_{n=p}^{q} |b_n - b_{n+1}| < \varepsilon \ \forall p, q \geq s \right) \tag{10.8}$$

Navíc je $\{b_n\}$ podle tvrzení 138B omezená, třeba $|b_n| \leq K$. Pro $k = \max(r, s)$ pak je podle (10.6)

$$\begin{aligned} & |a_{k+1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+p} b_{k+p}| \leq \\ \leq \ & |\sigma_{k,1}|\, |b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |\sigma_{k,p-1}|\, |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |\sigma_{k,p}|\, |b_{k+p}| < \\ < \ & \varepsilon \left(|b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |b_{k+p}| \right) < \\ < \ & \varepsilon (\varepsilon + K) < \varepsilon (1 + K) \end{aligned}$$

B Pro $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ buď $|s_n| \le K\ \forall n$, pak je $|\sigma_{k,p}| = |s_{k+p} - s_k| \le |s_{k+p}| + |s_k| \le 2K\ \forall k, p$.
Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konverguje ($b_n \to 0$), je podle věty 124 $s \in \mathbb{N}$ ($r \in \mathbb{N}$), že platí (10.8) ($|b_n| < \varepsilon\ \forall n \ge r$). Pro $k = \max(r, s)$ pak je podle (10.6)

$$\begin{aligned} & |a_{k+1}b_{k+1} + \cdots + a_{k+p}b_{k+p}| \le \\ \le\ & |\sigma_{k,1}|\,|b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |\sigma_{k,p-1}|\,|b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |\sigma_{k,p}|\,|b_{k+p}| < \\ <\ & 2K\left(|b_{k+1} - b_{k+2}| + \cdots + |b_{k+p-1} - b_{k+p}| + |b_{k+p}|\right) < \\ <\ & 2K \cdot 2\varepsilon = 4K\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

Věta 141. *Jestli $\sum |a_n|$ konverguje (tj. $\sum a_n$ konverguje tzv. absolutně) a $\{b_n\}$ je omezená, tak $\sum a_n b_n$ konverguje.*

Důkaz. Je-li $\varepsilon > 0$, tak z konvergence $\sum |a_n|$ plyne, že $\exists k \in \mathbb{N}$, že $\sum\limits_{l=1}^{p} |a_{k+l}| < \varepsilon\, \forall p \in \mathbb{N}$.

Je-li naopak $\varepsilon > 0$, tak tedy $|a_{k+1}b_{k+1} + \ldots + a_{k+p}b_{k+p}| \le |a_{k+1}b_{k+1}| + \ldots + |a_{k+p}b_{k+p}| \le K\left(|a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+p}|\right) < K\varepsilon\, \forall p \in \mathbb{N}$. □

Věta 142. *Buď $\sum a_n$ řada s nezápornými a $\sum b_n$ s kladnými členy. Pak*

1. *Jestli $l = 0$ a $\sum b_n$ konverguje, pak $\sum a_n$ konverguje, právě když $\sum b_n$ konverguje*
2. *Jestli $l = 0$ a $\sum b_n$ konverguje, tak i $\sum a_n$ konverguje (a tedy jestli $\sum a_n$ diverguje, tak i $\sum b_n$)*
3. *Jestli $l = \infty$ a $\sum b_n$ diverguje, tak i $\sum a_n$ (a tedy jestli $\sum a_n$ konverguje, tak i $\sum b_n$)*

Důkaz.

1. Jestli $l = \lim \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak je $\lim \frac{a_n}{b_n} < l + 1$ a tak $\frac{a_n}{b_n} < l + 1\, \forall n \ge k$, tj. $a_n < (l+1)b_n$ a z konvergence $\sum b_n$ (a tedy $\sum (l+1)b_n$) plyne konverence $\sum a_n$.

   Pro α je $\lim \frac{a_n}{b_n} < \alpha$ a tak $\frac{a_n}{b_n} < \alpha\, \forall n \ge k$, tj. $a_n > \alpha b_n$ a tak z divergence$\sum b_n$ plyne totéž pro $\sum a_n$.
2. Zde je $0 = l = \lim \frac{a_n}{b_n} < 1$ a tak $\frac{a_n}{b_n} < 1\, \forall n \ge k$, tj. $a_n < b_n$, načež konvergence $\sum b_n$ dává totéž pro $\sum a_n$.
3. Zde je $\infty = l = \lim \frac{a_n}{b_n} > 1$ a tak $a_n > b_n\, \forall n \ge k$, načež divergence $\sum b_n$ dává divergenci $\sum a_n$.

□

Absolutní konvergence

Definice 143. Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme absolutně konvergentní jestli konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 144. *Absolutně konvergentní řada konverguje.*

Důkaz. Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, tak podle věty 124 splňuje BC podmínku, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } \left|\sum_{l=k+1}^{p} |a_l|\right| = \sum_{l=k+1}^{p} |a_l| < \varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N} \tag{10.9}$$

Buď $\varepsilon > 0$; najděme $k \in \mathbb{N}$, aby platilo (10.9). Pro $p \in \mathbb{N}$ pak je

$$|a_{k+1} + \cdots + a_{k+p}| \leq |a_{k+1}| + \cdots + |a_{k+p}| < \varepsilon$$

což bylo dokázat. □

Příklad 145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje, ale ne absolutně.

Definice 146. Řadu $\sum a_n$ nazveme neabsolutně konvergentní, pokud konverguje, ale ne absolutně.

Poznámka 147. $\{a_{k(n)}\}$ ($\{a_{z(n)}\}$) buď vybraná posloupnost nezáporných (záporných) členů posloupnosti $\{a_n\}$. Pak nastává jediný z těchto případů:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ konverguje, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$ – pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$

Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, nastává čtvrtá možnost.

Definice 148. Buď p prosté zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pak řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ vznikne z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnáním.

Věta 149. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konverguje,* $s \in \mathbb{R}^*$. *Pak je přerovnání* p *množiny* $\mathbb{N}$, *že* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.

Důkaz. [1] Buď $\{a_{k(n)}\}$ a $\{a_{z(n)}\}$ vybrané posloupnosti všech nezáporných (záporných) členů posloupnosti $\{a_n\}$; je

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$

Buď n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_1 = a_{k(1)} + \cdots + a_{k(n)} > s$,
n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_2 = \sigma_1 + a_{z(1)} + \cdots + a_{z(n)} < s$,
n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_3 = \sigma_2 + a_{k(n_1+1)} + \cdots + a_{k(n)} > s$,
n_4 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_4 = \sigma_3 + a_{z(n_2+1)} + \cdots + a_{z(n)} < s$,
...
Buď $n : 1, 2, \ldots, n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, n_2 + 1, \ldots n_3, n_3 + 1, \ldots, n_4, n_4 + 1, \ldots$
$p(n)$: $k(1), k(2), \ldots, k(n_1), z(1), z(2), \ldots, z(n_2), k(n_1) + 1, \ldots k(n_3), z(n_2) + 1, \ldots, z(n_4), k(n_3) +$

[1] Tenhle důkaz mi nedává smysl, ať ho čtu, jak ho čtu, takže je asi nějak špatně. Kdybyste ho někdo měl dobře a chápete ho, napište na icq 310109616, díky.

$1, \dots$
Zobrazení p je prosté a zobrazuje $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, takže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ vznikla přerovnáním z $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $a_n \to 0$, tudíž existuje $d \in \mathbb{N}$, že $|a_d| < \varepsilon \ \forall n \geq d$. Buď $t' \in \mathbb{N}$ takové, že $\{p(1), \dots, p(t'-1)\}$ obsahuje všechna čísla $1, \dots, d$. Je-li tedy $n \geq d$, je $p(n) \geq d$ a tak $a_{p(n)} < \varepsilon \ \forall n \geq t'$.

Zvolme ještě t' tak velké, aby $p(t') = n_{2l}$. Pak je navíc $a_{p(t')} = a_{k(2l+1)}$ a součet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ až po tento index je větší než s, ale protože je $a_{p(t')} < \varepsilon$, je $s < \sum\limits_{n=1}^{t'} a_{p(n)} < s + \varepsilon$.

Buď $t > t'$ takové, aby $p(t) = a_{p(2k)}$. Pak je ještě $a_{p(t)} = a_{z(2l)} < s$, ale protože je $a_{p(t)} > -\varepsilon$, je $\sum\limits_{n=1}^{t} a_{p(n)} > s - \varepsilon$. Pro $n \geq t$ pak je $s - \varepsilon < \sum\limits_{n=1}^{t} a_{p(n)} < \sum\limits_{k=1}^{n} a_{p(k)} < \sum\limits_{n=1}^{t'} a_{p(n)} < s + \varepsilon$.

Buď n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_1 = a_{k(1)} + \dots + a_{k(n)} > 1$,
n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_2 = \sigma_1 + a_{z(1)} + \dots + a_{z(n)} < 1$,
n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_3 = \sigma_2 + a_{k(n_1+1)} + \dots + a_{k(n)} > 2$,
n_4 první $n \in \mathbb{N}$, že $\sigma_4 = \sigma_3 + a_{z(n_2+1)} + \dots + a_{z(n)} < 2$,
$\dots$

$\square$

Věta 150. *Jestli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *z ní vzniklá přerovnáním také absolutně konverguje a ke stejnému součtu.*

Důkaz. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a tak splňuje BC podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } |a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \tag{10.10}$$

Buď $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{p(k)}$; ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - \sigma_n) = 0$, takže limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} [s_n + (\sigma_n - s_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Buď $\varepsilon > 0$, najdeme k podle (10.10) a zvolme $l \in \mathbb{N}$ tak velké, aby mezi $a_{p(1)}, \dots, a_{p(l)}$ byly všechny členy $a_1, \dots, a_k$. Pro $n \geq l$ se pak v $s_n - \sigma_n$ všechny členy $a_1, \dots, a_k$ vyruší a zůstanou jen členy $a_{v_1}, \dots, a_{v_s}$.

$v_1, \dots, v_s \geq k$, takže existuje $p \in \mathbb{N}$, že mezi $k+1, \dots, k+p$ jsou všechny $v_1, \dots, v_s$, načež $|s_n - \sigma_n| = |a_{v_1} + \dots + a_{v_s}| \leq |a_{v_1}| + \dots + |a_{v_s}| \leq |a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \varepsilon$ podle (10.10). $\square$

Důsledek 151. Řada konverguje ke stejnému součtu při každém přerovnání právě když absolutně konverguje.

Důkaz. $\Leftarrow$ podle věty 150, $\Rightarrow$ věta 149. $\square$

Definice 152. Buď a zobrazení spočetné množiny S do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), buď $s : \mathbb{N} \to S$ prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na S (takže $s(1), s(2), \dots$ je uspořádání S do posloupnosti).

Jestli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ absolutně konverguje, tak (absolutně) konverguje pro každé takové s k témuž součtu σ, jenž nazveme součtem zobecněné řady $\sum_{s\in S} a(s)$ (a píšeme $\sigma = \sum_{s\in S} a(s)$).

Věta 153. *Buď* $\sum_{s\in S} a(s)$ *absolutně konvergentní zobrazení řady se součtem* σ, $\mathcal{F}$ *buď spočetná a disjunktní soustava podmnožin* S *(tj.* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$*) taková, že* $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \langle F | F \in \mathcal{F} \rangle = S$*. Pak*

1. $\forall F \in \mathcal{F}$ *zobecněná řada* $\sum_{s\in F} a(s)$ *absolutně konverguje*

2. *označíme-li* $\sigma_F = \sum_{s\in F} a(s)$, *pak zobecněná řada* $\sum_{F\in\mathcal{F}} \sigma_F$ *absolutně konverguje*

3. $\sum_{F\in\mathcal{F}} \sigma_F = \sigma$

Důkaz. Buď $\langle s(n)\rangle_{n=1}^{\infty}$ nějaké uspořádání S do posloupnosti. To uspořádává d posloupnosti každou $A \subset S$: buď n_1 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A$, n_2 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A - \{n_1\}$, n_3 první $n \in \mathbb{N}$, že $s(n) \in A - \{n_1, n_2\}$, ...

$\{s(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je uspořádání A do posloupnosti, vytvořené uspořádáním s; označme je $\left\{s^A(k)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Je-li $A \subset B \subset S$ pak uspořádání s^B v B vytvoří takto též uspořádání její podmnožiny A – označme je $\left(s^B\right)^A$ (tj. $\left\{\left(s^B\right)^A(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$). Je tedy v A uspořádání s^A a $\left(s^B\right)^A$. Očividně je $\left(s^B\right)^A = s^A$.

1. Je-li $G \subset S$, ukážeme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{s^G(k)}$ absolutně konverguje. Je-li $t \in \mathbb{N}$, je $\sum\limits_{k=1}^{t} \left|a_{s^G(k)}\right| \le \sum\limits_{k=1}^{s^G(t)} \left|a_{s(k)}\right| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{s(k)}\right| = M < \infty$ (řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{s(k)}\right|$ absolutně konverguje) a tak je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{s^G(k)}\right| = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{t} \left|a_{s^G(k)}\right| \le M$$

což bylo dokázat.

2. Označme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{s^G(k)}\right| = \sigma_G$. Uspořádejme $\mathcal{F}$ do posloupnosti: $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$. Podle 1 každá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{s^{F_k}(n)}$ $(= \sigma_{F_k})$ absolutně konverguje. Ježto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|a_{s(n)}\right|$ konverguje, platí podle BC podmínky $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$, že $\sum\limits_{n=1}^{p} \left|a_{s(k+n)}\right| < \varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}$ odkud limitou $p \to \infty$ plyne

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{s(k+n)}\right| \le \varepsilon \tag{10.11}$$

Buď $\varepsilon > 0$; najděme k a zvolme $l \in \mathbb{N}$, aby $\{s(1), s(2), \ldots, s(k)\} \subset F_1 \cup \cdots \cup F_l$ a pak $m \ge l$, aby $\{s(1), s(2), \ldots, s(k)\} \subset \left\{s^{F_1}(1), \ldots, s^{F_1}(m)\right\} \cup \cdots \cup \left\{s^{F_l}(1), \ldots, s^{F_l}(m)\right\}$ (označme D). Každé $a_{s(1)}, \ldots, a_{s(k)}$ tedy je mezi $a_{s(j)}$, kde $s(j) \in D$.

Pro $r, t \ge m\, (\ge l)$ se v

$$b(r) = \left|\sum_{n=1}^{r} a_{s(n)} - \sum_{n=1}^{r} a_{s^{F_1}(n)} - \cdots - \sum_{n=1}^{r} a_{s^{F_k}(n)}\right|$$

všechny členy $a_{s(1)}, \ldots, a_{s(k)}$ vyruší a zbydou pouze $a_{s(p)}$ s $p \ge k+1$, takže $b(r) \le \varepsilon$ podle (10.11).

Je $\lim_{r\to\infty} b(r) = |\sigma - \sigma_{F_1} - \cdots - \sigma_{F_t}| \le \varepsilon\ \forall t \ge m$. Ukázali jsme tedy, že $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$, že $\left|\sigma - \sum\limits_{k=1}^{t} \sigma_{F_k}\right| < \varepsilon\ \forall t \ge m$, tedy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ konverguje k součtu σ.

Uspořádání $\mathcal{F}$ do posloupnosti $\{F_1, F_2, \ldots\}$ bylo libovolné, tudíž $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ pro každé z nich konverguje k témuž součtu σ a tak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k}$ konverguje absolutně.

□

Násobení řad

Věta 154. *Buďte* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = t$ *absolutně konvergentní. Pak „dvojná" řada* $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j$ *absolutně konverguje k* st.

Důkaz. Uspořádáme členy dvojné řady do posloupnosti $\{c_n\}$

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{a_1b_1}^{c_1}, & \overbrace{a_1b_2}^{c_2}, & \overbrace{a_1b_3}^{c_4}, & \dots \\ \overbrace{a_2b_1}^{c_3}, & \overbrace{a_2b_2}^{c_5}, & a_2b_3, & \dots \\ \overbrace{a_3b_1}^{c_6}, & a_3b_2, & a_3b_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{10.12}$$

Odhadneme $\sum_{n=1}^{k} |c_n|$: Je $c_k = a_p b_q$ a pro každé $n = 1, \dots, k$ je $c_n = a_r b_s$, kde $r, s \leq p + q$ a tak $\sum_{n=1}^{k} |c_n| \leq \sum_{1\leq r,s\leq p+q} |a_r|\,|b_s| \leq \sum_{r=1}^{p+q} |a_r| \sum_{s=1}^{p+q} |b_s| \leq ST$, kde $S = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, což dokazuje absolutní konvergenci dvojné řady.

Rozložme $S = \{(i,j)\,|i,j \in \mathbb{N}\}$ na $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, kde $F_k = \{(k,j)\,|j \in \mathbb{N}\}$ (takže množina všech dvojic $a_k b_j$ $\{a_k b_j|\,(k,j) \in F_k\}$ tvoří členy k. řádku v (10.12)). Přitom

$$\sigma_{F_k} = \sum_{(i,j)\in F_k} a_i b_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j = a_k t$$

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{F_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t = st$$

□

Definice 155. Cauchyovým součinem řad se rozumí řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergují a alespoň jedna absolutně, tak Cauchyův součin řad konverguje k st.

Přání 156. *Přeji všechno nejlepší u zkoušek.*

Důkaz. Zjevné. Tohle všechno sepsáno původně sepsáno Jánem Zahornadským z přednášek Jaroslava Drahoše, poměrně dost opraveno a přečíslováno Karlem Bílkem (chyby hlašte na jeho icq, 310109616) □