2. Funkční řady

V předcházející kapitole jsme uvažovali řady, jejichž členy byla reálná čísla. Nyní se budeme zabývat studiem obecnějšího případu, kdy členy řad tvoří reálné funkce.

Definice 2.1. (Funkční řada) Nechť v intervalu I je definována posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. *Funkční řadou* rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \dots \,. \tag{2.1}$$

Dosadíme-li za x určité číslo $x_0 \in I$, obdržíme z funkční řady (2.1) číselnou řadu tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \dots \,. \tag{2.2}$$

Konverguje-li číselná řada (2.2), řekneme, že funkční řada (2.1) konverguje pro $x = x_0$.

Definice 2.2. (Obor konvergence) Nechť $I^\star \subset I$ značí množinu všech těch čísel x z množiny I, pro která funkční řada (2.1) konverguje. Množinu $I^\star$ nazýváme *konvergenčním oborem* (nebo *oborem konvergence*) funkční řady (2.1).

Definice 2.3. (Částečný součet a zbytek) Funkci $s_n(x)$ tvaru

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \tag{2.3}$$

nazýváme *n-tým částečným součtem* funkční řady (2.1). Výraz

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

nazýváme n-tým zbytkem řady (2.1). *Součtem funkční řady* (2.1) rozumíme funkci

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \tag{2.4}$$

která je definována na množině $I^\star$ (tj. je definována pro všechna x, ve kterých existuje *konečná* limita $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$). Potom píšeme

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad x \in I^\star. \tag{2.5}$$

Poznámka 2.4. Součtem nekonečné řady funkcí je tedy opět funkce. Všimněme si však, že tento součet nemusí být definován na celém intervalu I (kde jsou definováni jednotliví sčítanci), ale obecně pouze na nějaké jeho podmnožině $I^\star$.

Při určování oboru konvergence $I^\star$ často s výhodou užíváme limitního podílového nebo odmocninového kritéria.

Příklad 2.5. Určeme obor konvergence řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots \,.$$

Řešení. Všechny funkce $f_k(x) = x^k$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou definovány v $I = (-\infty, \infty)$. Platí

$$\left|\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right| = \left|\frac{x^k}{x^{k-1}}\right| = |x|.$$

Podle limitního podílového kritéria konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ pro $|x| < 1$, tj. v intervalu $(-1, 1)$. Konvergenci v krajních bodech posoudíme dosazením do dané řady. Pro $x = 1$ dostáváme divergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 1^{k-1}$ a pro $x = -1$ dostáváme oscilující řadu $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$. Konvergenční obor je tedy tvaru $I^\star = (-1, 1)$, přičemž konvergence je absolutní.

Všimněme si navíc, že uvedená funkční řada je řadou geometrickou (s kvocientem $q = x$). Podle vzorce pro součet geometrické řady tedy platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Následující příklad ukazuje, že konvergenční obor nemusí být nutně interval.

Příklad 2.6. Určeme konvergenční obor řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \dots\,.$$

Řešení. Analogickým postupem jako v předcházejícím příkladu lze ověřit, že daná řada konverguje, právě když $|\cos x| < 1$. Tato nerovnost je splněna pro všechna reálná x, s výjimkou celočíselných násobků π. Tedy

$$I^\star = (-\infty, \infty) - \{k\pi;\ k \text{ je celé číslo}\}.$$

Poznámka 2.7. Zkusme se zamyslet nad tím, zda může existovat funkční řada, jejíž obor konvergence $I^\star$ je prázdná množina. Necháme-li se inspirovat předcházejícími příklady, pak vidíme, že obě výše uvedené funkční řady byly geometrické s hodnotou kvocientu $q = x$, resp. $q = \cos x$. Zřejmě tedy stačí vymyslet příklad takové geometrické funkční řady, aby hodnota q (nyní závisející na x) neležela pro žádné x v otevřeném intervalu $(-1, 1)$ (připomeňme, že pouze pro tyto hodnoty kvocientu geometrická řada konverguje). Tuto vlastnost má např. funkce e^{x^2}, neboť $\mathrm{e}^{x^2} \geq 1$ pro všechna reálná x. Položíme-li tedy $q = \mathrm{e}^{x^2}$, pak odpovídající geometrická řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{kx^2} = 1 + \mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{2x^2} + \dots$$

nekonverguje pro žádné $x \in (-\infty, \infty)$, tedy její obor konvergence je prázdná množina.

Jednou ze základních otázek v teorii funkčních řad je problém, nakolik se některé základní vlastnosti konečných součtů přenášejí i na součty nekonečné. Zajímat se budeme především o zachování tří následujících vlastností, které dobře známe z diferenciálního počtu:

1) *Jsou-li funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ spojité na I, potom je na I spojitý také jejich součet.*
2) *Integrál ze součtu funkcí je roven součtu integrálů těchto funkcí:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) *Derivace součtu je rovna součtu derivací:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x).$$

Je přirozené se domnívat, že tyto vlastnosti platí i pro součty nekonečné. To však obecně není pravda.

Příklad 2.8. Uvažujme funkční řadu

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots . \tag{2.6}$$

Určeme obor konvergence a ukažme, že tato řada konverguje na tomto oboru k nespojité funkci.

Řešení. Členy této řady jsou funkce $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = x^3 - x^2, \dots$, tedy funkce spojité (dokonce libovolně mnohokrát derivovatelné) na $(-\infty, \infty)$. Nejprve určíme konvergenční obor $I^\star$ této funkční posloupnosti, tj. určíme množinu všech x, pro která daná řada konverguje. Pro její n-tý částečný součet platí

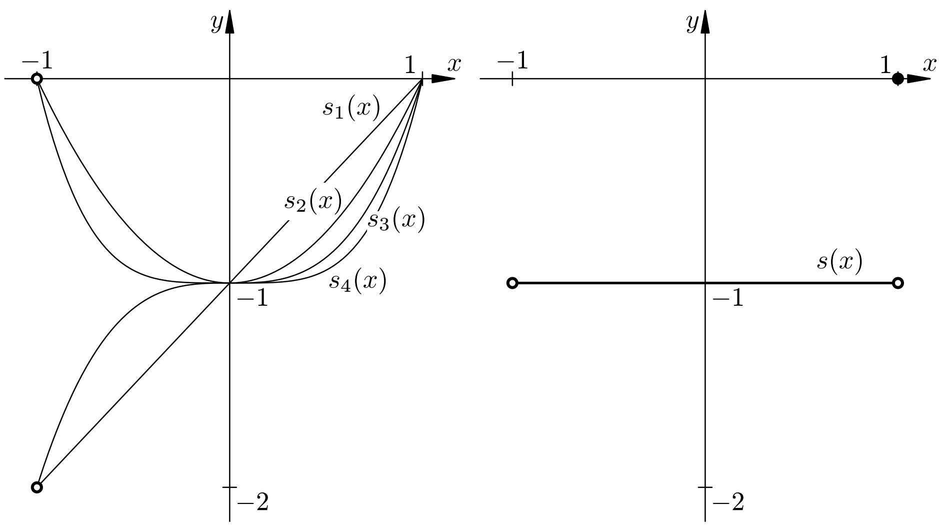
$$s_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) = x^n .$$

Pro $x > 1$ je tedy zřejmě $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = +\infty$, kdežto pro $x < -1$ tato limita neexistuje (neboť $s_{2k+1}(x) \to -\infty$, $s_{2k}(x) \to \infty$). Dále $s_n(1) = 1$ pro všechna n, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n(1) = 1$, kdežto $\lim_{n\to\infty} s_n(-1)$ neexistuje, protože $s_{2k+1}(-1) = -1$ a $s_{2k}(-1) = 1$. Je-li konečně $x \in (-1, 1)$, potom $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$.

Máme tedy tento výsledek: Konvergenční obor $I^\star$ posloupnosti funkcí $s_n(x) = x^n$ je $I^\star = (-1, 1\rangle$, přičemž limitní funkce $s(x)$ je tvaru

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} .$$

Zjistili jsme tedy, že řada spojitých funkcí $f_n(x)$ konverguje v intervalu $I^\star = (-1, 1\rangle$ k *nespojité* funkci $s(x)$, která má bod nespojitosti v $x = 1$ (viz obr. 2.1).



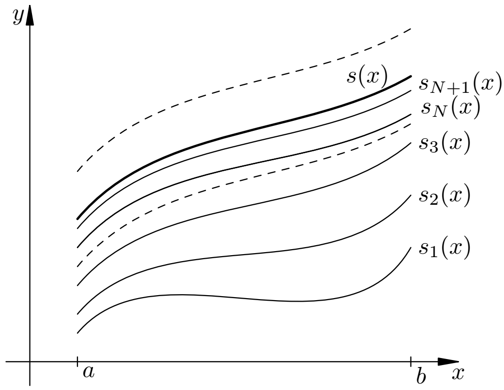
Obr. 2.1: Konvergence k nespojité funkci

Je proto třeba zavést silnější typ konvergence funkčních řad, tzv. *stejnoměrnou konvergenci*, jejíž splnění umožní přenést požadované vlastnosti i na nekonečné součty. Protože zavedení tohoto pojmu činí studentům obvykle jisté potíže, uvedeme poněkud neformální „geometrickou“ definici stejnoměrné konvergence.

Definice 2.9. (Stejnoměrná konvergence funkčních řad) Řekneme, že funkční řada (2.1) *konverguje stejnoměrně* v intervalu I k funkci $s(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ této řady splňuje tuto vlastnost: vezmeme-li libovolně úzký pás obsahující funkci $s(x)$, pak vždy existuje takový člen $s_N(x)$ dané posloupnosti částečných součtů, že tento člen a všechny následující (tj. $s_{N+1}(x)$, $s_{N+2}(x), \dots$) leží v tomto pásu pro všechna $x \in I$. Pak píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \rightrightarrows s(x), \quad x \in I .$$

Obor stejnoměrné konvergence budeme značit $I^{\star\star}$, protože může být jen částí oboru konvergence $I^\star$.



Obr. 2.2: Stejnoměrná konvergence

Tuto definici ilustruje obrázek 2.2, kde I je interval s krajními body a, b. Z tohoto obrázku rovněž vidíme, proč konvergence řady (2.6) k nespojité součtové funkci $s(x)$ nemůže být v intervalu $(-1, 1\rangle$ stejnoměrná.

Pro praktické ověření stejnoměrné konvergence není uvedená definice příliš použitelná. Protože v aplikacích často stačí pouze rozhodnout, zdali je daná funkční řada stejnoměrně konvergentní (její součet nepotřebujeme přitom znát), uvedeme následující jednoduché kritérium stejnoměrné konvergence.

Věta 2.10. (Weierstrassovo kritérium) Funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je stejnoměrně konvergentní v intervalu I, jestliže k ní existuje majorantní konvergentní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, tj. konvergentní řada, jejímiž členy jsou konstanty A_k splňující pro všechna k a všechna $x \in I$ nerovnosti

$$|f_k(x)| \le A_k, \quad x \in I, \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

V následujících třech větách uvedeme základní vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad, které nám především umožní tyto nekonečné funkční řady derivovat, resp. integrovat člen po členu.

Věta 2.11. (Spojitost funkční řady) Nechť funkce $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou spojité v intervalu I a nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v tomto intervalu. Pak funkce $s(x)$ je také spojitá v intervalu I.

Věta 2.12. (Integrace funkční řady) Nechť funkce $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak funkce $s(x)$ je také integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

tj.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(d)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \dots \ .$$

Věta 2.13. (Derivace funkční řady) Nechť funkce $f_k(x)$, $f_k'(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu I a nechť řada derivací $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje v tomto intervalu stejnoměrně. Pak má $s(x)$ v I derivaci a platí

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \quad x \in I\,,$$

tj.

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots, \quad x \in I\,.$$

Příklad 2.14. Funkce $s(x)$ je dána vztahem

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 3x}{8}+\dots\,.$$

Ukažme, že $s(x)$ je definovaná a spojitá pro všechna reálná x a vypočítejme její derivaci.

Řešení. Zřejmě platí

$$|f_k(x)|=\left|\frac{\sin kx}{2^k}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^k,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad k=1,2,\dots\,.$$

Majorantní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria daná funkční řada konverguje stejnoměrně na celé reálné ose. Odtud také plyne spojitost $s(x)$ pro všechna reálná x.

Nyní prověříme, zda na $(-\infty,\infty)$ konverguje stejnoměrně také řada prvních derivací $f_k'(x)$. Vskutku,

$$|f_k'(x)|=\left|\frac{k\cos kx}{2^k}\right|\le\frac{k}{2^k},\qquad x\in(-\infty,\infty),\quad k=1,2,\dots\,.$$

Konvergenci majorantní řady $\sum_{k=1}^{\infty}k/2^k$ ověříme snadno užitím limitního podílového kritéria. Tedy podle Weierstrassova kritéria řada prvních derivací konverguje stejnoměrně, a podle věty o derivování funkční řady existuje $s'(x)$ a platí

$$s'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos kx}{2^k}=\frac{\cos x}{2}+\frac{2\cos 2x}{4}+\frac{3\cos 3x}{8}+\dots,\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

Shrnutí poznatků o funkčních řadách

Sečtením nekonečně mnoha funkcí obdržíme opět funkci, která však nemusí být definována na definičním oboru jednotlivých sčítanců, ale obecně pouze na nějaké jeho podmnožině (ta se určí jako množina všech x, pro která daná řada konverguje; může se stát, že řada nekonverguje pro žádné x, pak součtová funkce není definována nikde). Základní věty matematické analýzy o spojitosti, derivaci a integraci součtu dvou (resp. konečně mnoha) funkcí nelze automaticky rozšířit na nekonečné součty. Ke splnění těchto vlastností je třeba vyžadovat silnější typ konvergence, tzv. stejnoměrnou konvergenci.