Přednáška 4

- parciální derivace vyšších řádů
- věta o implicitní funkci

Parciální derivace vyšších řádů (1)

Obdobně jako v případě funkce jedné reálné proměnné zavádíme také derivace vyšších řádů pro funkce více proměnných. V této části se zaměříme pouze na parciální derivace vyšších řádů (tj. na derivace vyšších řádů ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami), které tak představují speciální případ směrové derivace vyšších řádů.

Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ závisí na bodu $\mathbf{a}$, tj. je to opět funkce n proměnných, takže ji můžeme dále derivovat. Pokud existuje tato derivace, dostaneme parciální derivaci druhého řádu v bodě $\mathbf{a}$.

Definice (Parciální derivace druhého řádu):
Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ a nechť existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x}$ podle i-té proměnné. Jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ má parciální derivace v bodě $\mathbf{x}$ podle j-té proměnné, tzn. existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)}{h},$$

pak se tyto derivace nazývají parciální derivace druhého řádu a označujeme je symbolem

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{x}) \quad \textit{nebo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(\mathbf{x}).$$

Pořadí derivování určuje zápis derivace vyššího řádu následně

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \equiv \quad \text{nejprve derivujeme podle } x_i \text{ a potom podle } x_j.$$

Parciální derivace vyšších řádů (2)

Z definice je patrné, že parciální derivace druhého řádu se hledá stejně jako parciální derivace prvního řádu pro funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, tj. analogicky jako derivace funkcí jedné proměnné, přičemž ostatní proměnné jsou brány jako konstanty.

Pokud budeme derivovat podle různých proměnných ($i \neq j$) získáme tzv. smíšené derivace, tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

které se liší pořadím derivování a obecně se nerovnají.

V tomto okamžiku je na místě jedno varování - nelze zaměňovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2.$$

Věta (O záměnnosti parciálních derivací):
Necht funkce $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ má v bodě $\mathbf{a} = [a_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a})$. Potom platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(\mathbf{a}).$$

Parciální derivace vyšších řádů (3)

Parciální derivaci r-tého řádu funkce f zavadíme jako parciální derivaci parciální derivace řádu $(r-1)$ funkce f.

Následující věta nám při počítání parciálních derivací vyšších řádů výrazně usnadní práci.

Věta (O záměnnosti parciálních derivací r-tého řádu):
Necht funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ má v bodě $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ spojité parciální derivace r-tého řádu. Potom jsou parciální derivace funkce f až do r-tého řádu v bodě $\mathbf{a}$ záměnné.

Pokud jsou parciální derivace řádu k spojité, pak hodnota derivace závisí pouze na tom, kolikrát se derivuje podle jednotlivých proměnných a nezávisí na tom, v jakém pořadí se toto derivování provádí.

Definice (Funkce třídy C^k):
Nechť $G \subseteq \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbf{N}$. Funkce $f : G \to \mathbf{R}$ se nazve třídy C^k na množině G (nebo krátce C^k-funkce), jestliže všechny parciální derivace řádu k jsou spojité na G.

Obecně platí, že funkce třídy C^k je funkcí třídy C^l pro každé $l \leq k$.

Definice (Hladká funkce):
Nechť $G \subseteq \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $f : G \to \mathbf{R}$ je hladká na množině G, jestliže má na množině G spojité všechny parciální derivace libovolného řádu (neboli funkce f je třídy C^∞ na množině G).

Parciální derivace vyšších řádů (4)

Příklad: *Vypočtěte všechny parciální derivace třetího řádu funkce definované předpisem*

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2}.$$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina $D_f = \{[x;y] \in \boldsymbol{R}^2 : y \neq 0\}$. Parciální derivace jsou spojité na celém definičním oboru funkce, a tak využijeme větu o záměnnosti parciálních derivací, tj. $\forall [x;y] \in D_f$ jsou parciální derivace prvního řádu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{y^3},$$

parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2}{y^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$$

a parciální derivace třetího řádu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{-24x}{y^5}, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{6}{y^2}.
\end{aligned}$$

Implicitní funkce (1)

V této části se budeme věnovat dalšímu způsobu zadání funkce jedné nebo více proměnných pomocí rovnice (s nulovou pravou stranou), tzv. implcitnímu zadání funkce (zkráceně implcitní funkci).

Nechť $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je funkce zadaná ve tvaru

$$y = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n.$$

Toto zadání (kdy je dán vzorec vyjadřující hodnotu závisle proměnné y na hodnotě nezávisle proměnné $\mathbf{x}$, nazýváme explicitním zadáním funkce.

Někdy však může být závislost y na $\mathbf{x}$ (tj. funkce y proměnné $\mathbf{x}$) vyjádřena pouze rovnicí s nulovou pravou stranou, ve které na levé straně vystupují jak $\mathbf{x}$ (nezávisle proměnné) tak y (závisle proměnné)

$$F(\mathbf{x}, y) = 0, \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \ \text{ a } \ y \in \boldsymbol{R}.$$

Toto zadání nazýváme implicitním zadáním funkce.

Naším cílem bude tedy nalézt a popsat množinu

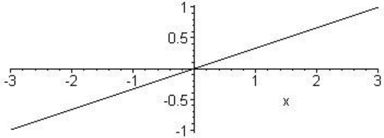
$$M_I = \{[\mathbf{x}; y] \in \boldsymbol{R}^{n+1} : F(\mathbf{x}, y) = 0\}$$

a určit, kdy tato množina M_I popisuje nějakou implicitní funkci a za jakých předpokladů lze přejít od implicitně zadané funkce k explicitními popisu (tj. kdy lze jednu proměnnou vyjádřit jako funkci ostatních proměnných).

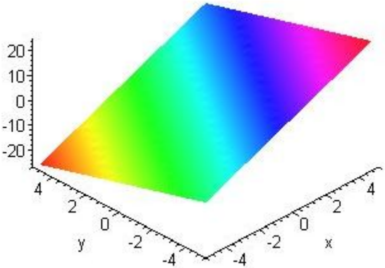
Implicitní funkce (2)

Začněme nejprve několika příklady.

Příklad 1: Je-li $F(x, y) = 3y - x$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, je právě množina všech bodů ležících na přímce $y = \frac{x}{3}$.



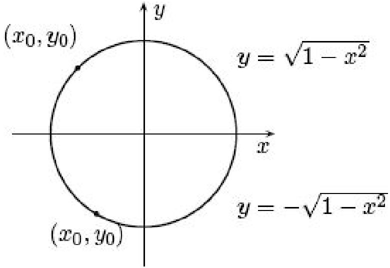
Příklad 2: Je-li $F(x, y, z) = z + 2y - 3x + 1$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x, y, z) = 0$, je právě množina všech bodů ležících v rovině $z = 3x - 2y - 1$.

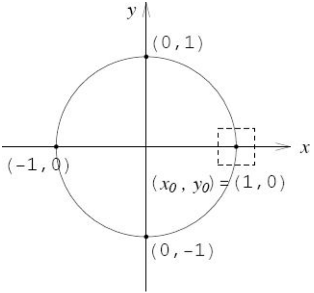


V předchozích dvou příkladech se nám podařilo vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních.

Implicitní funkce (3)

Příklad 3: Je-li $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x,y) = 0$, je právě množina všech bodů tvořících kružnici $x^2 + y^2 = 1$.





Tato rovnice popisuje křivku, kterou si však nelze představit jako graf funkce $y = f(x)$ (tj. nelze vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních). Nicméně kolem každého bodu $[x_0, y_0]$, $y_0 > 0$, resp. $[x_0, y_0]$, $y_0 < 0$ na této kružnici lze najít alespoň jistý úsek, který už je grafem funkce.

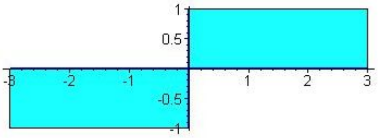
Implicitní funkce (4)

Obecně vyšetřujeme-li rovnice typu $F(x,y)=0$, resp. $F(x,y,z)=0$, intuitivně předpokládáme, že tato rovnice zadává křivku, resp. plochu. Následujících několik příkladů ukazuje, že tato představa může být někdy chybná.

Příklad 4: Je-li $F(x,y)=(x+1)^2+(y-2)^2$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x,y)=0$, představuje pouze jeden bod $[-1,2]$.

Příklad 5: Je-li $F(x,y)=x^2+y^2+1$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x,y)=0$, je prázná, neboť žádný bod v $\boldsymbol{R}^2$ tuto rovnici nesplňuje.

Příklad 6: Je-li $F(x,y)=|xy|-xy$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x,y)=0$, je právě množina všech bodů vyhovujících nerovnosti $xy\geq 0$ (všechny body z 1. a 3. kvadrantu).



Definice (Implicitně zadaná funkce):
Řekneme, že rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$, $\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $y\in\boldsymbol{R}$ definuje na okolí bodu $[\mathbf{x}_0,y_0]\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ implicitně funkci $y=f(\mathbf{x})$ nebo, že funkce $y=f(\mathbf{x})$ je na okolí bodu $[\mathbf{x}_0,y_0]$ implicitně zadaná rovnicí $F(\mathbf{x},y)=0$, jestliže

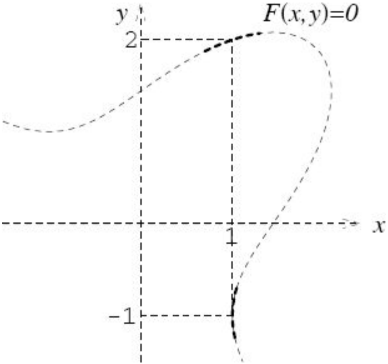
1) $F(\mathbf{x}_0,y_0)=0$,
2) *existují čísla $\delta>0,\varepsilon>0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}\in U_\delta(\mathbf{x}_0)$ je $y=f(\mathbf{x})\in U_\varepsilon(y)$ a rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$ je splněna.*

Implicitní funkce (5)

Věta (O existenci implicitní funkce):
Nechť $F : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}$ je spojitá v okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$, kde $\mathbf{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ a $y_0 \in \boldsymbol{R}$. Dále předpokládejme, že funkce F má v okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$ spojitou parciální derivaci podle proměnné y a platí

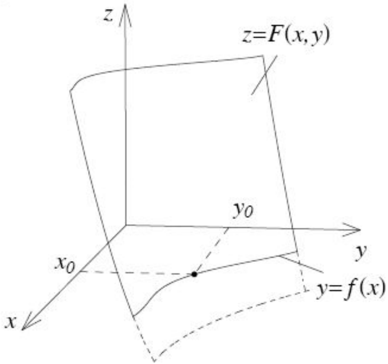
1) $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$,
2) $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$.

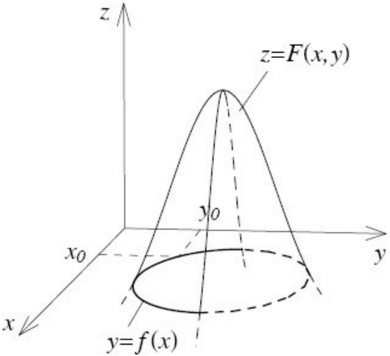
Potom rovnice $F(\mathbf{x}, y) = 0$ definuje na okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$ implicitně nějakou funkci $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Implicitní funkce (6)

V případě implicitně zadané funkce jedné proměnné, tj. $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ si graf této funkce můžeme geometricky představit jako část průniku grafu funkce $z = F(x, y)$ (jisté plochy) s rovinou $z = 0$, tj. jako vrstevnici funkce F na úrovni 0.



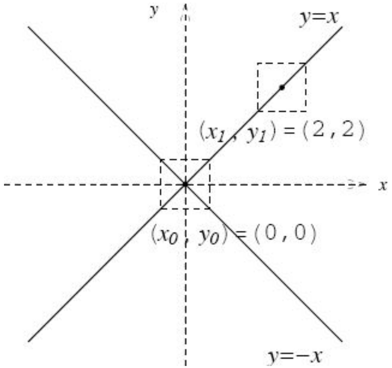


Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ zaručuje, že tento průnik je grafem funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Implicitní funkce (7)

Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ je pouze postačující podmínkou, nikoliv nutnou podmínkou pro existenci implicitně zadané funkce, viz. porovnání následujících Příkladů 7 a 8.

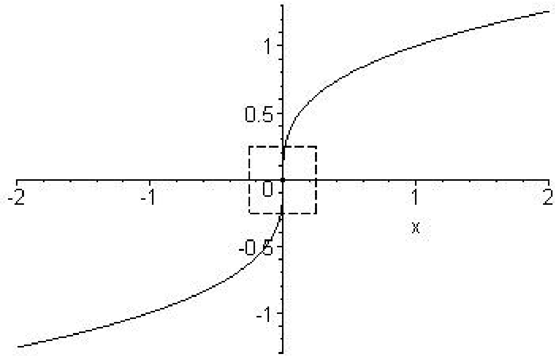
Příklad 7: Je-li $F(x, y) = y^2 - x^2$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x, y) = 0 = (y - x)(y + x)$, je právě množina všech bodů ležících buď na přímce $y = x$ a nebo na přímce $y = -x$.



Na okolí bodu $[0, 0]$ nedefinuje rovnice $y^2 - x^2 = 0$ implicitně žádnou funkci, neboť $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$ a pro každé x z okolí bodu 0 existují dva body $[x, -x]$ a $[x, x]$ splňující danou rovnici.

Implicitní funkce (8)

Příklad 8: V případě funkce $F(x,y) = y^3 - x$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, ale přesto je rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí počátku implicitně určena funkce $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$.



Na okolí bodu $[0,0]$ definuje rovnice $y^3 - x = 0$ implicitně funkci, neboť pro každé x z okolí bodu 0 existuje právě jeden bod $[x, \sqrt[3]{x}]$ splňující danou rovnici.

Implicitní funkce (9)

Věta (O derivaci implicitní funkce):
Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace až do řádu m v okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$, kde $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že funkce F má v okolí bodu $[\mathbf{x}_0, y_0]$ spojitou parciální derivaci podle proměnné y a platí

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0 \text{ a } \quad 2)\ F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0.$$

Potom funkce $y = f(\mathbf{x})$ (jednoznačně určená rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = 0$) má spojité parciální derivace až do řádu m. Speciálně pro $m = 1$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)} \quad \text{pro } 1 \leq i \leq n,\ \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0).$$

V případě implicitně zadané funkce jedné reálné proměnné se používá notace

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \quad \text{pro } x \in U(x_0).$$

K výpočtu (parciálních) derivací vyšších řádů implicitně zadané funkce $y = f(\mathbf{x})$ se obvykle používá postupu, kdy postupně derivujeme rovnici $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0$$

a následně

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}, y) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i}(\mathbf{x}, y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{x}, y)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = 0.$$

Z první rovnice získáme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme z ní $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$.

Implicitní funkce (10)

Příklad: *Určete rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *ke křivce určené implicitně rovnicí*

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

a rozhodněte, zda tato křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Řešení:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1.$$

Funkce F má spojité derivace všech řádů podle obou proměnných v okolí bodu $[1,1]$ a navíc je $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) \neq 0$, jsou tedy splněny předpoklady věty o derivaci implicitní funkce, takže v jistém okolí bodu $[1,1]$ existuje implicitně určená funkce $y = f(x)$, jež má derivace všech řádů v bodě 1. Speciálně pro první derivaci platí

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

Hledaná rovnice tečny je

$$y - 1 = -(x-1).$$

K výpočtu druhé derivace funkce f použijeme následující postup

$$F'(x,f(x)) = 3x^2 + 3f^2(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0,$$
$$F''(x,f(x)) = 6x + 6f(x)(f'(x))2 + 3f^2(x)f''(x) - 4f'(x) - 2xf''(x) = 0.$$

Po dosazení $f'(1) = -1$ do poslední rovnice dostaneme

$$6 + 6 + 3f''(1) + 4 - 2f''(1) = 0 \iff f''(1) = -16.$$

Tedy implicitně zadaná funkce f je v bodě 1 konkávní a tedy studovaná křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ pod tečnou.

Implicitní funkce (11)

Příklad: *Určeme rovnici tečné roviny v bodě* $[1, 0, 1]$ *k ploše určené rovnicí*

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0.$$

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 3yz - 1, \ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 - 3xz - 1, \ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 3xy - 1.$$

Funkce F má spojité derivace všech řádů podle všech proměnných v okolí bodu $[1, 0, 1]$ a navíc je $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) \neq 0$. Jsou tedy splněny předpoklady věty o derivaci implicitní funkce, takže v jistém okolí bodu $[1, 0, 1]$ existuje implicitně určená funkce $z = f(x, y)$, jež má derivace všech řádů v bodě $[1, 0]$. Derivováním zadané funkce podle x a podle y dostaneme

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} - 1 - \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy \frac{\partial z}{\partial y} - 1 - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3yz - 1}{-3z^2 + 3xy + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3xz - 1}{-3z^2 + 3xy + 1}.$$

Po dosazení $[x, y, z] = [1, 0, 1]$ dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 2$$

a tedy tečná rovina v bodě $[1, 0, 1]$ k zadané ploše má rovnici

$$z = 1 - (x - 1) + 2(y - 0).$$

Implicitní funkce (12)

V této části se budeme věnovat normálovému vektoru ke křivce zadané rovnicí $F(x, y) = 0$, resp. k ploše zadané rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

Věta (Normálový vektor ke křivce):

Nechť $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Dále předpokládejme, že

1) $F(x_0, y_0) = 0$,
2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ *nebo* $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, *tj.* $\operatorname{grad} F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Potom funkce $y = f(x)$ ($x = f(y)$) jednoznačně určená rovnicí $F(x, y) = 0$ představuje jistou křivku procházející bodem $[x_0, y_0]$, jejíž normálový vektor v tomto bodě je právě vektor

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Věta (Normálový vektor k ploše):

Nechť $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$. Dále předpokládejme, že

1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
2) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *nebo* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *nebo* $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
   tj. $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.

Potom funkce $z = f(x, y)$ ($x = f(y, z)$ nebo $y = f(x, z)$) jednoznačně určená rovnicí $F(x, y, z) = 0$ představuje jistou plochu procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$, jejíž normálový vektor v tomto bodě je právě vektor

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$