2. Funkční řady

A. Obor konvergence

Příklad 2.1. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k} = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^3 x}{3} + \dots .$$

Řešení. Všechny funkce

$$f_k(x) = \frac{\ln^k x}{k}$$

jsou definovány v intervalu $I = (0, \infty)$. Platí

$$\sqrt[k]{|f_k(x)|} = \sqrt[k]{\frac{|\ln^k x|}{k}} = |\ln x| \frac{1}{\sqrt[k]{k}} .$$

Protože $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, podle limitního odmocninového kritéria řada konverguje pro $|\ln x| < 1$ a nekonverguje pro $|\ln x| > 1$. Dosazením hodnoty $\ln x = 1$ dostáváme divergentní harmonickou řadu, a dosazením hodnoty $\ln x = -1$ pak konvergentní Leibnizovu řadu. Vyšetřovaná řada tedy konverguje, právě když $\ln x \in \big\langle -1, 1\big)$. Protože $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} = -1$, $\ln \mathrm{e} = 1$, je obor konvergence tvaru $I^* = \big\langle \mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}\big)$.

Příklad 2.2. Určete obor konvergence a součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k x = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots .$$

Řešení. Daná řada je geometrická s hodnotou kvocientu $q = \sin x$. Řada tedy konverguje, právě když $|\sin x| < 1$. Tato nerovnost je splněna pro všechna reálná x, s výjimkou celočíselných lichých násobků $\pi/2$. Tedy

$$I^* = (-\infty, \infty) - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \ \text{ je celé číslo} \right\} .$$

Součet řady je podle vzorce o součtu geometrické řady roven $\sin x \big/ (1 - \sin x)$.

Příklad 2.3. Určete obor konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$.

Řešení. Podle příkladu 1.10 řada konverguje, právě když $x > 1$, tj. $I^* = (1, \infty)$.

Příklad 2.4. Určete obor konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$.

Řešení. Protože $\frac{1}{x^k} = \left(\frac{1}{x}\right)^k$, jde o geometrickou řadu s hodnotou kvocientu $q = \frac{1}{x}$, tedy $I^* = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 2.5. Určete obor konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^k}$.

Řešení. Podle limitního podílového kritéria a užitím vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\sin \frac{x}{2^{k+1}}|}{|\sin \frac{x}{2^k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin \frac{|x|}{2^{k+1}}}{\sin 2\frac{|x|}{2^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\cos \frac{|x|}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2\cos 0} = \frac{1}{2} < 1$$

pro všechna reálná x, tedy $I^* = (-\infty, \infty)$.

B. Vlastnosti funkčních řad

Příklad 2.6. Ukažte, že funkční řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{8} + \dots$$

konverguje stejnoměrně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě platí

$$|f_k(x)| = \left|\frac{\cos kx}{2^k}\right| \le \frac{1}{2^k} =: a_k \qquad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots \text{ a } x \in \mathbb{R}.$$

Majorantní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ je konvergentní geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, tedy podle Weierstrassova kritéria konverguje funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}$ stejnoměrně (a také absolutně) na celé reálné ose.

Příklad 2.7. Funkce $s(x)$ je definována vztahem

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{e}^{kx}} = \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x} + 3\mathrm{e}^{-3x} + \dots, \qquad x > 0.$$

Ukažte, že $s(x)$ je definovaná a spojitá pro všechna $x > 0$, a vypočtěte $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} s(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že daná funkční řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle \omega, \infty)$, kde $\omega > 0$ je libovolné reálné číslo. Zřejmě

$$|f_k(x)| = \left|\frac{k}{\mathrm{e}^{kx}}\right| \le \frac{k}{\mathrm{e}^{k\omega}}, \qquad x \in \langle \omega, \infty), \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Majorantní číselná řada konverguje např. podle limitního odmocninového kritéria, neboť $\mathrm{e}^{\omega} > 1$. Podle Weierstrassova kritéria proto daná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle \omega, \infty)$, a součtová funkce $s(x)$ je spojitá pro všechna $x > 0$. Stejnoměrná konvergence řady umožňuje navíc záměnu sumace a integrace, a platí tedy

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} s(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-kx}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} k\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-kx}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} (3^{-k} - 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 2.8. Rozhodněte o spojitosti funkce $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k}$.

Řešení. Nejprve posoudíme, zda a kde řada konverguje stejnoměrně. Protože definiční obor k-tého členu řady je $(-\frac{1}{k}, \infty) - \{0\}$, řadu uvažujeme pouze pro $x > 0$. Pro tato x platí $\ln(1+kx) \leq kx$ (nakreslete si obrázek), tedy

$$\left|\frac{\ln(1+kx)}{kx^k}\right| \leq \frac{1}{x^{k-1}}\,.$$

Uvažujeme-li pouze $x \geq \omega > 1$, pak $\left|\frac{\ln(1+kx)}{kx^k}\right| \leq \frac{1}{\omega^{k-1}}$ a pro tato x řada konverguje stejnoměrně podle Weierstrassova kritéria (ověřte předpoklady). Pro zbývající x, (tj. pro $x \in (0,1\rangle$) řada nekonverguje. Řada tedy konverguje stejnoměrně (a její součet je proto spojitou funkcí) na každém intervalu $\langle\omega, \infty)$, kde $\omega > 1$.

Příklad 2.9. Pomocí derivace řady člen po členu určete součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$ včetně určení oboru konvergence.

Řešení. Platí $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{e^{kx}}{k}\right|} = e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Protože pro $x = 0$ je daná řada harmonická (tedy divergentní), platí $I^* = (-\infty, 0)$. Abychom mohli řadu derivovat člen po členu, vyšetřeme stejnoměrnou konvergenci řad $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

Pro nederivovanou řadu platí

$$\left|\frac{e^{kx}}{k}\right| \leq \frac{e^{k\omega}}{k}\,, \quad \omega < 0 \text{ (libovolné číslo menší jak 0)}\,.$$

Číselná řada na pravé straně nerovnosti konverguje (lze snadno ověřit limitním odmocninovým nebo podílovým kritériem – limita vyjde e^{ω}, což je číslo menší jak jedna). Podle Weierstrassova kritéria tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$ konverguje stejnoměrně na každém zprava uzavřeném intervalu $(-\infty, \omega\rangle$, kde $\omega < 0$.

Pro řadu derivací máme $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx} = \sum_{k=1}^{\infty} (e^x)^k$, což je geometrická řada s kvocientem e^x. Pro její členy platí

$$|e^{kx}| \leq e^{k\omega}\,, \quad \text{kde } |x| \leq \omega \quad (\omega > 0)\,.$$

Majorantní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{k\omega}$ je geometrická řada s kvocientem e^{ω}, která konverguje, je-li $e^{\omega} < 1$, tedy $\omega < 0$. Oborem stejnoměrné konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$ je tedy opět každý interval $(-\infty, \omega\rangle$, kde $\omega < 0$.

Označíme-li součet dané řady $s(x)$, pak derivací člen po členu máme

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{kx}}{k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx} = \sum_{k=1}^{\infty} (e^x)^k = \frac{e^x}{1-e^x}.$$

Odtud pak integrací

$$s(x) = \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = -\ln(1-e^x) + C\,,$$

kde integrační konstantu určíme dosazením vhodného bodu do řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$ a do funkce $s(x)$ a porovnáme levou stranu s pravou. Tento bod je volen s ohledem na to, abychom uměli vzniklou číselnou řadu sečíst. V našem případě je to zřejmě jedině bod $-\infty$. Odtud

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{kx}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$
$$P = \lim_{x\to-\infty} s(x) = -\lim_{x\to-\infty} \ln(1-e^x) + C = 0 + C\,.$$

Z rovnosti $0 = 0 + C$ plyne $C = 0$. Celkově tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k} = -\ln(1-e^x) \text{ na intervalu } (-\infty, 0)\,.$$

Poznámka. Všimněme si, že zatímco oborem konvergence byl interval $I^\star = (-\infty, 0)$, oborem stejnoměrné konvergence je pouze každý zprava uzavřený podinterval $I^{\star\star} = (-\infty, \omega\rangle$, kde $\omega < 0$. Tvrzení o vlastnostech stejnoměrně konvergentních řad by mohla svádět k tomu, že například součtová funkce bude spojitá pouze na intervalu $I^{\star\star}$. Vidíme ovšem, že tato funkce je spojitá na celém intervalu $I^\star$. Intuitivně, číslo ω může být libovolně blízko nalevo od nuly, a tedy funkční hodnota nemůže nikam „uskočit“.