Kapitola 2. Diferenciální počet funkcí více proměnných.

Jak víme z MAI, za určitých předpokladů se funkce jedné proměnné dají lokálně aproximovat pomocí lineárních funkcí, s nimiž se lépe počítá. Konkrétně, má-li funkce $f:\ (a-\delta, a+\delta) \to \mathbf{R}$ v bodu a vlastní derivaci, máme v okolí a lineární aproximaci

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + o(h),\ \ h \to 0.$$

Ve druhé kapitole ji zobecníme pro funkce s více proměnnými, a pak i pro zobrazení složená z několika takových funkcí. Budeme pracovat v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^m$ s obvyklým skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$, s odvozenou euklidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$$

a euklidovskou metrikou

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_m-y_m)^2},$$

a s funkcemi o m proměnných

$$f:\ D \to \mathbf{R}$$

definovanými na otevřených množinách D v $\mathbf{R}^m$.

Směrová derivace, parciální derivace, diferenciál. *Směrovou derivací* funkce $f:\ D \to \mathbf{R}$ v bodu a ve směru v, kde $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, bod a leží v D a v z $\mathbf{R}^m$ je nenulový vektor, rozumíme limitu

$$\mathrm{D}_v f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

pokud existuje. Představte si D jako oblast v třírozměrném euklidovském prostoru, kde funkce f měří teplotu a kterou prolétá po přímočaré dráze částice. Směrová derivace $\mathrm{D}_v f(a)$ pak udává okamžitou změnu teploty částice ve chvíli, kdy se nachází v bodu a a má vektor rychlosti v.

Parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i je směrová derivace $\mathrm{D}_{e_i} f(a)$, kde e_i je i-tý vektor kanonické báze, tj. $e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots,0)$ má na i-tém místě 1 a jinde nuly. Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Explicitně,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_m) - f(a_1,a_2,\ldots,a_m)}{h}.$$

Má-li f parciální derivaci podle x_i v každém bodě D, dostáváme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:\ D \to \mathbf{R},$$

která každému bodu a z D přiřazuje hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Vektor hodnot všech parciálních derivací funkce f v bodě a je *gradient* funkce f v a,

$$\nabla f(a) := (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)).$$

Počítat parciální derivace už umíme, při výpočtu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se proměnné různé od x_i berou jako konstanty a f tak derivujeme jako funkci jediné proměnné x_i. Například

$$\frac{\partial(x^3 y \sin(yz) + x \log z)}{\partial y} = x^3(\sin(yz) + zy\cos(yz)).$$

Funkce f má v bodě a *(totální) diferenciál*, jinými slovy f je v a *diferencovatelná*, když existuje takové lineární zobrazení $L:\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, že

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Toto lineární zobrazení L nazýváme *diferenciálem* a značíme $\mathrm{D}f(a)$, jeho hodnota $L(h)$ na vektoru h pak je $\mathrm{D}f(a)(h)$. Podstatný rozdíl ve srovnání se směrovou a parciální derivací je ten, že ty jsou pouhá čísla, kdežto diferenciál je složitější věc, lineární zobrazení.

Směrová derivace, parciální derivace a diferenciál funkce f v bodu a dávají lokální aproximace f poblíž a lineární funkcí:

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + \mathrm{D}_v f(a)\cdot t + o(t),\ t \to 0,\\ f(a+te_i) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot t + o(t),\ t \to 0,\\ f(a+h) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + o(\|h\|),\ \|h\| \to 0. \end{aligned}$$

V prvních dvou vztazích je t reálné číslo jdoucí k nule a aproximace platí pouze pro argumenty funkce na přímce jdoucí bodem a ve směru v, resp. ve směru i-té souřadnicové osy. Ve třetím vztahu h probíhá body $\mathbf{R}^m$ a aproximace platí pro všechny argumenty funkce v okolí bodu a. Diferencovatelnost je silnější vlastnost f než existence směrových nebo parciálních derivací, z nichž neplyne ani spojitost funkce v daném bodě.

Příklady. 1. Funkce $f = f(x,y):\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definovaná jako 1 na množině $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2:\ y = x^2, x \neq 0\}$ a jako 0 pro všechny zbylé body roviny má v počátku všechny směrové derivace (jsou rovné nule), ale není tam spojitá.

2. Podobně, definujeme-li f jako 1 na souřadnicových osách, tj. na množině $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2:\ xy = 0\}$, a jako 0 pro všechny zbylé body roviny, má f v počátku obě parciální derivace (jsou rovné nule), ale kromě nich už žádnou další směrovou derivaci. Funkce f opět není v počátku spojitá.

Pojem diferenciálu rozšíříme na obecnější situaci, kdy $f:\ D \to \mathbf{R}^n$ ($D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina) je zobrazení dané n-ticí souřadnicových funkcí: $f =$

$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $f_i : D \to \mathbf{R}$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě a z D *diferenciál* nebo že tam je *diferencovatelné*, existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

(Norma v čitateli je v $\mathbf{R}^n$, norma ve jmenovateli je v $\mathbf{R}^m$.) Lineární zobrazení L značíme $\mathrm{D}f(a)$. Z aproximačního pohledu to opět znamená, že

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \alpha(h), \quad \text{kde } \|h\| \to 0 \Rightarrow \|\alpha(h)\|/\|h\| \to 0.$$

Tvrzení 2.1. *Buď dáno zobrazení $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : D \to \mathbf{R}^n$, kde $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, a bod a v D.*

1. *Diferenciál f v a je určený jednoznačně.*
2. *Zobrazení f je diferencovatelné v a, právě když je každá souřadnicová funkce f_i diferencovatelná v a.*
3. *Když je f diferencovatelné v bodu a, potom je v a spojité.*

Důkaz. 1. Úloha 6. 2. Úloha 7. 3. Zřejmé. □

Úlohy

1. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor vzniklý z metriky, tj. tvořený otevřenými množinami nějakého metrického prostoru (X, d). Dokažte, že pro každé dva různé body a, b z X existují takové dvě otevřené množiny U, V z $\mathcal{T}$, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Topologiím s touto vlastností se říká *Hausdorffovy*.
2. Uveďte příklad topologie, která není Hausdorffova, takže nevznikla z metriky.
3. Dokažte, že funkce $d(x, y) := \|x - y\|$ definovaná na normovaném prostoru je metrika.
4. Ověřte, že funkce $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ na prostoru se skalárním součinem je norma.
5. Ukažte, že metrický prostor spojitých funkcí $\mathcal{C}[a, b]$ s metrikou danou skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ není úplný.
6. Dokažte část 1 Tvrzení 2.1.
7. Dokažte část 2 Tvrzení 2.1.

6. přednáška 5. listopadu 2007

Souvislost diferenciálu a parciálních derivací. Diferenciál implikuje parciální derivace a spojité parciální derivace implikují diferenciál.

Tvrzení 2.3. *Když je funkce*

$$f: U \to \mathbf{R}, \quad U \subset \mathbf{R}^m \text{ je okolí bodu } a,$$

diferencovatelná v a, pak má v a všechny parciální derivace a jejich hodnoty určují diferenciál:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(a)(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot h_m \\ &= \langle \nabla f(a), h \rangle. \end{aligned}$$

Také má v a všechny směrové derivace a platí $\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{D}f(a)(v)$.

Důkaz. Z linearity diferenciálu $L = \mathrm{D}f(a)$ máme

$$L(h) = L(h_1 e_1 + h_2 e_2 + \cdots + h_m e_m) = L(e_1)h_1 + \cdots + L(e_m)h_m,$$

kde e_i je i-tý vektor kanonické báze. Ovšem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{L(te_i) + o(\|te_i\|)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{tL(e_i) + o(t)}{t} \\ &= L(e_i), \end{aligned}$$

a tak $L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Tvrzení o směrové derivaci plyne z definice a z právě dokázané formule pro diferenciál. □

Obecně je pro zobrazení $f: D \to \mathbf{R}^n$ diferenciál $L = \mathrm{D}f(a): \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ reprezentován maticí tvaru $n \times m$ a L se na vektor h aplikuje maticovým násobením:

$$L(h) = \begin{pmatrix} L(h)_1 \\ L(h)_2 \\ \vdots \\ L(h)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,m} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Podle předešlého tvrzení a bodu 2 Tvrzení 2.1 má tato matice v i-tém řádku gradient souřadnicové funkce f_i v bodě a, takže

$$l_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

Důsledek. *Diferenciál zobrazení $f: D \to \mathbf{R}^n$ v bodě a, kde $D \subset \mathbf{R}^m$ je okolí a a f má souřadnicové funkce $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, je dán tzv.* Jacobiho maticí *zobrazení f v bodě a,*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Je-li tato matice čtvercová, nazývá se její determinant jacobiánem.

Věta 2.4. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je okolí bodu $a \in \mathbf{R}^m$. Pokud má funkce $f: U \to \mathbf{R}$ na U všechny parciální derivace a ty jsou v bodě a spojité, pak je f v bodě a diferencovatelná.*

Důkaz. Pro jednoduchost nechť $m = 2$ a $a = \overline{0} = (0, 0)$. (Viz úlohu 1.) Označíme $h = (h_1, h_2)$ a $h' = (h_1, 0)$. Přírůstek $f(h) - f(\overline{0})$ napíšeme pomocí přírůstků ve směrech souřadnicových os:

$$f(h) - f(\overline{0}) = (f(h) - f(h')) + (f(h') - f(\overline{0})).$$

Na úsečkách $h'h$ a $\overline{0}h'$ funkce f závisí pouze na proměnné x_2, resp. na x_1. Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě:

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1) \cdot h_1,$$

kde ζ_2 (resp. ζ_1) je jistý vnitřní bod úsečky $h'h$ (resp. $\overline{0}h'$). Oba body leží v otevřené kouli $B(\overline{0}, \|h\|)$. Díky spojitosti v počátku máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{0}) + \alpha(\zeta_2) \;\text{ a }\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{0}) + \beta(\zeta_1),$$

kde $\alpha(h), \beta(h) = o(1)$ pro $h \to \overline{0}$ (tj. pro každé $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $\|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \varepsilon$ a podobně pro $\beta(h)$). Tedy

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{0}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{0}) \cdot h_1 + \alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(h_1)h_1.$$

Díky nerovnostem $0 < \|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \|h\|$ a $|h_1|, |h_2| \leq \|h\|$ je jasné, že $\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1 = o(h)$ pro $h \to \overline{0}$. Funkce f je diferencovatelná v počátku. □

Lagrangeova věta o střední hodnotě pro funkce více proměnných. Následující dvě tvrzení zobecňují Lagrangeovu větu o střední hodnotě a fakt, že nulovost derivace implikuje konstantnost funkce.

Tvrzení 2.5. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a $u = ab$ je úsečka s koncovými body a a b ležící v U. Nechť je funkce $f: U \to \mathbf{R}$ na u spojitá a má* *v každém vnitřním bodě u diferenciál. Pak existuje vnitřní bod ζ úsečky u s vlastností, že*

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(\zeta)(b-a).$$

Důkaz. Položíme $F(t) = f(a+th)$, kde $h = b-a$ a reálné číslo t probíhá interval $[0,1]$. Funkce F je patrně spojitá na $[0,1]$ a v $t \in (0,1)$ má derivaci

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(a+th+\Delta h) - f(a+th)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\mathrm{D}f(a+th)(\Delta h) + o(\|\Delta h\|)}{\Delta} \\ &= \mathrm{D}f(a+th)(h). \end{aligned}$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje takové $t_0 \in (0,1)$, že $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. Odtud

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = \mathrm{D}f(a+t_0h)(h) = \mathrm{D}f(\zeta)(h),$$

kde $\zeta = a + t_0h$. $\square$

Řekneme, že otevřená množina D v $\mathbf{R}^m$ je *souvislá*, když lze každé její dva body spojit lomenou čarou, která celá leží v D. Například koule s jednotkovým poloměrem v $\mathbf{R}^m$, celé $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^3\backslash L$, kde L je sjednocení konečně mnoha přímek, jsou souvislé otevřené množiny. Na druhou stranu množina $B\backslash R$, kde B je otevřená koule v $\mathbf{R}^3$ a R rovina protínající B, není souvislá.

Tvrzení 2.6. *Má-li reálná funkce m proměnných v každém bodě otevřené a souvislé množiny nulový diferenciál, je na této množině konstantní.*

Důkaz. Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená a souvislá množina a funkce $f : U \to \mathbf{R}$ má na U nulový diferenciál. Vezmeme dva libovolné body $a, b \in U$ a spojíme je lomenou čarou $s = s_1s_2\ldots s_r$ ležící v U. Pro libovolnou úsečku $s_i = a_ib_i$ z s máme podle předchozího tvrzení a předpokladu o f, že

$$f(a_i) - f(b_i) = \mathrm{D}f(\zeta)(a_i - b_i) = 0$$

(ζ je nějaký vnitřní bod s_i), tedy $f(a_i) = f(b_i)$. Hodnoty funkce f na koncích všech úseček s_i se rovnají a tedy $f(a) = f(b)$. $\square$

Tvrzení 2.3, 2.4 a 2.6 dávají následující důsledek.

Důsledek. *Má-li reálná funkce m proměnných v každém bodě otevřené a souvislé množiny každou parciální derivaci nulovou, je na této množině konstantní.*

Počítání s parciálními derivacemi a diferenciály. Pro dvě funkce $f, g : U \to \mathbf{R}$, které jsou definované na okolí $U \subset \mathbf{R}^m$ bodu $a \in U$ a mají v bodě a

i-tou parciální derivaci, máme pro i-tou parciální derivaci jejich lineární kombinace, součinu a podílu stejné vzorce jako v případě funkcí jedné proměnné (místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ píšeme $\partial_i f$):

$$\begin{aligned} \partial_i(\kappa f + \lambda g)(a) &= \kappa \partial_i f(a) + \lambda \partial_i g(a) \\ \partial_i(fg)(a) &= g(a)\partial_i f(a) + f(a)\partial_i g(a) \\ \partial_i(f/g)(a) &= \frac{g(a)\partial_i f(a) - f(a)\partial_i g(a)}{g(a)^2} \quad \text{(pokud } g(a) \neq 0\text{).} \end{aligned}$$

Tyto vzorce fakticky jsou vzorce pro funkce jedné proměnné, protože ∂_i se počítá z funkce závisející jen na x_i. Podobně pro diferenciály.

Tvrzení 2.7. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ a $f, g : U \to \mathbf{R}$ jsou dvě funkce, obě diferencovatelné v bodě a.*
1. *Pro všechny $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ je i funkce $\kappa f + \lambda g$ v bodu a diferencovatelná a*

$$\mathrm{D}(\kappa f + \lambda g)(a) = \kappa \mathrm{D} f(a) + \lambda \mathrm{D} g(a).$$

2. *Součinová funkce fg je diferencovatelná v a a*

$$\mathrm{D}(fg)(a) = g(a)\mathrm{D} f(a) + f(a)\mathrm{D} g(a).$$

3. *Pokud $g(a) \neq 0$, je podílová funkce f/g diferencovatelná v a a*

$$\mathrm{D}(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\mathrm{D} f(a) - f(a)\mathrm{D} g(a)\Big).$$

Důkaz. Tyto vzorce plynou z analogických vzorců pro parciální derivace a z Tvrzení 2.3. (Viz úlohu 2.) □

Vzorec pro diferenciál lineární kombinace v části 1 platí obecněji i pro zobrazení $f, g : U \to \mathbf{R}^n$.

Podíváme se na diferenciál složeného zobrazení. V následující větě budeme skládání funkcí a zobrazení zapisovat v pořadí zprava doleva podle pořadí aplikace: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Věta 2.8. *Nechť*

$$f : U \to V, \; g : V \to \mathbf{R}^k$$

jsou dvě zobrazení, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ a $V \subset \mathbf{R}^n$ jsou otevřené množiny. Je-li zobrazení f diferencovatelné v bodě a z U a g je diferencovatelné v bodě $b = f(a)$ z V, je složené zobrazení

$$g \circ f = g(f) : U \to \mathbf{R}^k$$

diferencovatelné v bodě a a jeho diferenciál se rovná složenině diferenciálů zobrazení f a g:

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D} g(b) \circ \mathrm{D} f(a).$$

Než se pustíme do důkazu věty, připomeneme význam symbolů $o(h)$ a $O(h)$ a explicitně uvedeme jejich jednoduché vlastnosti, které v důkazu využijeme.

Pro zobrazení $z : U \to \mathbf{R}^n$ definované v okolí počátku $U \subset \mathbf{R}^m$ budeme psát stručně $z(x) = o(x)$ místo $\|z(x)\| = o(\|x\|)$ a $z(x) = O(x)$ místo $\|z(x)\| = O(\|x\|)$, bereme vždy $x \to \overline{0}$. Značení $z(x) = o(x)$ je zkratka pro

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| < \varepsilon \|x\|$$

a $z(x) = O(x)$ pro

$$\exists c > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| < c\|x\|.$$

Lemma. *Nechť $z_1, z_2 : U \to \mathbf{R}^n$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je okolí počátku, jsou dvě zobrazení. Nechť $u : U \to V$ a $v : V \to \mathbf{R}^k$ jsou dvě zobrazení, přičemž $U \subset \mathbf{R}^m$ a $V \subset \mathbf{R}^n$ jsou okolí počátku. V následujících tvrzeních $x \to \overline{0}$.*

1. *Když je z_1 lineární, potom $z_1(x) = O(x)$.*
2. *Když je $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = o(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = o(x)$.*
3. *Když je $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = O(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = O(x)$.*
4. *Pokud $u(x) = o(x)$ a $v = O(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.*
5. *Pokud $u(x) = O(x)$ a $v(x) = o(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.*

Důkaz. Úlohy 3 a 4. □

Důkaz věty 2.8. V okolí počátků souřadnic máme aproximace

$$g(b+h) = g(b) + \mathrm{D}g(b)(h) + \gamma(h) \quad \text{a} \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h),$$

kde $\gamma(h)$ a $\beta(h)$ jsou $o(h)$. Rozdíl $f(a+h) - f(a)$ si označíme jako $\Delta(h)$. Pak $f(a+h) = f(a) + \Delta(h) = b + \Delta(h)$ a $\Delta(h) = \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)$. Takže

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) \\
&= g(b + \Delta(h)) - g(b) \\
&= \mathrm{D}g(b)(\Delta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
&= \mathrm{D}g(b)(\mathrm{D}f(a)(h)) + \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
&= (\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a))(h) + \alpha(h),
\end{aligned}$$

kde

$$\alpha(h) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)).$$

První sčítanec definující $\alpha(h)$ je $o(h)$ podle částí 1 a 4 lemmatu a druhý je také $o(h)$ podle částí 1, 3 a 5. Celkem $\alpha(h) = o(h)$ podle části 2. Vidíme, že $g \circ f$ má v a diferenciál rovný lineárnímu zobrazení $\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a)$. $\square$

Z lineární algebry víme, že matice lineárního zobrazení $g \circ f$ složeného z lineárních zobrazení f a g se dostane jako součin matice zobrazení g a matice zobrazení f (v tomto pořadí). Jacobiho matice zobrazení f v bodě a je matice lineárního zobrazení $\mathrm{D}f(a)$ vzhledem ke kanonické bázi a její prvky jsou hodnoty parciálních derivací souřadnicových funkcí v bodě a. Pomocí matic tak větu 2.8 vyjádříme následovně.

Důsledek. *Za situace popsané v předchozí větě je Jacobiho matice složeného zobrazení $h = g \circ f$ v bodě a rovna součinu Jacobiho matice zobrazení g v bodě $b = f(a)$ a Jacobiho matice zobrazení f v bodě a:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m} &= \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(b)\right)_{i,j=1}^{k,n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_r}(b) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m}. \end{aligned}$$

Speciálně pro $k = 1$, kdy funkce h o m proměnných je složeninou

$$h = g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

funkce g o n proměnných a n funkcí $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dostáváme *řetízkové pravidlo* pro parciální derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \\ &= \langle \nabla g(f(a)), \partial_i f(a) \rangle, \end{aligned}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $\partial_i f = (\partial_i f_1, \partial_i f_2, \ldots, \partial_i f_n)$.

Úlohy

1. Zobecněte důkaz Tvrzení 2.4 na více než dvě proměnné.
2. Rozmyslete si důkaz Tvrzení 2.7.
3. Dokažte části 1–3 lemmatu.
4. Dokažte části 4 a 5 lemmatu.
5. Lemma můžeme zobecnit na zobrazení mezi normovanými prostory (které jako vektorové prostory nemusejí už mít konečnou dimenzi). Pak ale jedna z částí 1–5 obecně přestane platit. Která?