Kapitola 1

Úvod

Stručný obsah kapitoly.

- Induktivní definice a důkaz indukcí. $\mathcal{F}$-uzávěr a $\mathcal{F}$-odvození.
- Notace a signatury, struktury pro signaturu.
- Obor designátorů $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{S})$; tvrzení o jednoznačnosti, o výskytech, o substituci.
- Hodnota designátoru ve struktuře. Konstrukce rekurzí.

1.1 Základní pojmy

1.1.1. Sekvence. n-ární funkce a relace.

Sekvence je konečná posloupnost; predikát $\mathrm{Seq}(x)$ nechť značí „x je sekvence“. Sekvenci lze v teorii množin případně v nějakém jejím fragmentu definovat takto:

$$\mathrm{Seq}(x) \Leftrightarrow x \text{ je funkce, jejíž definiční obor je nějaké přirozené číslo.} \tag{1.1}$$

Základní pojmy o sekvencích jsou: unární parciální funkce „délka sekvence“ x, binární parciální funkce „y-tý člen (prvek) sekvence x“, „konkatenace sekvencí x a y“, „konkatenace sekvence x sekvencí “, binární predikce „sekvence x je počátkem sekvence y“ a konstanta „prázdná sekvence“. Značíme je po řadě symboly

$$\mathrm{lh}(x), \quad (x)_y, \quad x \smile y, \quad \sqcup(x), \quad x \lessdot y, \quad \emptyset.$$

Místo $(x)_y$ se píše také, nevede-li to k nedorozumění, symbol

$$x_y.$$

Místo sekvence délky n můžeme říkat n-sekvence. n-sekvenci x značíme jako

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle,$$

kde $x_i = (x)_i$. Značíme ji též $\overline{x}$; pruh graficky zdůrazňuje, že jde o sekvenci.

V teorii množin se definují n-tice (uspořádané) tak, že uspořádaná dvojice (x, y) je $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ a $(n+1)$-tice s $n \geq 2$ jsou právě tvaru (u, y), kde u je nějaká n-tice. Dále 0-tice je jen $\emptyset$, 1-tice jsou právě tvaru $\{x\}$. (Metodicky se nejprve zavede pojem uspořádané dvojice, pomocí něj pojem relace a funkce a pomocí funkcí a pojmu přirozeného čísla pak sekvence jako v (1.1).)

Je vzájemně jednoznačná korespondence $'$ (funkce) mezi všemi sekvencemi a ticemi taková, že, $\emptyset' = \emptyset$ a $\langle x \rangle' = \{x\}$ a pro $n \geq 2$ a $(n+1)$-sekvenci s tvaru $t \smile \langle y \rangle$ je $s' = (t', y)$. Pomocí $'$ n-sekvence a n-tice přirozeně ztotožňujeme.

Symbol z^n značí množinu všech n-tic s členy v z; můžeme díky ztotožnění n-sekvencí a n-tic psát místo z^n také ${}^n z$, neboť, symbol ${}^x y$ značí množinu všech funkcí z x do y. Často se ztotožňuje z^1 se z. Je dále $z^0 = \{\emptyset\} (= {}^0 z)$. Množinu všech sekvencí s hodnotami v z značíme z^*; tedy $z^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} z^n$.

Symbol $f : x \to y$ značí, že f je funkce s definičním oborem $\mathrm{dom}(f) = x$ a oborem hodnot $\mathrm{rng}(f) \subseteq y$; je to funkce z x do y. Pro $a \in \mathrm{dom}(f)$ je $f(a)$ hodnota f v a. Pro $n \geq 1$ o funkci f resp. relaci r říkáme, že je n-ární, je-li

$\mathrm{dom}(f)$ množina n-tic resp. r je množina n-tic. Když f je n-ární a $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}(f)$, píšeme $f(a_0, \ldots, a_{n-1})$ místo $f(\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle)$. Když r je n-ární, píšeme také $r(x_0, \ldots, x_{n-1})$ místo $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in r$. Funkce f je nulární, když $\mathrm{dom}(f) = \{\emptyset\}$. Funkce $f : x^n \to x$ je n-ární operace (též funkce) na x. Množina $r \subseteq x^n$ s $n > 0$ je n-ární relace na (též v) x. Pro funkce f, g je $fg = \{\langle x, f(g(x))\rangle; x \in \mathrm{dom}(g), g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$.

$x \times y = \{(a, b); a \in x, b \in y\}$ je kartézský součin x a y. Díky ztotožnění n-sekvencí a n-tic můžeme psát $x \times y = \{\langle a, b\rangle; a \in x, b \in y\}$ a $z^n \times y = \{s\smile b; s \in z^n, b \in y\}$.

Induktivní definice

Nechť F je n-ární funkce a X množina. *F-konkluze* X je množina $F[X^n]$; značíme ji $F\lceil X\rceil$. $F\lceil X\rceil$ je tvořená právě prvky $F(x_1, \ldots, x_n)$ s $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n \cap \mathrm{dom}(F)$.

1.1.2. $\mathcal{F}$-uzávěr a odvození. Induktivní definice.

1. Buď $\mathcal{F}$ množina funkcí konečných četností, X množina.

$\mathcal{F}$-konkluze X je množina $\bigcup\{F\lceil X\rceil; F \in \mathcal{F}\}$; značíme ji $\mathcal{F}\lceil X\rceil$. Tedy v $\mathcal{F}\lceil X\rceil$ jsou právě prvky $F(x_1, \ldots, x_n)$ s $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n \cap \mathrm{dom}(F)$, $F \in \mathcal{F}$.

X je $\mathcal{F}$-uzavřená, když obsahuje svou $\mathcal{F}$-konkluzi, tj. když $\mathcal{F}\lceil X\rceil \subseteq X$. *$\mathcal{F}$-uzávěr* X je nejmenší $\mathcal{F}$-uzavřená nadmnožina X; $\mathcal{F}$-uzávěr X značíme $\mathcal{F}\langle X\rangle$.

2. *$\mathcal{F}$-odvození z X* je sekvence s, přičemž pro každé $i < \mathrm{lh}(s)$ je $s_i \in X$ nebo existuje F z $\mathcal{F}$ a $i_0, \ldots, i_{n-1} < i$ tak, že n je četnost F a $s_i = F(s_{i_0}, \ldots, s_{i_{n-1}})$; říká se pak, že s je $\mathcal{F}$-odvození z X prvku $y = (s)_{\mathrm{lh}(s)-1}$. Prvek je *$\mathcal{F}$-odvozený z X*, existuje-li jeho $\mathcal{F}$-odvození z X.

3. *Induktivní definice* množiny Y je seznam pravidel

- každý prvek z X je v Y,
- pro funkci F z $\mathcal{F}$, její četnost n a $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ z Y^n je $F(y_1, \ldots, y_n)$ v Y, (1.2)

  jakmile $F \in \mathcal{F}$ s $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

O nejmenší množině Y vyhovující těmto pravidlům říkáme, že to je *množina definovaná induktivní definicí s pravidly* (1.2); je to ovšem množina $\mathcal{F}\langle X\rangle$.

Důkaz indukcí na objektech z $\mathcal{F}\langle X\rangle$ prokazující, že každý prvek z $\mathcal{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, je schema

- každý prvek z X má vlastnost V,
- když každé $y_1, \ldots, y_n$ z $\mathcal{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, má $F(y_1, \ldots, y_n)$ vlastnost V,

  jakmile $F \in \mathcal{F}$ a $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

(1.3)

Druhá položka z (1.3) je *schéma indukčních kroků*, „každé $y_1, \ldots, y_n$ má vlastnost V, jakmile $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$“ je *indukční předpoklad* indukčního kroku pro F.

Pokud $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{F_x; x \in X\}$, kde $F_x = \{\langle\emptyset, x\rangle\}$ je nulární, v (1.2) lze vynechat prvý řádek a ve druhém psát $\mathcal{F}'$ místo $\mathcal{F}$. Obdobně je tomu v (1.3).

TVRZENÍ 1.1.3. *Buď $\mathcal{F}$ množina funkcí konečných četností, X množina. Pak*

1) $\mathcal{F}\langle X\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, *kde* $X_0 = X$ *a* $X_{n+1} = X_n \cup \mathcal{F}\lceil X_n\rceil$.

2) $\mathcal{F}\langle X\rangle = \{y;$ *y je $\mathcal{F}$-odvozený z X*$\}$.

3) *Platí-li* (1.3), *má každý prvek z $\mathcal{F}\langle X\rangle$ vlastnost V.*

4) $X' \subseteq X \Rightarrow \mathcal{F}\langle X'\rangle \subseteq \mathcal{F}\langle X\rangle$, $X \subseteq \mathcal{F}\langle X\rangle = \mathcal{F}\langle\mathcal{F}\langle X\rangle\rangle$.

Důkaz. 1) plyne snadno.

2) Inkluze $\supseteq$. Je-li s nějaké $\mathcal{F}$-odvození z X, je jeho poslední člen v $\mathcal{F}\langle X\rangle$; to plyne ihned indukcí dle délky s užitím $\mathcal{F}$-uzavřenosti $\mathcal{F}\langle X\rangle$. Odtud plyne dokazovaná inkluze.

Inkluze $\subseteq$. Indukcí plyne pro každé n: každé $y \in X_n$ je prvek $\mathcal{F}$-odvozený z X. Pro $n = 0$ to je jasné a indukční krok plyne takto: buď $y = F(z_1, \ldots, z_n) \in X_{n+1}$ s $z_1, \ldots, z_n$ z X_n a s_i je $\mathcal{F}$-odvození z X prvku z_i pro $i = 1, \ldots n$. Pak $s_1 \smile \cdots \smile s_n \smile y$ je hledané odvození. Jelikož $\mathcal{F}\langle X \rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, dokazovaná inkluze $\subseteq$ platí.

3) Indukcí snadno plyne pro každé n: každé y z X_n má vlastnost V.

4) Inkluze jsou zřejmé a poslední rovnost plyne z $\mathcal{F}$-uzavřenosti $\mathcal{F}\langle X \rangle$. $\square$

1.2 Signatury a struktury

1.2.1. Notace a signatura.

1. *Obecná notace* je dvojice $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$, kde $\emptyset \notin \mathcal{S}$, $Ar_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$; značíme ji stručně $\underline{\mathcal{S}}$ nebo jen $\mathcal{S}$. Dále $S \in \mathcal{S}$ je *symbol* $\underline{\mathcal{S}}$, $Ar_{\mathcal{S}}(S)$ je *četnost* S, $Ar_{\mathcal{S}}[\mathcal{S}]$ je *množina četností* $\underline{\mathcal{S}}$. Když $Ar_{\mathcal{S}}(S) = 0$, říkáme, že S je *konstantní symbol*; značíme jej často písmenem c, c', c_i d, d', d_i apod. Obecná notace $\underline{\emptyset}$ se nazývá *prázdná*; ztotožňujeme ji s $\emptyset$.

Notace je obecná notace $\underline{\mathcal{S}}$, obsahující alespoň jeden konstantní symbol; tedy $0 \in Ar_{\mathcal{S}}[\mathcal{S}]$.

2. *Signatura* je $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$, kde $\underline{\mathcal{R}}$ je obecná notace s $0 \notin Ar_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$, $\underline{\mathcal{F}}$ je obecná notace a $\mathcal{R} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Jsou-li $\underline{\mathcal{R}}$, $\underline{\mathcal{F}}$ prázdné, je to *prázdná signatura*; ztotožňujeme ji s $\emptyset$. Prvky z $\mathcal{R}$ resp. $\mathcal{F}$ jsou *relační* resp. *funkční symboly* uvažované signatury. Je-li symbol $=$ v $\mathcal{R}$, značí binární predikátový symbol rovnosti. Signatura $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$ je *relační* resp. *funkční*, když $\underline{\mathcal{F}}$ je prázdná resp. $\underline{\mathcal{R}}$ je prázdná; zapisujeme ji jako $\underline{\mathcal{R}}$ resp. $\underline{\mathcal{F}}$. Notaci chápeme jako funkční signaturu.

Je-li $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$ obecná notace a $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_{m-1}\}$, zapisujeme ji také jako

$$\langle S_0, \ldots, S_{m-1} \rangle, \quad S_0 \text{ je } k_0\text{-ární}, \ldots, S_{m-1} \text{ je } k_{m-1}\text{-ární},$$

kde $k_i = Ar_{\mathcal{S}}(S_i)$. Je-li $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$ signatura, $\mathcal{R} = \{R_0, \ldots, R_{m-1}\}$, $\mathcal{F} = \{F_0, \ldots, F_{n-1}\}$, zapisujeme ji jako

$$\langle R_0, \ldots, R_{m-1}, F_0, \ldots, F_{n-1} \rangle,$$
$$R_0 \text{ je } k_0\text{-ární}, \ldots, R_{m-1} \text{ je } k_{m-1}\text{-ární}, F_0 \text{ je } l_0\text{-ární}, \ldots, F_{n-1} \text{ je } l_{n-1}\text{-ární},$$

kde $k_i = Ar_{\mathcal{R}}(R_i)$, $l_j = Ar_{\mathcal{F}}(F_j)$.

Jsou-li četnosti patrné z kontextu, nemusíme je uvádět.

1.2.2. Struktura, podstruktura a generovaná podstruktura.

1. *Struktura* je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$, kde A je neprázdná množina, $\mathcal{R}$ je soubor relací na A konečných kladných četností, $\mathcal{F}$ je soubor operací na A konečných četností. Říkáme také, že prvky z $\mathcal{R}$ resp. $\mathcal{F}$ jsou *relace* resp. *funkce (z)* $\mathcal{A}$. Nulární funkce struktury $\mathcal{A}$ se nazývá *konstanta*; je tvaru $\{\langle \emptyset, c \rangle\}$ s jistým $c \in A$; ztotožňujeme ji s c. Dále říkáme, že A je *univerzum* $\mathcal{A}$. Struktura $\mathcal{A}$ je *čistě relační* resp. *funkční* (též *algebraická*), je-li $\mathcal{F} = \emptyset$ resp. $\mathcal{R} = \emptyset$. Někdy píšeme $\underline{A}$ místo $\mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{R}$ tvaru $\langle R_0, \ldots, R_{k-1} \rangle$ a $\mathcal{F}$ tvaru $\langle F_0, \ldots, F_{l-1} \rangle$, zapisujeme $\mathcal{A}$ též jako

$$\langle A, R_0, \ldots, R_{k-1}, F_0, \ldots, F_{l-1} \rangle.$$

Velikost čili *kardinalita* $\mathcal{A}$ je velikost (kardinalita) jejího univerza; značíme ji

$$\|\mathcal{A}\|.$$

2. *Podstruktura* struktury $\mathcal{A}$ je struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}', \mathcal{F}' \rangle$, kde:

a) $B \subseteq A$.

b) Relace z $\mathcal{R}'$ jsou právě tvaru $R \cap B^m$ s $R \in \mathcal{R}$ a m rovným četnosti R.

c) Funkce z $\mathcal{F}'$ je právě tvaru $F \cap (B^n \times B)$ s $F \in \mathcal{F}$ a n rovným četnosti F. Speciálně je B uzavřeno na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ a tedy také každá konstanta struktury $\mathcal{A}$ patří do B.

3. Buď navíc $X \subseteq A$. *Množina generovaná v* $\mathcal{A}$ *z* X je nejmenší podmnožina A obsahující X a uzavřená na každou funkci z $\mathcal{F}$; značíme ji $\overline{X}^{\mathcal{A}}$. Je-li $\overline{X}^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, je to

univerzum nejmenší podstruktury struktury $\mathcal{A}$; značíme ji $\mathcal{A}\langle X\rangle$ a říkáme, že to je *podstruktura generovaná* X.

Když $\mathcal{F}$ obsahuje konstantu c, je $c \in \overline{X}^{\mathcal{A}}$. Když $\mathcal{F} = \emptyset$, tak $\overline{X}^{\mathcal{A}} = X$.

1.2.3. Realizace signatury.

Realizace signatury $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}}\rangle$ je struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A\rangle$, kde:

$\mathcal{R}^A = \langle R'_R;\ R \in \mathcal{R}\rangle$; $R'_R \subseteq A^{Ar(R)}$ je *realizace* R v $\mathcal{A}$ a značíme ji R^A.
Přitom $=^A$ je $\{\langle a, a\rangle;\ a \in A\}$, tj. identita na A.
$\mathcal{F}^A = \langle F'_F;\ F \in \mathcal{F}\rangle$; $F'_F : A^{Ar(F)} \to A$ je *realizace* F v $\mathcal{A}$ a značíme ji F^A.

Říkáme také, že $\mathcal{A}$ je $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}}\rangle$*-struktura*, též *struktura pro* $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}}\rangle$ a také, že to je (*sémantická*) *interpretace* uvažované signatury. $'$ je formálně zobrazení $\mathcal{R}$ na $\mathcal{R}^A$ a $\mathcal{F}$ na $\mathcal{F}^A$.

1.2.4. Izomorfizmus struktur.

Buďte $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A\rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B\rangle$ dvě $\langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}}\rangle$-struktury. Zobrazení $h : A \to B$ je *izomorfizmus* struktur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, když

- h je prosté a na B,
- pro $R \in \mathcal{R}$, n rovno četnosti R a $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$ je
$$R^A(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^B(h(a_1), \ldots, h(a_n))\ ,$$
- pro $F \in \mathcal{F}$, n rovno četnosti F a $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$ je
$$h(F^A(a_1, \ldots, a_n)) = F^B(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Píšeme pak $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ (*via* h). Speciálně pro konstantní symbol c z $\mathcal{F}$ je $h(c^A) = c^B$.

1.3 Designátory

1.3.1. Aplikace notace.

Buď $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ obecná notace, X množina konečných sekvencí.

1. *Aplikační doména* $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ *na* X je množina $Ad(\mathcal{S}, X) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}}(\{S\}\times X^{Ar_{\mathcal{S}}(S)})$. Její prvky jsou tedy právě tvaru $\langle S, s\rangle$, kde $S \in \mathcal{S}$, $s \in X^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}$.

2. *Aplikace* $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ *na* X je funkce $Ap_{\mathcal{S},X}$ definovaná na $Ad(\mathcal{S}, X)$ taková, že pro každé $S \in \mathcal{S}$ a $s \in X^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}$ je
$$Ap_{\mathcal{S},X}(S, s) = \langle S\rangle \smile \sqcup(s). \tag{1.4}$$
Její obor hodnot se nazývá *množina výrazů aplikace* $Ap_{\mathcal{S},X}$ *na* X. Pro $s \in X^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}$ tvaru $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$ značíme $Ap_{\mathcal{S},X}(S, s)$ jako
$$S(s_0, \ldots, s_{n-1}) \text{ nebo také } (s_0 S s_1), \text{ když } n = 2. \tag{1.5}$$
Prvý výraz v (1.5) je *prefixní* a druhý *infixní* zápis výrazu $Ap_{\mathcal{S},X}$.

Pro nulární S platí $Ap_{\mathcal{S},X}(S, \emptyset) = \langle S\rangle = S()$; místo $S()$ píšeme často jen S, nevede-li to k nedorozumění. Když $\mathcal{S}$ je prázdné, je $Ap_{\mathcal{S},X}$ prázdná funkce a množina výrazů takové aplikace je prázdná.

3. Je-li $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ notace, říkáme, že $Ap_{\mathcal{S},\mathcal{S}^*}$ je *aplikace* $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$; značíme ji
$$Ap_{\mathcal{S}}.$$
Platí pak $\operatorname{rng}(Ap_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{S}^*$, tj. množina výrazů aplikace $Ap_{\mathcal{S}}$ je podmnožina $\mathcal{S}^*$.

POZNÁMKA. Buď $\mathcal{S} = \{F, F(c), c\}$, F unární, $F(c), c$ konstantní. Pak zkrácení designátoru $F(c)()$ na $F(c)$ vede k nedorozumění, neboť $F(c)$ je $Ap_{\mathcal{S}}(F, \langle c\rangle)$.

1.3.2. Designátory.

Buď $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ notace.

1. *Obor výrazů* notace $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ je struktura $\underline{\mathrm{D}}^*(\mathcal{S})$ tvaru $\langle \mathcal{S}^*, \mathcal{S}^\circ\rangle$, kde $\mathcal{S}^\circ$ je soubor $\langle S^\circ;\ S \in \mathcal{S}\rangle$ funkcí takových, že

$$S^\circ : (\mathcal{S}^*)^{Ar_{\mathcal{S}}(S)} \to \mathcal{S}^* \text{ splňuje } S^\circ(s) = Ap_{\mathcal{S}}(S, s) \text{ pro } s \in (\mathcal{S}^*)^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}. \tag{1.6}$$

Tedy $\underline{\mathrm{D}}^*(\mathcal{S})$ je $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$-struktura, kde $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$ představuje funkční signaturu.

2. *Obor designátorů* notace $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{S})$ struktury $\underline{\mathrm{D}}^*(\mathcal{S})$, generovaná prázdnou množinou; její univerzum $\mathrm{D}(\mathcal{S})$ je *množina designátorů* uvažované signatury. $\mathrm{D}(\mathcal{S})$ je tedy nejmenší podmnožina $\mathcal{S}^*$ obsahující každé $\langle S \rangle$ pro $S \in \mathcal{S}$ nulární, která je uzavřená na všechny S° s $S \in \mathcal{S}$ nenulárním. Speciálně je $\mathrm{D}(\mathcal{S})$ definováno zřejmou induktivní definicí:

Pro $S \in \mathcal{S}$ a sekvenci s designátorů délky $Ar_{\mathcal{S}}(S)$ je $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$ designátor.

Připomeňme, že sekvence x je *podsekvence* sekvence y, existují-li sekvence y_0, y_1 tak, že platí $y_0 \smile x \smile y_1 = y$; říkáme pak také, že x má *výskyt v* y. *Poddesignátor* nějakého designátoru η je designátor mající výskyt v η.

Mluvíme-li o designátorech a není výslovně uvedená příslušná notace, chápeme ji jako $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}} \rangle$. Designátory často značíme $\eta, \eta', \eta_0, \eta_1, \ldots$.

TVRZENÍ 1.3.3. (O jednoznačnosti designátorů.) *Každý designátor je jednoznačně tvaru $Ap_{\mathcal{S}}(S, s)$ pro jisté $S \in \mathcal{S}$ a jisté $s \in \mathrm{D}(\mathcal{S})^{Ar(S)}$.*

Čili $Ap_{\mathcal{S}}$ je prosté zobrazení množiny $Ad(\mathcal{S}, \mathrm{D}(\mathcal{S}))$ na $\mathrm{D}(\mathcal{S})$.

Důkaz. Je třeba dokázat jen jednoznačnost výrazu $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$ pro $S \in \mathcal{S}$ a $s \in \mathrm{D}(\mathcal{S})^{Ar(S)}$. Buď $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$ rovno $\langle S \rangle \smile \sqcup (s')$ pro jisté $s' \in \mathrm{D}(\mathcal{S})^{Ar(S)}$; máme dokázat $s = s'$. Když $s \neq s'$, tak pro nejmenší i s $(s)_i \neq (s')_i$ je $(s)_i \lessdot (s')_i$ nebo $(s')_i \lessdot (s)_i$. To je ve sporu s 1.3.4. □

LEMMA 1.3.4. *Buďte $\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$, $\langle {\eta'}_1, \ldots, {\eta'}_n \rangle$ sekvence designátorů takové, že $\sqcup(\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle) \lessdot \sqcup(\langle {\eta'}_1, \ldots, {\eta'}_n \rangle)$. Pak $\eta_i = \eta'_i$ pro $i = 1, \ldots, n$.*

Speciálně pro designátory $\eta \lessdot \eta'$ je $\eta = \eta'$.

Důkaz. Indukcí dle délky $\sqcup(\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle)$. Buď $\eta_1 = \langle S \rangle \sqcup (\langle \hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_k \rangle)$ s nějakým $S \in \mathcal{S}$ a designátory $\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_k$; η'_1 nutně začíná S, tedy $\eta'_1 = \langle S \rangle \smile \sqcup (\langle \hat{\eta}'_1, \ldots, \hat{\eta}'_k \rangle)$ s nějakými designátory $\hat{\eta}'_1, \ldots, \hat{\eta}'_k$. Jelikož $\eta_1 \lessdot \eta'_1$, tak $\sqcup(\langle \hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_k \rangle) \lessdot \sqcup(\langle \hat{\eta}'_1, \ldots, \hat{\eta}'_k \rangle)$. Tudíž podle indukčního předpokladu je $\hat{\eta}_i = \hat{\eta}'_i$ pro $i = 1, \ldots, k$ (i pokud $k = 0$) a tedy $\eta_1 = \eta'_1$. Pak ale $\sqcup(\langle \eta_2, \ldots, \eta_n \rangle) \lessdot \sqcup(\langle {\eta'}_2, \ldots, {\eta'}_n \rangle)$ a tudíž opět dle indukčního předpokladu je také $\eta_i = \eta'_i$ pro $i = 2, \ldots, n$. Speciální tvrzení plyne bezprostředně. □

TVRZENÍ 1.3.5. (O výskytech designátorů.) *Výskyt designátoru η' v designátoru η tvaru $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$ s $S \in \mathcal{S}$ a $s \in \mathrm{D}(\mathcal{S})^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}$ je buď η nebo je to výskyt v některém členu $(s)_i$.*

Důkaz. Nechť výskyt symbolu, jenž je první člen uvažovaného výskytu designátoru η', je první S v η; je $\eta' \lessdot \eta$, tedy dle 1.3.4 je $\eta = \eta'$.

Nechť výskyt symbolu, jenž je první člen uvažovaného výskytu designátoru η', je v některém $(s)_i$. Pak dle 1.3.6 je tento výskyt prvým členem výskytu nějakého designátoru η'' v $(s)_i$. Je nutně $\eta' \lessdot \eta''$ nebo $\eta'' \lessdot \eta'$, tedy $\eta' = \eta''$ a tedy η' se vyskytuje v $(s)_i$ jako η''. □

LEMMA 1.3.6. *Každý výskyt symbolu v nějakém designátoru η je prvým členem nějakého výskytu nějakého designátoru v η.*

Důkaz. Indukcí na designátorech. Máme dokázat: když $S \in \mathcal{S}$, $s \in \mathrm{D}(\mathcal{S})^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}$ a tvrzení platí pro každé η rovno některému $(s)_i$, tak tvrzení platí pro η rovno $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$. Je-li $s = \emptyset$, je to jasné. Jinak jde o výskyt v nějakém $(s)_i$. Podle indukčního předpokladu je prvým členem nějakého výskytu nějakého designátoru v $(s)_i$; ten je ovšem výskytem designátoru v $\langle S \rangle \smile \sqcup (s)$. □

TVRZENÍ 1.3.7. (O substituci v designátorech.) *Nahradí-li se výskyt designátoru η' v designátoru η designátorem η'', získá se designátor.*

Důkaz. Indukcí na designátorech. Buď $\eta = \langle S\rangle\smile \sqcup(s)$ a pro $(s)_i$ s $i < Ar_{\mathcal{S}}(S)$ nechť to platí. Pak uvažovaný výskyt η' je η a platí to, nebo je to výskyt v některém $(s)_i$; pak díky indukčnímu předpokladu to opět platí. □

TVRZENÍ 1.3.8. (Konstrukce rekurzí na $\mathrm{D}(\mathcal{S})$.) *Nechť $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ je notace a U, W množiny. Pro každé $S \in \mathcal{S}$ a $n = Ar_{\mathcal{S}}(S)$ buďte dány funkce $G_S(z_1,\dots,z_n,u)$ s hodnotami ve W a definovaná pro každé $z_1,\dots,z_n$ z $\mathcal{P}(W)$, u z U a $G_{S,1}(u),\dots,G_{S,n}(u)$ s hodnotami v $\mathcal{P}(U)$ a definované pro každé u z U. Pak existuje právě jedna funkce $H : \mathrm{D}(\mathcal{S}) \times U \to W$ vyhovující podmínkám:*

$$\text{pro } S \in \mathcal{S} \text{ četnosti } n \text{ a } \eta_1,\dots,\eta_n \text{ z } \mathrm{D}(\mathcal{S}) \text{ je}$$
$$H(\langle S\rangle\smile\eta_1\smile\dots\smile\eta_n,u) = G_S(H[\{\eta_1\}\times G_{S,1}(u)],\dots,H[\{\eta_n\}\times G_{S,n}(u)],u). \tag{1.7}$$

Říkáme, že H z 1.3.8 je *zkonstruována* či *sestrojena rekurzí předpisy (pravidly)* (1.7) *z funkcí* $G_S, G_{S,i}$, $0 < i \le n$.

POZNÁMKA 1.3.9.

1. Jelikož $\eta \in \mathrm{D}(\mathcal{S})$ je jednoznačně tvaru $\langle S\rangle\smile\eta_1\smile\dots\smile\eta_n$, předpisy (1.7) jsou korektní. Rekurentnost definice je dána tím, že $H(\langle S\rangle\smile\eta_1\smile\dots\smile\eta_n,u)$ se počítá z množin $H[\{\eta_i\}\times G_{S,i}(u)]$ (a parametru u), tj. pomocí „již známých hodnot“ $H(\eta_i,u')$ (s libovolným $u' \in U$). Pro nulární S máme jen G_S a rovnost z (1.7) má tvar
$$H(\langle S\rangle,u) = G_S(u).$$

2. Důležitým a praktickým speciálním případem rekurzivního předpisu je
$$\begin{aligned} &H(\langle S\rangle\smile\eta_1\smile\dots\smile\eta_n,u) = G_S(H(\eta_1,G_{S,1}(u)),\dots,H(\eta_n,G_{S,n}(u)),u)\\ &\text{s } G_S(w_1,\dots,w_n,u) \in W \text{ definovaným pro každé } w_1,\dots,w_n \in W,\ u \in U,\\ &G_{s,i}(u) \in U \text{ pro každé } u \in U,\ i = 1,\dots,n;\end{aligned} \tag{1.8}$$

zde se odvoláváme jen na prvky w z W, nikoli na všechny podmnožiny W jako v (1.7).

Důkaz 1.3.8. Buď
$$D_0 = \{\langle S\rangle;\ S \in \mathcal{S} \text{ je nulární}\},\ D_{m+1} = \{\langle S\rangle\smile\sqcup(s);\ S\in\mathcal{S} \text{ a } s \in D_m^{Ar_{\mathcal{S}}(S)}\}$$
pro $m \in \mathbb{N}$. Snadno se ukáže indukcí, že $D_m \subseteq D_{m+1}$ pro $m \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{D}(\mathcal{S}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$.

Indukcí podle m plyne, že jsou-li h_m, h'_m definované na $D_m \times U$ a splňují (1.7) s h_m, h'_m místo H pro všechna $S \in \mathcal{S}$, $\eta_i \in D_{m-1}$ a $u \in U$, tak $h_m = h'_m$. Tudíž H je nejvýše jedna. Protože každé h_m lze (jednoznačně) rozšířit na $D_{m+1}\times U$ do h_{m+1}, hledané H je rovno $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} h_m$. □

1.3.10. Hodnota designátoru ve struktuře.

Nechť $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ je notace a $\mathcal{A}$ je $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$-struktura. *Hodnota* $H^A(\eta)$ designátoru η z $\mathrm{D}(\mathcal{S})$ v $\mathcal{A}$ je definována rekurzí:

$$\begin{aligned}&\text{Pro } S \in \mathcal{S} \text{ s } n = Ar_{\mathcal{S}}(S) \text{ a } \eta_1,\dots,\eta_n \text{ z } \mathrm{D}(\mathcal{S}) \text{ je}\\ &H^A(S(\eta_1,\dots,\eta_n)) = S^A(H^A(\eta_1),\dots,H^A(\eta_n)).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Speciálně když η je $\langle c\rangle$ s konstantním c, je $H^A(\eta) = c^A$.

TVRZENÍ. *Nechť $\langle \mathcal{S}, Ar_{\mathcal{S}}\rangle$ je notace a $\mathcal{A} = \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{S})$. Pak pro η z $\mathrm{D}(\mathcal{S})$ je $H^A(\eta) = \eta$.*

Důkaz. Indukcí na designátorech. Nechť $\eta = \langle S\rangle\smile\sqcup(s)$ s n-árním S a s rovným $\langle\eta_1,\dots,\eta_n\rangle$, přičemž pro $\eta_1,\dots,\eta_n$ to platí. Pak
$$H^A(\eta) = S^A(\eta_1,\dots,\eta_n) = S^\circ(\eta_1,\dots,\eta_n) = \eta.$$
□

Kapitola 2

Výroková logika

Stručný obsah kapitoly.

- Jazyk a formule výrokové logiky.
- Modely, pravdivost v teorii, sémantická ekvivalence. Normální tvary.
- Booleovská pravidla. Nezávislé formule. Vlastnosti $\models$.
- Extenze teorie, ekvivalentní teorie, kompletní teorie.
- Sémantická kompaktnost. Axiomatizovatelnost.
- Dedukce: důkaz, teorém, vyvratitelná formule, (beze)sporná teorie.
- Existence modelu bezesporné teorie. Věta o úplnosti výrokové logiky.
- Syntaktické metody dokazování.
- Vícehodnotová sémantika výroků.

2.1 Sémantika

Elementární syntax výroků.

2.1.1. Výrokový jazyk, výroky a teorie.

1. *Výrokový jazyk nad* $\mathbb{P}$ tvoří: a) neprázdná množina $\mathbb{P}$ *prvovýroků* (též *výrokových proměnných* či *atomů*), b) logické spojky $\neg, \rightarrow$ (negace, implikace).

Dále používáme pomocně delimitery (,) k usnadnění čitelnosti designátorů. Prvovýroky značíme p, q, r, p_0, p' apod.

Je-li potřeba, chápeme $\mathbb{P}$ jako prostý indexovaný soubor $\mathbb{P} = \langle p_i;\ i \in I\rangle$.

2. *Výroky* čili *(výrokové) formule* nad $\mathbb{P}$ jsou právě designátory z $\mathrm{D}(\mathcal{F}_{\mathbb{P}})$, kde $\mathcal{F}_{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cup \{\neg, \rightarrow\}$; přitom prvky z $\mathbb{P}$ jsou nulární, $\neg$ je unární, $\rightarrow$ je binární.

$$\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$$

značí množinu všech výroků nad $\mathbb{P}$: $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}} = \mathrm{D}(\mathcal{F}_{\mathbb{P}})$. Výroky značíme $\varphi, \psi, \chi, \varphi', \varphi_1, \psi'$ apod. Symbol $\mathrm{var}(\varphi)$ značí množinu všech prvovýroků vyskytujících se ve φ.

Množina $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je zřejmě definována induktivně pravidly: Pro $p \in \mathbb{P}$ je $\langle p\rangle$ je výrok a jsou-li φ, ψ výroky, jsou jimi i $\neg(\varphi)$ a $\rightarrow(\varphi, \psi)$.

Zpravidla zapisujeme $\langle p\rangle$ pro $p \in \mathbb{P}$ jako p; prvovýrok je tak výrok.

3. *Výroková teorie nad* $\mathbb{P}$, též $\mathbb{P}$*-teorie*, je množina $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$; její prvky jsou její *axiomy*. Symbol $\mathbb{P}(T)$ značí množinu prvovýroků jazyka teorie T. Výrok teorie T je výrok jejího jazyka.

2.1.2. Zavedení $\&, \vee, \leftrightarrow$ a $\perp, \top$. Konvence o zápisu formulí. Normální tvary.

1. Binární logické spojky $\vee$ *disjunkce* (čili *nebo*), $\&$ *konjunkce* (čili *a*) a $\leftrightarrow$ *ekvivalence* zavádíme jako zkratky dané následovně:

$$(\varphi \vee \psi) \ \text{ za } \ (\neg(\varphi) \to \psi), \quad (\varphi \,\&\, \psi) \ \text{ za } \ \neg(\varphi \to \neg(\psi)),$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \ \text{ za } \ ((\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi)).$$

Místo & se píše také $\wedge$.

Pravdivý výrok $\top$ specifikujeme jako $p \to p$, *lživý* výrok $\bot$ jako $\neg(p \to p)$; na konkrétní volbě p nezáleží. Mluvíme o nich též jako o nulárních logických spojkách či výrokových konstantách.

2. Konvence o zápisu formulí. Často se vynechávají vnější závorky, místo $\neg(\varphi)$ se píše $\neg\varphi$. Používá se též konvence, že $\neg$ má v zápise vyšší prioritu než spojky & a $\vee$, ty zase než $\leftrightarrow$ a ta zase než $\to$. Místo $((\varphi \,\&\, (\neg\psi)) \to (\chi \vee \psi))$ tak máme $\varphi \,\&\, \neg\psi \to \chi \vee \psi$; můžeme ovšem použít i méně radikální zkrácení, jako např. $(\varphi \,\&\, \neg\psi) \to (\chi \vee \psi)$. Místo $(\varphi_1 \diamond (\varphi_2 \diamond \cdots \diamond \varphi_n) \dots)$ píšeme též $\varphi_1 \diamond \varphi_2 \diamond \cdots \diamond \varphi_n$, kde $\diamond$ je $\to$, & nebo $\vee$; nekumulujeme zde tedy závorky zprava. Formule $\varphi_1 \diamond \varphi_2 \diamond \cdots \diamond \varphi_n$, kde $\diamond$ je & resp. $\vee$ se nazývá *konjunkce s konjunkty* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ resp. *disjunkce s disjunkty* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Závorky můžeme pro zlepšení čitelnosti i přidat.

3. Výrok je *literál*, je-li to prvovýrok nebo negace prvovýroku. Disjunkce literálů se nazývá *klauzule*, konjunkce literálů též *elementární konjunkce*. Výrok je v *disjunktivně* resp. *konjunktivně normálním tvaru*, je-li to disjunkce konjunkcí literálů resp. konjunkce disjunkcí literálů.

ZNAČENÍ. Pro výrok φ, n-tici výroků $s = \langle \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \rangle$ a $\sigma : n \to 2$ užíváme následující značení:

$$\varphi^1 \text{ je } \varphi, \qquad \varphi^0 \text{ je } \neg\varphi, \qquad s^\sigma \text{ je } \langle \varphi_0^{\sigma(0)}, \dots, \varphi_{n-1}^{\sigma(n-1)} \rangle,$$
$$\bigwedge s \ \text{ je } \ \varphi_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n, \qquad \bigwedge \emptyset \text{ je } \top, \qquad \bigvee s \ \text{ je } \ \varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n, \qquad \bigvee \emptyset \text{ je } \bot.$$

Je-li s konečná množina výroků, je $\bigwedge s$ rovno $\bigwedge s'$ a $\bigvee s$ rovno $\bigvee s'$ pro nějaké prosté očíslování s' množiny s.

Sémantika výroků.

2.1.3. Modely výrokového jazyka a teorie. Sémantická ekvivalence výroků.

1. *Pravdivostní ohodnocení* $\mathbb{P}$ čili *model výrokového jazyka nad* $\mathbb{P}$ je funkce $v \in {}^{\mathbb{P}}2$. *Hodnota* $\overline{v}(\varphi)$ *výroku* φ *z* $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ *v ohodnocení* v je hodnota φ v $\mathfrak{F}_{\mathbb{P}}$-struktuře

$$\langle 2, v(p), -_1, \to_1 \rangle_{p \in \mathbb{P}}.$$

Tedy $\overline{v}$ je funkce $\overline{v} : \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \to 2$ sestrojená rekurzí pravidly:

$$\overline{v}(p) = v(p), \quad \overline{v}(\neg\varphi) = -_1\overline{v}(\varphi), \quad \overline{v}(\varphi \to \psi) = \to_1 (\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi)).$$

Když $\overline{v}(\varphi) = 1$, říkáme, že φ *platí* či *je splněno ve* v a také, že v je *model* φ. Dále je v *model teorie* $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, když je modelem každého axiomu T; píšeme

$$v \models T$$

a místo $v \models \{\varphi\}$ píšeme $v \models \varphi$. Místo $\overline{v}(\varphi)$ píšeme stručněji $v(\varphi)$.

2. Pro $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T)$ *třída všech modelů teorie* T:

$$\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2;\ v \models T\}.$$

Místo $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\})$ píšeme $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ a T vynecháme, je-li $\emptyset$. Dále $-\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T)$ značí ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T)$; je to *komplement* třídy $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T)$.

3. Buď $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. Formule φ, ψ z $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ jsou T-*sémanticky ekvivalentní*, když platí $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(T, \psi)$; píšeme

$$\varphi \sim_T \psi.$$

Vynecháme T, je-li $\emptyset$; místo $\emptyset$-sémanticky ekvivalentní tedy říkáme *sémanticky ekvivalentní* a máme $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\psi)$.

ÚMLUVA. Symbol $\mathbb{P}$ můžeme vynechat, nevede-li to k nedorozumění. Mluvíme tak např. jen o výrocích, místo $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ píšeme VF, místo $\mathsf{M}^{\mathbb{P}}$ jen M atd.

Snadno se zjistí, že pro $T \subseteq \mathrm{VF}$ a $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{VF})$ platí:

$$T' \subseteq T \Rightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(T'), \qquad \mathsf{M}(\bigcup \mathcal{T}) = \bigcap\{\mathsf{M}(T);\, T \in \mathcal{T}\}.$$

TVRZENÍ 2.1.4. (Vlastnosti ohodnocení výroků.) *Buďte* $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, $\varphi, \psi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

1) a) *Pro* $v \in {}^{\mathbb{P}}2$ *závisí* $v(\varphi)$ *jen na hodnotách* v *na* $\mathrm{var}(\varphi)$.

b) $v(\varphi \diamond \psi) = v(\varphi) \diamond_1 v(\psi)$ *pro* $\diamond$ *rovno* $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.

2) *Buď* $\mathbb{P}$ *konečné,* $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$*; označme* $-K = {}^{\mathbb{P}}2 - K$*. Pak*

$$\mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\bigvee_{w \in K} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{w(p)}) = K = \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\bigwedge_{w \in -K} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{-_1 w(p)}).$$

3) *Formule* φ *je sémanticky ekvivalentní formuli jak v disjunktivně normálním tvaru, tak formuli v konjunktivně normálním tvaru.*

Důkaz. 1) a) se dokáže snadno indukcí na výrocích. b) plyne ihned z definic.

2) Pro $v, w \in {}^{\mathbb{P}}2$ máme $v(p^{w(p)}) = 1 \Leftrightarrow v(p) = w(p)$. Tedy $v(\bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{w(p)}) = 1 \Leftrightarrow v = w$. Odtud a užitím 1) b): $v(\bigvee_{\ldots} \bigwedge_{\ldots} p^{w(p)}) = 1 \Leftrightarrow v \in K$. Podobně $v(\bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{-_1 w(p)}) = 1 \Leftrightarrow v \neq w$ a tedy $v(\bigwedge_{\ldots} \bigvee_{\ldots} p^{-_1 w(p)}) = 1 \Leftrightarrow v \notin -K \Leftrightarrow v \in K$.

3) Pro $\mathbb{P}$ konečné to dává 2) s $K = \mathsf{M}^{\mathbb{P}}(\varphi)$. Díky 1) a) to platí pro každé $\mathbb{P}$. ☐

TVRZENÍ 2.1.5. (O třídách modelů formulí v teorii. Definice AM_T.) *Buď* $T \subseteq \mathrm{VF}$ *s* $\mathsf{M}(T) \neq \emptyset$*. Pak*

$$\mathsf{M}(T, \neg\varphi) = \mathsf{M}(T) - \mathsf{M}(T, \varphi),\ \mathsf{M}(T, \bot) = \emptyset,\ \mathsf{M}(T, \top) = \mathsf{M}(T),$$
$$\mathsf{M}(T, \varphi \diamond \psi) = \mathsf{M}(T, \varphi) \diamond' \mathsf{M}(T, \psi),\ \textit{kde } \diamond \textit{ je } \vee, \&\ \textit{a } \diamond' \textit{ je } \cup, \cap.$$

Důsledky.

a) $\mathrm{AM}_T = \{\mathsf{M}(T, \varphi);\, \varphi \in \mathrm{VF}\}$ *je univerzum podalgebry algebry* $\mathcal{P}(\mathsf{M}(T))$*. Uvedená podalgebra se nazývá* algebra tříd modelů formulí v T *a značíme ji* AM_T.

b) *Chápeme-li* $\neg, \vee, \&, \bot, \top$ *jako operace na* $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$*, platí o nich booleovské zákony, tj. asociativita, komutativita, distributivita, absorbce a kompletace, nahradíme-li v nich* $=$ *vztahem* $\sim_T$*. Z nich plynou dále: idempotence, extremalita, neutralita a de Morganovy zákony.*

Důkaz. Prvá část tvrzení plyne ihned z definic. Důsledek a) je bezprostřední, neboť uvedené rovnosti zaručují uzavřenost AM_T na komplement do $\mathsf{M}(T)$, $\cup$, $\cap$ a $\emptyset$. Důsledek b). Máme $\mathsf{M}(T, \varphi \vee \psi) = \mathsf{M}(T, \varphi) \cup \mathsf{M}(T, \psi) = \mathsf{M}(T, \psi) \cup \mathsf{M}(T, \varphi) = \mathsf{M}(T, \psi \vee \varphi)$. Tedy $\varphi \vee \psi \sim_T \psi \vee \varphi$. Podobně je tomu s komutativitou $\&$, asociativitou $\vee$ atd. ☐

TVRZENÍ 2.1.6. (O sémantické ekvivalenci.) *Vznikne-li formule* φ' *z* φ *nahrazením některého výskytu podformule* ψ *formulí* ψ'*, tak* $\quad \psi \sim_T \psi' \Rightarrow \varphi \sim_T \varphi'$.

Důkaz. Indukcí na výrocích. Pro prvovýrok φ to jasně platí. Je-li φ tvaru $\neg\varphi_0$, je buď uvažovaný výskyt formule ψ právě φ a je to jasné, nebo to je výskyt ve φ_0. Pak z indukčního předpokladu máme $\mathsf{M}(\varphi_0) = \mathsf{M}(\varphi_0')$ a tedy i $\varphi \sim_T \varphi'$. Podobně, je-li φ tvaru $\varphi_0 \to \varphi_1$. ☐

APLIKACE. Důsledek b) z 2.1.5 a 2.1.6 lze užít k nalézání sémantických ekvivalentů. Např.: $(p \to q) \,\&\, q \sim (\neg p \vee q) \,\&\, q \sim (\neg p \,\&\, q) \vee (q \,\&\, q) \sim (\neg p \,\&\, q) \vee q \sim q$.

1. $\sim$ plyne užitím tvrzení o sémantické ekvivalenci a díky $p \to q \sim \neg p \vee q$, 2. $\sim$ dává distributivní zákon, 3. $\sim$ idempotence, 4. absorbce. Získali jsme zároveň k formuli $(p \to q) \,\&\, q$ sémantické ekvivalenty v konjunktivně normálním tvaru i v disjunktivně normálním tvaru.

2.1.7. Pravdivost a lživost výroku v teorii. Nezávislá a splnitelná formule.

Buď $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

- Formule φ je *pravdivá v* T, když φ platí v každém modelu v teorie T; píšeme

$$T \models \varphi.$$

- Formule φ je *lživá v T*, neplatí-li v žádném modelu teorie T, čili když $T \models \neg\varphi$. Množinu všech $\mathbb{P}$-formulí pravdivých resp. lživých v T značíme

$$\Theta_{\mathbb{P}}(T) \quad \text{resp.} \quad \Theta'_{\mathbb{P}}(T).$$

- Není-li φ ani pravdivá ani lživá v T, je φ *nezávislá v T*.
- Není-li φ lživá v T, je *splnitelná v T* a též *konzistentní s T*.
- Když $T \models \varphi \to \psi$, je φ *silnější než ψ* a ψ *slabší než φ v T*.

Je-li T prázdná teorie, frázi "v (s) T" vynecháváme. Místo φ je pravdivá resp. lživá také říkáme, že φ je *tautologie* resp. *lež*. Množina všech tautologií resp. splnitelných výroků se značí též $\mathrm{TAUT}_{\mathbb{P}}$ resp. $\mathrm{SAT}_{\mathbb{P}}$.

Místo $\emptyset \models \varphi$ píšeme $\models \varphi$, místo $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\} \models \varphi$ též jen $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \models \varphi$.

TVRZENÍ 2.1.8. (Vlastnosti $\Theta(T)$.) *Buďte T, S teorie. Pak platí:*
1) $\mathsf{M}(\Theta(T)) = \mathsf{M}(T)$.
2) $T \subseteq \Theta(T), \qquad T \subseteq S \Rightarrow \Theta(T) \subseteq \Theta(S), \qquad \Theta(T) = \Theta(\Theta(T))$.

Důkaz. 1) Jelikož $v \models T \Rightarrow v \models \Theta(T)$, máme $\mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\Theta(T))$. Inkluze $\supseteq$ plyne z $T \subseteq \Theta(T)$. Druhé tvrzení z 2) plyne snadno. Jelikož $T \models \varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\varphi)$, dostaneme i třetí tvrzení z 2) užitím 1): $\varphi \in \Theta(\Theta(T)) \Leftrightarrow \Theta(T) \models \varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(\Theta(T)) \subseteq \mathsf{M}(\varphi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\varphi) \Leftrightarrow T \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Theta(T)$. $\square$

TVRZENÍ 2.1.9. (Vztahy $\models$ a M.) *Pro teorii T a formule φ, ψ jejího jazyka platí:*
1) $T \models \varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\varphi)$
2) $T \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) \subseteq \mathsf{M}(T, \psi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) \subseteq \mathsf{M}(\psi) \Leftrightarrow T, \varphi \models \psi$
3) $T \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) = \mathsf{M}(T, \psi)$

Důkaz plyne snadno z definic. $\square$

VĚTA 2.1.10. (Vlastnosti $\models$.) *Pro teorii T a formule φ, ψ, χ jejího jazyka platí:*

1)
$$\begin{array}{lcl}
T \models \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & T \models \neg\psi \to \neg\varphi \\
T \models \varphi \leftrightarrow \psi & \Leftrightarrow & T \models \varphi \to \psi \ \ a \ \ T \models \psi \to \varphi \\
T \models \varphi \,\&\, \psi & \Leftrightarrow & T \models \varphi \ a \ T \models \psi \\
T \models \varphi \vee \psi & \Leftarrow & T \models \varphi \ nebo \ T \models \psi \\
T \models \varphi \to \psi \ \ a \ \ T \models \varphi & \Rightarrow & T \models \psi \\
T \models \varphi \to \psi \ \ a \ \ T \models \psi \to \chi & \Rightarrow & T \models \varphi \to \chi \\
T \models \varphi \leftrightarrow \psi \ \ a \ \ T \models \psi \leftrightarrow \chi & \Rightarrow & T \models \varphi \leftrightarrow \chi \\
T \models \varphi \leftrightarrow \psi & \Rightarrow & (T \models \varphi \Leftrightarrow T \models \psi)
\end{array}$$

2) *(Rozbor případů.)* $T \models (\varphi \vee \psi) \to \chi \ \Leftrightarrow \ (T \models \varphi \to \chi \ \ a \ \ T \models \psi \to \chi)$
Speciálně: $T \models \varphi \to \psi \ \ a \ \ T \models \neg\varphi \to \psi \ \Rightarrow \ T \models \psi$

Důkaz. 1) $T \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) \subseteq \mathsf{M}(T, \psi) \Leftrightarrow -\mathsf{M}(T, \psi) \subseteq -\mathsf{M}(T, \varphi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \neg\psi) \subseteq \mathsf{M}(T, \neg\varphi) \Leftrightarrow T \models \neg\psi \to \neg\varphi$. Užili jsme 2.1.9. Podobně nebo užitím již dokázaného plynou další položky.

2) $T \models (\varphi \vee \psi) \to \chi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi \vee \psi) \subseteq \mathsf{M}(T, \chi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T, \varphi) \subseteq \mathsf{M}(T, \chi)$ a $\mathsf{M}(T, \psi) \subseteq \mathsf{M}(T, \chi) \Leftrightarrow T \models \varphi \to \chi$ a $T \models \psi \to \chi$. $\square$

2.1.11. Extenze teorie, ekvivalentní, konečně axiomatizovatelné a kompletní teorie.

Buďte T, S výrokové teorie.

1. Teorie S je *extenze* T, když $\mathbb{P}(T) \subseteq \mathbb{P}(S)$ a $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$. Je-li $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(S)$, je to *jednoduchá* extenze. Teorie T je *ekvivalentní s S*, je-li každá z nich extenzí druhé. Teorie je *konečně axiomatizovatelná*, je-li ekvivalentní teorii s konečně axiomy.

2. Teorie T je *kompletní*, jestliže má model a pro každou formuli φ jejího jazyka je $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$, tj. T nemá nezávislý výrok.

TVRZENÍ 2.1.12. *Buďte T, S výrokové teorie v témže jazyce.*

1) *Teorie S je extenze T, právě když $\mathsf{M}(S) \subseteq \mathsf{M}(T)$. Teorie S je ekvivalentní s T, právě když $\mathsf{M}(S) = \mathsf{M}(T)$.*

2) *Teorie T je kompletní, právě když má právě jeden model.*

Důkaz. 1) Platí $T' \subseteq T \Rightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(T')$. Užijeme-li ještě 2.1.8, 1), dostaneme požadované. 2) Má-li T právě jeden model, je jasně kompletní. Nechť naopak T má alespoň dva různé modely v, w; existuje pvovýrok p s $v(p) \neq w(p)$. Pak p je nezávislý výrok T. $\square$

APLIKACE. Základní analýza teorií nad konečně prvovýroky.

Buď $\mathbb{P}$ velikosti $l \in \mathbb{N}$, T nějaká $\mathbb{P}$-teorie. Pomocí 2.1.9 a 2.1.12 lze zjistit počet pravdivých, lživých a nezávislých výroků T až na sémantickou ekvivalenci $\sim$, dále počet neekvivalentních jednoduchých (kompletních) extenzí T, počet nezávislých výroků T až na $\sim_T$ apod. Např. počet pravdivých výroků φ teorie T až na $\sim$ je $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$, neboť různých $\mathsf{M}(\varphi)$ takových, že $\mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\varphi)$ je tolik, kolik, kolik je podmnožin množiny ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{M}(T)$.

Sémantická kompaktnost. Axiomatizovatelnost.

VĚTA 2.1.13. (O sémantické kompaktnosti.) *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je jasná. Dokážeme opačnou. Buď T teorie, jejíž každá konečná část má model; říkejme, že T je konečně splnitelná. Existuje maximální konečně splnitelná teorie $S \supseteq T$, tj. taková konečně splnitelná teorie $S \supseteq T$, jejíž každé vlastní rozšíření má konečnou část, která nemá model. Existence S plyne z principu maximality, aplikovaného na uspořádání

$$\langle \{T';\ \ T' \text{ je konečně splnitelná a } T' \supseteq T\}, \subseteq \rangle;$$

to splňuje předpoklad principu maximality, že totiž každá lineárně uspořádané podmnožina $\mathbb{L}$ má majorantu – tou je jasně $\bigcup \mathbb{L}$. Tudíž uvažované uspořádání má maximální prvek S. Ukážeme, že S má model; ten je díky $T \subseteq S$ i modelem T. Předně platí:

(a) $(\varphi \in S, \varphi \to \psi \in S) \Rightarrow \psi \in S$, (b) $\varphi \in S \Leftrightarrow \neg\varphi \notin S$,
(c) $\varphi \to \psi \in S \ \Leftrightarrow \neg\varphi \in S$ nebo $\psi \in S$.

(a) je jasné, neboť $S \cup \{\psi\}$ je konečně splnitelná. (b): $\Rightarrow$ platí, neboť $\{\varphi, \neg\varphi\}$ nemá model. Dokážeme $\Leftarrow$. Buď $\neg\varphi \notin S$; dokážeme, že $S \cup \{\varphi\}$ je konečně splnitelná – díky maximalitě pak $\varphi \in S$. Existuje $S_0 \subseteq S$ konečná tak, že $S_0 \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model. Pro $S' \subseteq S$ konečnou existuje model $v \models S' \cup S_0$; ovšem $v(\varphi) = 1$ a jsme hotovi. (c) Implikace $\Rightarrow$. Když $\neg\varphi \notin S$, tak $\varphi \in S$ dle (b) a pak $\psi \in S$ dle (a). Implikace $\Leftarrow$. Když $\neg\varphi \in S$, pro $S' \subseteq S$ konečnou existuje model $v \models S' \cup \{\neg\varphi\}$; pak $v(\varphi \to \psi) = 1$ a vidíme, že $S \cup \{\varphi \to \psi\}$ je konečně splnitelná. Stejně je tomu, když $\psi \in S$.

Definujme nyní $v \in {}^{\mathbb{P}}2$ takto: $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in S$. Pak pro každou formuli φ platí $v(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in S$, což plyne indukcí na formulích: pro prvovýrok φ to vyplývá z definice, indukční krok pro $\neg$ resp. $\to$ plyne užitím (b) resp. (c). $\square$

2.1.14. Axiomatizovatelné množiny ohodnocení. Elementární konjunkce ε_σ.

1. Množina $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ je *axiomatizovatelná* resp. *konečně axiomatizovatelná*, existuje-li teorie resp. konečná teorie T tak, že $K = \mathsf{M}(T)$. Je-li K konečně axiomatizovatelná, je zřejmě $K = \mathsf{M}(\varphi)$ pro nějakou formuli φ.

2. Pro funkci $\sigma \subseteq \mathbb{P} \times 2$ značíme

$$\widetilde{\sigma} = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2;\ \sigma \subseteq v\}.$$

Pro konečnou funkci $\sigma \subseteq \mathbb{P} \times 2$ je *elementární konjunkce určená* σ formule $\bigwedge_{p \in \mathrm{dom}(\sigma)} p^{\sigma(p)}$; značíme ji ε_σ. Platí: $\mathsf{M}(\varepsilon_\sigma) = \widetilde{\sigma}$.

Buď $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$. Řekneme, že $v \in {}^{\mathbb{P}}2$ je *oddělené* od K, když existuje $\sigma \subseteq v$ konečné s $\widetilde{\sigma} \cap K = \emptyset$. Dále K je *uzavřená*, když K obsahuje každé v, které není oddělené od K. K je *otevřená* resp. *obojetná*, je-li komplement ${}^{\mathbb{P}}2 - K$ uzavřená resp. K i její komplement jsou uzavřené. Zřejmě $\emptyset, {}^{\mathbb{P}}2$ jsou uzavřené.

Z definic ihned plyne:

K1) a) Průnik neprázdného systému uzavřených množin je uzavřená množina.
b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

K2) Buď $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$. Pak:
a) $v \in {}^{\mathbb{P}}2 - K$ je oddělená od $K \Leftrightarrow$ existuje ψ s $v \in \mathsf{M}(\psi)$ a $\mathsf{M}(\psi) \cap K = \emptyset$.
b) K je uzavřená $\Leftrightarrow$ pro každou $v \in {}^{\mathbb{P}}2 - K$ existuje ψ s $v \in \mathsf{M}(\psi)$ a $\mathsf{M}(\psi) \cap K = \emptyset$.

VĚTA 2.1.15. (O axiomatizovatelnosti.)

1) *Množina $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ je konečně axiomatizovatelná, právě když ona i její komplement jsou axiomatizovatelné.*

2) a) *Množina $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ je axiomatizovatelná, právě když je uzavřená.*

b) *Množina $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ je konečně axiomatizovatelná, právě když je obojetná.*

Důkaz. 1) Implikace $\Rightarrow$ je jasná. Dokážeme opačnou. Nechť T, S jsou takové teorie, že $K = \mathsf{M}(T) = -\mathsf{M}(S)$. Pak $\mathsf{M}(T \cup S) = \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(S) = \emptyset$, tedy díky kompaktnosti existují $T' \subseteq T$, $S' \subseteq S$ konečné tak, že $T' \cup S'$ nemá model; pak $\emptyset = \mathsf{M}(T' \cup S') = \mathsf{M}(T') \cap \mathsf{M}(S')$. Konečně $\mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(T') \subseteq -\mathsf{M}(S') \subseteq -\mathsf{M}(S) \subseteq \mathsf{M}(T)$, tedy $\mathsf{M}(T) = \mathsf{M}(T')$.

2) a) Implikace $\Leftarrow$. Dle K2) b) je $-K = \bigcup_{\psi \in S} \mathsf{M}(\psi)$ pro jistou množinu S formulí. Pak $K = \bigcap_{\psi \in S} \mathsf{M}(\neg\psi)$ a tedy $K = \mathsf{M}(T)$ s $T = \{\neg\psi;\ \psi \in S\}$.

Implikace $\Rightarrow$. Předně je $\mathsf{M}(\varphi)$ uzavřená. Pro v z $-\mathsf{M}(\varphi)$ je totiž $v \in \mathsf{M}(\psi_i)$ s jistou ψ_i, přičemž $\bigvee_{i<n} \psi_i$ je disjunktivně normální tvar $\neg\varphi$ s elementárními konjunkcemi ψ_i; uzavřenost $\mathsf{M}(\varphi)$ plyne z K2) b). Je-li nyní $K = \mathsf{M}(T)$, je $K = \bigcap_{\varphi \in T} \mathsf{M}(\varphi)$ a uzavřenost K plyne z K1) a).

b) je důsledek 1) a 2) a). □

2.2 Dedukce. Úplnost výrokové logiky

Dedukce je vyvozování formulí z jistých předpokladů, a to podle pravidel dedukce. Předpoklady jsou představovány axiomy nějaké teorie $T \subseteq \mathrm{VF}$; vždy k nim přidáváme množinu LAx tzv. *logických axiomů*, což jsou jisté pravdivé formule. Pravidlo dedukce je obecně zobrazení, které nějakým konečně mnoha formulí přiřadí jednu jako jejich důsledek, vyvozený podle tohoto pravidla.

2.2.1. Logické axiomy a pravidlo dedukce.

1. Logické výrokové axiomy LAx jsou dány následujícími schematy formulí:

(PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(PL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
(PL3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

2. V seznamu axiomů teorie T logické axiomy nadále neuvádíme. Říkáme pak, že formule z T jsou *mimologické axiomy* teorie T.

3. Pravidlo dedukce je ve výrokové logice jediné, a to *pravidlo odloučení* neboli *modus ponens* (MP):

$$\text{z } \varphi,\ \varphi \to \psi \text{ odvoď } \psi.$$

Formálně jde o zobrazení $\mathrm{MP}(\varphi, \varphi \to \psi) = \psi$.

2.2.2. Důkaz, dokazatelná formule čili teorém. Sporná a bezesporná teorie.

Buď T teorie.

1. *Důkaz v T* je $\{\mathrm{MP}\}$-odvození z $T \cup \mathrm{LAx}$; je to *důkaz formule*, která je jeho posledním členem. Formule φ je *dokazatelná* v T čili to je *teorém* v T, existuje-li nějaký její důkaz v T; píšeme pak

$$T \vdash \varphi.$$

Formule φ je *vyvratitelná* a též *spor* v T, když $T \vdash \neg\varphi$. Když $T = \emptyset$, vypouštíme v uvedených pojmech výraz „v T" či jej nahradíme výrazem „logicky". Množinu všech teorémů teorie T značíme

$$\mathrm{Thm}(T) \quad \text{nebo} \quad \mathrm{Thm}_T.$$

Tedy $\mathrm{Thm}(T)$ je $\{\mathrm{MP}\}$-uzávěr $T \cup \mathrm{LAx}$. Speciálně jsou teorémy teorie T definovány induktivně pravidly:
- Každý axiom teorie T a každý logický axiom je teorém teorie T.
- Jsou-li φ, $\varphi \to \psi$ teorémy teorie T, je ψ teorém teorie T.

2. Teorie T je *sporná*, je-li v ní dokazatelná každá formule; jinak je *bezesporná*.

TVRZENÍ 2.2.3.

1) (O korektnosti.) *Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.*

2) *Má-li teorie model, je bezesporná.*

Důkaz. 1) Indukcí na teorémech. Každý axiom z T nebo logický je v T pravdivý. Jsou-li φ, $\varphi \to \psi$ pravdivé v T je takové i ψ. 2) φ a $\neg\varphi$ nejsou zároveň platné v žádném modelu. $\square$

Níže dokážeme i opačnou implikaci k tvrzení o korektnosti a získáme tak zásadní větu o úplnosti výrokové logiky: formule je v T dokazatelná, právě když je v T pravdivá. Její důkaz se opírá o větu o existenci modelu bezesporné teorie – vše je formulováno v 2.2.6.

VĚTA 2.2.4. *Buďte φ, ψ formule výrokové teorie T.*

1) $\vdash \varphi \to \varphi$.

2) (O dedukci.) $\quad T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$.

Důkaz. 1) Nechť ψ je $\varphi \to \varphi$; pak jsou výrokovými axiomy formule $\varphi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $\varphi \to (\psi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi))$. Užitím modus ponens tedy $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi)$ a opět dle modus ponens $\vdash \varphi \to \varphi$.

2) Implikace $\Leftarrow$ plyne ihned užitím modus ponens. Buď nyní $T, \psi \vdash \varphi$; dokážeme $T \vdash \psi \to \varphi$, a to indukcí na teorémech teorie T, ψ. Buď φ axiom teorie T, ψ. Je-li φ rovno ψ, je $T \vdash \psi \to \varphi$ dle 1). Pro $\varphi \in T \cup \mathrm{LAx}$ plyne z (PL1) užitím modus ponens žádané $T \vdash \psi \to \varphi$. Buď konečně φ odvozeno pomocí modus ponens z χ, $\chi \to \varphi$ a pro teorémy χ, $\chi \to \varphi$ teorie T, ψ nechť to platí. Odtud a z výrokového axiomu $(\psi \to (\chi \to \varphi)) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi))$ užitím modus ponens získáme $T \vdash \psi \to \varphi$. $\square$

LEMMA 2.2.5. *Pro výroky φ, ψ platí:*

a)	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$,	$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$	c)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$		d)	$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
b)	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$,	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	e)	$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Důkaz. a) $\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ dle (PL1), z věty o dedukci $\neg\varphi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$. Odtud, užitím (PL3) a modus ponens získáme $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ a užitím věty o dedukci prvý dokazovaný vztah a zbývající dva z něj užitím věty o dedukci.

b) $\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$ dle a) a věty o dedukci, tedy $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ užitím (PL3), tedy $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ a konečně $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$. Odtud a užitím (PL3) plyne i $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

c) $\neg\neg\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi, \neg\neg\psi$ dle b) a modus ponens, tedy dle věty o dedukci $\varphi \to \psi \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$, dle (PL3), modus ponens a díky větě o dedukci $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

d) Je $\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$, dle c) $\varphi \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ a věta o dedukci dá žádaný vztah.

e) $\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$ dle d), $\neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$ pomocí věty o dedukci, odtud $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ užitím (PL3) a modus ponens. □

VĚTA 2.2.6. *Buďte φ, ψ formule teorie T.*

1) a) *Teorie T je sporná, právě když je v ní dokazatelný spor.*

   b) (Důkaz sporem.) *$T, \neg\varphi$ je sporná $\Leftrightarrow$ $T \vdash \varphi$.*

2) *Buď T maximální bezesporná teorie. Pak platí:*

   a) *$T \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in T \;\Leftrightarrow\; T, \varphi$ je bezesporná.*

   b) *$\varphi \in T \Leftrightarrow \neg\varphi \notin T$, $\quad \varphi \to \psi \in T \Leftrightarrow \neg\varphi \in T$ nebo $\psi \in T$.*

   c) *Ohodnocení v takové, že $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T$ pro každý prvovýrok p, je jediný model T.*

3) *Bezesporná teorie má maximální bezesporné rozšíření (v témže jazyce).*

4) (O existenci modelu.) *Teorie má model, právě když je bezesporná.*

5) (O kompaktnosti.) *Teorie má model, právě když každá její konečná podteorie má model.*

6) (O úplnosti.) *$T \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; T \models \varphi$ platí pro každou teorii T a její formuli φ.*

Důkaz. 1) a) Je-li φ spor, tj. $\vdash \neg\varphi$, a $T \vdash \varphi$, plyne z 2.2.5, a), že $T \vdash \psi$ pro jakýkoli výrok ψ. b) Implikace $\Rightarrow$: $T, \neg\varphi$ sporná implikuje $T \vdash \neg\varphi \to \varphi$ užitím věty o dedukci. Pak $T \vdash \varphi$ užitím z 2.2.5, e). Implikace $\Leftarrow$ plyne z 2.2.5, a).

2) a) $\Rightarrow$ v prvé $\Leftrightarrow$ plyne z toho, že rozšíření bezesporné teorie o její teorém je bezesporné, $\Leftarrow$ je jasná. Druhá $\Leftrightarrow$ je zřejmá z definice maximální bezesporné teorie. b) $\neg\varphi \notin T \Leftrightarrow T, \neg\varphi$ je sporná $\Leftrightarrow T \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$ dle 2) a) a důkazu sporem. Tvrzení o implikaci: Když $\varphi \to \psi \in T$, tak z $\neg\varphi \notin T$ plyne $\varphi \in T$; pak $T \vdash \psi$ a díky a) je $\psi \in T$. Když $\neg\varphi \in T$, tak $T \vdash \varphi \to \psi$ díky 2.2.5, a), tedy $\varphi \to \psi \in T$ díky a). Podobně když $\psi \in T$, tak $T, \varphi \vdash \psi$, tudíž $T \vdash \varphi \to \psi$. c) Platí $\varphi \in T \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$, což plyne indukcí dle složitosti φ ihned užitím b); tedy $v \models T$. Konečně pro $w \models T$ máme $w(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T$ pro každý prvovýrok p, tedy $w = v$.

3) plyne z principu maximality (ekvivalentního s axiomem výběru), aplikujeme-li jej na množinu všech bezesporných teorií S s $S \supseteq T$, na níž uvažujeme uspořádání inkluzí; každý řetězec R v popsaném uspořádání má majorantu, kterou je jeho sjednocení $\bigcup R$, neboť to je teorie, rozšiřující T, která je bezesporná, protože spor v ní je sporem v nějaké teorii z R.

4) Má-li T model v a $T \vdash \varphi$, tak $\overline{v}(\varphi) = 1$, tedy $\overline{v}(\neg\varphi) = 0$, tedy $T \nvdash \neg\varphi$ a T je bezesporná. Nechť je T bezesporná. Dle 3) existuje maximální bezesporná teorie $T' \supseteq T$ a dle 2), c) existuje model teorie T', což je i model T.

5) Plyne z 4) a z toho, že teorie je bezesporná, právě když je bezesporná každá její konečná podteorie.

6) $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ je tvrzení o korektnosti. Buď obráceně $T \models \varphi$. Pak je $T, \neg\varphi$ sporná dle tvrzení o existenci modelu, tedy $T \vdash \varphi$ dle důkazu sporem 1), b). □

POZNÁMKA 2.2.7. K existenci maximálního bezesporného rozšíření teorie T jsme potřebovali axiom výběru. Je-li T v jazyce s nejvýše spočetně prvovýroky, uvedené rozšíření se sestrojí snadno indukcí takto. Buď $\{\varphi_n;\ 0 < n \in \omega\}$ očíslování formulí, T_0 teorie T a T_{n+1} rovna teorii $T_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$, je-li tato bezesporná, a rovna teorii $T_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$ jinak. Pak $\bigcup_{n\in\omega} T_n$ je hledané maximální rozšíření.

Uveďme několik důsledků věty o úplnosti.
Je $\mathrm{Thm}(T) = \Theta(T)$. Speciálně je T' extenze T, právě když $\mathbb{P}(T) \subseteq \mathbb{P}(T')$ a $\mathrm{Thm}(T) \subseteq \mathrm{Thm}(T')$. Z 2.1.6 získáme syntaktickou verzi tvrzení o ekvivalenci: *Vznikne-li formule φ' z φ nahrazením některých výskytů podformule ψ formulí ψ', tak $T \vdash \psi \leftrightarrow \psi' \Rightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.* V 2.1.10 lze zaměnit $\models$ za $\vdash$; získaná tvrzení můžeme nazývat *deduktivní obraty výrokové logiky.*

Syntaktické metody dokazování.

2.2.8. O syntaktických metodách dokazování.
Jde o metody prokazování dokazatelnosti formulí (v nějaké dané teorii T, to jest vztahu $T \vdash \varphi$) jen pomocí syntaktických pojmů, tj. bez užití pojmu modelu, pravdivosti a věty o úplnosti. Typicky se užívají:
– Již syntakticky prokázané dokazatelnosti nějakých formulí, speciálně axiomů.
– Pravidlo MP, věta o dedukci, důkaz sporem a dále indukce.
– Obraty tvaru

$$T \vdash \varphi_1, \ldots, T \vdash \varphi_n \Rightarrow T \vdash \varphi, \text{ pokud } \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \text{ splňují } ---,$$

jsou-li získány syntakticky. Říkejme jim neformálně důkazová pravidla; pojem zavádíme jen k jistému zpřehlednění vyjadřování. Uveďme, že z $T \vdash \varphi \to \psi$ plyne triviálně důkazové pravidlo $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi$; můžeme tak např. užívat jako důkazové pravidlo $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \neg\neg\varphi$ dle b) z 2.2.5, dále důkazové pravidlo $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to \varphi$ plynoucí z (PL1) apod. Další taková pravidla jsou obsažená např. v 2.2.9 3). Jiné důkazové pravidlo je obsaženo v 2.2.12 ve formulaci b).

Syntakticky prokázané jsou zatím

$$\vdash \varphi \to \varphi \text{ (viz 2.2.4)}, \qquad \text{a) – e) z 2.2.5.}$$

Na a) – e) z 2.2.5 se budeme dále odvolávat jako na [a] – [e].

Abychom se mohli úsporně vyjadřovat, označme pro dvě množiny formulí T, S vlastnost, že každá formule z S je dokazatelná v T, symbolem

$$T \vdash S.$$

Znamená to právě, že $\mathrm{Thm}(S) \subseteq \mathrm{Thm}(T)$, neboť $T \vdash S \Leftrightarrow S \subseteq \mathrm{Thm}(T) \Leftrightarrow \mathrm{Thm}(S) \subseteq \mathrm{Thm}(T)$; to plyne díky známým vlastnostem uzávěru Thm. Zřejmě dále $T \vdash S$ a $S \vdash S' \Rightarrow T \vdash S'$; tomuto tvrzení říkejme *tranzitivita dedukce.* Speciálním případem je *tranzitivita* $\to$: $T \vdash \varphi \to \psi$ a $T \vdash \psi \to \psi' \Rightarrow T \vdash \varphi \to \psi'$. Místo $T \vdash S$ a $S \vdash S'$ můžeme psát stručně $T \vdash S \vdash S'$.

TVRZENÍ 2.2.9.

1) a) $\varphi \mathbin{\&} \psi \vdash \varphi, \psi$ b) $\varphi, \psi \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi$

2) a) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$ b) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

3)
$$T \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \text{ a } T \vdash \psi$$
$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \to \psi \text{ a } T \vdash \psi \to \varphi$$

Pravidlo tranzitivity $\leftrightarrow$:

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \text{ a } T \vdash \psi \leftrightarrow \chi \quad \Rightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$$

Důkaz. Hlavní kroky důkazu píšeme do sloupce vlevo, vpravo pak argumentaci pro platnost kroku (opírající se o platnost předešlých kroků); přitom $[x]$ je odvolání na položku x) z 2.2.5.

1) Připomeňme, že $\varphi \,\&\, \psi$ je $\neg(\varphi \to \neg\psi)$.

a)

$\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi$.		$\varphi \,\&\, \psi \vdash \psi$	
$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	[a]	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(PL1)
$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	[c], MP	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi$	[c], MP
$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	[b], tranzitivita $\to$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \psi$	[b], tranzitivita $\to$
$\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi$	věta o dedukci	$\varphi \,\&\, \psi \vdash \psi$	věta o dedukci

b)

$\vdash \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$	[d]
$\varphi \vdash (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$	věta o dedukci
$\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	[b], věta o dedukci

2) Protože $\varphi \leftrightarrow \psi$ je $\varphi \to \psi \,\&\, \psi \to \varphi$, plyne tvrzení ihned z 1).

3) Ekvivalence o &. Z $T \vdash \varphi \,\&\, \psi$ plyne pomocí 1) a) $T \vdash \{\varphi, \psi\}$, tj. $\Rightarrow$ platí. Obdobně pomocí 1) b) plyne $\Leftarrow$. Ekvivalence o $\leftrightarrow$ se dokáže stejně pomocí 2). Pravidlo tranzitivity $\leftrightarrow$ plyne z předešlé $\Leftrightarrow$ a z 1), 2). □

TVRZENÍ 2.2.10. *Následující ekvivalence jsou dokazatelné:*

1)	φ	$\leftrightarrow$	$(\varphi \,\&\, \varphi)$	*idempotence &*
2)	$\varphi \,\&\, \psi$	$\leftrightarrow$	$\psi \,\&\, \varphi$	*komutativita &*
3)	$(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi$	$\leftrightarrow$	$\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$	*asociativita &*
4)	φ	$\leftrightarrow$	φ	*reflexivita* $\leftrightarrow$
5)	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\leftrightarrow$	$(\psi \leftrightarrow \varphi)$	*symetrie* $\leftrightarrow$
6)	φ	$\leftrightarrow$	$\neg\neg\varphi$	*idempotence* $\neg$

Důkaz. 1) Z 2.2.9 1) a věty o dedukci máme $\vdash \varphi \to (\varphi \,\&\, \varphi)$, $\vdash (\varphi \,\&\, \varphi) \to \varphi$, dle 2.2.9 2) tedy $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$. 2) Dle 2.2.9 1) je $\varphi \,\&\, \psi \vdash \{\varphi, \psi\} \vdash \{\psi, \varphi\} \vdash \psi \,\&\, \varphi$, tj. $\vdash (\varphi \,\&\, \psi) \to (\psi \,\&\, \varphi)$. Tudíž i $\vdash (\psi \,\&\, \varphi) \to (\varphi \,\&\, \psi)$ a dokazovaná ekvivalence plyne z 2.2.9 2). 3) se dokáže zcela obdobně.

4) Je $\vdash \varphi \to \varphi$, dle 2.2.9 3) tedy i $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$.

5) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi \,\&\, \psi \to \varphi \vdash \psi \to \varphi \,\&\, \varphi \to \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$ užitím definice $\leftrightarrow$ a komutativity &.

6) Je $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$, $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ dle [b], dle 2.2.9 3) tedy i $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. □

TVRZENÍ 2.2.11. *Následující ekvivalence jsou dokazatelné:*

1)	$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots)))$	$\leftrightarrow$	$((\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n) \to \psi)$
2)	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\leftrightarrow$	$((\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi))$
3)	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

Důkaz. 1) Stačí ukázat dokazatelnost $\to$ a $\leftarrow$; tvrzení pak plyne z 2.2.9 2) b). Dokažme $\to$ indukcí dle n. Užitím 2.2.9 1) b), MP a indukčního předpokladu máme

$$\begin{aligned} \{\varphi_1 \,\&\, (\varphi_2 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n), (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots)))\} &\vdash \\ \{\varphi_2 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n, \varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots))\} &\vdash \quad \psi. \end{aligned}$$

Zcela stejně plyne $\leftarrow$.

2) Stačí ukázat dokazatelnost $\to$ a $\leftarrow$; tvrzení pak plyne z 2.2.9 2) b). Implikace $\to$ plyne z 2.2.9 2) a), 1) b) a tranzitivity dedukce, implikace $\leftarrow$ z 2.2.9 1) a), 2) b) a tranzitivity dedukce.

3) Stačí ukázat dokazatelnost $\to$ a $\leftarrow$; tvrzení pak plyne z 2.2.9 2) b). Implikace $\to$. $\varphi \leftrightarrow \psi, \neg\varphi \vdash \{\psi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash \{\neg\varphi \to \neg\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ užitím 2.2.9, [c], MP; tedy $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$. Zcela stejně plyne $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$. Dle 2.2.9 2) b) tedy $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$ a dle věty o dedukci i $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$. Implikace $\leftarrow$ plyne zcela analogicky. □

TVRZENÍ 2.2.12. (O ekvivalenci.) *Vznikne-li formule φ' z φ nahrazením některého výskytu podformule ψ formulí ψ', tak*

$$\text{a) } \vdash \psi \leftrightarrow \psi' \to \varphi \leftrightarrow \varphi', \qquad \text{b) } T \vdash \psi \leftrightarrow \psi' \Rightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$

Důkaz. Jasně je b) důsledkem a). Dokazujeme a). Je-li nahrazovaný výskyt ψ celá formule φ, je φ rovno ψ a φ' rovno ψ' a dokazované má tvar $\vdash (\psi \leftrightarrow \psi') \to (\psi \leftrightarrow \psi')$, což platí díky $\vdash \chi \to \chi$. Dále nechť nahrazovaný výskyt ψ není celá formule φ. Dokazujme indukcí na výrocích. Je-li φ prvovýrok, je φ' rovno φ a jasně to platí.

Buď φ tvaru $\neg\varphi_0$. Máme

$$\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_0' \vdash \neg\varphi_0 \leftrightarrow \neg\varphi_0' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi';$$

prvé $\vdash$ plyne z indukčního předpokladu a z věty o dedukci, druhé $\vdash$ z 2.2.11 3). Věta o dedukci dá $\vdash \psi \leftrightarrow \psi' \to \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Buď φ tvaru $\varphi_0 \to \varphi_1$. Pak φ' je $\varphi_0' \to \varphi_1'$ s tím, že v některém φ_i nahrazení neprovádíme; pak je φ_i' rovno φ_i. Stačí dokázat: $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$. Indukční předpoklad je $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \{\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_0', \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1'\}$. Pak $\psi \leftrightarrow \psi', \varphi_0 \to \varphi_1, \varphi_0' \vdash \varphi_1'$ a věta o dedukci dá $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash ((\varphi_0 \to \varphi_1) \to (\varphi_0' \to \varphi_1'))$, tj. $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \varphi \to \varphi'$. Zcela analogicky $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \varphi' \to \varphi$. Celkem díky 2.2.9 3) pak $\psi \leftrightarrow \psi' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$. □

TVRZENÍ 2.2.13. *Následující ekvivalence jsou dokazatelné:*

1)	$\neg(\varphi \mathbin{\&} \psi)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	*de Morganův vztah*
2)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\varphi \mathbin{\&} \neg\psi)$	*de Morganův vztah*
3)	φ	$\leftrightarrow$	$\varphi \vee \varphi$	*idempotence* $\vee$
4)	$\varphi \vee \psi$	$\leftrightarrow$	$\psi \vee \varphi$	*komutativita* $\vee$
5)	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	$\leftrightarrow$	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	*asociativita* $\vee$

Důkaz. 1) Následující ekvivalence jsou dokazatelné; vpravo je uveden argument:

$\neg(\varphi \mathbin{\&} \psi)$	$\leftrightarrow$	$\neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	zavedení &
	$\leftrightarrow$	$\varphi \to \neg\psi$	$\vdash \neg\neg\chi \leftrightarrow \chi$
	$\leftrightarrow$	$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$	věta o ekvivalenci, $\vdash \chi \leftrightarrow \neg\neg\chi$
	$\leftrightarrow$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	zavedení $\vee$.

Z pravidla tranzitivity $\leftrightarrow$ plyne $\neg(\varphi \mathbin{\&} \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

2) plyne stejně, jako 1).

3) – 5) plynou snadno z odpovídajících vlastností &, de Morganových vztahů a již dokázaných vlastností $\leftrightarrow$. □

Podobně lze dále syntakticky dokázat pravidlo rozbor případů:

$$T \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi \;\Leftrightarrow\; (T \vdash \varphi \to \chi \text{ a } T \vdash \psi \to \chi).$$

Pomocí něj pak distributivnost konjunkce a disjunkce a další a další tvrzení. Speciálně tak syntakticky dokážeme výrokovou variantu ($\wedge$ změněno na &, $=$ na $\leftrightarrow$) booleovských axiomů, což je asociativita, komutativita, distributivita $\vee, \wedge$, absorbce $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$, komplementace $x \vee (-x) = 1, x \wedge (-x) = 0$, a základních booleovských identit, což je idempotence $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, $-(-x) = x$, extremalita $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 0 = 0$, neutralita $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$, De Morgan $x \wedge y = -(-x \vee -y)$, $x \vee y = -(-x \wedge -y)$.

Vícehodnotová sémantika výroků.

2.2.14. Výroková evaluace a sémantika nad ní.

Ukážeme jisté abstraktní zobecnění výrokové sémantiky. Pomocí ní prokážeme nevyvoditelnost některých axiomů výrokové logiky z jiných.

1. *Výroková evaluace* je struktura $\underline{\mathsf{V}} = \langle \mathsf{V}, \neg^{\mathsf{V}}, \to^{\mathsf{V}} \rangle$, kde

$$\{0,1\} \subseteq \mathsf{V}, \quad \neg^{\mathsf{V}} \text{ je unární funkce}, \quad \to^{\mathsf{V}} \text{ je binární funkce}.$$

2. Pro *ohodnocení* $v : \mathbb{P} \to \mathsf{V}$ výrokových proměnných ve V je *hodnota* $v^{\mathsf{V}}(\varphi)$ výroku φ hodnota $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$-designátoru φ ve struktuře

$$\langle \mathsf{V}, v(p)_{p\in\mathbb{P}}, \neg^{\mathsf{V}}, \to^{\mathsf{V}}\rangle,$$

tj. je sestrojená rekurzí pravidly:

$$v^{\mathsf{V}}(p) = v(p) \text{ je-li } \varphi \text{ z } \mathbb{P},\ v^{\mathsf{V}}(\neg\varphi) = \neg^{\mathsf{V}}(v^{\mathsf{V}}(\varphi)),\ v^{\mathsf{V}}(\varphi\to\psi) = v^{\mathsf{V}}(\varphi) \to^{\mathsf{V}} v^{\mathsf{V}}(\psi).$$

Říkáme, že $\underline{\mathsf{V}}$ je MP-*korektní*, pokud platí:

$$(v^{\mathsf{V}}(\varphi) = 1 \text{ a } v^{\mathsf{V}}(\varphi\to\psi) = 1) \Rightarrow v^{\mathsf{V}}(\psi) = 1.$$

Speciálním případem je výroková evaluace $\langle 2, -_1, \to_1\rangle$, o které mluvíme jako o klasické dvouhodnotové výrokové evaluaci. Nad ní je sestrojena klasická dvouhodnotová sémantika výroků. Sestrojíme analogicky sémantiku nad $\underline{\mathsf{V}}$. Buď $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, $v : \mathbb{P} \to \mathsf{V}$.

- $v \models^{\mathsf{V}} \varphi$ značí, že $v^{\mathsf{V}}(\varphi) = 1$.
- $v \models^{\mathsf{V}} T$ značí, že $v \models^{\mathsf{V}} \varphi$ pro každé φ z T. Tedy $v \models^{\mathsf{V}} \emptyset$ pro každé $v : \mathbb{P} \to \mathsf{V}$.
- $T \models^{\mathsf{V}} \varphi$ značí, že $v \models^{\mathsf{V}} T \Rightarrow v \models^{\mathsf{V}} \varphi$. Je-li $T = \emptyset$, nepíšeme je.
- φ je ${}^{\mathsf{V}}$-*tautologie*, když $\models^{\mathsf{V}} \varphi$.

TVRZENÍ 2.2.15. (O korektnosti.) *Nechť* $\underline{\mathsf{V}}$ *je* MP-*korektní výroková evaluace a* $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. *Když* φ *je* $\{\mathrm{MP}\}$-*odvozeno z* T, *tak* $T \models^{\mathsf{V}} \varphi$.

Důkaz. Indukcí na prvcích z $\{\mathrm{MP}\}\langle T\rangle$. Pro φ z T to platí a indukční krok plyne z korektnosti $\underline{\mathsf{V}}$.

2.2.16.
Buď T tvořeno právě schematy (PL1), (PL2).
1. Buď výroková evaluace $\underline{\mathsf{V}} = \langle 3, \neg', \to'\rangle$ dána takto:

$\neg'$	
0	1
1	0
2	0

$\to'$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	1

Platí:
a) $\underline{\mathsf{V}}$ je MP-korektní a $\models^{\mathsf{V}} T \cup \{\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)\}$. Speciálně

$$T \models^{\mathsf{V}} \varphi \to (\neg\varphi \to \psi).$$

b) Buďte p, q různé prvovýroky. Pak:

Není $\models^{\mathsf{V}} (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.
Axiom $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ není $\{\mathrm{MP}\}$-odvozený z T.

Důkaz. a) MP-korektnost je zřejmá. $v^{\mathsf{V}}(\chi) = 1$ pro χ z $T \cup \{\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)\}$ se zjistí propočtem. b) Buď $v(p) = 2$, $v(q) = 1$. Pak

$$v^{\mathsf{V}}((\neg p \to \neg q) \to (q \to p)) = (0 \to' 0) \to' (1 \to' 2) = 1 \to' 2 = 2.$$

Odtud a z 2.2.15 plyne, že axiom $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ není $\{\mathrm{MP}\}$-odvozený z T.

2. Buď výroková evaluace $\underline{\mathsf{W}} = \langle 3, \neg'', \to''\rangle$ dána takto ($\to''$ jako $\to'$ z 1.):

$\neg''$	
0	1
1	0
2	2

$\to''$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	1

Platí:
a) $\underline{\mathsf{W}}$ je MP-korektní a $\models^{\mathsf{W}} T$.
b) Buďte p, q různé prvovýroky. Pak:

Není $\models^{\mathsf{W}} p \to (\neg p \to q)$.
Formule $p \to (\neg p \to q)$ není $\{\mathrm{MP}\}$-odvozená z T.
Je však $T \models^{\mathsf{V}} p \to (\neg p \to q)$.

Důkaz. a) MP-korektnost je zřejmá a $v^{\mathsf{W}}(\chi) = 1$ pro χ z T se zjistí propočtem. b) Buď $v(p) = 2$, $v(q) = 0$. Pak $v^{\mathsf{W}}(p \to (\neg p \to q)) = 2 \to'' (\neg'' 2 \to'' 0) = 2 \to'' 0 = 0$. Odtud a z 2.2.15 plyne, že formule $p \to (\neg p \to q)$ není $\{\text{MP}\}$-odvozená z T. Konečně $T \models^{\mathsf{V}} p \to (\neg p \to q)$ víme z 1. a).

Kapitola 3

Predikátová logika

Stručný obsah kapitoly.

- Základní syntax. Model jazyka, platnost v modelu a teorii. Kategoričnost. Dedukce. Teorémy logiky a pravidla dokazování. Prenexní tvar.
- Existence modelu. Věta o úplnosti a kompaktnosti.
- Extenze teorie o funkční symbol a definicemi.

Predikátová logika je základní a nejrozvinutější matematická verze logiky; její význam dokresluje i to, že v ní lze formulovat teorii množin, která je obecnou bází pro veškerou matematiku. Predikátová logika se zabývá dokazováním a zjišťováním pravdivosti tvrzení o individuích, přičemž je k dispozici predikování o individuích, operování s nimi a kvantifikování typu „každé individuum" a „existuje individuum" (symbolicky $(\forall x)$, $(\exists x)$), a dále logické spojky; tím spolu se spočetně proměnnými jakožto symbolizacemi individuí je dán jazyk L v predikátové logice a korelativně množina Fm_L jeho formulí. Predikátové logice se také říká *logika 1. řádu*, anglicky *first order logic*, neboť již nevypovídá navíc o systémech individuí, systémech systémů individuí atd., což přísluší logikám 2., 3. a dalších řádů.

Predikátová logika obsahuje výrokovou logiku, hledíme-li na formule jako na výroky nad množinou $\mathbb{P}$ prvovýroků, kterými jsou formule z Fm_L neobsahující logickou spojku nebo začínají kvantifikací (tvaru $(\forall x)$). Teorií rozumíme nějakou množinu $T \subseteq \mathrm{Fm}_L$ (axiomů). Na straně syntaxe je definován vztah „dokazatelnost formule φ v teorii T", formálně $T \vdash \varphi$, na straně sémantiky pak vztah „platnost formule φ v teorii T", formálně $T \models \varphi$. Základním rysem predikátové logiky je její úplnost: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$; to plyne z tvrzení, že každá bezesporná teorie má model, odkud plyne i kompaktnost pro tuto logiku: teorie má model, má-li její každý konečný fragment model. Jelikož sémantické realizace neboli modely v predikátové logice jsou struktury 1. řádu (široce uplatňované v matematice), přináší logika řadu netriviálních tvrzení o nich. Zkoumání v tomto směru se označuje jako teorie modelů; zabývá se klasifikací modelů a strukturou třídy všech modelů dané teorie. Problém složitosti množiny $\mathrm{Thm}(T)$ všech v T dokazatelných formulí se posuzuje jednak co do efektivnosti $\mathrm{Thm}(T)$, jednak z hlediska deskriptivní složitosti formulí φ patřících do $\mathrm{Thm}(T)$. Deskriptivní složitost se základně měří počtem a typem kvantifikací v φ. V extrémním případě může být každá formule v T ekvivalentní formuli bezkvantifikátorové; pak říkáme, že T má eliminaci kvantifikátorů a lze říci, že T je deskriptivně jednoduchá. Efektivnost $\mathrm{Thm}(T)$ chápeme tak, že $\mathrm{Thm}(T)$ je rekurzivní, tj. je to po vhodném zakódování rekurzivní množina přirozených čísel. Přitom množina X přirozených čísel je rekurzivní, je-li její charakteristická funkce rekurzivní, neboli algoritmicky vyčíslitelná; to, zda $n \in \mathbb{N}$ patří do rekurzivní X, lze tedy zjistit algoritmicky. Je-li dán rekurzivní jazyk L a T je teorie v něm zapsaná, říkáme, že T je rozhodnutelná, je-li rekurzivní $\mathrm{Thm}(T)$.

Problematika klasifikace modelů, deskriptivní složitosti a (ne)rozhodnutelnosti pro různé teorie patří ke stěžejní problematice predikátové logiky.

3.1 Základy syntaxe a sémantiky

Základní syntax: Jazyk, termy, formule, teorie. Substituce.

3.1.1. Jazyk predikátové logiky.

1. *Jazyk* tvoří *logické symboly*, *mimologické symboly* a eventuálně *relační symbol rovnosti* $=$.

- Logické symboly jsou:
  - logické spojky $\neg, \rightarrow$,
  - *proměnné* tvořící spočetnou množinu Var,
  - *obecné kvantifikace* $\forall_x$ (proměnné) x s x z Var; $\forall_x$ čteme „pro každé x“.

Proměnné značíme často x, y, z s indexy, čárkami apod.

- Mimologické symboly jsou symboly nějaké signatury $L = \langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$, přičemž $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ neobsahují žádný logický symbol ani $=$. Říkáme pak, že jde o *jazyk signatury* L; signatura může být prázdná. Symboly z $\mathcal{R}$ resp. $\mathcal{F}$ jsou *relační* (též *predikátové*) resp. *funkční symboly* jazyka L. Pro mimologický symbol S jazyka L řekneme, že jeho *typ v* L je relační resp. funkční, je-li to relační resp. funkční symbol jazyka L.

2. *Jazyk s rovností* je jazyk, který obsahuje predikátový symbol rovnosti $=$; jinak je to *jazyk bez rovnosti*. Vždy předpokládáme, že jazyk má alespoň jeden relační symbol.

Jazyk je tedy specifický jen svou signaturou L a tím, zda je jeho symbolem $=$. Říkáme proto, že jde o *jazyk* L, eventuálně navíc *s rovností*; jazyk v tomto smyslu ztotožňujeme s jeho signaturou.

3. *Velikost* čili *kardinalita* $\|L\|$ *jazyka* L je velikost signatury, je-li nekonečná a je spočetná jinak; formálně to je $\max(\omega, |L|)$, kde $|L|$ je velikost signatury L.

4. Buďte L, L' dva jazyky. Jazyk L' je *extenze* L a L je *restrikce* L', pokud každý mimologický symbol jazyka L je mimologickým symbolem jazyka L' téhož typu a četnosti v L' jako S v L a dále je-li L s rovností, je i L'; píšeme $L \subseteq L'$.

Jazyky L a L' jsou *izomorfní*, jsou-li oba buď s rovností nebo oba bez rovnosti a dále existuje prosté zobrazení h množiny mimologických symbolů jazyka L na množinu mimologických symbolů jazyka L' tak, že pro každý mimologický symbol S z L je $h(S)$ téhož typu a četnosti v L' jako S v L.

Jazyk L zapisujeme uvedením jeho signatury, často ve tvaru

$$\langle R_0, \ldots, F_0, \ldots, c_0, \ldots \rangle,$$

R_0 je m_0-ární relační symbol, ...,
F_0 je n_0-ární fukční symbol, ..., c_0 je konstantní symbol, ...

Nemusíme pak ani nejprve vypisovat relační a pak funkční symboly, ale můžeme je uvádět v libovolném pořadí, avšak tak, aby byly patrné četnosti. Například jazyk aritmetiky přirozených čísel L^A je jazyk s rovností, který zapisujeme jako $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$, S je unární funkční symbol, $+, \cdot$ jsou binární funkční symboly, 0 je konstantní symbol, $\leq$ je binární relační symbol.

ÚLOHA. Co lze říci o jazycích L_0, L_1, kde:

$L_0 = \langle +, < \rangle$, $+$ je binární funkční symbol, $<$ je binární relační symbol.
$L_1 = \langle +, < \rangle$, $+$ je binární relační symbol, $<$ je binární funkční symbol.

$L_2 = \langle +, <, 0 \rangle$, $+$ je binární relační symbol, $<$ je binární funkční symbol, 0 je konstantní funkční symbol.

3.1.2. Termy a formule.

Pro daný jazyk L symbolicky reprezentují termy složené operace z funkčních symbolů jazyka L a formule pak tvrzení či vlastnosti, jež lze formulovat v L. Termy a formule budeme definovat jako designátory. K usnadnění čitelnosti designátorů používáme pomocně obvyklým způsobem delimitery (,). Dále zde užíváme často konvence, že designátor tvaru $\langle S \rangle$, kde S je symbol, „ztotožňujeme" s S.

Buď $L = \langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$ jazyk.

1. Množina Term_L *termů jazyka L* čili *L-termů* je množina $\mathrm{D}(\mathrm{Var} \cup \mathcal{F})$ designátorů, kde každá proměnná představuje nulární funkční symbol. Má tedy induktivní definici s pravidly: Každé $\langle x \rangle$ s $x \in \mathrm{Var}$ je L-term. Je-li F z $\mathcal{F}$, n četnost F a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou L-termy, je $F(t_0, \ldots, t_{n-1})$ také L-term. Nadále zpravidla $\langle x \rangle$ s $x \in \mathrm{Var}$ zapisujeme jako x; proměnná je tak term.

2. Množina $\mathrm{A^pFm}_L$ *atomických L-preformulí* je tvořena právě designátory tvaru

$$R(t_0, \ldots, t_{n-1}), \tag{3.1}$$

kde R je predikátový symbol jazyka L, n je četnost R a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou L-termy.

Množina Fm_L *formulí jazyka L* čili *L-formulí* je množina

$$\mathrm{D}(\mathrm{A^pFm}_L \cup \{\neg, \rightarrow\} \cup \{\forall_x;\ x \in \mathrm{Var}\}),$$

kde symboly z $\mathrm{A^pFm}_L$ jsou nulární a každý symbol $\forall_x$ je unární. Má tedy induktivní definici s pravidly: Každé $\langle \eta \rangle$ s $\eta \in \mathrm{A^pFm}_L$ je L-formule. Jsou-li φ, ψ nějaké L-formule, jsou jimi i $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$ a $\forall_x(\varphi)$ pro každé x z Var.

Formule $\langle \eta \rangle$ s $\eta \in \mathrm{A^pFm}_L$ se nazývá *atomická L-formule*. Nadále ji zapisujeme zpravidla jako η, tj. ztotožňujeme ji s atomickou preformulí η. Množinu všech atomických L-formulí značíme AFm_L.

Buď např. $L = \langle \leq \rangle$, kde $\leq$ je binární relační symbol, x, y proměnné. Pak atomickou L-formuli $\langle x \leq y \rangle$ zapíšeme jako (atomickou preformuli) $x \leq y$. Dále například $\langle \forall_x, \rightarrow, x \leq y, x \leq y \rangle$ je formule, kterou zapíšeme v obvyklém tvaru jako $(\forall x)(x \leq y \rightarrow x \leq y)$ – viz též zkratky a konvence.

3. Je-li jazyk L patrný z kontextu či nevede-li to k nedorozumění, vynecháváme L. Říkáme tak například jen term, formule a píšeme jen Term, Fm apod., a to i v souvislosti s dále definovanými pojmy vztahujícími se k L.

4. *Podterm* resp. *podformule* termu resp. formule η je poddesignátor η. Výskyt proměnné x v (3.1) je výskyt x v nějakém t_i, $i < n$, výskyt proměnné x ve formuli je výskyt x v nějaké její atomické podformuli. *Proměnná* uvedeného designátoru η je proměnná se v něm vyskytující. Term resp. formule je *bez proměnných*, neobsahuje-li žádnou proměnnou. Term bez proměnných se též nazývá *konstantní*.

Termy značíme nejčastěji, t, s, t', t_0 apod., formule pak φ, ψ, χ, φ', φ_0 apod.

Je patrné, že formule jazyka L 1. řádu jsou výroky nad prvovýroky $\mathbb{P}(L)$, kterými jsou právě všechny atomické a kvantifikátorem začínající L-formule.

TVRZENÍ 3.1.3. *Buď $L = \langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$ jazyk. Velikost množiny L-termů je* $\max(\omega, |\mathcal{F}|)$, *velikost množiny L-formulí je* $\|L\| = \max(\omega, |\mathcal{R}|, |\mathcal{F}|)$.

Důkaz. Termů je alespoň tolik, kolik je velikost množiny $\mathrm{Var} \cup \mathcal{F}$, což je $\max(\omega, |\mathcal{F}|)$. Dále jich není více, než je počet sekvencí ve $\mathrm{Var} \cup \mathcal{F}$; těch je také $\max(\omega, |\mathcal{F}|)$. Podobně je tomu s velikostí množiny všech formulí. □

3.1.4. Zavedení &, ∨, ↔, ∃ a další konvence o zápisu formulí.

• Logické spojky &, ∨, ↔ *konjunkce, disjunkce, ekvivalence* zavádíme jako zkratky stejně jako ve výrokové logice. Užíváme i ostatní konvence z výrokové logiky.

• Formuli $\forall_x(\varphi)$ zapisujeme jako $(\forall x)\varphi$. Říkáme, že $\forall$ je *obecný* (*univerzální*) *kvantifikátor*.

$(\exists x)\varphi$ je zavedeno jako zkratka za $\neg(\forall x)\neg\varphi$; $(\exists x)$ je *existenční kvantifikace* (proměnné) x. $(\exists x)$ čteme „existuje x“. Říkáme, že $\exists$ je *existenční kvantifikátor.*

Je-li Q kvantifikátor, píšeme též $(Qx_1, \dots, x_n)\varphi$ za $(Qx_1)(Qx_2)\dots(Qx_n)\varphi$.

- Je-li $\diamond$ binární relační symbol, píše se též $t \not\diamond s$ za $\neg(t \diamond s)$.

ÚLOHA. Buď L jazyk s rovností, φ buď L-formule a $0 < n \in \mathbb{N}$.

Napište L-formule vyjadřující:

„existuje právě n prvků“, „existuje méně než n prvků“,
„existuje $\diamond n$ prvků“ s $\diamond \in \{<, \leq, >, \geq\}$.
„existuje právě n prvků x s vlastností $\varphi(x, \dots)$“,
„prvků x s vlastností φ je $\diamond n$“ s $\diamond \in \{<, \leq, >, \geq\}$.

3.1.5. Teorie. Teorie rovnosti.

1. *Teorie* je dvojice $\langle L, T\rangle$, kde L je jazyk a $T \subseteq \mathrm{Fm}_L$ je množina *mimologických axiomů*, stručněji *axiomů.* Říkáme pak také, že T je *teorie*, a to v jazyce L čili *L-teorie.* Jazyk teorie T značíme $L(T)$; ten je ovšem určen jednoznačně. Místo $L(T)$-formule se říká též *formule teorie T*. *Teorie s rovností* je taková teorie, jejíž jazyk je s rovností. Teorie značíme často T, S, T', T_0 apod.

2. *Teorie rovnosti v L* je teorie $\mathrm{TE}_L = \emptyset$ v jazyce L s rovností, tj. teorie bez mimologických axiomů v jazyce L s rovností; je-li L prázdný jazyk s rovností, značíme $\mathrm{TE}_\emptyset$ jako PE a říkáme, že to je *teorie čisté rovnosti.*

Jakožto množiny axiomů jsou PE a TE_L totožné a prázdné, jako teorie však nikoli, neboť $L(\mathrm{PE}) \neq L(\mathrm{TE}_L)$, je-li signatura L neprázdná.

Buď T teorie TE_L, kde L je jazyk aritmetiky $L^A = \langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$(což je spočetný jazyk). Je zajímavé, že T je nerozhodnutelná teorie, avšak teorie PE je rozhodnutelná; to jsou již hlubší poznatky z matematické logiky.

3.1.6. Volné a vázané proměnné. Otevřené formule. Sentence. Generální uzávěr.

1. *Výskyt proměnné x* ve formuli φ je *vázaný* ve φ, je-li to výskyt v nějaké podformuli $(\forall x)\psi$ formule φ; v opačném případě je tento výskyt *volný* ve φ. Říkáme, že *proměnná x je volná* resp. *vázaná* ve φ, jestliže některý její výskyt je volný resp. vázaný ve φ.

Proměnná může být zároveň volná i vázaná v nějaké formuli. Jsou-li proměnné x, y různé, tak volné výskyty x v $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$, $(\forall y)\varphi$ jsou právě volné výskyty ve φ a ψ; to plyne z tvrzení o jednoznačnosti designátorů. Dále x nemá volný výskyt v $(\forall x)\varphi$. (Upozorněme, že v $(\forall x)\varphi$ není x těsně za $\forall$ výskyt proměnné x.)

2. Formule se nazývá *uzavřená*, čili *sentence*, není-li v ní volná žádná proměnná. Formule je *otevřená* a též *bezkvantifikátorová*, není-li v ní žádný kvantifikátor. *(Generální) uzávěr* φ je formule $(\forall x_1, \dots, x_n)\varphi$, kde mezi $x_1, \dots, x_n$ jsou všechny volné proměnné formule φ. Množinu všech otevřených L-formulí značíme OFm_L.

> Nápis
>
> $t(x_0, \dots, x_{n-1})$ nebo $t(\overline{x})$ resp. $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ nebo $\varphi(\overline{x})$
>
> značí, že $\overline{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$ je prostá sekvence proměnných a mezi $x_0, \dots, x_{n-1}$ jsou všechny proměnné termu t resp. všechny volné proměnné formule φ.

3.1.7. Substituce, instance, varianta.

1. Term t je *substituovatelný* za x do φ, jestliže pro každou proměnnou y termu t žádná podformule $(\forall y)\psi$ formule φ neobsahuje výskyt x, který je volný ve φ.

Substituce termu t do formule φ za proměnnou x se provádí tak, že všechny volné výskyty proměnné x ve φ se nahradí termem t, pokud(!) je term t substituovatelný za x do φ. Snadno se indukcí dle složitosti φ dokáže, že získaný výraz je formule; zapisujeme ji jako

$$\varphi(x/t)$$

a pokud je tento symbol užit, znamená to, že t je substituovatelné za x do φ.

Je-li φ bezkvantifikátorová formule, je zřejmě každý term substituovatelný za každou proměnnou do φ.

2. *Instance* formule φ je formule značená

$$\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$$

a získána z φ nahražením všech volných výskytů $x_1, \ldots, x_n$ za $t_1, \ldots, t_n$, přičemž $x_1, \ldots, x_n$ jsou různé proměnné, term t_i je substituovatelný za x_i do φ pro $i = 1, \ldots, n$ a substituce se provádí simultánně. Formule $\varphi(x_1/t_1)(x_2/t_2)\cdots(x_n/t_n)$ získána postupně prováděnou substitucí tedy není obecně instance φ.

Obdobně $t(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ značí term získaný z termu t simultánním nahražením všech výskytů $x_1, \ldots, x_n$ za $t_1, \ldots, t_n$, přičemž $x_1, \ldots, x_n$ jsou různé proměnné. Výsledkem je term, jak plyne z tvrzení o substituci v designátorech.

Místo $\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ resp. $t(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ píšeme též, nevede-li to k nedorozumění, jen

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \text{ resp. } t(t_1, \ldots, t_n).$$

Poznamenejme, že $\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ můžeme získat postupně prováděnou substitucí t_i za x'_i do $\varphi(x_1/x'_1, \ldots, x_n/x'_n)$, kde $x'_1, \ldots, x'_n$ jsou různé a nevyskytují se ani ve φ ani v žádném t_i (a x'_i je substituovatelné za x_i do φ). Obdobně je tomu s termy.

3. *Varianta* formule φ je formule, která se získá z φ konečnou aplikací kroků: podformuli $(\forall x)\psi$ nahraď $(\forall y)\psi(x/y)$, kde proměnná y není volná ve ψ (a je substituovatelná za x do ψ).

POZNÁMKA 3.1.8.

1. Substituovatelnost vyjadřuje korektnost substituce; ta má např. zaručit platnost formule $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$. Pokud nahradíme všechny volné výskyty x termem t i tehdy, kdy term t není substituovatelný za x do φ, nemusí uvedená implikace platit. Buď totiž např. $\varphi(x)$ tvaru $(\exists y)(x \neq y)$ s různými x, y. Pak $(\forall x)\varphi$ platí např. v oboru individuí $A = \{0, 1\}$ s $=$ interpretovaným jako identita, tj. platí ve struktuře $\langle A \rangle$. Avšak po nekorektní substituci termu t rovnému y za x do φ získáme $(\exists y)(y \neq y)$ a tato formule neplatí v $\langle A \rangle$. Tedy ani $(\forall x)\varphi \rightarrow (\exists y)(y \neq y)$ neplatí v $\langle A \rangle$.

2. Nechť y není volná ve φ a je substituovatelná za x do φ, φ' je $\varphi(x/y)$. Pak $\varphi'(y/x)$ je φ. Oba předpoklady dohromady totiž zaručují, že volný výskyt y ve φ' je právě tam, kde je volný výskyt x v φ. Tedy x je substituovatelné za y do φ' a také rovnost obou uvažovaných formulí platí.

3. a) Buď φ formule $(\exists x)(x < y) \vee (x = y)$ s různými proměnnými x, y. Je-li proměnná z různá od x, y, je $(\exists z)(z < y) \vee (x = y)$ varianta φ. Nelze však „variovat x na y“, neboť y má volný výskyt v $(\exists x)(x < y)$.

b) Chceme, aby varianta φ' formule byla ekvivalentní s φ; že tomu tak je dokážeme později jako tvrzení o variantách. Pokud bychom nedodrželi pravidla vytváření varianty, neplatilo by to. Vezmeme-li totiž za φ formuli $(\exists x)(x \neq y)$ s různými x, y a budeme chybně (neboť y má volný výskyt v $x \neq y$) „variovat“ x na y, získáme φ' tvaru $(\exists y)(y \neq y)$, což zjevně není ekvivalentní s φ. Nelze pominout ani podmínku substituovatelnosti. Buď totiž φ formule $(\exists y)(\exists x)(x \neq y)$; budeme-li chybně (díky tomu, že x není substituovatelné za y do $(\exists x)(x \neq y)$) „variovat“ y na x, získáme φ' tvaru $(\exists x)(\exists x)(x \neq x)$, což zjevně není ekvivalentní s φ.

Pomocí tvrzení o variantách lze až na ekvivalenci docílit, aby v dané formuli nebyla žádná proměnná zároveň vázaná i volná. Například ve formuli φ, která má tvar $(\forall x)(x < y)\ \&\ x + 0 = x$ s různými x, y, je x volná i vázaná. Buď x' proměnná různá od x, y. Pak je formule $(\forall x')(x' < y)\ \&\ x + 0 = x$ varianta φ, ve které není žádná proměnná zároveň vázaná i volná.

Realizace čili model jazyka L, platnost v modelu.

3.1.9. Model jako L-struktura. Redukt, expanze.

Buď L jazyk se signaturou $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

1. *Realizace* či *model* jazyka L je nějaká $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$; je-li L jazyk s rovností, je navíc realizace $=^A$ symbolu $=$ identita na A. Říkáme též, že $\mathcal{A}$ je *L-struktura* a můžeme psát $\mathcal{A} \models L$.

2. Buďte L, L' jazyky s $L \subseteq L'$, $\mathcal{A}'$ nějaká L'-struktura. *Redukce* či *redukt $\mathcal{A}'$ na L* je L-struktura $\mathcal{A}$, která vznikne z $\mathcal{A}'$ odebráním realizací symbolů, které nejsou v L; značíme ji $\mathcal{A}' \mid L$. Říkáme též, že $\mathcal{A}'$ je *expanze $\mathcal{A}$ do L'*.

3.1.10. Hodnota termu a platnost formule ve struktuře. Model teorie.

Buď $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ buď L-struktura.

1. Zobrazení $e : \mathrm{Var} \to A$ je *ohodnocení proměnných v A*, krátce *ohodnocení v A*. Pro takové e, prvek $a \in A$ a proměnnou x je $e(x/a)$ ohodnocení nabývající hodnotu a v x a jinak shodné s e.

Buď dále e nějaké ohodnocení proměnných v A.

2. *Hodnota L-termu t v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e* je hodnota designátoru t z $\mathrm{D}(\mathrm{Var} \cup \mathcal{F})$ ve struktuře $\mathcal{A}^e = \langle A, \mathcal{F}^A, e(x) \rangle_{x \in \mathrm{Var}}$. Značíme ji $t^A[e]$, stručněji často $t[e]$.

Tedy $t^A[e]$ je $H^A_{tm}(t, e)$, kde H^A_{tm} je sestrojená rekurzí:

$$
\begin{array}{ll}
H^A_{tm}(t, e) = e(x), & \text{je-li } t \text{ proměnná } x, \\
H^A_{tm}(t, e) = F^A(H^A_{tm}(t_0, e), \ldots, H^A_{tm}(t_{n-1}, e)), & \text{je-li } F \text{ z } \mathcal{F},\ n \text{ je četnost } F \\
 & t_0, \ldots, t_{n-1} \text{ jsou } L\text{-termy a} \\
 & t \text{ je } F(t_0, \ldots, t_{n-1}).
\end{array}
$$

3. *Hodnota $H^A_{at}(\varphi, e)$ atomické formule φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e* definujeme takto:

Když φ je tvaru $R(t_0, \ldots, t_{m-1})$, kde R je relační symbol L (tj. i $=$, je-li L s rovností), R má četnost m a $t_0, \ldots, t_{m-1}$ jsou termy, tak definovaná hodnota je 1 resp. 0, právě když $R^A(t_0^A[e], \ldots, t_{m-1}^A[e])$ platí resp. neplatí.

4. *Hodnota $H^A(\varphi, e)$ formule φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e* je definována rekurzí:

$$
\begin{array}{lcll}
H^A(\varphi, e) & = & H^A_{at}(\varphi, e), & \text{když } \varphi \text{ je atomická}, \\
 & & -_1 H^A(\varphi_0), & \text{když } \varphi \text{ je } \neg\varphi_0, \\
 & & H^A(\varphi_0) \to_1 H^A(\varphi_1), & \text{když } \varphi \text{ je } \varphi_0 \to \varphi_1, \\
 & & \min\{H^A(\varphi_0, e(x/a));\ a \in A\}, & \text{když } \varphi \text{ je } (\forall x)\varphi_0.
\end{array}
$$

5. a) *Formule φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e*, když $H^A(\varphi, e) = 1$; píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

   b) *Formule φ platí v $\mathcal{A}$*, platí-li v $\mathcal{A}$ při každém ohodnocení e proměnných v A; píšeme $\mathcal{A} \models \varphi$.

   c) Nechť T je L-teorie. L-struktura $\mathcal{A}$ je *model* T, píšeme $\mathcal{A} \models T$, když to je model každého φ z T. Dále φ *platí v* T, píšeme $T \models \varphi$, platí-li φ v každém modelu T.

Poznamenejme, že z definic ihned plyne, je-li $\diamond$ po řadě $\vee, \&, \leftrightarrow$ a „$\diamond$“ po řadě nebo, a, právě když:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \models (\varphi \diamond \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ „}\diamond\text{“ } \mathcal{A} \models \psi[e], \\
\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \text{pro každé } a \in A \text{ je } \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)], \\
\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \text{existuje } a \in A \text{ s } \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)].
\end{array}
$$

Dále pokud je L-struktura model T, je $L(T) = L$.

3.1.11. *Triviální L-struktura dané velikosti* je L-struktura $\mathcal{A}$ s univerzem A dané velikosti přičemž: $\emptyset \in A$, pro každý relační mimologický symbol R jazyka L četnosti m je $R^A = A^m$, pro každý funkční mimologický symbol F jazyka L četnosti n je $F^A = A^n \times \{\emptyset\}$. Speciálně je každý konstantní symbol interpretován jako $\emptyset$. Takovou strukturu značíme A_L. (Poznamenejme, že předpoklad $\emptyset \in A$ je jen technický; roli $\emptyset$ může hrát jakýkoli prvek z A.) Zřejmě platí:

a) Každý jazyk má model libovolné (nenulové) velikosti.

b) $A_L \models \mathrm{AFm}_L$, jakmile A_L je triviální L-struktura nějaké velikosti a L je bez rovnosti.

TVRZENÍ 3.1.12. (O závislosti hodnoty na proměnných.) *Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a t resp. φ nějaký L-term resp. L-formule, e, e' jsou ohodnocení proměnných v A, která se rovnají na všech proměnných termu t resp. volných proměnných formule φ. Pak platí:*

$$\text{a) } t^A[e] = t^A[e'], \qquad \text{b) } \mathcal{A} \models \varphi[e], \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e'].$$

Speciálně pro t bez proměnných a sentenci φ nezávisí $t^A[e]$ a $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ na e.

Důkaz. a) plyne bezprostředně indukcí na termech. b) se dokáže snadno indukcí na formulích; uveďme jen indukční krok pro univerzální kvantifikátor. Buď φ tvaru $(\forall x)\psi$ a nechť pro ψ tvrzení platí. Volné proměnné formule ψ jsou volné proměnné formule φ a eventuálně ještě proměnná x. Pak zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] \quad &\Leftrightarrow \quad \text{pro každé } a \in A \text{ je } \mathcal{A} \models \psi[e(x/a)] \\ &\Leftrightarrow \quad \text{pro každé } a \in A \text{ je } \mathcal{A} \models \psi[e'(x/a)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi[e']. \end{aligned}$$ □

Pomocí 3.1.12 rozšíříme přirozeně význam $t^A[e]$ a $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. Řekneme, že zobrazení $e \subseteq \mathrm{Var} \times A$ je *parciální ohodnocení v A* a že to je *ohodnocení pro t resp. φ v A*, pokud definiční obor e obsahuje každou proměnnou termu t resp. volnou proměnnou formule φ. Pro takové e nechť značí $t^A[e]$ resp. $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ hodnotu $t^A[e']$ resp. vztah $\mathcal{A} \models \varphi[e']$, kde $e' : \mathrm{Var} \to A$ s $e \subseteq e'$ je libovolné; to je dle 3.1.12 korektní.

ZNAČENÍ 3.1.13. Je-li $\overline{x} = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$ prostá sekvence proměnných, značíme

$$\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \text{ nebo jen } \overline{a}$$

ohodnocení $e = \{\langle x_i, a_i \rangle;\ i < n\}$ těchto proměnných. Pro proměnnou y pak značí $\overline{a}(y/b)$ ohodnocení, nabývající hodnotu b v y a hodnotu a_i pro x_i různé od y.

Speciálně, je-li každé $a_i \in A$, je uvedené e, tj. $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ čili $\overline{a}$, ohodnocení pro term $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a formuli $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ v A. Píšeme pak

$$\begin{aligned} t^A[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ či } t^A[\overline{a}] \quad &\text{místo} \quad t^A[e], \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ či } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \quad &\text{místo} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e]. \end{aligned}$$

TVRZENÍ 3.1.14. (O korektnosti substituce.) *Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura, t, s jsou termy, φ je formule jazyka L a e ohodnocení proměnných v A. Platí:*

$$1)\ t(x/s)[e] = t[e(x/s[e])]. \qquad 2)\ \mathcal{A} \models \varphi(x/s)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(x/s[e])].$$

Důkaz. 1) Indukcí na termech. Buď t proměnná y. Je-li y proměnná x, je vlevo $s[e]$ a vpravo je také $s[e]$. Když y není x, je vlevo $e(y)$ a vpravo také. Nechť t je $F(t_1, \ldots, t_m)$, kde F je m-ární funkční symbol a pro termy $t_1, \ldots, t_m$ tvrzení platí. Pak $t(x/s)[e] = F(t_1(x/s), \ldots)[e] = F^A(t_1(x/s)[e], \ldots) = F^A(t_1[e(x/s[e])], \ldots) = t[e(x/s[e])]$.

2) Indukcí na formulích. Pro φ atomickou tvaru $R(t_1, \ldots, t_m)$ to platí, neboť

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/s)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models R(t_1(x/s), \ldots)[e] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R^A(t_1(x/s)[e], \ldots) \Leftrightarrow R^A(t_1[e(x/s[e])], \ldots) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models R(t_1, \ldots)[e(x/s[e])].$$

Indukční krok pro $\neg, \to$ je jasný, neboť $(\neg\varphi_0)(x/s)$ je $\neg\varphi_0(x/s)$ a $(\varphi_0 \to \varphi_1)(x/s)$ je $\varphi_0(x/s) \to \varphi_1(x/s)$.

Buď φ tvaru $(\forall y)\psi$ a pro ψ nechť to platí. a) x nemá volný výskyt ve φ. Pak je $\varphi(x/s)$ rovno φ a e, $e(x/s[e])$ se rovnají na všech volných proměnných formule φ a dokazované $\Leftrightarrow$ tedy platí. b) x má volný výskyt ve φ. Pak b1) y není x, b2) y není v s a tedy $s[e(y/a)] = s[e]$.

Platí tedy užitím b2), definic a indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi(x/s)[e] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \psi(x/s)[e(y/a)] && \text{pro každé } a \in A\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \psi[e(y/a)(x/s[e(y/a)])] && \text{pro každé } a \in A\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \psi[e(x/s[e])(y/a)] && \text{pro každé } a \in A\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\forall y)\psi[e(x/s[e])].
\end{aligned}$$

□

LEMMA 3.1.15. (O hodnotě v reduktu.) *Buďte $L \subseteq L'$, $\mathcal{A}' \models L'$, $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L, e ohodnocení proměnných v A $(= A')$.*

1) *Pro L-term t platí $t^A[e] = t^{A'}[e]$.*

2) *Pro L-formuli φ platí $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$.*

Důkaz. 1) Snadno indukcí na L-termech. 2) Snadno indukcí na L-formulích. □

TVRZENÍ 3.1.16. (O izomorfních modelech.) *Nechť $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou L-struktury. Prosté zobrazení h množiny A na B je izomorfizmus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když platí* 1) *a* 2)*:*

1) $h(t^A[e]) = t^B[he]$ *pro každý L-term t a ohodnocení $e \in {}^{\mathrm{Var}}A$.*

2) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[he]$ *pro každou L-formuli φ a ohodnocení $e \in {}^{\mathrm{Var}}A$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. 1) Indukcí na L-termech. Je-li t proměnná x, máme $h(t^A[e]) = h(e(x)) = he(x) = t^B[he]$. Je-li t tvaru $F(t_0, \ldots, t_{n-1})$ s n-árním funkčním symbolem F a termy $t_0, \ldots, t_{n-1}$, pro které to platí, tak

$$\begin{aligned}
h(t^A[e]) &= h(F^A(t_0^A[e], \ldots, t_{n-1}^A[e]) = F^B(h(t_0^A[e]), \ldots, h(t_{n-1}^A[e]))\\
&= F^B(t_0^B[he], \ldots, t_{n-1}^B[he]) = t^B[he].
\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z toho, že h je izomorfizmus, třetí z indukčního předpokladu a čtvrtá z definice hodnoty termu.

2) Indukcí na formulích. Pro φ atomickou to plyne z toho, že h je izomorfizmus a díky 1). Indukční krok pro $\neg$, $\rightarrow$ je patrný. Buď konečně φ tvaru $(\forall y)\psi$ a nechť pro ψ to platí. Pak

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \psi[e(y/a)] \text{ pro každé } a \in A\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \psi[he(y/h(a))] \text{ pro každé } a \in A\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \psi[he(y/b)] \text{ pro každé } b \in B\\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models (\forall y)\psi[he].
\end{aligned}$$

Druhý vztah $\Leftrightarrow$ plyne díky indukčnímu předpokladu, třetí z toho, že h je na B.

Implikace $\Leftarrow$. Vztah $h(F^A(a_0, \ldots, a_{n-1})) = F^B(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$ pro n-ární funkční symbol F a $a_0, \ldots, a_{n-1}$ z A plyne volbou $t(x_0, \ldots, x_n)$ tvaru $F(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a $e(x_i) = a_i$ pro $i < n$ v 1).Vztah $R^A(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow R^B(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$ pro n-ární relační symbol R a prvky $a_0, \ldots, a_{n-1}$ z A plyne volbou $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ tvaru $R(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a $e(x_i) = a_i$ pro $i < n$ v 2). □

Třídy modelů, kategoričnost, izomorfní spektrum.

3.1.17. Třídy modelů. Axiomatizovatelné třídy.

1. *Třída všech modelů teorie T* resp. *velikosti κ* resp. *konečných* resp. *nekonečných* se značí

$$\mathsf{M}(T) \text{ resp. } \mathsf{M}^\kappa(T) \text{ resp. } \mathsf{M}^{<\infty}(T) \text{ resp. } \mathsf{M}^\infty(T),$$

eventuálně uvedený symbol $\mathsf{M}^*(T)$ zapíšeme jako M^*_T. Je-li T prázdná L-teorie, píšeme $\mathsf{M}^*(L)$, eventuálně M^*_L. Pak M_L resp. M^κ_L resp. $\mathsf{M}^{<\infty}_L$ resp. M^∞_L je třída *všech modelů jazyka L* resp. *velikosti κ* resp. *konečných* resp. *nekonečných*. Platí tedy např.

$$\mathsf{M}^\kappa(T) \subseteq \mathsf{M}^{<\infty}(T) \cup \mathsf{M}^\infty(T) = \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(L).$$

Množinu všech modelů teorie T s pevným univerzem A ($\neq \emptyset$) označujeme

$$\mathsf{M}(A, T).$$

2. Buď K třída modelů jazyka L, tj. $\mathsf{K} \subseteq \mathsf{M}(L)$. Třída K je *axiomatizovatelná* resp. *konečně axiomatizovatelná*, existuje-li L-teorie T resp. navíc konečná tak, že

$$\mathsf{K} = \mathsf{M}(T).$$

Symbolem $-\mathsf{K}$ značíme *komplement třídy modelů K*, tj. třídu $\mathsf{M}(L) - \mathsf{K}$.

První představu o třídě $\mathsf{M}^\kappa(T)$ si můžeme udělat pomocí $\mathsf{M}(A,T)$. Je $\mathsf{M}(A,T) \subseteq \mathsf{M}^{|A|}(T)$ a množina $\mathsf{M}(A,T)$ obsahuje až na izomorfizmus každý model z $\mathsf{M}^{|A|}(T)$, neboť pro $\mathcal{B} \in \mathsf{M}^{|A|}(T)$ existuje prosté zobrazení h množiny B na A, které přenese každou relaci a funkci struktury $\mathcal{B}$, čímž vznikne struktura $\mathcal{A}$ s univerzem A a h je izomorfizmus $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$.

TVRZENÍ 3.1.18. (Odhad počtu L-struktur s daným univerzem.) *L-struktur s univerzem $\kappa \geq \omega$ resp. $2 \leq \kappa < \omega$ je nejvýše $2^{\kappa\cdot\|L\|}$ resp. $2^{\|L\|}$.*

Důkaz. Buď $L = \langle \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{F}} \rangle$. Množina Rel resp. Op všech relací resp. operací konečných četností v κ má kardinalitu nejvýše 2^κ resp. ω. Označme $\lambda = \|L\|$. Je-li $\mathcal{A} = \langle \kappa, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$, je $\mathcal{R}^A : \mathcal{R} \to Rel$, $\mathcal{F}^A : \mathcal{F} \to Op$. Tudíž uvažovaných dvojic $\langle \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je nejvýše tolik, kolik je kardinalita množiny $(2^\kappa)^\lambda \times (2^\kappa)^\lambda$ resp. $\omega^\lambda \times \omega^\lambda$, což je $2^{\kappa\cdot\lambda}$ resp. 2^λ, neboť $\lambda \geq \omega$.

TVRZENÍ 3.1.19. *Nechť T je L-teorie, $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ jsou L-formule a* g.c.(φ) *značí generální uzávěr φ. Platí:*

1)
$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models \varphi_0 & \Rightarrow & \mathcal{A} \not\models \neg\varphi_0 \\
\mathcal{A} \models \varphi_1 \ \textit{nebo} \cdots \textit{nebo}\ \mathcal{A} \models \varphi_n & \Rightarrow & \mathcal{A} \models \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n \\
\mathcal{A} \models \varphi_1 \ \textit{a} \cdots \textit{a}\ \mathcal{A} \models \varphi_n & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n \\
\mathcal{A} \models \varphi_0 & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \mathrm{g.c.}(\varphi_0).
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{M}(T) - \mathsf{M}(\neg\varphi_0) & \supseteq & \mathsf{M}(T, \varphi_0) \\
\mathsf{M}(T, \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n) & \supseteq & \mathsf{M}(T, \varphi_1) \cup \cdots \cup \mathsf{M}(T, \varphi_n) \\
\mathsf{M}(T, \varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n) & = & \mathsf{M}(T, \varphi_1) \cap \cdots \cap \mathsf{M}(T, \varphi_n) \\
\mathsf{M}(T, \varphi_0) & = & \mathsf{M}(T, \mathrm{g.c.}(\varphi_0))
\end{array}$$

2) *Uvedené dvě implikace $\Rightarrow$ resp. inkluze $\subseteq$ nelze obrátit. Jsou-li $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ sentence, platí $\Leftrightarrow$ místo $\Rightarrow$ resp. $=$ místo $\subseteq$.*

3) $\mathsf{M}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) = \mathsf{M}(\varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n)$, $\qquad \mathsf{M}(T) = \mathsf{M}(\{\mathrm{g.c.}(\varphi);\ \varphi \in T\})$.

Důkaz. 1) Nechť e je ohodnocení proměnných v A. První implikace. Je $\mathcal{A} \models \varphi_0[e]$, tedy $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi_0[e]$. Podobně snadno plynou ostatní tři vztahy. Zbývající čtyři vztahy jsou důsledkem prvých čtyř.

2) Prvou implikaci $\Rightarrow$ nelze obrátit. Buď totiž φ_0 formule $x \leq 0$, $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq, 0 \rangle$. Pak $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi_0$, $\mathcal{A} \not\models \varphi_0$. Podobně je to s druhou implikací $\Rightarrow$. Odtud pak plyne, že nelze obrátit ani inkluze $\subseteq$.

Nechť e je ohodnocení proměnných v A. Je-li φ_0 sentence, tak

$$\mathcal{A} \models \varphi_0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_0[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \neg\varphi_0[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \neg\varphi_0,$$

neboť hodnota $\mathcal{A} \models \varphi_0$ nezávisí na e. Podobně je tomu s disjunkcí. Důsledkem je, že místo inkluzí $\subseteq$ můžeme psát $=$.

3) plyne ihned ze 7. a 8. vztahu z 1). $\square$

3.1.20. Pojem kategoričnosti. Izomorfní spektrum.

Teorie je *κ-kategorická*, čili *kategorická v kardinalitě κ*, má-li až na izomorfizmus jediný model kardinality κ. Pro teorii T definujeme její *izomorfní spektrum* $\mathrm{I}(\kappa, T)$:

$$\mathrm{I}(\kappa, T) = \text{počet neizomorfních modelů z } \mathsf{M}^{\kappa}(T).$$

Je-li T prázdná L-teorie, místo $\mathrm{I}(\kappa, T)$ píšeme $\mathrm{I}(\kappa, L)$; je to počet neizomorfních modelů jazyka L, které mají kardinalitu κ.

Definici $\mathrm{I}(\kappa, T)$ můžeme formálněji vyjádřit jako kardinalitu množiny $\mathsf{M}(\kappa, T)/\cong$. Přitom $\mathsf{M}(\kappa, T)/\cong$ je množina všech tříd ekvivalence E na $\mathsf{M}(\kappa, T)$, kde

$$\mathcal{A}\ E\ \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

PŘÍKLADY 3.1.21.

L=$\langle U \rangle$, U je unární relační symbol.			
$\lvert\mathsf{M}(\kappa, L)\rvert$	$=$	2^{κ}	pro $\kappa > 0$
$\mathrm{I}(\kappa, L)$	$=$	$\lvert\mathbf{Cn} \cap \kappa^{+}\rvert$	pro $\kappa > 0$
L=$\langle R \rangle$, R je binární relační symbol.			
$\lvert\mathsf{M}(\kappa, L)\rvert$	$=$	2^{κ}	pro $\kappa \geq \omega$
$\mathrm{I}(\kappa, L)$	$=$	2^{κ}	pro $\kappa \geq \omega$
L=$\langle c_i \rangle_{i \in n}$, c_i jsou konstantní symboly, $0 < n < \omega$.			
$\lvert\mathsf{M}(\kappa, L)\rvert$	$=$	κ^{n}	pro $\kappa < \omega$
		κ	pro $\kappa \geq \omega$
$\mathrm{I}(\kappa, L)$	$=$	$B(n)$	$\kappa \geq \omega$
Poznámka. $B(n)$ je n-té Bellovo číslo, udávající počet rozkladů n.			
L=$\langle c_i \rangle_{i \in n}$, c_i jsou konstantní symboly, $0 < n < \omega$. $T = \{c_i \neq c_j,\ i \neq j \text{ a } i, j \in n\}$; teorie n různých konstant.			
$\lvert\mathsf{M}(\kappa, T)\rvert$	$=$	$\binom{\kappa}{n} n!$	pro $n \leq \kappa < \omega$
		κ	pro $\kappa \geq \omega$
$\mathrm{I}(\kappa, T)$	$=$	1	pro $n \leq \kappa$
Poznámka. $\binom{\kappa}{n} n!$ je počet prostých n-tic v κ.			
L=$\langle \leq \rangle$, $\leq$ je binární relační symbol. T je teorie LO lineárního uspořádání (v L).			
$\lvert\mathsf{M}(\kappa, T)\rvert$	$=$	$\kappa!$	pro $\kappa < \omega$
		2^{κ}	pro $\kappa \geq \omega$.
$\mathrm{I}(\kappa, T)$	$=$	1	pro $\kappa < \omega$
		2^{κ}	pro $\kappa \geq \omega$
L=$\langle \leq \rangle$, $\leq$ je binární relační symbol. T je teorie DeLO hustého lineárního uspořádání bez konců (v L).			
$\mathrm{I}(\kappa, T)$	$=$	1	pro $\kappa = \omega$
		2^{κ}	pro $\kappa > \omega$

3.1.22. Teorie struktury. Elementární ekvivalence struktur.

1. *Teorie L-struktury* $\mathcal{A}$ je množina L-sentencí platných v $\mathcal{A}$; značíme ji

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}).$$

2. Dvě L-struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou *elementárně ekvivalentní*, když $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$; píše se pak

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Snadno se zjistí, že $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ pro každou L-formuli $\varphi)$.

ÚLOHY. 1. Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ a φ buď L-formule. Platí:
a) $T \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. b) $T \models \neg\varphi$ nebo $T \models \varphi$, je-li φ sentence.

2. Buď L s rovností, $\mathcal{A}$ buď L-struktura. Platí:
a) Buď $|A| \geq 2$. Pak existuje L-formule φ s $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \not\models \varphi$ a $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \not\models \neg\varphi$.
b) Buď $|A| = 1$. Pak neexistuje L-formule φ s $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \not\models \varphi$ a $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \not\models \neg\varphi$.

3. Buď $L = \langle c, d \rangle$ jazyk s rovností, kde c, d jsou konstantní symboly, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ nechť jsou modely L. Kdy právě platí $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Dedukce.

3.1.23. Logické axiomy a pravidla.

Buď L jazyk.

1. *Logické axiomy* LAx_L, stručněji LAx, predikátové logiky v jazyce L jsou:

L-formule tvaru (PL1) – (PL3), *axiomy o kvantifikátorech* jazyka L a *axiomy rovnosti* jazyka L, jakmile je L s rovností:

Axiomy o kvantifikátorech:

Axiomy substituce: L-formule $(\forall x)\varphi \to \varphi(x/t)$, je-li term t substituovatelný za proměnnou x do formule φ.

Axiomy $\forall$-zavedení: L-formule $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$, není-li proměnná x volná ve φ.

Axiomy rovnosti: $x = x$,

$x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n)$,
pokud R je n-ární relační symbol jazyka L.

$x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n)$,
pokud F je n-ární funkční symbol jazyka L.

2. *Pravidla dedukce (odvozování)* jsou:

Pravidlo *modus ponens* $\mathrm{MP}(\varphi, \varphi \to \psi) = \psi$: z $\varphi, \varphi \to \psi$ odvoď ψ.
Pravidla *generalizace* $\mathrm{Gen}_x(\varphi) = (\forall x)\varphi$ pro $x \in \mathrm{Var}$: z φ odvoď $(\forall x)\varphi$.

3. Když T je L-teorie, neuvádíme v T logické axiomy jazyka L. Říkáme pak, že formule z T jsou *mimologické axiomy* teorie T.

3.1.24. Důkaz, teorém, vyvratitelná, nezávislá a konzistentní formule.

Buď $T \subseteq \mathrm{Fm}_L$.

1. *Důkaz v T* je $\{\mathrm{MP}\} \cup \{\mathrm{Gen}_x;\ x \in \mathrm{Var}\}$-odvození z $T \cup \mathrm{LAx}$; je to *důkaz formule*, která je jeho posledním členem. Formule φ je *dokazatelná* v T čili to je *teorém* v T, existuje-li nějaký její důkaz v T; píšeme pak

$$T \vdash \varphi.$$

Množinu všech teorémů teorie T resp. těch, které jsou navíc sentencemi, značíme

$$\mathrm{Thm}(T) \text{ nebo } \mathrm{Thm}_T \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Th}(T) \text{ nebo } \mathrm{Th}_T.$$

Tedy $\mathrm{Thm}(T)$ je $\{\mathrm{MP}\} \cup \{\mathrm{Gen}_x;\ x \in \mathrm{Var}\}$-uzávěr $T \cup \mathrm{LAx}$. Speciálně jsou teorémy teorie T definovány induktivně pravidly:

- Každý axiom teorie T a každý logický axiom je teorém teorie T.
- Jsou-li φ, $\varphi \to \psi$ teorémy teorie T, je ψ a $(\forall x)\varphi$ teorém teorie T, když $x \in \mathrm{Var}$.

Jakožto uzávěr má operace Thm následující vlastnosti pro $T \subseteq \mathrm{Fm}_L$ (viz 1.1.3):

$$T' \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Thm}(T') \subseteq \mathrm{Thm}(T), \qquad T \subseteq \mathrm{Thm}(T) = \mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T)).$$

2. Formule φ je *vyvratitelná* a též *spor* v T, když $T \vdash \neg\varphi$,
nezávislá v T, když $T \nvdash \varphi$ a $T \nvdash \neg\varphi$,
konzistentní s T, když $T \nvdash \neg\varphi$.

3. Když $T = \emptyset$, vypouštíme v uvedených pojmech výraz „v[s] T“ či jej nahradíme výrazem „logicky“ nebo „v logice“.

TVRZENÍ 3.1.25. (O korektnosti predikátové logiky.)

1) a) *Každý logický axiom je pravdivý.*

b) *Když $\mathcal{A} \models \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, tak $\mathcal{A} \models \psi$ a $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$.*

2) *Pro teorii T a její formuli φ platí: $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz. 1) Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura. a) Každá L-formule tvaru (PL1) – (PL3) jasně platí v $\mathcal{A}$, neboť to je tautologie. Z definice platnosti atomické formule plyne platnost axiomů rovnosti v $\mathcal{A}$. Buď t term substituovatelný do φ za x a e ohodnocení proměnných v A; dokážeme, že $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \varphi(x/t))[e]$. Nechť $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$. Pak $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/t[e])]$ a dle tvrzení 3.1.14 o korektnosti substituce je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$. Snadno se dokáže také i každý axiom $\forall$-zavedení, užijeme-li toho, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nezávisí na $e(x)$, není-li x volná ve φ. b) Evidentně $\mathcal{A} \models \psi$. Protože $\mathcal{A} \models \varphi$ značí, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení proměnných v A, jasně $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$.

2) plyne indukcí na teorémech T bezprostředně užitím 1). $\square$

POZNÁMKA. Formule $\varphi \to (\forall x)\varphi$ není obecně pravdivá, tedy ji nelze vzít za logický axiom. Buď totiž např. φ tvaru $U(x)$, kde U je unární relační symbol. Pak $\langle 2, \{0\}\rangle \not\models \varphi \to (\forall x)\varphi$.

Formule jazyka L predikátové logiky jsou výroky nad prvovýroky $\mathbb{P}(L)$, kterými jsou právě všechny atomické a kvantifikátorem začínající L-formule. V tomto smyslu dedukce predikátové logiky obsahuje dedukci výrokové logiky. Speciálně je každá tautologie dokazatelná v predikátové logice. Protože všechny vztahy z 2.1.10, píšeme-li tam $\vdash$ místo $\models$, plynou z jistých tautologií a užitím pravidla modus ponens, platí i v predikátové logice. Shrňme to:

TVRZENÍ 3.1.26. *Každá tautologie je dokazatelná v predikátové logice. Platí tvrzení z* (2.1.10), *kde píšeme* $\vdash$ *místo* $\models$. *Speciálně platí následující pravidla.*

Rozbor případů:	$T \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi \quad \Leftrightarrow \quad (T \vdash \varphi \to \chi \ \ a \ \ T \vdash \psi \to \chi)$.
Konjunkce:	$T \vdash \varphi$ *a* $T \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \,\&\, \psi$.
Tranzitivita implikace:	$T \vdash \varphi \to \psi$ *a* $T \vdash \psi \to \chi \Rightarrow T \vdash \varphi \to \chi$.

3.1.27. Bezesporná a kompletní teorie. Extenze, ekvivalentnost a konzervativnost.

1. Teorie T je *sporná*, je-li v ní dokazatelná každá $L(T)$-formule; jinak je *bezesporná*. Teorie T je *kompletní*, je-li bezesporná a každá $L(T)$-sentence je v ní dokazatelná nebo vyvratitelná.

2. Teorie T' je *extenze* teorie T, když $L(T) \subseteq L(T')$ a $\mathrm{Thm}(T) \subseteq \mathrm{Thm}(T')$; je *jednoduchá*, když navíc $L(T) = L(T')$. Dvě teorie jsou *ekvivalentní*, je-li každá z nich extenzí druhé. Pro teorii T tedy platí díky $\mathrm{Thm}(T) = \mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T))$:

$$T \text{ je ekvivalentní s } \mathrm{Thm}(T).$$

3. Extenze T' teorie T je *konzervativní*, je-li každá $L(T)$-formule dokazatelná v T' dokazatelná i v T.

TVRZENÍ 3.1.28. *Pro teorii* T *platí:*

a) $T \vdash \bot \Leftrightarrow T$ *je sporná.*

b) $T \vdash \bot \leftrightarrow \varphi$, *jakmile* φ *je vyvratitelná v* T.

c) $T \vdash \top \leftrightarrow \varphi$, *jakmile* φ *je dokazatelná v* T.

Důkaz. Formule $\top$ je $\varphi_0 \to \varphi_0$ pro jisté φ_0 a $\bot$ je $\neg\top$. a) Implikace $\Leftarrow$ je jasná, dokazujeme $\Rightarrow$. Když $T \vdash \bot$, díky $\vdash \varphi \to \varphi$, $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$ a modus ponens máme $T \vdash \chi$ pro každou $L(T)$-formuli χ.

b) Buď $T \vdash \neg\varphi$. Jelikož $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ je tautologie, modus ponens dá $T \vdash \varphi \to \bot$. Jelikož $\bot \to \varphi$ je tautologie, máme $T \vdash \bot \to \varphi$. Podle 1) je $T \vdash \psi \leftrightarrow \chi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \chi$ a $T \vdash \chi \to \psi$, tedy $T \vdash \bot \leftrightarrow \varphi$ platí.

c) jako b) nebo z b) aplikovaného nyní na v T vyvratitelnou formuli $\neg\varphi$. $\square$

TVRZENÍ 3.1.29. *Pro teorii* T *platí:*

1)	T *je bezesporná*	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Thm}(T)$ *je bezesporná*
2)	T *je kompletní*	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Thm}(T)$ *je kompletní.*
3)	T *je maximální bezesporná*	$\Rightarrow$	$T = \mathrm{Thm}(T)$.
4)	T *je kompletní*	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Thm}(T)$ *je maximální bezesporná.*

Důkaz. 1) a 2) plyne z toho, že T je ekvivalentní s $\mathrm{Thm}(T)$.

3) Je $T \subseteq \mathrm{Thm}(T)$ a dle 1) je $\mathrm{Thm}(T)$ bezesporná, díky maximalitě T nutně $\mathrm{Thm}(T) \subseteq T$.

4) Implikace $\Rightarrow$. Buď T kompletní. Je $\mathrm{Thm}(T)$ bezesporná. Je-li $S \supseteq \mathrm{Thm}(T)$ $L(T)$-teorie a $\varphi \in S - \mathrm{Thm}(T)$, tak pro generální uzávěr φ' formule φ je $S \vdash \varphi'$. Nutně $T \nvdash \varphi'$ (neboť jinak $T \vdash \varphi$), tedy $T \vdash \neg\varphi'$ díky kompletnosti T a $\varphi', \neg\varphi' \in \mathrm{Thm}(S)$, tedy S je sporná. Implikace $\Leftarrow$. Buď $\mathrm{Thm}(T)$ maximální bezesporná. Pro sentenci σ je $\mathrm{Thm}(T) \vdash \sigma$ nebo $\mathrm{Thm}(T) \vdash \neg\sigma$. Díky $\mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T)) = \mathrm{Thm}(T)$ tedy $T \vdash \sigma$ nebo $T \vdash \neg\sigma$. $\square$

POZNÁMKY 3.1.30.

1. Nechť T je L-teorie, která má model. Pak platí:

a) T je kompletní $\Leftrightarrow$ T je ekvivalentní s $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro nějakou L-strukturu $\mathcal{A}$.

b) Je-li T je kompletní, jsou každé její dva modely elementárně ekvivalentní.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$. Buď T kompletní. Předpokládáme, že T má nějaký model $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models T$. Je T ekvivalentní s $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Buď totiž φ sentence. Když $T \vdash \varphi$, tak $\mathcal{A} \models \varphi$ díky korektnosti a pak $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \varphi$. Buď naopak $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \varphi$. Je $\mathcal{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, díky korektnosti je $\mathcal{A} \models \varphi$ a díky kompletnosti T nutně $T \vdash \varphi$. Implikace $\Leftarrow$. Nechť T je ekvivalentní s $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro nějakou L-strukturu $\mathcal{A}$. Pak je T bezesporná, neboť $\mathcal{A} \models T$. (Pro $\varphi \in T$ je totiž $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \varphi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$ díky $\mathcal{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ a korektnosti.) Nechť φ je sentence. Pak $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tedy $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. b) Pro modely $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ kompletní teorie T a sentenci φ jazyka $L(T)$ máme dle a):

$$\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{B}) \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{B}).$$

(V prvé $\Leftrightarrow$ je $\Rightarrow$ jasné a $\Leftarrow$ platí, neboť $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \varphi \in \mathrm{Thm}(\mathcal{A})$; zde prvá $\Rightarrow$ plyne z $\mathcal{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ a korektnosti.) $\square$

2. Buďte T, T' teorie.

a) Buď $L(T) \subseteq L(T')$. T' je extenze T právě když je každý axiom teorie T dokazatelný v T'. Buď $L(T) = L(T')$. T' je ekvivalentní s T' právě když každý axiom T je dokazatelný v T' a naopak.

b) T je ekvivalentní s $L(T)$-teorií $\{\mathrm{g.c.}(\varphi);\ \varphi \in T\}$, kde $\mathrm{g.c.}(\varphi)$ je uzávěr φ.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$ je jasná. Když naopak $T \subseteq \mathrm{Thm}(T')$, tak $\mathrm{Thm}(T) \subseteq \mathrm{Thm}(\mathrm{Thm}(T')) = \mathrm{Thm}(T')$. Tvrzení o ekvivalenci plyne bezprostředně. b) Je $\{\varphi\} \vdash \mathrm{g.c.}(\varphi)$ dle pravidla generalizace. Naopak $\{\mathrm{g.c.}(\varphi)\} \vdash \varphi$ užitím axiomu substituce a modus ponens. Tvzení tedy plyne z a). $\square$

Teorémy logiky a pravidla dokazování.

Říkáme, že proměnná x je *[ne]kvantifikovaná ve formuli* φ, když [není]je ve φ výskyt $(\forall x)$. Když proměnná x je nekvantifikovaná ve φ, je substituovatelná za každou proměnnou do φ. Nemá-li proměnná x výskyt ve φ, nemusí být substituovatelná do φ za nějakou proměnnou. Např. x nemá výskyt ve φ tvaru $(\exists x)(y = z)$ a není substituovatelná za y do φ.

TVRZENÍ 3.1.31. *Buďte φ, ψ formule teorie T.*

1) $\vdash \varphi(x/t) \to (\exists x)\varphi$.

2) (Pravidlo $\forall$-zavedení.) $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \varphi \to (\forall x)\psi$, *pokud x není volná proměnná φ.*

3) (Pravidlo $\exists$-zavedení.) $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash (\exists x)\varphi \to \psi$, *pokud x není volná proměnná ψ.*

Důkaz. 1) Je $\vdash (\forall x)\neg\varphi \to \neg\varphi(x/t)$, tedy pomocí tautologie a modus ponens také $\vdash \varphi(x/t) \to \neg(\forall x)\neg\varphi$ a tvrzení plyne z definice $\exists$.

2) Pravidlo generalizace dá $T \vdash (\forall x)(\varphi \to \psi)$, $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$ je axiom $\forall$-zavedení, užitím modus ponens pak $T \vdash \varphi \to (\forall x)\psi$.

3) Je $T \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ pomocí modus ponens z $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ a $T \vdash \varphi \to \psi$, dále je $T \vdash \neg\psi \to (\forall x)\neg\varphi$ dle pravidla $\forall$-zavedení; $T \vdash (\exists x)\varphi \to \psi$ plyne pomocí zřejmých tautologií a z definice $\exists$. □

VĚTA 3.1.32. *Buďte φ, ψ nějaké L-formule, T buď L-teorie.*

1) (O uzávěru.) *$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi'$, je-li φ' uzávěr φ.*

2) (O instanci.) *$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi'$, je-li φ' instance φ.*

3) (O konstantách.) *$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$, pokud je T' extenze T o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ (a žádný nový mimologický axiom).*

4) (O dedukci.) *Když ψ je sentence, tak $T \vdash \psi \to \varphi \Leftrightarrow T, \psi \vdash \varphi$.*

5) (Důkaz sporem.) *Když φ je sentence, tak $(T, \neg\varphi \vdash \bot) \Rightarrow T \vdash \varphi$.*

Důkaz. 1) Implikace $\Rightarrow$ plyne ihned z pravidla generalizace, opačná užitím axiomu substituce a pravidla modus ponens.

2) Nechť $T \vdash \varphi$. Je-li φ' tvaru $\varphi(x_1/t_1, x_2, \dots, x_n)$, platí to na základě generalizace, axiomu substituce a pravidla modus ponens. Nechť φ' je $\varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$; $y_1, \dots, y_n$ buďte různé proměnné nekvantifikované a nevyskytující se ani ve φ ani ve φ'. Podle již dokázaného platí $T \vdash \varphi_0$, kde φ_0 je $\varphi(x_1/y_1, \dots, x_n/y_n)$, neboť zde simultánní substituování vede k témuž, jako postupné. Touž argumentací dostaneme $T \vdash \varphi_0(y_1/t_1, \dots, y_n/t_n)$ a poslední formule je jasně φ'.

3) Zřejmě $T \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi \Rightarrow T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$. Buď naopak $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$; buď D příslušný důkaz a $y_1, \dots, y_n$ různé proměnné, které se nevyskytují ani nejsou kvantifikované v žádné formuli z D. Nahradíme-li v D každý výskyt c_i proměnnou y_i, $i = 1, \dots, n$, získáme tak důkaz v T formule φ_0 tvaru $\varphi(x_1/y_1, \dots, x_n/y_n)$, neboť z každého logického axiomu získáme uvedeným nahrazením logický axiom, mimologické se nových konstant netýkají a z aplikace pravidla se opět stane aplikace pravidla. Jelikož φ je $\varphi_0(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n)$, máme $T \vdash \varphi$ podle tvrzení o instanci.

4) Implikace $\Rightarrow$ plyne ihned užitím modus ponens, dokonce bez předpokladu, že ψ je sentence. Buď nyní $T, \psi \vdash \varphi$; dokážeme $T \vdash \psi \to \varphi$, a to indukcí na teorémech teorie T, ψ.

Buď φ axiom teorie T, ψ. Je-li φ rovno ψ, je $\psi \to \varphi$ tautologie, tedy je dokazatelná v T. Je-li φ axiom T, plyne z axiomu $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ užitím modus ponens žádané $T \vdash \psi \to \varphi$.

Buď φ odvozeno pomocí modus ponens z χ, $\chi \to \varphi$ a pro χ, $\chi \to \varphi$ nechť to platí. Odtud a z axiomu $\psi \to (\chi \to \varphi) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi))$ užitím modus ponens získáme $T \vdash \psi \to \varphi$.

Buď φ odvozeno generalizací z χ, tj. φ je tvaru $(\forall x)\chi$, a pro χ nechť tvrzení platí. Je $T, \psi \vdash \chi$, tedy $T \vdash \psi \to \chi$ dle indukčního předpokladu; generalizace a pravidlo $\forall$-zavedení dá $T \vdash \psi \to \varphi$.

5) Z $T, \neg\varphi \vdash \bot$ plyne $T \vdash \neg\varphi \to \bot$ užitím věty o dedukci. Pomocí tautologií $(\neg\varphi \to \bot) \to (\top \to \varphi)$, $(\top \to \varphi) \to \varphi$ a modus ponens pak $T \vdash \varphi$. □

POZNÁMKA 3.1.33. Nechť U je unární relační symbol.

1. $\not\models U(x) \to (\forall x)U(x)$. O tom svědčí model $\mathcal{A} = \langle 2, \{0\} \rangle$.

2. Ve větě o dedukci "$T, \psi \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to \varphi$, jakmile ψ je sentence" nelze vynechat předpoklad, že ψ je sentence. Máme totiž $U(x) \vdash (\forall x)U(x)$ dle pravidla generalizace, nikoli však $\vdash U(x) \to (\forall x)U(x)$, neboť to by znamenalo $\models U(x) \to (\forall x)U(x)$, což dle 1. neplatí.

3. V tvrzení o důkazu sporem "$(T, \neg\varphi \vdash \bot) \Rightarrow T \vdash \varphi$, jakmile je φ sentence" nelze vynechat předpoklad, že φ je sentence. O tom svědčí φ tvaru $U(x) \to (\forall x)U(x)$, neboť $\neg\varphi \vdash (\forall x)U(x), \neg(\forall x)U(x)$, tedy $\neg\varphi \vdash \bot$. Avšak $\not\vdash \varphi$ dle 1.

4. V tvrzení o instanci "$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi'$, jakmile je φ' instance φ", nelze implikaci obrátit. To ukazuje φ rovno $x = 0$; je $T \vdash \varphi(x/0)$, nemusí ale být $T \vdash \varphi$.

VĚTA 3.1.34.

1) (Pravidlo distribuce (Q).) *Když Q je $\forall$ nebo $\exists$, tak*
$$(T \vdash \varphi \to \psi) \quad \Rightarrow \quad T \vdash (Qx)\varphi \to (Qx)\psi.$$
2) (O ekvivalenci.) *Nechť formule φ' se získá z φ nahrazením některých výskytů podformulí $\psi_1, \dots, \psi_n$ po řadě formulemi $\psi'_1, \dots, \psi'_n$. Pak platí*
$$(T \vdash \psi_1 \leftrightarrow \psi'_1, \cdots, T \vdash \psi_n \leftrightarrow \psi'_n) \quad \Rightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$
3) (O variantách.) *Je-li φ' varianta φ, tak $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*
4) (Vytýkání kvantifikátorů.)
   a) $\vdash (Qx)(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to (Qx)\psi)$, *nemá-li x volný výskyt ve φ a Q je kvantifikátor.*
   b) $\vdash (Qx)(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((Q'x)\varphi \to \psi)$, *nemá-li x volný výskyt ve ψ, Q je kvantifikátor a Q' je $\exists$ resp. $\forall$, pokud Q je $\forall$ resp. $\exists$.*
   c) $\vdash (Qx)(\varphi \diamond \psi) \leftrightarrow ((Qx)\varphi \diamond \psi)$, *nemá-li x volný výskyt ve ψ, Q je kvantifikátor a $\diamond$ je & nebo $\vee$.*

Důkaz. 1) Z axiomu $(\forall x)\varphi \to \varphi$ a $T \vdash \varphi \to \psi$ dostaneme $T \vdash (\forall x)\varphi \to \psi$ a užitím pravidla $\forall$-zavedení požadované $T \vdash (\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi$. Tvrzení pro Q rovno $\exists$ plyne z dokázaného a z definice $\exists$.

2) Indukcí dle složitosti φ. Je-li φ atomická, φ' je φ nebo některé ψ'_i a φ je ψ_i; tvrzení pak jasně platí. Indukční krok pro negaci a implikaci je snadný a pro obecnou kvantifikaci plyne z pravidla distribuce $\forall$.

3) Díky tvrzení o ekvivalenci a definici varianty stačí zřejmě dokázat, že $\vdash (\forall x)\psi \leftrightarrow (\forall y)\psi(x/y)$, není-li proměnná y volná ve ψ. Označme $\psi(x/y)$ jako ψ'; zřejmě $\psi'(y/x)$ je ψ. Jak $(\forall y)\psi' \to \psi$, tak $(\forall x)\psi \to \psi'$ je axiom substituce; pomocí pravidla $\forall$-zavedení dostaneme snadno dokazovanou ekvivalenci.

4) a) Buď Q rovno $\forall$. Stačí dokázat $\leftarrow$. $((\forall x)\psi \to \psi) \to ((\varphi \to (\forall x)\psi) \to (\varphi \to \psi))$ je tautologie a její předpoklad je axiom substituce; pomocí modus ponens a pravidla $\forall$-zavedení dostaneme žádanou implikaci.

Buď Q rovno $\exists$. Dokážeme $\to$. Jako v a) je $(\psi \to (\exists x)\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\exists x)\psi))$ tautologie a $\vdash \psi \to (\exists x)\psi$, tedy $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\exists x)\psi)$. Užitím pravidla $\exists$-zavedení získáme dokazovaný vztah.

Dokážeme $\leftarrow$. Platí $\vdash \neg\varphi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$ (neboť $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$ díky 3.1.31, 1) a $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ je tautologie) a dále $\vdash (\exists x)\psi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$ (užitím pravidla distribuce na tautologii $\psi \to (\varphi \to \psi)$). Pravidlo rozbor případů, $\vdash (\neg\varphi \vee (\exists x)\psi) \leftrightarrow (\varphi \to (\exists x)\psi)$ a tvrzení o ekvivalenci dají $\vdash (\varphi \to (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$.

b) plyne z a), užijeme-li $\vdash (\neg\psi \to (Qx)\neg\varphi) \leftrightarrow ((Q'x)\varphi \to \psi)$ a $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

c) plyne z a), b) a ekvivalentu $\diamond$ pomocí $\to$. □

3.1.35. Prenexní tvar formulí. Prenexní operace.

1. Formule φ je v *prenexním tvaru*, má-li tvar $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)\psi$, kde Q_i je $\forall$ nebo $\exists$, $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé proměnné a ψ je otevřená formule; $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ se nazývá *prefix* a ψ *otevřené jádro* φ.

2. *Prenexní operace* na formulích jsou dány pravidly pa) – pf), přičemž Q' je $\exists$ resp. $\forall$, když Q je $\forall$ resp. $\exists$ a $\diamond$ je & nebo $\vee$; nahrazená a nahrazující formule jsou za uvedených předpokladů logicky ekvivalentní díky tvrzení o variantách, o vytýkání kvantifikátorů a zavedení $\exists$.

pa) Nahraď podformuli její variantou.
pb) Nahraď podformuli $\neg(Qx)\psi$ za $(Q'x)\neg\psi$.
pc) Nahraď podformuli $(Qx)\psi \diamond \chi$ za $(Qx)(\psi \diamond \chi)$, není-li x volná v χ.
pd) Nahraď podformuli $\psi \diamond (Qx)\chi$ za $(Qx)(\psi \diamond \chi)$, není-li x volná ve ψ.
pe) Nahraď podformuli $(Qx)\psi \to \chi$ za $(Q'x)(\psi \to \chi)$, není-li x volná v χ.
pf) Nahraď podformuli $\psi \to (Qx)\chi$ za $(Qx)(\psi \to \chi)$, není-li x volná ve ψ.

VĚTA 3.1.36. (O prenexním tvaru.) *Ke každé formuli lze nalézt pomocí prenexních operací formuli v prenexním tvaru s ní ekvivalentní.*

Důkaz. Označme φ' formuli v prenexním tvaru ekvivalentní s φ. Dokazujeme tvrzení indukcí dle složitosti φ. Atomická φ je v prenexním tvaru. Je-li φ tvaru $\neg\psi$, získáme φ' z $\neg\psi'$ po postupné aplikaci pb) a užitím tvrzení o ekvivalenci. Podobně, je-li φ tvaru $\psi \to \chi$, pomocí pa) lze docílit, že proměnné v prefixech ψ', χ' jsou různé a navíc jsou různé od proměnných volných v ψ', χ'. Aplikací pe), pf) získáme φ'. Pro φ tvaru $(\forall x)\psi$ je φ ekvivalentní $(\forall x)\psi'$ a pomocí tvrzení pa) docílíme, aby všechny proměnné v prefixu byly různé. □

VĚTA 3.1.37. (O rovnosti.)

1) $\vdash x = x, \quad \vdash x = y \leftrightarrow y = x, \quad \vdash x = y \to y = z \to x = z.$

2) *Buďte $t, t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$ termy a φ formule teorie T.*

   a) *Nechť $T \vdash t_1 = s_1, \ldots, T \vdash t_n = s_n$ a nechť t' resp. φ' se získá z t resp. φ nahrazením některých výskytů $t_1, \ldots, t_n$ odpovídajícími termy $s_1, \ldots, s_n$. Pak platí $T \vdash t = t'$ a $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

   b1) $T \vdash t_1 = s_1 \to \ldots \to t_n = s_n \to t(t_1, \ldots, t_n) \ = \ t(s_1, \ldots, s_n).$

   b2) $T \vdash t_1 = s_1 \to \ldots \to t_n = s_n \to \varphi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \varphi(s_1, \ldots, s_n).$

Důkaz. 1) Dokážeme $\vdash x = y \to y = x$. Formule $x = y \to x = x \to x = x \to y = x$ je axiom rovnosti, tedy $\vdash x = y \to (x = x \to y = x)$ užitím $\vdash x = y \to x = x$ (díky $\vdash x = x$). Odtud analogicky $\vdash x = y \to y = x$. Podobně se dokáže $\vdash y = x \to x = y$ a tedy také $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$. Obdobně plyne $\vdash x = y \to y = z \to x = z$.

2) a) Indukcí dle složitosti t. Je-li t proměnná nebo konstantní symbol, je t' rovno t nebo s_i a t je t_i; $T \vdash t = t'$ tedy platí. Buď t tvaru $F(r_1, \ldots, r_m)$. Pak t' je tvaru $F({r'}_1, \ldots, {r'}_m)$, kde $T \vdash r_i = r'_i$ pro $i = 1, \ldots, m$ dle indukčního předpokladu. Z axiomu rovnosti a substituce dostáváme $\vdash r_1 = r'_1 \to \ldots \to r_m = r'_m \to t = t'$, užitím modus ponens konečně $T \vdash t = t'$.

Indukcí podle složitosti φ. Buď φ atomická tvaru $R(r_1, \ldots, r_m)$; pak φ' je tvaru $R({r'}_i, \ldots, {r'}_m)$, kde $T \vdash r_i = r'_i$ pro $i = 1, \ldots, m$ dle již dokázané části. Z axiomu rovnosti a substituce plyne $\vdash r_1 = r'_1 \to \ldots \to r_m = r'_m \to \varphi \to \varphi'$, užitím modus ponens konečně $T \vdash \varphi \to \varphi'$. Ze symetrie rovnosti plyne podobně i $T \vdash \varphi' \to \varphi$. Indukční krok pro $\neg$ a $\to$ plyne ihned užitím vhodných tautologií (např. $((\varphi_0 \leftrightarrow \varphi'_0)\ \&\ (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi'_1) \to (\varphi_0 \to \varphi_1) \leftrightarrow (\varphi'_0 \to \varphi'_1))$ pro případ $\to$) a indukčního předpokladu. Indukční krok pro $\forall$ plyne užitím pravidla distribuce.

b1) Nahraďme každou proměnnou vyskytující se v t_i nebo s_i novým konstantním symbolem, kterým nahradíme tyto proměnné i v termech $t(t_1, \ldots, t_n)$, $t(s_1, \ldots, s_n)$; získáme tak t'_i a s'_i a $t'({t'}_1, \ldots, {t'}_n)$, $t'({s'}_1, \ldots, {s'}_n)$. Díky větě o konstantách stačí dokázat

$$T' \vdash t'_1 = s'_1 \to \ldots \to t'_n = s'_n \to t'({t'}_1, \ldots, {t'}_n) = t'({s'}_1, \ldots, {s'}_n),$$

kde T' je T v jazyce rozšířeném o nové konstanty. To je díky větě o dedukci ekvivalentní s $T', t'_1 = s'_1\ \&\ \cdots\ \&\ t'_n = s'_n \vdash t'({t'}_1, \ldots, {t'}_n) = t'({s'}_1, \ldots, {s'}_n)$; tento vztah plyne z a). b2) se dokáže stejně. □

TVRZENÍ 3.1.38. *Následující formule jsou logicky dokazatelné; Q je kvantifikátor.*

a)	$(\forall x)(\varphi\ \&\ \psi) \leftrightarrow (\forall x)\varphi\ \&\ (\forall x)\psi$	$(\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi$
b)	$(\exists x)(\varphi\ \&\ \psi) \to (\exists x)\varphi\ \&\ (\exists x)\psi$	$(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi \to (\forall x)(\varphi \vee \psi)$
c)	$(\forall x)(\forall y)\varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$	$(\exists x)(\exists y)\varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi$
d)	$(\exists x)(\forall y)\varphi \to (\forall y)(\exists x)\varphi$	$(Qx)\varphi \leftrightarrow \varphi$ *není-li x volná ve φ*

Důkaz. Dokážeme nejprve

i) $\vdash (Qx)(\varphi\ \&\ \psi) \to (Qx)\varphi\ \&\ (Qy)\psi,$ ii) $\vdash (\forall x)\varphi\ \&\ (\forall x)\psi \to (\forall x)(\varphi\ \&\ \psi).$

Nechť L-formule φ, ψ mají všechny volné proměnné mezi $x, x_1, \ldots, x_n$. Buďte dále $c_1, \ldots, c_n$ nové konstantní symboly, T prázdná teorie v jazyce $L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ a φ' resp. ψ' formule

$$\varphi(x, x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n) \text{ resp. } \psi(x, x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

i) Máme $\vdash (Qx)(\varphi \,\&\, \psi) \rightarrow (Qx)\varphi, (Qx)\psi$ z pravidla distribuce. Odtud plyne

$$T, (Qx)(\varphi' \,\&\, \psi') \vdash (Qx)\varphi', (Qx)\psi'$$

a pomocí vět o dedukci a o konstantách dostáváme i). ii) Užitím axiomu substituce, tvrzení o tautologiích a modus ponens dostaneme $T, (\forall x)\varphi', (\forall x)\psi' \vdash \varphi' \,\&\, \psi'$. Užitím generalizace a vět o dedukci a konstantách dostaneme ii).

Prvá formule z a) plyne snadno z i), ii), druhá snadno z prvé, prvá formule z b) z i), druhá snadno z prvé. c) Prvá formule. Z axiomů substituce: $\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi \rightarrow (\forall y)\varphi$, $\vdash (\forall y)\varphi \rightarrow \varphi$; odtud díky tvrzení o tautologiích $\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi \rightarrow \varphi$. Užitím axiomu $\forall$-zavedení pak $\vdash (\forall x)(\forall y)\varphi \rightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$. Ze symetrie plyne i obrácená implikace a nakonec dokazovaná ekvivalence. Druhá formule z c) plyne snadno z prvé. d) Prvá formule: $\vdash \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$, dle pravidla distribuce tedy $\vdash (\forall y)\varphi \rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi$, užitím pravidla $\exists$-zavedení pak dokazované. Druhá formule pro Q rovno $\forall$: implikace $\rightarrow$ plyne snadno z axiomu substituce, opačná z pravidla $\forall$-zavedení. Pro Q rovno $\exists$ to je důsledek právě dokázaného. $\square$

TVRZENÍ 3.1.39. *Není-li x obsaženo v termu t, je dokazatelné:*

$$1)\ \varphi(x/t) \leftrightarrow (\forall x)(x = t \rightarrow \varphi), \qquad 2)\ \varphi(x/t) \leftrightarrow (\exists x)(x = t \,\&\, \varphi).$$

Důkaz. 1) Axiom substituce dává $\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow \varphi) \rightarrow (t = t \rightarrow \varphi(x/t))$. (Implicite se předpokládá substituovatelnost t za x do φ.) Užitím tautologie odtud plyne $\vdash t = t \rightarrow ((\forall x)(x = t \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi(x/t))$ a dále $\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi(x/t)$ díky $\vdash t = t$. Opačnou implikaci dokážeme pomocí

$$\vdash x = t \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi(x/t)). \tag{3.2}$$

Užitím tautologie plyne $\vdash \varphi(x/t) \rightarrow (x = t \rightarrow \varphi)$. Jelikož x není volná v $\varphi(x/t)$, pravidlo $\forall$-zavedení dá $\vdash \varphi(x/t) \rightarrow (\forall x)(x = t \rightarrow \varphi)$.

2) Z $\psi(x/t) \rightarrow (\exists x)\psi$, aplikovaného na ψ tvaru $x = t \,\&\, \varphi$ dostaneme $\vdash (t = t \,\&\, \varphi(x/t)) \rightarrow (\exists x)(x = t \,\&\, \varphi)$. Odtud díky $\vdash t = t$ máme $\vdash \varphi(x/t) \rightarrow (\exists x)(x = t \,\&\, \varphi)$. Opačná implikace. Z (3.2) plyne užitím tautologie: $\vdash (x = t \,\&\, \varphi) \rightarrow \varphi(x/t)$. Protože x není volná v $\varphi(x/t)$, pravidlem $\exists$-zavedení získáme $\vdash (\exists x)(x = t \,\&\, \varphi) \rightarrow \varphi(x/t)$. $\square$

Existence modelu, úplnost, kompaktnost.

3.1.40. Kanonická struktura pro teorii.

Buď $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ jazyk s konstantním symbolem, T buď L-teorie.

Obor designátorů $\underline{D}(\mathcal{F})$ se nazývá též *struktura* či *algebra konstantních termů jazyka L*; její univerzum je množina konstantních L-termů.

1. *Konstantní struktura pro T* je $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$-struktura $\mathcal{A}$, jež je expanzí oboru designátorů $\underline{D}(\mathcal{F})$ takovou, že pro n-ární $R \in \mathcal{R}$ a konstantní L-termy $t_1, \ldots, t_n$ je

$$R^A(t_1, \ldots, t_n) \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash R(t_1, \ldots, t_n).$$

Je-li L bez rovnosti, říkáme, že $\mathcal{A}$ je *kanonická struktura pro T*.

2. Buď L navíc s rovností. Definujeme ekvivalenci $\sim$ na univerzu A:

$$t \sim s \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash t = s.$$

Pak pro $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$ a n-ární relační symbol R či funkční symbol F je

$$\begin{array}{lcl} R^A(t_1, \ldots, t_n) & \Leftrightarrow & R^A(t_1', \ldots, t_n'), \\ F^A(t_1, \ldots, t_n) & \sim & F^A(t_1', \ldots, t_n'). \end{array}$$

Tedy můžeme definovat L-strukturu $\mathcal{B}$ s univerzem $B = \{t/\!\sim;\ t \in A\}$ korektně pomocí reprezentantů faktorů takto: pro $R, F, t_1, \ldots, t_n$ jako výše je

$$\begin{array}{rcl} R^B(t_1/\!\sim, \ldots, t_n/\!\sim) & \Leftrightarrow & R^A(t_1, \ldots, t_n), \\ F^B(t_1/\!\sim, \ldots, t_n/\!\sim) & = & F^A(t_1, \ldots, t_n)/\!\sim. \end{array}$$

Říkáme, že $\mathcal{B}$ je *kanonická struktura pro T*.

Pro konstantní term t platí $t^A = t$; odtud a indukcí podle složitosti konstantního termu t snadno plyne:

$$t^B = t/\!\sim. \tag{3.3}$$

TVRZENÍ 3.1.41. *Nechť $\mathcal{B}$ je kanonická struktura pro teorii T. Pak $\|\mathcal{B}\| \leq \|L(T)\|$ a pro každou atomickou $L(T)$-sentenci φ platí:*

$$\mathcal{B} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi. \tag{3.4}$$

Důkaz. Je $B = \{t/\!\sim;\ t$ je konstantní $L(T)$-term$\}$ pro jistou ekvivalenci $\sim$, tudíž $|B| \leq \|L(T)\|$. Zbytek tvrzení plyne ihned z konstrukce $\mathcal{B}$. $\square$

Chceme najít podmínku na teorii T, aby kanonická struktura $\mathcal{B}$ pro T splňovala (3.4) pro každou $L(T)$-sentenci φ; pak by platilo $\mathcal{B} \models T$ a také, že je T kompletní. Hledanou podmínkou je, že teorie T je kompletní a henkinovská; to říká 3.1.44. Podle 3.1.43 má každá bezesporná teorie T_0 kompletní henkinovskou extenzi T; kanonická struktura pro T, zredukovaná na $L(T_0)$, je pak modelem T_0.

3.1.42. Henkinovské konstanty, henkinovská teorie.
Nechť T je L-teorie. Množina D (ne nutně všech) konstantních symbolů jazyka L je množina *henkinovských konstant* teorie T, když pro každou L-formuli $\varphi(x)$ s nejvýše jednou volnou proměnnou existuje konstantní symbol d z D tak, že

$$T \vdash (\exists x)\varphi \rightarrow \varphi(x/d).$$

Henkinovská teorie je taková teorie, jejíž konstantní symboly tvoří množinu henkinovských konstant této teorie.

TVRZENÍ 3.1.43. (O kanonické struktuře pro kompletní henkinovskou teorii.) *Buď T bezesporná kompletní henkinovská teorie, $\mathcal{A}$ kanonická struktura pro T. Pak pro každou $L(T)$-sentenci φ je $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$.*

Důkaz. Říkejme, že výška φ je počet výskytů $\neg, \rightarrow$ a kvantifikací ve φ. Dokážeme indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$(*)_n$ Každá sentence φ výšky nejvýše n splňuje $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$.

Pro $n = 0$ to platí díky (3.1.41), neboť φ je atomická sentence. Nechť platí $(*)_n$ a φ je výšky $n+1$. Je-li φ tvaru $\neg\psi$, plyne dokazované ihned z kompletnosti T. Buď φ tvaru $\psi \rightarrow \psi'$. Nechť $\mathcal{A} \models \varphi$. Pokud $\mathcal{A} \not\models \psi$, z indukčního předpokladu a kompletnosti T plyne $T \vdash \neg\psi$ a díky tautologii $\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi')$ i $T \vdash \psi \rightarrow \psi'$. Pokud $\mathcal{A} \models \psi$, tak z indukčního předpokladu plyne $T \vdash \psi'$ a tedy i $T \vdash \psi \rightarrow \psi'$. Nechť $\mathcal{A} \not\models \varphi$; pak $\mathcal{A} \models \psi$ a $\mathcal{A} \not\models \psi'$, tedy $T \vdash \psi$, $T \vdash \neg\psi'$ a díky bezespornosti T i $T \nvdash \psi \rightarrow \psi'$.

Buď konečně φ tvaru $(\forall x)\psi$. Nechť D je množina henkinovských konstant teorie T. Buď $\mathcal{A} \models \varphi$. Kdyby $T \nvdash \varphi$, tj. $T \vdash \neg\varphi$, tak $T \vdash (\exists x)\neg\psi$, tudíž $T \vdash \neg\psi(d)$ pro nějaké $d \in D$. Výška $\psi(d)$ je nejvýše n, tudíž díky indukčnímu předpokladu a kompletnosti T je $\mathcal{A} \models \neg\psi(d)$, což díky $\mathcal{A} \models (\forall x)\psi$ není možné.

Buď naopak $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \neg(\forall x)\psi$. Tudíž $\mathcal{A} \models \neg\psi[a]$ pro jisté $a \in A$. Přitom a je t resp. $t/\!\sim$ s nějakým konstantním L-termem t, je-li L bez rovnosti resp. s rovností; $\sim$ je z 2. v 3.1.40.

Buď L bez rovnosti. Díky $t^A = t$ máme tedy (dle tvrzení o korektnosti substituce) $\mathcal{A} \models \neg\psi(x/t)$. Buď L s rovností. Dle (3.3) je $t^A = t/\!\sim$, máme tedy (dle tvrzení o korektnosti substituce) opět $\mathcal{A} \models \neg\psi(x/t)$. Je výška $\psi(x/t) \leq n$, tedy dle indukčního předpokladu a kompletnosti T je $T \vdash \neg\psi(x/t)$, tedy $T \vdash (\exists x)\neg\psi$ a tedy $T \vdash \neg\varphi$. □

VĚTA 3.1.44. (O maximální a henkinovské extenzi.)

1) *Každá bezesporná teorie T má maximální bezespornou extenzi v $L(T)$; to je kompletní teorie.*

2) *Každá teorie T má konzervativní henkinovskou extenzi v jazyce kardinality $\|L(T)\|$. Speciálně má každá bezesporná teorie T maximální bezespornou henkinovskou extenzi v jazyce kardinality $\|L(T)\|$.*

Důkaz. Označme $L = L(T)$. 1) Hledaná maximální extenze je maximální prvek množiny $\mathcal{T}$ všech bezesporných množin formulí jazyka L, které rozšiřují T. Jeho existence plyne z principu maximality aplikovaného na $\mathcal{T}$ uspořádané inkluzí; v tomto uspořádání má totiž každý řetěz majorantu, rovnu jeho sjednocení.

2) Buď L jazyk teorie T. Nechť D_n, $n \in \omega$, jsou prosté a disjunktní soubory konstantních symbolů nepatřících do L, definované indukcí takto:

$$D_0 = \{d_{\varphi(x)};\ \varphi(x) \text{ je } L\text{-formule}\},$$
$$D_n = \{d_{\varphi(x)};\ \varphi(x) \text{ je } (L \cup \textstyle\bigcup_{i<n} D_i)\text{-formule, v níž je symbol z } D_{n-1}\};$$

$d_{\varphi(x)}$ je *speciální konstanta pro* $\varphi(x)$ a $(\exists x)\varphi \to \varphi(x/d_{\varphi(x)})$ je *speciální axiom pro* $d_{\varphi(x)}$. Buď $D = \bigcup_{i\in\omega} D_i$, $L' = L \cup D$ a T' rozšíření T o speciální axiomy pro speciální konstanty. Zřejmě $\|L'\| = \|L\|$ a D je množina henkinovských konstant teorie T' v L'.

Dokážeme, že T' je konzervativní extenze T. Extenze T_0 teorie T o nové konstantní symboly z D (bez přidání axiomů) je podle tvrzení o konstantách konzervativní extenze T; stačí tedy dokázat, že T' je konzervativní extenze T_0. Nechť χ je $L(T_0)$-formule, $T' \vdash \chi$ a $\psi_1, \ldots, \psi_m$ všechny navzájem různé speciální axiomy, vyskytující se v důkazu χ v T'; tedy

$$T_0 \vdash \psi_1 \to \psi_2 \to \cdots \to \psi_m \to \chi.$$

Indukcí podle m dokážeme, že $T_0 \vdash \chi$. Pro $m = 0$ to triviálně platí. Buď $m > 0$. Buď n největší takové, že nějaký konstantní symbol z D_n je v některé formuli ψ_i, $i = 1, \ldots, m$; můžeme předpokládat, že je v ψ_1. Nechť ψ_1 je tvaru

$$(\exists x)\varphi \to \varphi(x/d_{\varphi(x)}).$$

Pak $d_{\varphi(x)}$ není v žádné formuli $\psi_2, \ldots, \psi_m$, neboť jinak takové ψ_i je speciální axiom pro d z $D_{n'}$ s $n' > n$. Nechť proměnná y se nevyskytuje a není kvantifikovaná v žádné z formulí $\psi_1, \ldots, \psi_m, \chi$. Z tvrzení o konstantách plyne

$$T_0 \vdash ((\exists x)\varphi \to \varphi(x/y)) \to (\psi_2 \to \cdots \to \psi_m \to \chi),$$

neboť $((\exists x)\varphi \to \varphi(x/y))(y/d_{\varphi(x)})$ je ψ_1. Užitím pravidla $\exists$-zavedení pak získáme $T_0 \vdash (\exists y)((\exists x)\varphi \to \varphi(x/y)) \to (\psi_2 \to \cdots \to \psi_m \to \chi)$. Tvrzení o variantách dá $T_0 \vdash (\exists x)\varphi \to (\exists y)\varphi(x/y)$, vytýkání kvantifikátorů pak $T_0 \vdash (\exists y)((\exists x)\varphi \to \varphi(x/y))$. Konečně pravidlo modus ponens dá $T_0 \vdash \psi_2 \to \cdots \to \psi_m \to \chi$ a dle indukčního předpokladu $T_0 \vdash \chi$. Speciální tvrzení plyne snadno užitím 1). □

VĚTA 3.1.45. (O existenci modelu, úplnosti a kompaktnosti.)

1) (O existenci modelu.) *Každá bezesporná teorie T má model kardinality nejvýše $\|L(T)\|$.*

2) (O úplnosti.) *Formule teorie T je v T dokazatelná, právě když je v T pravdivá.*

3) (O kompaktnosti.) *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz. 1) Hledaným modelem je redukt na $L(T)$ kanonické struktury pro nějakou maximální bezespornou henkinovskou extenzi T' teorie T v jazyce $L(T')$ kardinality $\|L(T)\|$ – viz 3.1.43, 3.1.44.

2) Pro formuli $\varphi(\overline{x})$ užitím pravidla generalizace, důkazu sporem a věty o existenci modelu máme: $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow T \nvdash (\forall \overline{x})\varphi \Leftrightarrow T, (\exists \overline{x})\neg\varphi$ je bezesporná $\Leftrightarrow T, (\exists \overline{x})\neg\varphi$ má model $\Leftrightarrow T \not\models \varphi$.

3) plyne z toho, že teorie je sporná, právě když je nějaká její konečná část sporná. □

VĚTA 3.1.46. *Buď L jazyk s rovností.*

1) *Je-li $\kappa \geq \|L\|$, je každá nekonečná L-struktura elementárně ekvivalentní s nějakou L-strukturou kardinality κ.*

2) *Nechť T je L-teorie.*

   a) *Má-li T nekonečný model, má model každé kardinality $\geq \|L\|$.*

   b) *Má-li T pro každé $n < \omega$ alespoň n-prvkový model, má nekonečný model.*

   c) *Má-li T jen nekonečné modely a v nějaké kardinalitě $\kappa \geq \|L\|$ až na izomorfizmus jediný model, je T kompletní.*

Důkaz. 1) Buď $\mathcal{A}$ nekonečná L-struktura, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \{c_i \neq c_j;\, i \neq j \text{ a } i, j \in \kappa\}$ teorie v jazyce L', jenž je extenzí L o κ nových konstantních symbolů $\langle c_i \rangle_\kappa$. Teorie T' je díky větě o kompaktnosti bezesporná a má tedy model $\mathcal{B}$ kardinality $\leq \|L'\| = \kappa$; je ovšem $|B| = \kappa$. Redukt $\mathcal{B}$ na L je model $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ kardinality κ, tedy to je hledaný model.

2) a) plyne z 1): pro nekonečný model $\mathcal{A}$ teorie T existuje s ním elementárně ekvivalentní model kardinality κ a ten je ovšem modelem T.

b) Buď T' teorie $T \cup \{c_i \neq c_j;\, i < j < \omega\}$ v jazyce L', jenž je extenzí L o nové konstantní symboly $\langle c_i \rangle_\omega$. Každá konečná část $S \subseteq T'$ má dle učiněných předpokladů model, dle věty o kompaktnosti má T' model; ten je ovšem nekonečný a jeho redukt na L je nekonečný model T.

c) Buď $\mathcal{A} \models T$, $|A| = \kappa$. Nechť φ je L-sentence. Dokážeme, že $T \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$; díky větě o úplnosti pak $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$ a T je tedy kompletní. Pro $\mathcal{B} \models T$ existuje dle 1) $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{B}$ s $|B'| = \kappa$. Jelikož $\mathcal{B}' \cong \mathcal{A}$, máme $\mathcal{B} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. □

Nadále, není-li řečeno jinak, pracujeme v logice s rovností.
Délka sekvence $\overline{a}$ se může značit také $\mathrm{l}(\overline{a})$.

TVRZENÍ 3.1.47.

1) *Má-li teorie T pro každé $n < \omega$ konečný model kardinality alespoň n, není třída všech konečných modelů teorie T axiomatizovatelná.*

   Speciálně třída všech konečných modelů nějakého jazyka není axiomatizovatelná.

2) *Třída K nějakých L-struktur je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $-\mathsf{K}$ je axiomatizovatelná.*

Důkaz. 1) plyne z 3.1.46 2) b). Speciální tvrzení pak ještě z toho, že každý jazyk má model libovolné kardinality.

2) Implikace $\Rightarrow$ je jasná. Dokážeme opačnou. Nechť T, S jsou takové L-teorie, že $\mathsf{K} = \mathsf{M}(T) = -\mathsf{M}(S)$. Pak $\mathsf{M}(T \cup S) = \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(S) = \emptyset$, tedy díky kompaktnosti existují $T' \subseteq T$, $S' \subseteq S$ konečné tak, že $T' \cup S'$ nemá model; pak $\emptyset = \mathsf{M}(T' \cup S') = \mathsf{M}(T') \cap \mathsf{M}(S')$. Konečně $\mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(T') \subseteq -\mathsf{M}(S') \subseteq -\mathsf{M}(S) \subseteq \mathsf{M}(T)$, tedy $\mathsf{M}(T) = \mathsf{M}(T')$. □

TVRZENÍ 3.1.48. *Buď T bezesporná teorie. Pak je ekvivalentní* 1) – 3)*:*

1) *T je kompletní.*

2) *Každé dva modely T jsou elementárně ekvivalentní.*

3) $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *pro nějakou $L(T)$-strukturu $\mathcal{A}$.*

Důkaz. 1) $\Rightarrow$ 2). Buď T kompletní. Když $\mathcal{A} \models T$, tak $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(T)$; 2) tedy platí. 2) $\Rightarrow$ 3). Buď $\mathcal{A} \models T$. Pro sentenci φ máme nyní: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$, tedy $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. 3) $\Rightarrow$ 1). Z $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ plyne, že pro sentenci φ je $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. ☐

PŘÍKLADY.

1. Teorie FL_0 těles charakteristiky 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz. Buď L jazyk teorie těles. Třída $\mathsf{K} = \{\mathcal{A} \models L;\ \mathcal{A} \models \mathrm{FL}_0\}$ všech těles charakteristiky 0 totiž není konečně axiomatizovatelná, neboť $-\mathsf{K}$ není axiomatizovatelná. Kdyby totiž S axiomatizovala $-\mathsf{K}$, tak, značí-li FL teorii těles, $S' = S \cup \mathrm{FL} \cup \{p1 \neq 0;\ p \text{ je prvočíslo}\}$ by byla bezesporná, neboť těleso $\mathbb{Z}_p \in -\mathsf{K}$ a je to model fragmentu $S \cup \mathrm{FL} \cup \{q1 \neq 0;\ q < p,\ q \text{ je prvočíslo}\}$. Tedy S' je bezesporná užitím kompaktnosti; její model patří do $-\mathsf{K}$ i K – spor. ☐

2. Třída $\mathsf{K} = \{\mathcal{A} \models \langle\leq\rangle;\ \mathcal{A} \text{ je dobré uspořádání}\}$ všech dobrých uspořádání není axiomatizovatelná. Přitom dobré uspořádání je takové lineární uspořádání, jehož každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek.

Důkaz. Sporem. Nechť S axiomatizuje K, $S' = S \cup \{c_{i+1} \leq c_i \ \&\ c_{i+1} \neq c_i;\ i < \omega\}$, kde c_i jsou nové konstantní symboly. Pak S' je bezesporná, neboť existuje nekonečné dobré uspořádání; to dovoluje sestrojit model každého konečného fragmentu teorie S'. Tudíž S' má model $\mathcal{A}$. Jeho redukt $\langle A, \leq^A\rangle$ na jazyk $\langle\leq\rangle$ uspořádání je dobré uspořádání. Avšak množina $\{c_i^A;\ i < \omega\}$ nemá v $\langle A, \leq^A\rangle$ nejmenší prvek. ☐

PŘÍKLADY.

1. Pro každou nekonečnou velikost κ existuje uspořádané nearchimedovské těleso velikosti κ elementárně ekvivalentní s uspořádaným tělesem $\underline{\mathbb{R}}' = \langle \underline{\mathbb{R}}, \leq\rangle$ reálných čísel. Přitom uspořádané těleso je archimedovské, když v něm pro každé jeho dva prvky $a, b > 0$ existuje n s $b < na$; těleso $\underline{\mathbb{R}}'$ je archimedovské.

Důkaz. Buď $S = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{R}}') \cup \{n1 \leq c;\ n < \omega\}$, kde c je konstantní symbol nepatřící do jazyka uspořádaných těles. Pak je S bezesporná, neboť každý její konečný fragment má model, snadno sestrojitelný pomocí $\underline{\mathbb{R}}'$. Protože jazyk teorie S je spočetný, existuje pro každé $\kappa \geq \omega$ model $\mathcal{A} \models S$ kardinality κ; ten má požadované vlastnosti. ☐

2. Existuje spočetný model elementárně ekvivalentní se standardním modelem $\underline{\mathbb{N}}$ přirozených čísel, který není izomorfní s $\underline{\mathbb{N}}$.

Důkaz. Buď $S = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} \leq c;\ n < \omega\}$, kde c je nový konstantní symbol, nepatřící do jazyka aritmetiky. Pak je S bezesporná, neboť každý její konečný fragment má model sestrojitelný snadno pomocí $\underline{\mathbb{N}}$. Jelikož jazyk S je spočetný, má S spočetný model; jeho redukt na jazyk aritmetiky je hledaný – je to tzv. nestandardní model přirozených čísel. ☐

PŘÍKLADY.

1. Teorie DeLO má až na izomorfizmus právě jeden spočetný model, je tedy kompletní. Teorie DeLO* má právě čtyři jednoduché kompletní extenze až na ekvivalenci teorií. Jsou jimi rozšíření DeLO* o čtyři kombinace formulí „ne/existuje nejmenší/největší prvek“; definitoricky je DeLO rozšíření teorie DeLO* o „neexistuje ani nejmenší ani největší prvek“.

2. Právě všechny jednoduché kompletní extenze teorie čisté rovnosti PE, až na ekvivalenci teorií, jsou:

$$\begin{aligned} \mathrm{PE}(n) &= \mathrm{PE} \cup \{\text{„existuje právě } n \text{ prvků“}\}, \\ \mathrm{PE}(\infty) &= \mathrm{PE} \cup \text{„existuje nekonečně prvků“}. \end{aligned}$$

Extenze teorie o funkční symbol a definicemi.

VĚTA 3.1.49. (Extenze o funkční symbol.) *Buď $T \vdash (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ a nechť T' je extenze T o axiom $\psi(y/F(x_1, \dots, x_n))$, kde F je n-ární funkční symbol (eventuálně nulární), nevyskytující se v $L(T)$ (a $F(x_1, \dots, x_n)$ je substituovatelné za y do ψ). Pak je T' konzervativní extenze T.*

Důkaz. Nechť $T' \vdash \varphi$ a φ je $L(T)$-formule. Buď $\mathcal{A} \models T$ a $f : A^n \to A$ taková funkce, že pro každé $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$ platí $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n)]$; tu sestrojíme užitím axiomu výběru. Pak expanze $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ o funkci f je model T', tedy $\mathcal{A}' \models \varphi$, tedy i $\mathcal{A} \models \varphi$. Z věty o úplnosti plyne $T \vdash \varphi$. □

3.1.50. Otevřená teorie, univerzální a existenční formule. Skolemova varianta.

1. Teorie je *otevřená*, je-li každý její mimologický axiom otevřená formule.

2. Formule je *univerzální[existenční]*, je-li v prenexním tvaru a všechny kvantifikátory jsou univerzální[existenční].

3. Buď φ uzavřená formule v prenexním tvaru. Uzavřená univerzální formule φ_S s vlastností $\vdash \varphi_S \to \varphi$ a zvaná *Skolemova varianta* formule φ se sestrojí následovně.

Nechť φ' je φ pro φ univerzální a φ' je $(\forall x_1, \dots, x_n)\psi(y/F(x_1, \dots, x_n))$, pokud φ má tvar $(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists y)\psi$ (s $n \geq 0$), přičemž F je nový n-ární funkční symbol; substituce je korektní díky prostotě sekvence proměnných v prefixu. Formule φ' má o jeden existenční kvantifikátor méně než φ, některá formule $\varphi''^{\cdots\prime}$ je tedy univerzální a prvou takovou označme φ_S. Platí $\vdash \psi(y/F(x_1, \dots, x_n)) \to (\exists y)\psi$, tedy i $\vdash \varphi' \to \varphi$. Odtud plyne $\vdash \varphi_S \to \varphi$.

VĚTA 3.1.51. *Každá teorie má otevřenou konzervativní extenzi.*

Důkaz. Buď T uvažovaná teorie. $L(T)$-teorie T_1 tvořená prenexními tvary uzávěrů axiomů T je ekvivalentní s T; to plyne z věty o prenexních tvarech a uzávěru. Buď $T_2 = T_1 \cup S$, kde $S = \{\varphi_S;\ \varphi \in T_1\}$. Přitom pro různá φ jsou do φ_S přidány různé nové funkční symboly. Pro $S_0 \subseteq S$ konečné je na základě věty o extenzi o funkční symbol $T_1 \cup S_0$ konzervativní extenze T_1, tedy i T_2 je konzervativní extenze T_1. Každý axiom z T_1 je dokazatelný v S, tedy je S ekvivalentní s T_2 a speciálně konzervativní extenze T. Nahraďme každý axiom z S otevřenou formulí, jíž je generálním uzávěrem; získaná teorie je otevřená a ekvivalentní s S, tedy to je hledaná konzervativní extenze teorie T. □

TVRZENÍ 3.1.52. *Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou L-struktury, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.*

1) *Pro L-term $t(\overline{x})$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ je $t^A[\overline{a}] = t^B[\overline{a}]$.*

2) *Pro otevřenou L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ je $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\overline{a}]$.*

3) *Je-li $\mathcal{B}$ model otevřené teorie T, je $\mathcal{A}$ model T.*

Důkaz. 1) resp. 2) snadno indukcí podle složitosti termu t resp. formule φ a užitím definice podstruktury. 3) Je-li $\varphi(\overline{x})$ axiom T, tak $\mathcal{B} \models (\forall \overline{x})\varphi$, tedy také $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$ pro $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ dle 2) a tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. □

PŘÍKLADY. 1. Teorie Booleových algeber je otevřená teorie. Tedy podstruktura Booleovy algebry je Booleova algebra.

2. Teorie grup v jazyce $\langle +, -, 0 \rangle$ je otevřená; pak je podstruktura grupy grupa.

V jazyce $\langle +, 0 \rangle$ je třeba axiom $x + (-x) = 0 \mathbin{\&} 0 = (-x) + x$ zapsat jako $(\exists y)(x + y = 0 \mathbin{\&} 0 = y + x)$. Axiomatika pak již není otevřená. Je $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ grupa, $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ její podstruktura, která není grupou.

3.1.53. Extenze teorie o definovaný symbol.

1. Nechť R je n-ární predikátový symbol nepatřící do jazyka $L(T)$ a $\chi(x_1,\ldots,x_n)$ formule jazyka $L(T)$. Generální uzávěr formule

$$R(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \chi(x_1,\ldots,x_n)$$

je tzv. *definující axiom* R. Teorie v jazyce $L(T)$ rozšířeném o $\{R\}$ s axiomy T a uvedeným axiomem je *extenze teorie* T *o* formulí χ *definovaný relační symbol* R.

2. Buď F nějaký n-ární funkční symbol nepatřící do $L(T)$ a $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ formule jazyka L. Nechť v T je dokazatelné

$$(\forall x_1,\ldots,x_n)(\exists y)\chi(x_1,\ldots,x_n,y),$$
$$(\forall x_1,\ldots,x_n)(\forall y,y')((\chi(x_1,\ldots,x_n,y)\ \&\ \chi(x_1,\ldots,x_n,y')) \to y=y');$$

tyto dva vztahy nazýváme po řadě *podmínka existence* a *jednoznačnosti definice* n*-árního funkčního symbolu* formulí $\chi(x_1,\ldots,x_n,y)$ v T. Generální uzávěr formule

$$F(x_1,\ldots,x_n)=y \leftrightarrow \chi(x_1,\ldots,x_n,y)$$

je tzv. *definující axiom* F. Teorie v jazyce $L(T)$ rozšířeném o $\{F\}$ s axiomy T a uvedeným axiomem je *extenze teorie* T *o* formulí χ *definovaný funkční symbol* F.

Pokud speciálně se v χ proměnné $x_1,\ldots,x_n$ nevyskytují, získáváme tak definovaný nulární funkční symbol, čili *definovaný konstantní symbol.*

Upozorněme na speciální případ, kdy definující axiom je

$$F(x_1,\ldots,x_n)=y \leftrightarrow t(x_1,\ldots,x_n)=y$$

a t je term; zde je ovšem splněná podmínka existence a jednoznačnosti.

LEMMA 3.1.54. *Extenze teorie* T *o definovaný symbol je konzervativní extenze* T*.*

Důkaz. V případě funkčního symbolu to plyne z 3.1.49. Uvažovaná extenze T' je totiž ekvivalentní s extenzí T o axiom $\chi'(y/F(x_1,\ldots,x_n))$, kde χ' je jistá varianta χ. V případě relačního symbolu plyne tvrzení užitím zřejmé modifikace důkazu 3.1.49. □

3.1.55. Překlad definovaného symbolu.

Buď T' extenze teorie T o nějaký formulí χ definovaný n-ární relační resp. funkční symbol R resp. F, přičemž všechny volné proměnné χ jsou mezi navzájem různými proměnnými $x_1,\ldots,x_n$ resp. $x_1,\ldots,x_n,y$.

Buď φ formule jazyka $L(T')$. Nechť χ' je varianta χ, ve které není žádná proměnná formule φ ani vázaná ani kvantifikovaná; pak každý term vyskytující se ve φ je substituovatelný do χ' za x_i, $i=1,\ldots,n$. dR- resp. dF-*překlad* φ *do* T (závislý na χ') je formule φ^* jazyka $L(T)$, kterou získáme podle (dR) resp. (dF) uvedených níže, jde-li o relační resp. funkční symbol R resp. F.

(dR) φ^* se získá z φ nahrazením každé podformule $R(t_1,\ldots,t_n)$ formulí $\chi'(t_1,\ldots,t_n)$.

(dF) φ^* se získá z φ nahrazením každé atomické podformule ψ formulí ψ^*, přičemž pro ψ atomickou je ψ^* definováno indukcí podle počtu výskytů F ve ψ: Je-li tento počet 0, buď ψ^* rovno ψ. Jinak je ψ tvaru $\psi_0(z/F(t_1,\ldots,t_n))$, kde ψ_0 je atomická formule obsahující o jeden výskyt F méně než ψ, $t_1,\ldots,t_n$ neobsahují F a z není kvantifikovaná v χ'; buď pak ψ^* následující formule (substituce jsou korektní):

$$(\exists z)(\chi'(x_1/t_1,\ldots,x_n/t_n,y/z)\ \&\ \psi_0^*). \tag{3.5}$$

Vezmeme-li místo χ' jinou variantu s vlastnostmi uvedenými pro χ', bude zřejmě překlad sestrojený pomocí ní variantou φ^* a tedy ekvivalentní s φ^*.

VĚTA 3.1.56. (O překladu definovaného symbolu.) *Když T' je extenze T o definovaný symbol S, tak pro $L(T')$-formuli φ a její dS-překlad φ^* platí*

$$T' \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi^*.$$

Důkaz. Dokážeme, že $T' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^*$; protože T' je dle 3.1.54 konzervativní extenze T, plyne odtud tvrzení věty. Nechť S je n-ární formulí χ definovaný symbol a nechť χ' je varianta χ, ve které není žádná proměnná formule φ vázaná ani kvantifikovaná, přičemž překlad φ^* je sestrojený pomocí χ'.

Nechť S je relační symbol R a χ je $\chi(x_1, \ldots, x_n)$. Pak $T' \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \chi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ platí pro termy $t_1, \ldots, t_n$ vyskytující se ve φ; to plyne z tvrzení o variantách, z axiomu substituce a pravidla modus ponens. Z věty o ekvivalenci plyne pak ihned $T' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^*$.

Nechť S je funkční symbol F a χ je $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Stačí dokázat $T' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^*$ pro φ atomickou; označme ji ψ. Provedeme to indukcí podle počtu výskytů F v ψ. Je-li tento počet 0, platí to. Jinak, jako v (dF), je ψ tvaru $\psi_0(z/F(t_1, \ldots, t_n))$, kde ψ_0 je atomická formule obsahující o jeden výskyt F méně než ψ, $t_1, \ldots, t_n$ neobsahují F, z není kvantifikovaná v χ' a ψ^* je (3.5). Tvrzení o variantách, axiom substituce a pravidlo modus ponens dají $T' \vdash F(t_1, \ldots, t_n) = z \leftrightarrow \chi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)$, tvrzení o ekvivalenci pak $T' \vdash (\exists z)(F(t_1, \ldots, t_n) = z \;\&\; \psi_0^*) \leftrightarrow \psi^*$; máme tedy $T' \vdash \psi_0^*(z/F(t_1, \ldots, t_n)) \leftrightarrow \psi^*$. Dle indukčního předpokladu je $T' \vdash \psi_0 \leftrightarrow \psi_0^*$, tedy i $T' \vdash \psi_0(z/F(t_1, \ldots, t_n)) \leftrightarrow \psi^*$. □

3.1.57. *Extenze (rozšíření) teorie o definice*, též *definicemi*, je taková její extenze, která se získá postupným rozšiřováním o definovaný relační či funkční symbol.

Postupné rozšiřování zde znamená konstrukci rekurzí, a to eventuálně transfinitní, kdy v limitních krocích se sjednotí všechny již získané teorie.

VĚTA 3.1.58. (O extenzi teorie o definice.) *Extenze T' teorie T o definice je konzervativní. Model teorie T lze jednoznačně expandovat do modelu T'.*

Důkaz. V každém kroku při sestrojování T' máme dle 3.1.54 konzervativní extenzi T, speciálně je T' konzervativní extenze T.

Je-li $\mathcal{A} \models T$, v každém kroku při sestrojování T' máme také jednoznačnou expanzi do modelu právě získané teorie, neboť model $\mathcal{A}_0$ jakékoli teorie T_0 lze jednoznačně expandovat do modelu extenze T_0' teorie T_0 o definovaný symbol. Jde-li totiž o formulí χ definovaný n-ární funkční symbol F, je expanze $\mathcal{A}_0'$ struktury $\mathcal{A}_0$ o funkci

$$f = \{\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle \in A_0^{n+1};\ \mathcal{A}_0 \models \chi[a_1, \ldots, a_n, b]\}$$

model T_0' a zřejmě je $\mathcal{A}_0'$ jediná expanze $\mathcal{A}_0$, která je modelem T_0'. Obdobně je tomu s extenzí o definovaný relační symbol. □

Dodatky

TVRZENÍ 3.1.59. *Buď T kompletní henkinovská teorie. Pak každá $L(T)$-sentence je v T ekvivalentní bezkvantifikátorové sentenci.*

Důkaz. Buď φ nějaká $L(T)$-sentence. Dokazujeme tvrzení indukcí podle výšky φ (tj. podle počtu výskytů $\neg, \rightarrow$ a kvantifikací v φ. Pro výšku 0 není co dokazovat. Nechť to platí pro formule výšky nejvýše n. Buď φ výšky $n+1$. Je-li φ tvaru $\neg\psi$ nebo $\psi \rightarrow \chi$, získáme dokazované tvrzení pro φ snadno užitím indukčního předpokladu a tvrzení o ekvivalenci.

Buď konečně φ tvaru $(\forall x)\psi(x)$ a D množina henkinovských konstant teorie T.

Nechť $T \vdash \neg\varphi$. Pak $T \vdash (\exists x)\neg\psi$ a tedy $T \vdash \neg\psi(d)$ pro jisté $d \in D$. Dokážeme $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(d)$. Implikace $\rightarrow$ platí díky $\vdash \neg\psi(d) \rightarrow (\exists x)\neg\psi$. Dokažme $\leftarrow$. Neplatí-li to, díky kompletnosti T je $T \vdash \psi(d) \;\&\; \neg\varphi$ a T je sporná, což není možné.

Nechť $T \vdash \varphi$. Pak $T \vdash \varphi \rightarrow \psi(d)$ pro jakékoli $d \in D$. Když $T \nvdash \psi(d) \rightarrow \varphi$, tak díky kompletnosti T je $T \vdash \psi(d) \;\&\; \neg\varphi$ a T je sporná, což není možné.

Celkem tedy máme $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(d)$ pro jistý konstantní symbol d a dle indukčního předpokladu je $\psi(d)$ v T ekvivalentní nějaké bezkvantifikátorové sentenci. □

PŘÍKLAD. Buď k přirozené, S teorie v jazyce $L = \langle c_i \rangle_{i \in k}$ s rovností, kde c_i jsou konstantní symboly, přičemž S má axiomy „existuje nekonečně prvků".

Jednoduchá kompletní extenze teorie S je až na ekvivalenci teorií právě L-teorie tvaru

$$T_E = S \cup \{c_i = c_j;\ \langle i,j \rangle \in E\} \cup \{c_i \neq c_j;\ \langle i,j \rangle \notin E\},$$

kde E je ekvivalence na k; takových různých teorií existuje právě $B(k)$, kde $B(k)$ je k-té Bellovo číslo, udávající počet rozkladů k.

Důkaz. Pro $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_E$ téže kardinality je $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$; tedy T_E je kompletní. Buď T nějaká kompletní jednoduchá extenze S. Buď E taková ekvivalence na k, že $\langle i,j \rangle \in E \Leftrightarrow T \vdash c_i = c_j$. Díky kompletnosti T máme $\langle i,j \rangle \notin E \Leftrightarrow T \vdash c_i \neq c_j$, tedy $T_E \subseteq \mathrm{Th}(T)$, tedy i $\mathrm{Th}(T_E) \subseteq \mathrm{Th}(T)$. Platí i opačná inkluze, neboť pro sentenci φ s $T \vdash \varphi$ nutně $T_E \vdash \varphi$, protože jinak $T \vdash \varphi, \neg\varphi$. □

PŘÍKLAD. Teorie s jednou unární relací.

Čistá teorie UE *unární relace* má jazyk $\langle U \rangle$, kde U je unární relační symbol, a prázdnou množinu mimologických axiomů. *Teorie* $\mathrm{UE}(m,n)$ s $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m + n \neq 0$ je jednoduchá extenze UE o axiomy:

Existuje právě m prvků splňujících U a
existuje právě n prvků splňujících $\neg U$

• Jednoduchá kompletní extenze teorie UE je až na ekvivalenci teorií právě teorie $\mathrm{UE}(m,n)$ s $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m + n \neq 0$.

Důkaz. a) Každá teorie $\mathrm{UE}(m,n)$ je kompletní. Když totiž $m+n < \infty$, má $\mathrm{UE}(m,n)$ až na izomorfizmus právě jeden model (a to velikosti $m+n$); tedy je kompletní. Když $m + n = \infty$, má $\mathrm{UE}(m,n)$ až na izomorfizmus právě jeden model velikosti ω; tedy je kompletní.

b) Je-li T jednoduchá kompletní extenze teorie UE, tak $\mathrm{UE}(m,n) \subseteq \mathrm{Th}(T)$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Díky kompletnosti $\mathrm{UE}(m,n)$ a T je nutně $\mathrm{Th}(\mathrm{UE}(m,n)) = \mathrm{Th}(T)$.

• Izomorfní spektrum teorie $\mathrm{UE}(m,n)$ s $m + n = \infty$, tj. $m = \infty$ nebo $n = \infty$.

$m + n = \infty$	$\mathrm{I}(\kappa, \mathrm{UE}(m,n))$	κ
$m < \infty$ nebo $n < \infty$:	1	$\geq \omega$
$m = n = \infty$:	$2i + 1$	$\omega_i,\ i < \omega$
	$\lvert \kappa \cap \mathbf{Cn}^{\infty} \rvert$	$\geq \omega_\omega$
Ekvivalentně:	$2 \cdot \lvert \kappa \cap \mathbf{Cn}^{\infty} \rvert + 1$	$\geq \omega$

Kapitola 4

Nerozhodnutelnost

Stručný obsah kapitoly.

- Předběžnosti: Definovatelné množiny, Σ_n- a Π_n-formule, kolekce.
- Aritmetiky: Robinsonova, Peanova, $\mathrm{I}\Sigma_{n,L}$.
- Aritmetizace a rozhodnutelnost.
- Nerozhodnutelnost a první Gödelova věta.
- Rekurze a Δ_1-definované funkce a relace.
- Silně nerozhodnutelné struktury.

Ukážeme, jak formulovat základní problematiku syntaxe některých spočetných jazyků a teorií v jisté aritmetické „provozní“ teorii, čili jak tuto problematiku „aritmetizovat“, a to tak, aby bylo možné na základě analýzy složitosti užívaných syntaktických pojmů, kterými jsou jazyk, term, formule, substituovatelnost, axiomatika, důkaz atd., pro danou teorii T zjišťovat složitost predikce „být teorémem T“.

Složitost pojmu bude měřena složitostí jeho definice podané v „provozní teorii“. Tato teorie bude extenzí S' jisté základní aritmetiky S o definice (pojmů) s tím, že $\mathcal{N} \models S$. Pak existuje jednoznačně určená expanze $\mathcal{N}' \models S'$ modelu $\mathcal{N}$; definovaný pojem P (funkční či relační symbol) lze potom také chápat v jeho číselné prezentaci, totiž jako jeho interpretaci P' v $\mathcal{N}'$. Máme-li tak např. v S' jazyk L (daný nějakou definicí), máme i pojem „být L-formulí“, prezentovaný jako unární definovaný predikátový symbol Fm_L a také jeho číselnou prezentaci Fm'_L; $\mathrm{Fm}'_L(n)$ pak značí, že n je nějaká L-formule či podrobněji kód L-formule, vytvořený jako jistá sekvence, a tedy přirozené číslo, ze symbolů jazyka L' signatury $\langle \underline{\mathcal{R}'}, \underline{\mathcal{F}'} \rangle$, kde $\mathcal{R}'$ je unární číselná relace a $\mathcal{R}'(k)$ značí, že k je relační symbol či kód relačního symbolu z L.

Základním složitostním typem formulí budou tzv. Δ_1-formule. Je-li jazyk L dán takovou formulí lze ukázat, že jeho základní syntax má pak všechny pojmy opět dané Δ_1-formulemi. Jejich číselné prezentace jsou tedy jisté Δ_1-definované relace a totální funkce. Přitom Δ_1-definované relace a totální číselné funkce jsou právě rekurzivní relace a funkce. Speciálně tedy číselná prezentace zmíněného jazyka L je rekurzivní. Říkáme pak též, že L je rekurzivní jazyk a dle již řečeného je jeho základní syntax rovněž rekurzivní. Rekurzivní axiomatikou v jazyce L rozumíme rekurzivní množinu $A \subseteq \mathrm{Fm}'_L$. Pak predikci $\mathrm{Th}_A(x)$, značící, že „x je sentence dokazatelná v teorie T s axiomatikou A“, lze vyjádřit jako $(\exists y)\varphi(x,y)$, kde φ je Δ_1-formule. Lze-li ji vyjádřit jako nějakou Δ_1-formuli, říkáme, že T je rozhodnutelná; potom tedy množina v ní dokazatelných sentencí je rekurzivní.

V teorii S' se chceme vyjadřovat přirozeně, tj. pomocí „množinových obratů“; musí v ní být tedy dán definicí predikátový symbol ϵ náležení a navíc tak, že z něj odvozené běžné množinové predikce (např. $\subseteq$) a operace (např. $\cap, \cup$) mají potřebné vlastnosti. To vše poskytne teorie značená BAS.

4.1 Formální aritmetiky

Předběžnosti.

4.1.1. Definovatelné množiny v modelu.

Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura.

1. Nechť $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ jsou L-formule, $b_1, \ldots, b_m$ jsou z A a

$$D = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n;\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$$
$$\text{resp.}\quad D = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n;\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]\}.$$

Říkáme pak, že množina D je *definovaná v $\mathcal{A}$ formulí $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ bez parametrů* resp. *formulí $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ z parametrů $b_1, \ldots, b_m$*. Uvedenou množinu D značíme také $\varphi(\mathcal{A})$ resp. $\varphi(\mathcal{A}, b_1, \ldots, b_m)$.

2. Buď $X \subseteq A$ a Φ nějaká množina L-formulí. Množina $D \subseteq A^n$ je *Φ-definovatelná v $\mathcal{A}$ bez parametrů* resp. *z (parametrů z) X*, je-li v $\mathcal{A}$ definovaná nějakou formulí z Φ bez parametrů resp. z parametrů z X. Místo Fm_L-definovatelná říkáme jen definovatelná.

4.1.2. Omezené kvantifikace, omezené formule a $\Sigma_{n,L}$- a $\Pi_{n,L}$-formule.

Buď L jazyk, obsahující binární predikátový symbol $\leq$.

1. Nechť φ je formule a t term jazyka L, x proměnná nevyskytující se v t; pak

$$(\forall x \leq t)\varphi \ \text{ je }\ (\forall x)(x \leq t \to \varphi), \qquad (\exists x \leq t)\varphi \ \text{ je }\ (\exists x)(x \leq t \,\&\, \varphi)$$

a říkáme, že prvá resp. druhá formule je vytvořená *termem omezenou (univerzální resp. existenční) kvantifikací proměnné x formule φ*. Je-li speciálně t proměnná y, různá od x, říkáme jde o *omezenou (do y univerzální resp. existenční) kvantifikaci proměnné x formule φ*. Obdobně definujeme termem ostře omezené kvantifikace $(\forall x < t)$, $(\exists x < t)$ a omezené kvantifikace $(\forall x < y)$ a $(\exists x < y)$.

Užíváme-li dále uvedené "omezené kvantifikátory", vždy předpokládáme, že proměnná x nemá výskyt v t resp. je různá od proměnné y.

Když Q je $\forall$ či $\exists$, formuli $(Qx_0 \leq t) \cdots (Qx_{n-1} \leq t)\varphi$ zapisujeme též jako

$$(Qx_0, \ldots, x_{n-1} \leq t)\varphi \quad \text{nebo} \quad (Q\overline{x} \leq t)\varphi.$$

2. *Omezené formule jazyka L* tvoří nejmenší obor L-formulí obsahující všechny otevřené L-formule a uzavřený na logické spojky a omezenou kvantifikaci $(Qx \leq y)$.

Každá omezená L-formule je zřejmě logicky ekvivalentní s formulí tvaru

$$(Q_1x_1 \leq y_1) \cdots (Q_nx_n \leq y_n)\varphi,$$

kde φ je otevřená L-formule a Q_i jsou kvantifikátory. Pokud v definici omezené formule vezmeme místo kvantifikace $(Qx \leq y)$ kvantifikaci $(Qx < y)$, získáme obor formulí logicky ekvivalentní s oborem omezených formulí.

3. *$\Sigma_{n,L}$-formule* a *$\Pi_{n,L}$-formule* definujeme induktivně:

- $\Sigma_{0,L}$-formule a $\Pi_{0,L}$-formule jsou právě omezené formule jazyka L.
- $\Sigma_{n+1,L}$-formule jsou právě tvaru $(\exists\overline{x})\varphi$, kde φ je nějaká $\Pi_{n,L}$-formule a $\Pi_{n+1,L}$-formule jsou právě tvaru $(\forall\overline{x})\varphi$, kde φ je nějaká $\Sigma_{n,L}$-formule.

4. *$\Delta_{n,L}$-formule* je formule (logicky) ekvivalentní jak nějaké $\Sigma_{n,L}$-formuli, tak nějaké $\Pi_{n,L}$-formuli.

5. L-formule je některého z uvedených typů *v L-teorii T*, je-li v T ekvivalentní formuli tohoto typu a je $\Delta_{n,L}$ *v T*, je-li jak $\Sigma_{n,L}$ tak $\Pi_{n,L}$ v T. Místo v prázdné teorii říkáme jen *v logice* či *logicky*.

6. Symbol $\Sigma_{n,L}(T)$ resp. $\Pi_{n,L}(T)$ resp. $\Delta_{n,L}(T)$ značí také obor všech $\Sigma_{n,L}$- resp. $\Pi_{n,L}$- resp. $\Delta_{n,L}$-formulí v T. Místo $\Sigma_{n,L}(\emptyset)$ píšeme jen $\Sigma_{n,L}$ apod.

7. *Striktně $\Sigma_{n,L}$-formule* definujeme obdobně jako $\Sigma_{n,L}$-formule, a to tak, že bereme jen "jednoduchou" kvantifikaci $(\exists x)$ místo $(\exists\overline{x})$. Obdobně definujeme *striktně $\Pi_{n,L}$-formule.*

TVRZENÍ 4.1.3. *Nechť T je L-teorie.*

1) $\Sigma_{n,L}(T) \cup \Pi_{n,L}(T) \subseteq \Delta_{n+1,L}(T) = \Sigma_{n+1,L}(T) \cap \Pi_{n+1,L}(T)$.

2) a) *Obory $\Sigma_{n,L}(T)$, $\Pi_{n,L}(T)$ a $\Delta_{n,L}(T)$ jsou uzavřené na varianty, konjunkci, disjunkci.*
b) *Pro $n > 0$ je obor $\Sigma_{n,L}(T)$ resp. $\Pi_{n,L}(T)$ uzavřený na existenční resp. univerzální kvantifikaci a dále na tvoření instancí.*
c) *Negace formule z $\Sigma_{n,L}(T)$ resp. $\Pi_{n,L}(T)$ je v $\Pi_{n,L}(T)$ resp. $\Sigma_{n,L}(T)$. Speciálně je obor $\Delta_{n,L}(T)$ uzavřený na negaci.*

3) *Buď $n > 0$. Je-li φ ze $\Sigma_{n,L}(T)$ a $T \vdash (\exists! y)\varphi(\overline{x}, y)$, je φ z $\Delta_{n,L}(T)$.*

Důkaz. 1) plyne snadno, uvědomíme-li si, že "zbytečná kvantifikace" (Qx) proměnné x nevyskytující se ve φ poskytuje formuli ekvivalentní s φ.

2) a) Tvrzení o variantách je patrné a zbytek plyne užitím prenexních operací. b) Prvá část plyne přímo z definice. Tvrzení o instancích plyne z toho, že

$$\begin{aligned}\varphi(z_1/t_1, \ldots, z_n/t_n) \quad &\leftrightarrow \quad (\exists z_1)\cdots(\exists z_n)(z_1 = t_1 \mathbin{\&} \cdots z_n = t_n \mathbin{\&} \varphi(z_1, \ldots, z_m)) \\ &\leftrightarrow \quad (\forall z_1)\cdots(\forall z_n)(z_1 = t_1 \mathbin{\&} \cdots z_n = t_n \rightarrow \varphi(z_1, \ldots, z_m)).\end{aligned}$$

c) je jasné.

3) Máme $T \vdash \neg\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow (\exists y')(y' \neq y) \mathbin{\&} \varphi(\overline{x}, y/y')$ (kde y' je různá od y a nevyskytující se a nekvantifkovaná v φ). Na pravé straně $\leftrightarrow$ je formule z $\Sigma_{n,L}$ a dle 2) c) tedy tvrzení platí. $\square$

TVRZENÍ 4.1.4. *Buď $\mathcal{A}$ nějaká L struktura a L s binárním predikátovým symbolem $\leq$. Pak obor všech podmnožin A^n, které jsou $\Delta_{1,L}$-definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů, je Booleova algebra množin a obor všech podmnožin A^n, které jsou $\Sigma_{1,L}$- resp. $\Pi_{1,L}$-definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů, je uzavřený na konečná sjednocení a konečné průniky.*

4.1.5. Axiomy kolekce.

Nechť jazyk L obsahuje binární predikátový symbol $\leq$. *Axiom kolekce* pro L-formuli φ dle (různých proměnných) $x, \overline{y}$ je formule

$$(\forall x \leq u)(\exists \overline{y})\varphi \rightarrow (\exists v)(\forall x \leq u)(\exists \overline{y} \leq v)\varphi,$$

kde u, v se nevyskytují ve φ a jsou různé od všech $x, \overline{y}$; značíme ji $\mathrm{B}_{\varphi}^{x,\overline{y}}$, stručněji B_{φ}. Je-li Φ množina L-formulí, je B_{Φ} množina všech $\mathrm{B}_{\varphi}^{x,\overline{y}}$, kde $\varphi \in \Phi$ a $x, \overline{y}$ jsou různé proměnné. Je to *schema kolekce* pro Φ. Místo $\mathrm{B}_{\mathrm{Fm}_L}$ píšeme jen B_L Je to *schema kolekce* pro L.

TVRZENÍ 4.1.6. *Buď $n > 0$. Pro $\Sigma_{n,L}$- resp. $\Pi_{n,L}$-formuli φ, L-term t a proměnnou x nevyskytující se v t je v teorii $\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}}$ formule $(\forall x \leq t)\varphi$ ekvivalentní $\Sigma_{n,L}$- resp. $\Pi_{n,L}$-formuli.*

Speciálně: Obory $\Sigma_{n,L}(\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}})$, $\Pi_{n,L}(\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}})$ a $\Delta_{n,L}(\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}})$ jsou uzavřeny na omezenou kvantifkaci. Platí-li navíc $(\forall x_0, \ldots, x_{l-1})(\exists y)(\bigwedge_{i<l} x_i \leq y)$, jakmile l je přirozené, je každá $\Sigma_{n,L}$- resp. $\Pi_{n,L}$-formule ekvivalentní striktně $\Sigma_{n,L}$- resp. striktně $\Pi_{n,L}$-formuli v $\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}}$.

Důkaz. Buď $n > 0$. Stačí dokázat, že pro $\Sigma_{n,L}$-formuli $\varphi(x, \overline{z})$ a u nevyskytující se ve φ a různé od x je v $\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}}$ formule $(\forall x \leq u)\varphi$ ekvivalentní $\Sigma_{n,L}$-formuli. (Neboť $(\forall x)(x \leq t \rightarrow \varphi)$ je $\chi(u/t)$ pro χ tvaru $(\forall x \leq u)\varphi$, přičemž volíme u různé od x a nevyskytující se ve φ. Podle 3.1.39 je $\vdash \chi(u/t) \leftrightarrow (\exists u)(u = t \mathbin{\&} \chi)$.) Indukcí dle n. Nechť φ je $(\exists \overline{y})\psi(x, \overline{y}, \overline{z})$, kde ψ je $\Pi_{n-1,L}$-formule. Je $\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}} \vdash (\forall x \leq u)\varphi \leftrightarrow (\exists v)(\forall x \leq u)(\exists \overline{y} \leq v)\psi$. Pro $n = 1$ je ψ omezená, tedy tvrzení platí. Pro $n > 1$ dle indukčního předpokladu je $\mathrm{B}_{\Sigma_{n-1,L}} \vdash (\exists \overline{y} \leq v)\psi \leftrightarrow \psi'$ pro jistou $\Pi_{n-1,L}$-formuli ψ'. Tudíž máme $\mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}} \vdash (\forall x \leq u)\varphi \leftrightarrow (\exists v)(\forall x \leq u)\psi'$ a poslední formule je $\Sigma_{n,L}$-formule. Speciální tvrzení plyne bezprostředně. $\square$

Formální aritmetiky.

4.1.7. Numerický a aritmetický jazyk. Aritmetiky. Aritmetické množiny.

1. *Numerický* jazyk je jazyk obsahující $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$; teorie v něm je *numerická.* Přitom S je unární funkční symbol, zvaný operace *následníka*, 0 je konstantní symbol. Konstantní term $\mathrm{S}\cdots\mathrm{S}0$, S aplikováno n-krát, je n-tý *numerál*; značíme jej

$$\underline{n}.$$

Jazyk $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ *aritmetiky* je numerický jazyk $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$, kde $+, \cdot$ jsou binární funkční symboly a $\leq$ binární relační symbol.

Místo $\Sigma_{n,\langle \mathrm{S},+,\cdot,0,\leq\rangle}, \Pi_{n,\langle \mathrm{S},+,\cdot,0,\leq\rangle}, \Delta_{n,\langle \mathrm{S},+,\cdot,0,\leq\rangle}$ se píše jen $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$; formule z těchto oborů se po řadě nazývají Σ_n-, Π_n-, Δ_n-formule; jsou to tedy formule jazyka $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ aritmetiky!

2. *Robinsonova aritmetika* Q je $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$-teorie s axiomy:

(Q1)	$0 \neq \mathrm{S}x$	(Q2)	$\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \to x = y$
(Q3)	$x + 0 = x$	(Q4)	$x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)$
(Q5)	$x \cdot 0 = 0$	(Q6)	$x \cdot \mathrm{S}y = x \cdot y + x$
(Q7)	$x \neq 0 \to (\exists y)(x = \mathrm{S}y)$	(Q8)	$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$.

3. *Standardní model aritmetiky* $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ je model Q. *Aritmetické množiny* jsou právě množiny definované v modelu $\mathbf{N}$ bez parametrů.

4. *Peanova aritmetika* P je rozšíření Q o *schema indukce* I, tvořené *axiomy indukce* I^x_φ, stručně I_φ, které mají tvar

$$(\varphi(0)\ \&\ (\forall x)(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{S}x))) \to (\forall x)\varphi(x). \tag{4.1}$$

Aritmetika $\mathrm{I}\Sigma_n$ je rozšíření Q o schema indukce I_{Σ_n}, tvořené všemi axiomy indukce I^x_φ, kde φ je Σ_n-formule. $\mathbf{N}$ je model jak $\mathrm{I}\Sigma_n$ tak P.

Aritmetika $\mathrm{I}\Sigma_{n,L}$, přičemž L je extenze jazyka $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ aritmetiky, je rozšíření Q o *schema indukce* $\mathrm{I}_{\Sigma_{n,L}}$, tvořené všemi axiomy indukce I^x_φ, kde φ je $\Sigma_{n,L}$-formule.

TVRZENÍ 4.1.8.

1) *Pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí:*

a)	$\mathrm{Q} \vdash \underline{m} = 0$	$\Leftrightarrow$	$m = 0$	b)	$\mathrm{Q} \vdash \underline{m} = \underline{n}$	$\Leftrightarrow$	$m = n$
c)	$\mathrm{Q} \vdash \mathrm{S}\underline{m} = \mathrm{S}\underline{n}$	$\Leftrightarrow$	$m = n$	d)	$\mathrm{Q} \vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$		
					$\mathrm{Q} \vdash \underline{m} \cdot \underline{n} = \underline{m \cdot n}$		

2) *V Q je dokazatelné pro $m, n \in \mathbb{N}$.*

(q1)	$x \leq \underline{m} \leftrightarrow x = \underline{0} \vee \cdots \vee x = \underline{m}$	(q2)	$x \leq \underline{m} \vee \underline{m} \leq x$
	$x \leq y \leq \underline{m} \to x \leq \underline{m}$		$x \leq \underline{m} \leq y \to x \leq y$

Speciálně: $\mathrm{Q} \vdash \underline{m} \leq \underline{n} \ \Leftrightarrow m \leq n$.

3) (O Σ_1-kompletnosti Robinsonovy aritmetiky.) *Pro Σ_1-formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ a $m_1, \ldots, m_k$ z $\mathbb{N}$ je*

$$\mathrm{Q} \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}) \ \Leftrightarrow\ \mathbf{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]. \tag{4.2}$$

Důkaz. 1) a) z (Q1), b) z (Q2), c) z (Q2), d) z (Q2) – (Q6).

2) (q1) Indukcí podle m. Pro $m = 0$ to platí, neboť zřejmě $\mathrm{Q} \vdash x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$. Nechť to platí pro m. Pak v Q máme: $x \leq \underline{m+1}$ právě když $z + x = \mathrm{S}\underline{m}$ pro nějaké z. Pokud $x \neq 0$, máme $x = \mathrm{S}x'$ pro nějaké x' a díky (Q4), (Q2) tedy $z + x' = \underline{m}$, tj. $x' \leq \underline{m}$ a dle indukčního předpokladu je $x' = \underline{p}$ pro nějaké $p \leq m$. Tedy $x = \mathrm{S}\underline{p}$ a máme $x = \underline{q}$ pro nějaké $q \leq m + 1$. (q2) plyne snadno indukcí dle m, užijeme-li (q1). Zbývající dvě implikace plynou snadno užitím (q1), (q2).

3) Indukcí podle složitosti termu t se dokáže $\mathrm{Q} \vdash t(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}) = \underline{t^{\mathbb{N}}[n_1, \ldots, n_k]}$

užitím 1) d). Indukcí podle složitosti a užitím 1) a speciálního tvrzení z 2) dále dokážeme (4.2) pro φ omezenou; v případě omezené kvantifikace užijeme $(q1)$ z 2). □

TVRZENÍ 4.1.9.

1) $\mathrm{I}\Sigma_0$ *dokazuje následující (očekávaná) tvrzení:*

a) $y + x = x \leftrightarrow y = 0$, b) $x \neq \mathrm{S}(x)$,
c) $x + y = y + x$, d) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
e) *"$\leq$ je uspořádání"*, f) $0 \leq x$,
g) $x < \mathrm{S}y \leftrightarrow x \leq y$ h) $x \leq y \vee y \leq x$,
i) $x \cdot y = y \cdot x$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
j) $x \neq 0 \leftrightarrow (\exists y \leq x) x = \mathrm{S}(y)$ *(Diskrétnost)*
k) $x < y \,\&\, z \neq 0 \rightarrow x + z < y + z \,\&\, x \cdot z < y \cdot z$ *(Izotonie)*
l) $y \neq 0 \rightarrow (\exists z \leq x)(\exists z' < y) x = z \cdot y + z'$ *(Dělení se zbytkem)*

2) $\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \mathrm{B}_{\Sigma_{n,L}}$ *pro* $n > 0$.

Důkaz. 1) Důkaz se provede rutinně.

2) Indukcí dle $n\,(> 0)$ dokážeme: Pro $\Sigma_{n,L}$-formuli φ platí

$$\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash (\forall x \leq u)(\exists \overline{y})\varphi \rightarrow (\exists v)(\forall x \leq u)(\exists \overline{y} \leq v)\varphi, \tag{4.3}$$

s různými $x, \overline{y}, u, v$ a u, v se nevyskytujícími ve φ. Předpoklad v uvedené implikaci označme ψ_0, závěr ψ_1. Buď u' nová proměnná, ψ formule $\psi_1(u/u') \vee u < u'$. Dokážeme níže

$$\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \psi_0 \rightarrow \psi. \tag{4.4}$$

Pak $\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \psi_0 \rightarrow (\psi_1 \vee u < u)$, tedy platí i požadované $\psi_0 \rightarrow \psi_1$.

Dokazujeme (4.3). Není obtížné ukázat, že

$$\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \psi_0 \rightarrow (\psi(u'/0) \,\&\, \psi(u') \rightarrow \psi(u'/\mathrm{S}u')), \tag{4.5}$$

tj., že ψ_0 implikuje předpoklady axiomu indukce pro ψ. Ten můžeme užít, neboť ψ je $\Sigma_{n,L}$ v $\mathrm{I}\Sigma_{n,L}$, protože φ je tvaru $(\exists \overline{z})\varphi'$ pro jistou $\Pi_{n-1,L}$-formuli. Je-li $n = 1$, je ψ jasně $\Sigma_{n,L}$ v $\mathrm{I}\Sigma_{n,L}$. Je-li $n > 1$, je díky platnosti $\mathrm{B}_{n-1,L}$ a 4.1.6 ψ opět $\Sigma_{n,L}$ v $\mathrm{I}\Sigma_{n,L}$. Tudíž (4.5) dává $\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \psi_0 \rightarrow (\forall u')\psi$, tedy i máme konečně $\mathrm{I}\Sigma_{n,L} \vdash \psi_0 \rightarrow \psi$. □

4.2 Aritmetizace a rozhodnutelnost

Teorie $S^{\triangle}$.

4.2.1. IS-teorie. Δ_1-extenze S. Teorie $S^{\triangle}$, struktura $\mathcal{A}^{\triangle}$.

$L^A = \langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je jazyk aritmetiky. Symbol S značí teorii s jazykem obsahujícím jazyk $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$.

1. IS-*teorie* je teorie S, která obsahuje axiomy $\mathrm{I}\Sigma_{1,L(S)}$ $(= \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}_{\Sigma_{1,L(S)}})$.

2. Δ_1-*extenze* teorie S je teorie S' získaná z S postupně prováděnou extenzí o symbol definovaný $\Delta_{1,L(S_0)}$-formulí právě extendované teorie S_0; je to ovšem konzervativní extenze S a každý model $\mathcal{A} \models S$ lze jednoznačně expandovat do modelu S'; značíme jej $\mathcal{A}^{S'}$.

3. Buď S nějaká IS-teorie. Teorie $S^{\triangle}$ se získá tak, že k ní přidáme pro každou Δ_1-formuli jazyka aritmetiky φ symbol O_φ a jeho definici formulí φ, přičemž splňuje-li φ podmínku existence a jednoznačnosti, přidáme ještě i funkční symbol O_φ. Když $\mathcal{A} \models S^{\triangle}$, značíme $\mathcal{A}^{S^{\triangle}}$ také $\mathcal{A}^{\triangle}$ a interpretaci symbolu O teorie $S^{\triangle}$ v $\mathcal{A}^{S^{\triangle}}$ značíme $O^{\triangle}$.

Základní vlastnosti IS-teorie S v L plynou ihned z 4.1.3, 4.1.6; platí tedy: Obory $\Sigma_{1,L}[\Pi_{1,L},\ \Delta_{1,L}]$-formulí jsou v S uzavřeny na varianty, instance, konjunkce, disjunkce a kvantifikace tvaru $(Qx \leq t)$, kde t je L-term. Dále jsou obory $\Sigma_{0,L}$ a $\Delta_{1,L}$ uzavřené na negaci v S.

TVRZENÍ 4.2.2. *Buď S nějaká* IS*-teorie v jazyce L (obsahujícím $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$).*

1) *Nechť S' je Δ_1-extenze S a L' je jazyk S'.*
   a) *$\Sigma_{0,L'}$-formule je v S' ekvivalentní nějaké $\Delta_{1,L}$-formuli.*
   b) *Každá $\Sigma_{1,L'}[\Pi_{1,L'}]$-formule je v S' ekvivalentní nějaké $\Sigma_{1,L}[\Pi_{1,L}]$-formuli.*
   c) *S' je* IS*-teorie.*
   d) *Pro mimologický symbol z L' existuje $\Delta_{1,L}$-formule, která jej definuje v S'.*

2) a) *Pro každou $\Delta_{1,L(S^\triangle)}$-formuli $\varphi(\overline{x})$ existuje relační symbol R v $L(S^\triangle)$ tak, že $S^\triangle \vdash R(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x})$. Pro každou $\Sigma_{1,L(S^\triangle)}$-formuli $\varphi(\overline{x}, y)$ s $S^\triangle \vdash (\exists! y)\varphi(\overline{x}, y)$ existuje funkční symbol F v $L(S^\triangle)$ tak, že $S^\triangle \vdash F(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y)$.*
   b) *Buď $\mathcal{A} \models S$. Pak každá množina $\Delta_{1,L}$-definovatelná bez parametrů v $\mathcal{A}$ je některá relace struktury $\mathcal{A}^\triangle$.*
   c) *Nechť $\mathbf{N} \models S$ (a tedy $L(S)=\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$). Pak pro $\Sigma_{1,L(S^\triangle)}$-formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a $k_1, \ldots, k_n$ z $\mathbb{N}$ je*
$$\mathbf{N}^\triangle \models \varphi(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n) \Leftrightarrow S^\triangle \vdash \varphi(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n). \tag{4.6}$$

Důkaz. 1) Buď S' extenze S o $\Delta_{1,L}$-formulí definovaný symbol O. Pak je patrné, že dO-překlad L'-atomické formule je $\Delta_{1,L}$-formule (viz 3.1.55). Tudíž bezkvantifikátorová a tedy i omezená L'-formule je v S' ekvivalentní nějaké $\Delta_{1,L}$-formuli díky uzavřenosti oboru $\Delta_{1,L}$-formulí aritmetické teorie S na konjunkci, disjunkci, negaci a omezenou kvantifikaci.

Z právě dokázaného plyne a). Tudíž platí i b) a odtud plyne c) a také d).

2) a), b) jsou přímým je důsledkem 1). c) Netriviální je $\Rightarrow$. Plyne však ihned z Σ_1-kompletnosti S, neboť φ je ekvivalentní nějaké Σ_1-formuli aritmetiky v $S^\triangle$ dle 1) b). $\square$

Říkáme-li dále, že F, G resp. P, R (s indexy, čárkami apod.) jsou v teorii S, znamená to, že F, G resp. P, R jsou funkční resp. relační mimologické symboly jazyka $L(S)$.

TVRZENÍ 4.2.3. *Existuje Δ_1-extenze* BAS *teorie* $\mathrm{I}\Sigma_1$*, která má všechny symbolické predikce a operace potřebné k práci se základní syntaxí spočetných teorií prvního řádu, užívané v běžném, tj. množinovém vyjadřování. Jinak řečeno, teorie* BAS *interpretuje v sobě fragment teorie konečných množin, a to takový, který stačí pro studium základní syntaxe predikátové logiky. Speciálně lze v něm v potřebném rozsahu konstruovat rekurzí.*

Každé $S^\triangle$ je extenzí BAS *(pro* IS*-teorii S), neboť S je extenzí* $\mathrm{I}\Sigma_1$.

O teorii BAS.

• BAS se získá jako Δ_1-extenze teorie $\mathrm{I}\Sigma_1$. Definuje se binární funkční symbol $(x, y) = z \leftrightarrow \underline{2}z = (x + y + \underline{1})(x + y) + \underline{2}x$; (x, y) je kód uspořádané dvojice. Dále unární funkční symbol 2^x, přičemž (v získané extenzi) platí základní vlastnosti exponenciály dvojky:

a) $2^0 = \underline{1}$, b) $2^{\mathrm{S}(x)} = \underline{2} \cdot 2^x$, c) $x < 2^x$, d) $x < y \rightarrow 2^x < 2^y$, e) $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$.

Platí též
$$(\forall x, y)(\exists! u \leq y)(\exists! v < \underline{2})(\exists! w < 2^x)(y = 2^{x+1}u + 2^x v + w), \tag{4.7}$$
což umožňuje dále postupně definovat funkční symboly Bit, Ist (*počáteční množina*) a relační symboly $\epsilon, \subseteq$:

$$\mathrm{Bit}(x, y) = v \leftrightarrow (\exists u \leq y)(\exists w < 2^x)(y = 2^{x+1}u + 2^x v + w) \;\&\; v < \underline{2},$$
$$\mathrm{Ist}(x) = 2^x - 1,$$
$$x \epsilon y \leftrightarrow \mathrm{Bit}(x, y) = 1, \qquad x \subseteq y \leftrightarrow (\forall u < x)(u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y).$$

Dále se postupně definují:

$$\emptyset\,(=0),\ \{x,y\},\ \mathrm{Rel}(x),\ \mathrm{Fnc}(x),\ \langle x\rangle\,(=\{(0,x)\}),$$
$$\bigcup x,\ \mathcal{P}(x),\ x\cup y,\ x\cap y,\ x\times y,\ \mathrm{dom}(x),\ \mathrm{rng}(x),$$
$$\mathrm{Seq}(x),\ \mathrm{lh}(x)\text{ a }(x)_y,\ x\smile z,\ \sqcup(x),\ x\lessdot y,\ \mathrm{Sh}(x,y)\text{ (zkrácení }x\text{ na délku }y)$$
$$\langle x_1,\dots,x_n\rangle_n,\text{ stručně }\langle x_1,\dots,x_n\rangle;\ n=1,2,\dots.$$

Přitom platí např.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Seq}(x)\leftrightarrow(\exists y\le x)(\mathrm{Fnc}(x)\ \&\ \mathrm{dom}(x)=\mathrm{Ist}(y)),\\ &\mathrm{Seq}(x)\rightarrow \mathrm{lh}(x)=y\leftrightarrow \mathrm{dom}(x)=\mathrm{Ist}(y),\\ &\langle x_1,\dots,x_n\rangle_n=y\leftrightarrow \mathrm{Seq}(y)\ \&\ \mathrm{lh}(y)=\underline{n}\ \&\ \textstyle\bigwedge_{i<n}(y)_{\underline{i}}=x_{i+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} x\in y\rightarrow x<y,\quad y\in 2^x-1\leftrightarrow y<x, & y\in 2^{x+1}-1\leftrightarrow y\le x,\\ x\subseteq y\leftrightarrow(\forall u)(u\in x\rightarrow u\in y)\rightarrow x\le y, & x=y\leftrightarrow(\forall u)(u\in x\leftrightarrow u\in y),\\ (\forall x)(\exists! y)(\text{„existuje bijekce } x \text{ na } \mathrm{Ist}(y)\text{“}); & y\text{ je kardinalita }x.\\ \mathrm{Seq}(x)\ \&\ i<\mathrm{lh}(x)\rightarrow(x)_i<x, & (\forall x)(\exists y)(x\le y\ \&\ \neg\mathrm{Seq}(y))\end{array}$$

• Platí všechny běžné vlastnosti uvedených predikcí a operací, týkající se konečných množin. Zformulujeme v 4.2.4 tvrzení o konstrukci rekurzí.

Označme formuli $\chi(y,\overline{z})\ \&\ (\forall y'<y)\neg\chi(y',\overline{z})$ s y' nevyskytující se v χ jako

$$^{\mu y}\chi(y,\overline{z}).$$

TVRZENÍ 4.2.4. (O konstrukci rekurzí.) *Nechť v $S^\triangle$ je $G(w,x,\overline{z})$. Pak v $S^\triangle$ jsou jisté F a $\overleftarrow{F}$ (kódující průběh F) takové, že v $S^\triangle$ platí*

$$\overleftarrow{F}(x,\overline{z})=y\quad\leftrightarrow\quad \mathrm{Seq}(y)\ \&\ {}^{\mu y}(\mathrm{lh}(y)=x\ \&\ (\forall u<x)((y)_u=F(u,\overline{z})))$$
$$F(x,\overline{z})=G(\overleftarrow{F}(x,\overline{z}),x,\overline{z}).$$

Říkáme, že F je sestrojeno rekurzí z G.

Důkaz. $\hat{G}(x,\overline{z})=y\leftrightarrow{}^{\mu y}(\mathrm{Seq}(y)\ \&\ \mathrm{lh}(y)=x\ \&\ (\forall v<x)((y)_v=G(\mathrm{Sh}(y,v),v,\overline{z})))$ nechť platí v $S^\triangle$ a dále $F(x,\overline{z})=G(\hat{G}(x,\overline{z}),x,\overline{z})$ v $S^\triangle$. Dle konstrukce je $\hat{G}$ rovno $\overleftarrow{F}$. □

LEMMA 4.2.5. *Je-li notace $\underline{\mathcal{F}}$ v $S^\triangle$ (tj. $\mathcal{F}$, $Ar_{\mathcal{F}}$ jsou v $S^\triangle$), je obor* $\mathrm{D}(\mathcal{F})$ *designátorů v $S^\triangle$.*

Důkaz. Odvození v notaci $\underline{\mathcal{F}}$ je u splňující $\Delta_{1,L(S^\triangle)}$-formuli

$$\begin{aligned}&\mathrm{Seq}(u)\ \&\ 0<\mathrm{lh}(u)\ \&\ (\forall i<\mathrm{lh}(u))((\exists o,s<u)(\mathcal{F}(o)\ \&\ \mathrm{Seq}(s)\\ &\quad\&\ \mathrm{lh}(s)=Ar_{\mathcal{F}}(o)\ \&\ (u)_i=\langle o\rangle\smile\sqcup(s)\ \&\ (\forall k<\mathrm{lh}(s))(\exists j<i)((s)_k=(u)_j))).\end{aligned}$$

Tedy obor $\mathrm{D}(\mathcal{F})$ designátorů je definován následující $\Sigma_{1,L(S^\triangle)}$-formulí

$$(\exists u)(\text{„}u\text{ je odvození v }\underline{\mathcal{F}}\text{ a }x=(u)_{\mathrm{lh}(u)-1}\text{“}).$$

Můžeme u omezit $2^{(x+x+1)^2}$, neboť stačí uvažovat jen prostá odvození u designátoru x taková, že $x=s\smile(u)_i\smile s'$ s jistými s,s'. Díky jednoznačnosti je jen jeden výraz x' s $x=s\smile x'\smile s'$; uvažované u splňuje $\mathrm{lh}(u)\le x$. Místo $(\exists u)$ můžeme tedy psát $(\exists u<t)$, kde t je sekvence délky x s každým členem x; přitom $t<2^{(x+x+1)^2}$. □

Základní syntax jazyka v $S^\triangle$.

Dále předpokládáme, není-li řečeno jinak, že S je IS-teorie a $\mathbf{N}\models S$.

POZNÁMKA. Platí pak např. že existuje libovolně velké n tak, že $S^\triangle\vdash\neg\mathrm{Seq}(\underline{n})$.

Základní syntax predikátové logiky s jazykem L, stručně *základní syntax L*, je tvořená relačními a funkčními symboly v $S^\triangle$, které představují Sa) – Se):

• Sa) Logické symboly a predikce a operace s nimi: $\neg^\bullet, \to^\bullet, v^\bullet, \forall^\bullet, =^\bullet$; jsou to různé konstantní termy tvaru $\underline{n}$ s (technickou podmínkou) $\neg\mathrm{Seq}(\underline{n})$.

$\mathrm{Vr}(x) = \langle v^\bullet, x\rangle$	x-tá proměnná,
$\mathrm{Var}(y) \leftrightarrow (\exists x < y)(y = \mathrm{Vr}(x))$	y je proměnná,
$\mathrm{Gq}(y,z) \leftrightarrow \mathrm{Var}(y) \;\&\; (z = \langle \forall^\bullet, y\rangle)$	z je $(\forall y)$,
$\mathrm{Gqs}(z) \leftrightarrow (\exists y < z)\mathrm{Gq}(y,z)$	z je obecná kvantifikace

• Sb) Jazyk ($L =$) $\mathcal{R}, Ar_{\mathcal{R}}, \mathcal{F}, Ar_{\mathcal{F}}$; přitom $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ jsou disjunktní a neobsahují žádný mimologický symbol a $\mathcal{R}(x) \to \neg\mathrm{Seq}(x)$, $\mathcal{F}(x) \to \neg\mathrm{Seq}(x)$.

• Sc) Termy a formule jazyka: Term, AFm, Fm.

• Sd) Tyto syntaktické operace a predikce se symboly, termy a formulemi:

$\mathrm{Sub}(x,y,z)$	výsledek substituce z za všechny volné výskyty y v x.
$\mathrm{Fr}(x,y)$	x je volná proměnná v y.
$\mathrm{Substl}(x,y,z)$	z je substituovatelné za y do x.
$\mathrm{Sent}(x)$	x je sentence.
$\mathrm{Num}(x)$	x-tý numerál, jde-li o jazyk s 0 a operací následníka S.

• Se) $\mathrm{PAx}(x)$, $\mathrm{SAx}(x)$, $\mathrm{DAx}(x)$, $\mathrm{EAx}(x)$, $\mathrm{LAx}(x)$ znamenají po řadě x je výrokový axiom, axiom substituce, axiom distribuce obecného kvantifikátoru, axiom rovnosti, logický axiom.

Obšírněji místo Sub, Fr, PAx atd. můžeme psát Sub_L, Fr_L, PAx_L atd.

TVRZENÍ 4.2.6. *Je-li jazyk L v $S^\triangle$, je jeho základní syntax v $S^\triangle$.*

Důkaz. 1) Pro Term, AFm, Fm to plyne z 4.2.5, v případě AFm analogicky. Predikce a operace z Sd), Se) se získají podrobným rozpisem rutinně s využitím konstrukce rekurzí z 4.2.4. □

POZNÁMKA 4.2.7. Nechť L je jazyk v $S^\triangle$. Pak např. ${\mathrm{Fm}_L}^\triangle(\underline{n})$ značí, že n je (kód) formule jazyka L. Podobně je tomu s ${\mathrm{Term}_L}^\triangle(\underline{n})$, ${\mathrm{Fr}_L}^\triangle(\underline{n},\underline{m})$, ${\mathrm{Sub}_L}^\triangle(\underline{n},\underline{m},\underline{k})$ atd.

Číselná prezentace teorie T v ${}^\triangle\mathcal{N}(T)$.

4.2.8. Terminologie a poznámky.

1. Řekneme-li, že

$$A \textit{ je } \Sigma_n[\Pi_n,\Delta_n]\textit{(-množina)} \text{ nebo } A \textit{ je z } \Sigma_n[\Pi_n,\Delta_n],$$

znamená to, že A je množina definovaná bez parametrů v $\mathbf{N}$ nějakou $\Sigma_n[\Pi_n,\Delta_n]$-formulí.

Platí tedy např.: $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je Δ_n právě když A i $\mathbb{N}^k - A$ je Σ_n.

2. Je-li $A \subseteq \mathbb{N}^k$, říkáme též, že je A je k-ární relace. Pro $\overline{a} \in \mathbb{N}^k$ můžeme $\overline{a} \in A$ zapsat také jako $A(\overline{a})$ a říci, že k-ární relace A platí o $\overline{a}$ a též, že $\overline{a}$ je v relaci A. Dále $-A$ značí *komplement* A, tj. $\mathbb{N}^k - A$. Potom tedy $-A(\overline{a})$ je totéž, co $\overline{a} \notin A$. Zapisujeme to také jako $\neg A(\overline{a})$ nebo $\not{A}(\overline{a})$.

4.2.9. Formální vyjádření predikcí „být důkazem v T“ a „být teorém teorie T“.

• Nechť $\varphi^{Prf}_{\mathrm{Ax}}(x,y)$ je následující formule jazyka $L(S^\triangle)$ rozšířeného o unární relační symbol Ax:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Seq}(y) \;\&\; \mathrm{lh}(y) \neq 0 \;\&\; (y)_{\mathrm{lh}(y)-1} = x \;\&\; (\forall u < \mathrm{lh}(y))\\ &\qquad (\mathrm{LAx}((y)_u) \vee \mathrm{Ax}((y)_u) \vee (\exists v, w < u)\\ &\qquad ((y)_v = \langle \to^\bullet, (y)_w, (y)_u\rangle \vee (\exists z < (y)_u)(\mathrm{Gqs}(z) \;\&\; (y)_u = \langle z, (y)_v\rangle))));\end{aligned} \tag{4.8}$$

Formálně vyjadřuje, že y je důkaz x z axiomů Ax, pokud $\mathrm{Ax}(x) \to \mathrm{Fm}(x)$.

• Buď $S^\triangle(\mathrm{Ax})$ extenze $S^\triangle$ o následující definice:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Prf}_{\mathrm{Ax}}(x,y) \leftrightarrow \varphi^{Prf}_{\mathrm{Ax}}(x,y),\\
\mathrm{Th}_{\mathrm{Ax}}(x) \leftrightarrow (\exists y)(\mathrm{Prf}_{\mathrm{Ax}}(x,y) \mathbin{\&} \mathrm{Sent}(x)), \quad \mathrm{nTh}_{\mathrm{Ax}}(x) \leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{Ax}}(\langle \neg^{\bullet}, x\rangle).
\end{gathered} \tag{4.9}
$$

4.2.10. Struktura ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}(T)$.

1. Základním oborem pro exaktní vyšetřování deduktivní složitosti teorií je struktura

$$ {}^{\vartriangle}\mathcal{N} \models \mathrm{SA}^{\vartriangle}, $$

kde $\mathrm{SA} = \mathrm{Th}(\mathbf{N})$ je standardní aritmetika. Pro symbol O teorie $\mathrm{SA}^{\vartriangle}$ buď ${}^{\vartriangle}O$ jeho interpretace v ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$. V ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$ máme potřebné pojmy dané jako jisté Δ_1-definované predikáty a funkce, kterými jsou např. ${}^{\vartriangle}\epsilon$, ${}^{\vartriangle}\mathrm{Seq}$, ${}^{\vartriangle}\mathrm{lh}$, ${}^{\vartriangle}\neg^{\bullet}$, ${}^{\vartriangle}\mathrm{Vr}$. Dále máme v ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$ všechny Δ_1-definované jazyky; pro takový jazyk L pak máme ${}^{\vartriangle}\mathrm{Fm}_L$, ${}^{\vartriangle}\mathrm{Sub}_L$ atd.

2. Je-li L jazyk v ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$, *$L$-axiomatika* je množina $Ax \subseteq {}^{\vartriangle}\mathrm{Fm}_L$.
Teorie T nad ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$ je jazyk L v ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$ a nějaká L-axiomatika; označme ji Ax_T.
Buď T teorie nad ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$. Označme expanzi $\langle {}^{\vartriangle}\mathcal{N}, Ax_T\rangle$ do modelu $\mathrm{SA}^{\vartriangle}(\mathrm{Ax})$ jako

$$ {}^{\vartriangle}\mathcal{N}(T). $$

Říkáme ještě, že T je $\Delta_1[\Sigma_1]$-*axiomatizovaná* resp. $\Delta_1[\Sigma_1]$-*axiomatizovatelná*, je-li její axiomatika $\Delta_1[\Sigma_1]$ resp. T je ekvivalentní teorii, která je $\Delta_1[\Sigma_1]$-axiomatizovaná.

Nadále platí tato úmluva.

- Jazyk je vždy z ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$, teorie je vždy nad ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$.
- Pro symbol O teorie $\mathrm{SA}^{\vartriangle}(\mathrm{Ax})$ značíme jeho interpretaci v ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}(T)$ opět O, hrozí-li nedorozumění, tak $\grave{}O$; je ovšem $\grave{}O$ totéž, co ${}^{\vartriangle}O$ pro symbol teorie $\mathrm{SA}^{\vartriangle}$. Místo Ax píšeme Ax_T, místo $\mathrm{Prf}_{\mathrm{Ax}}$ resp. $\mathrm{Th}_{\mathrm{Ax}}$ pak Prf_T resp. Th_T.

Máme tedy např.

$$ \mathrm{Prf}_T = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N}^2;\ \langle {}^{\vartriangle}\mathcal{N}, Ax_T\rangle \models \varphi^{Prf}_{\mathrm{Ax}}[a,b]\}. $$

KOMENTÁŘ 4.2.11.

Lze říci, že ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}$ je rámec pro číselnou prezentaci uvažovaných jazyků a jejich základní syntaxi a ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}(T)$ navíc rámec i pro teorii v nějakém takovém jazyce a její základní dedukci. To vše jsme měli dříve v „přirozeném“ rámci „přirozeně“ prezentováno, kdy jsme měli např. vztah $T \vdash \varphi$ pro $L(T)$-sentenci φ. V číselné prezentaci pak máme totéž jako $\mathrm{Th}_T(\varphi)$, chápeme-li již φ číselně prezentované jako $\varphi \in \mathbb{N}$ s $\mathrm{Sent}_{L(T)}(\varphi)$ a podobně chápeme i axiomatiku Ax_T teorie T. Můžeme též pro názornost užívat značku $\ulcorner\varphi\urcorner$ k označení číselné prezentace přirozeně prezentované sentence φ. Referujeme-li o sentenci φ na straně syntaxe v $\mathrm{SA}^{\vartriangle}$, musíme ji psát jako numerál $\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}$, stručněji $\underline{\varphi}$; máme tak potom např. $\mathrm{SA}^{\vartriangle} \vdash \mathrm{Sent}_L(\underline{\varphi})$. Podobně je tomu se sekvencí, která je důkazem v T: je-li d důkaz sentence φ v teorii T, tak $\mathrm{SA}^{\vartriangle}(T) \vdash \mathrm{Prf}_T(\underline{\varphi}, \underline{d})$ (vynechali jsme $\ulcorner\urcorner$). Zachyťme to ještě následovně.

Přirozená prezentace	Číselná prezentace ${}^{\vartriangle}\mathcal{N}(T)$	Aritmetická prezentace $\mathrm{SA}^{\vartriangle}(T)$
φ	$\ulcorner\varphi\urcorner$	$\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}$
$d = \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$	$\ulcorner d\urcorner = \grave{}\langle \ulcorner\varphi_0\urcorner \ldots \ulcorner\varphi_n\urcorner\rangle$	$\underline{\ulcorner d\urcorner} = \langle \underline{\ulcorner\varphi_0\urcorner} \ldots \underline{\ulcorner\varphi_n\urcorner}\rangle$
d je důkaz φ_n v T	$\grave{}\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi_n\urcorner, \ulcorner d\urcorner)$	$\mathrm{Prf}_T(\underline{\ulcorner\varphi_n\urcorner}, \underline{\ulcorner d\urcorner})$
$T \vdash \varphi$, φ je sentence	$\grave{}\mathrm{Th}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$	$\mathrm{Th}_T(\underline{\ulcorner\varphi\urcorner})$

Ve druhém sloupci podle úmluvy často vynecháváme ˋ. Také vynecháváme ⌜⌝ a napíšeme tak např. místo ˋ$\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi_n\urcorner, \ulcorner d\urcorner)$ jen $\mathrm{Prf}_T(\varphi_n, d)$ a ve třetím sloupci pak jen $\mathrm{Prf}_T(\underline{\varphi_n}, \underline{d})$.

Rozhodnutelnost.

4.2.12. Rozhodnutelná teorie.

Teorie T je *rozhodnutelná*, když Th_T je Δ_1; jinak je *nerozhodnutelná*.

TVRZENÍ 4.2.13.

1) *Když teorie* T *je* $\Delta_1[\Sigma_1]$*-axiomatizovaná,* Prf_T *je* $\Delta_1[\Sigma_1]$ *a* Th_T *i* nTh_T *jsou* Σ_1.
2) *Kompletní* Σ_1*-axiomatizovaná teorie* T *je rozhodnutelná.*

Důkaz. 1) plyne ihned z tvaru formule $\varphi^{Prf}_{\mathrm{Ax}}(x, y)$. 2) Protože Th_T je Σ_1 dle 1), stačí dokázat, že $\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T$ je Σ_1. Díky kompletnosti T v $^{\triangle}\mathcal{N}(T)$ platí $\neg\mathrm{Th}_T(x) \leftrightarrow \mathrm{nTh}_T(x) \vee \neg\mathrm{Sent}(x)$ a vidíme, že $\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T$ je Σ_1. □

4.2.14. Kompletace.

Zobecníme tvrzení 2) z 4.2.13. pomocí následujícího pojmu.

Říkáme, že relace $R \subseteq \mathbb{N}^2$ je Σ_1*-kompletace* L-teorie T, když

a) R je Σ_1,
b) pro každé $a \in \mathrm{dom}(R)$ je $R[a]$ L-axiomatika kompletní extenze teorie T,
c) každá kompletní L-extenze T je ekvivalentní L-teorii s axiomatikou tvaru $R[a]$.

Platí-li jen b) a c), je to *kompletace* T.

TVRZENÍ 4.2.15. (Kompletační kriterium rozhodnutelnosti.) *Když teorie* T *je* Σ_1*-axiomatizovaná a má* Σ_1*-kompletaci, je rozhodnutelná.*

Důkaz. Předně Th_T je Σ_1 podle 4.2.13 1). Máme ještě dokázat, že $\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T$ je Σ_1. Nechť Σ_1-formule $\gamma(z_0, z_1)$ definuje R. Nechť formule φ^{Prf}_{γ} se získá z $\varphi^{Prf}_{\mathrm{Ax}}$ tak, že nahradíme $\mathrm{Ax}((y)_u)$ formulí $\gamma(z_0, z_1/(y)_u)$. Bod c) definice kompletace značí platnost následující formule v $^{\triangle}\mathcal{N}(T)$:

$$\mathrm{Sent}_L(x) \ \&\ \neg\mathrm{Th}_T(x) \quad\leftrightarrow\quad \mathrm{Sent}_L(x) \ \&\ (\exists z_0)(\varphi^{Prf}_{\gamma}(\langle\neg^{\bullet}, x\rangle)). \tag{4.10}$$

Formule v (4.10) vpravo od $\leftrightarrow$ je v $^{\triangle}\mathcal{N}(T)$ ekvivalentní Σ_1-formuli díky tvaru φ^{Prf}_{γ}. Tudíž $\mathrm{Sent}_L \cap (\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T)$ je Σ_1 a tedy i $\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T = (\mathrm{Sent}_L \cap (\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T)) \cup (\mathbb{N} - \mathrm{Sent}_L)$ je Σ_1. □

Příklady Σ_1-kompletací.

Teorie	Název	Σ_1-kompletace
PE	Teorie čisté rovnosti	$\mathrm{PE}_n = \mathrm{PE} + (\exists_n x)(x = x)$, $n > 0$,
		$\mathrm{PE}_0 = \mathrm{PE} + \{(\exists_{\geq} n)(x = x); n > 0\}$
DeLO*	Husté lineární uspořádání	DeLO^*_k, $k \in \{-\infty, +\infty, \pm\infty, \emptyset\}$
ACF	Algebraicky uzavřená tělesa	$\mathrm{ACF}_p = \mathrm{ACF} + p1 = 0$, p prvočíslo,
		$\mathrm{ACF}_0 = \mathrm{ACF} + \{p1 \neq 0; p \text{ prvočíslo}\}$
BA	Teorie Booleových algeber	Popis je dosti komplikovaný.

4.3 Nerozhodnutelnost a první Gödelova věta

Reprezentovatelnost.

4.3.1. Reprezentovatelnost funkcí a relací.
Buď T nějaká numerická teorie.

1. *Funkce* $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *je reprezentována* v T formulí $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, platí-li pro každou n-tici $a_1, \ldots, a_n$ čísel ekvivalence

$$T \vdash \varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, y) \leftrightarrow y = \underline{F(a_1, \ldots, a_n)}.$$

Funkce je *reprezentovatelná* v T, je-li v T reprezentována nějakou formulí.

2. *Relace* $R \subseteq \mathbb{N}^n$ *je reprezentována* v T její formulí $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, platí-li pro každou n-tici $a_1, \ldots, a_n$ čísel:

$$R(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow T \vdash \varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n), \quad \neg R(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n).$$

Relace je *reprezentovatelná* v T, je-li v T reprezentována nějakou formulí.

Platí zřejmě: relace je reprezentovatelná v T, právě když je její charakteristická funkce reprezentovatelná v T. Pokud totiž formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ reprezentuje relaci R v T, tak formule $(\varphi \;\&\; y = 0) \vee (\neg\varphi \;\&\; y = \underline{1})$ reprezentuje charakteristickou funkci K_R v T. Pokud obráceně $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ reprezentuje K_R v T, tak $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y/0)$ reprezentuje R v T. Dále zřejmě $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ reprezentuje R v T, právě když $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ reprezentuje $\mathbb{N}^n - R$ v T.

VĚTA 4.3.2. (O reprezentaci funkcí a relací z Δ_1 v Robinsonově aritmetice Q.)

1) *Každá totální funkce ze* Σ_1 *je reprezentována v* Q *nějakou* Σ_1*-formulí.*

2) *Každá relace z* Δ_1 *je reprezentována v* Q *nějakou* Σ_1*-formulí.*

Důkaz. 1) Buď $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkce definovaná formulí $(\exists v)\chi(\overline{x}, y, v)$, kde χ je omezená formule. Ukážeme, že Σ_1-formule $\psi(\overline{x}, y)$ tvaru $(\exists w)\chi'$, kde χ' je

$$y \leq w \;\;\&\;\; (\exists v \leq w)\chi(\overline{x}, y, v) \;\;\&\;\; (\forall y' \leq w)(\forall v \leq w)(\chi(\overline{x}, y', v) \to y' = y)),$$

reprezentuje F v Q, tj. že pro každé $\overline{a} \in \mathbb{N}^k$ je

$$\mathrm{Q} \;\vdash\; \psi(\underline{\overline{a}}, y) \leftrightarrow y = \underline{F(\overline{a})}. \tag{4.11}$$

Označme ještě konjunkty tvořící χ' jako χ'_1, χ'_2, χ'_3.
Buď $F(\overline{a}) = b$. Nechť c je takové, že $\mathbf{N} \models \chi[\overline{a}, b, c]$ a buď $d = \max\{b, c\}$. Platí

$$\mathrm{Q} \;\vdash\; \underline{b} \leq \underline{d} \;\&\; \underline{c} \leq \underline{d} \;\&\; (\forall z \leq \underline{d})(z = 0 \vee z = \underline{1} \vee \cdots \vee z = \underline{d}).$$

Předně ze Σ_1-úplnosti Q plynou následující a), b) a z b) pak i c):

a) $\mathrm{Q} \vdash \chi(\underline{\overline{a}}, \underline{b}, \underline{c})$,

b) $\mathrm{Q} \vdash \neg\chi(\underline{\overline{a}}, \underline{b'}, \underline{c'})$ pro každé $b' \neq b$, c',

c) $\mathrm{Q} \vdash (\forall y' \leq \underline{d})(\forall v \leq \underline{d})(\chi(\underline{\overline{a}}, y', v) \to y' = \underline{b})$.

Implikace $\leftarrow$ v (4.11) platí, neboť $\mathrm{Q} \vdash \chi'(\underline{\overline{a}}, \overline{b}, \overline{d})$, tedy i $\mathrm{Q} \vdash \psi(\underline{\overline{a}}, \underline{b})$. Dokážeme implikaci $\to$ v (4.11). Pracujeme v Q. Nechť y je takové, že $\psi(\underline{\overline{a}}, y)$ platí; buď w takové, že platí $\chi'(\underline{\overline{a}}, y, w)$. Když $w \leq \underline{d}$, tak $y \leq w$, $\chi'_2(\underline{\overline{a}}, y, w)$ a c) dávají $y = \underline{b}$. Když $\underline{d} \leq w$, tak díky $\underline{b} \leq d$, $\underline{c} \leq d$, a) a $\chi'_3(\underline{\overline{a}}, y, w)$ je $\underline{b} = y$.

2) plyne z 1): Pro relaci R z Δ_1 je její charakteristická funkce ze Σ_1, tedy je reprezentovaná v Q jistou Σ_1-formulí $\varphi(\overline{x}, y)$; pak $\varphi(\overline{x}, 0)$ reprezentuje R v Q. $\square$

Nerozhodnutelnost.

VĚTA 4.3.3. (O Δ_1-neoddělitelnosti.) *Buď T bezesporná numerická L-teorie a nechť každá Δ_1-podmnožina $\mathbb{N}$ je reprezentovaná v T.*

1) *Když $P \subseteq \mathbb{N}$ odděluje Th_T a nTh_T, tj. obsahuje jednu z uvedených množin a je disjunktní s druhou, je relace*
$$E_P = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^2;\ P(\mathrm{Sub}(a, \mathrm{Vr}(0), \mathrm{Num}(b)))\}$$
taková, že pro každou Δ_1-množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ existuje $a \in \mathbb{N}$ s $A = E_P[a]$.
2) *Th_T a nTh_T nelze oddělit Δ_1-množinou. Speciálně je T nerozhodnutelná.*
3) *Když T je navíc Σ_1-axiomatizovaná, A je Δ_1 a nadmnožina $\mathrm{Th}_T \cup \mathrm{nTh}_T$, tak $A - (\mathrm{Th}_T \cup \mathrm{nTh}_T)$ není Σ_1.*

Důkaz. 1) Předně Th_T a nTh_T jsou disjunktní díky bezespornosti. (Neboť $\mathrm{Th}_T(n)$ a $\mathrm{nTh}_T(n)$ dává $\mathrm{Th}_T(m)$, kde m je konjunkce n a negace n.)

Označme $\mathrm{Sub}(a, \mathrm{Vr}(0), \mathrm{Num}(b))$ jako $Sb(a, b)$. Nechť $P \subseteq \mathbb{N}$ odděluje Th_T a nTh_T; z důvodu symetrie můžeme předpokládat, že $\mathrm{Th}_T \subseteq P$. Pro Δ_1-definovanou množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ existuje L-formule a (tj. $\mathrm{Fm}_L(a)$) s jedinou volnou proměnnou $\mathrm{Vr}(0)$ tak, že $b \in A \Rightarrow \mathrm{Th}_T(Sb(a, b)) \Rightarrow P(Sb(a, b))$, $b \notin A \Rightarrow \mathrm{nTh}_T(Sb(a, b)) \Rightarrow \neg P(Sb(a, b))$. Tudíž $b \in A \Leftrightarrow E_P(a, b)$, tj. $E_P[a] = A$.

2) Když $P \subseteq \mathbb{N}$ odděluje Th_T a nTh_T a je Δ_1, je Δ_1 i $A = \{a \in \mathbb{N};\ \neg E_P(a, a)\}$. Pak existuje $a \in \mathbb{N}$ s $A = E_P[a]$. Speciálně máme $\neg E_P(a, a) \Leftrightarrow a \in A \Leftrightarrow E_P(a, a)$– spor.

3) Nyní Th_T je Σ_1 dle 4.2.13, 1), tedy i nTh_T je Σ_1. Když $A - (\mathrm{Th}_T \cup \mathrm{nTh}_T)$ je Σ_1, tak je i $\mathbb{N} - \mathrm{Th}_T = (\mathbb{N} - A) \cup (\mathrm{nTh}_T \cup (A - (\mathrm{Th}_T \cup \mathrm{nTh}_T)))$ a tedy Th_T je Δ_1; to je ve sporu s 2). □

VĚTA 4.3.4. (O nerozhodnutelnosti.) *Bezesporná teorie rozšiřující Robinsonovu aritmetiku* Q *je nerozhodnutelná a je-li navíc Σ_1-axiomatizovaná, není kompletní.*

Důsledek: Th_{Q} *je* Σ_1 *a není* Δ_1, $\mathrm{Sent}_{L(\mathrm{Q})} - (\mathrm{Th}_{\mathrm{Q}} \cup \mathrm{nTh}_{\mathrm{Q}})$ *je* Π_1 *a není* Δ_1.

Důkaz. První část plyne ihned z 4.3.3, 2), neboť v Q je reprezentovaná každá množina, která je Δ_1. Tvrzení o nekompletnosti plyne užitím 4.2.13. Důsledek plyne z 4.3.3, 3). □

4.3.5. Kriteria nerozhodnutelnosti.

TVRZENÍ 4.3.6.

1) *Buď T' extenze T o konečně definic nebo jednoduchá extenze T o konečně axiomů. Je-li T' nerozhodnutelná, je T nerozhodnutelná.*
2) *Buď T konzervativní extenze T'. Je-li T' nerozhodnutelná, je T nerozhodnutelná.*

Důkaz. 1) Přiřaďme $L(T')$-sentenci φ $L(T)$-sentenci φ^* tak, že v prvém případě je φ^* „překlad“ φ do $L(T)$, ve druhém pak φ^* je $\bigwedge_{i<n} \chi_i \to \varphi$, kde $\{\chi_i;\ i < n\}$ jsou přidané axiomy a každé χ_i je sentence. Parciální zobrazení $F(\varphi) = \varphi^*$ je Δ_1, neboť konstrukce φ^* se odvolává jen na φ a konečně konkrétních formulí. Platí
$$\mathrm{Th}_T(\varphi^*) \Leftrightarrow \mathrm{Th}_{T'}(\varphi).$$
Tedy: když T je rozhodnutelná, tak $\mathrm{Th}_{T'}$ je Δ_1 a tedy je T' rozhodnutelná.

2) Pro $L(T')$-sentenci φ máme $\mathrm{Th}_T(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Th}_{T'}(\varphi)$. Tedy: když T je rozhodnutelná, tak $\mathrm{Th}_{T'}$ je Δ_1 a tedy je T' rozhodnutelná. □

TVRZENÍ 4.3.7. *Teorie T v jazyce aritmetiky, která nemá žádné mimologické axiomy, je nerozhodnutelná a nekompletní.*

Důkaz. Aritmetika Q je jednoduchá extenze T o konečně axiomů, tedy podle 4.3.6 je T nerozhodnutelná a ovšem též nekompletní, neboť má Δ_1-axiomatiku. □

4.3.8. Silně nerozhodnutelná struktura a definovatelná struktura.

1. Struktura $\mathcal{A}$ je *silně nerozhodnutelná*, je-li nerozhodnutelná každá teorie, která ji má za model.

2. Buď $\mathcal{A}$ struktura pro jazyk konečné signatury. Struktura $\mathcal{A}$ je *definovatelná* ve struktuře $\mathcal{B}$, jestliže A je podmnožina B definovaná bez parametrů v $\mathcal{B}$ a každá relace nebo funkce z $\mathcal{A}$ je restrikcí na A nějaké relace nebo funkce definované bez parametrů v $\mathcal{B}$.

TVRZENÍ 4.3.9. *Standardní model $\mathbf{N}$ přirozených čísel je silně nerozhodnutelná struktura.*

Důkaz. Buď $\mathbf{N} \models T$; pak $T \cup \mathrm{Q}$ je bezesporné rozšíření Q, tedy to je teorie nerozhodnutelná; protože to je jednoduché rozšíření T o konečně axiomů, je T nerozhodnutelná dle 4.3.6. □

VĚTA 4.3.10. (O silně nerozhodnutelné struktuře.) *Je-li $\mathcal{A}$ silně nerozhodnutelná struktura definovatelná ve struktuře $\mathcal{B}$, je $\mathcal{B}$ silně nerozhodnutelná struktura.*

Důkaz neuvádíme. □

VĚTA 4.3.11.

1) *Struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ celých čísel je silně nerozhodnutelná.*
Důsledek: teorie okruhů, komutativních okruhů a oborů integrity jsou nerozhodnutelné.

2) *Struktura $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ racionálních čísel je silně nerozhodnutelná.*
Důsledek: Teorie těles a teorie těles charakteristiky 0 jsou nerozhodnutelné.

Důkaz. 1) Z Lagrangeovy věty, tvrdící, že každé přirozené číslo je součtem čtyř čtverců přirozených čísel plyne, že $\mathbb{N}$ je definovatelné v uvažované struktuře $\mathcal{B}$ celých čísel. Odtud a pomocí v $\mathcal{B}$ definovatelné funkce $S(a) = a + 1$ a predikátu $a \leq b \leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{N})(a + c = b)$ dostáváme, že $\mathbf{N}$ je definovatelné v $\mathcal{B}$; z věty o silně nerozhodnutelné struktuře pak plyne, že $\mathcal{B}$ je silně nerozhodnutelná. Každá z teorií z důsledku má za model $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$, tedy je to teorie nerozhodnutelná.

2) Dle výsledku J. Robinsonové je $\mathbb{Z}$ definováno v $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$. Podle 1) a věty o silně nerozhodnutelné struktuře je tedy $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ silně nerozhodnutelná struktura; odtud pak plyne i tvrzení důsledku. □

První Gödelova věta

LEMMA 4.3.12. (Diagonální lemma.) *Buď T rozšíření teorie* Q. *Pak pro formuli $\varphi(v_0)$ teorie T existuje její sentence φ^* tak, že $T \vdash \varphi^* \leftrightarrow \varphi(\underline{\varphi^*})$.*

Důkaz. Existuje formule $\psi(v_0)$ jazyka aritmetiky tak, že pro každou $L(T)$-formuli $\chi(v_0)$ platí $\mathrm{Q} \vdash \psi(\underline{\chi}) \leftrightarrow \varphi(\overline{\chi(\underline{\chi})})$. Stačí pak vzít za φ^* formuli $\psi(\underline{\psi})$. Najdeme ψ. Funkce $D(x) = \mathrm{Sub}(x, \mathrm{Vr}(\overline{0}), \mathrm{Num}(x))$ je Δ_1; buď $\delta(v_0, v_1)$ nějaká Σ_1-formule reprezentující D v Q; pak je $\mathrm{Q} \vdash (\forall v_1)(\delta(\underline{\chi}, v_1) \leftrightarrow v_1 = \overline{\chi(\underline{\chi})})$ pro každou L(T)-formuli $\chi(v_0)$. Hledané ψ je formule $(\exists v_1)(\delta(v_0, v_1) \mathbin{\&} \varphi(v_1))$. □

4.3.13. Definice pravdy.

Formule $\tau(x)$ numerické teorie T je *definice pravdy v T*, jestliže pro každou sentenci φ teorie T platí $T \vdash \varphi \leftrightarrow \tau(\underline{\varphi})$.

TVRZENÍ 4.3.14.

1) *V bezesporném rozšíření teorie* Q *neexistuje definice pravdy.*

2) $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$ *není aritmetická množina.*

Důkaz. 1) Kdyby $\tau(x)$ byla definice pravdy v bezesporném rozšíření T teorie Q, platilo by $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\varphi})$ dle diagonálního lemmatu pro nějakou sentenci φ teorie T, což by znamenalo, že T je sporná. 2) Kdyby existovala formule $\psi(x)$ jazyka aritmetiky definující $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$, tj. taková, že $\mathrm{Th}(\mathbf{N}) = \{n; \mathbf{N} \models \psi(\underline{n})\}$, byla by ψ definicí pravdy v $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$. □

VĚTA 4.3.15. (První Gödelova věta.) *Buď T bezesporné Δ_1-axiomatizované rozšíření* Q. *Pak existuje Π_1-sentence pravdivá v $\mathbf{N}$ a nedokazatelná v T.*

Podrobněji: Nechť Σ_1-formule $\Theta(x,y)$ reprezentuje Prf_T *v* Q *a ν je dle diagonálního lemmatu sentence, pro níž je* $\mathrm{Q} \vdash \nu \leftrightarrow \neg(\exists y)\Theta(\underline{\nu}, y)$. *Pak $T \nvdash \nu$, $\mathbf{N} \models \nu$ a ν je Π_1-formule v* Q. *Když navíc každá Σ_1-sentence, dokazatelná v T platí v $\mathbf{N}$ (speciálně když $\mathbf{N} \models T$), je ν nezávislá sentence teorie T.*

Důkaz. Nechť $T \vdash \nu$. Pak $\mathrm{Prf}_T(\nu, d)$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$, tedy $\mathrm{Q} \vdash (\exists y)\Theta(\underline{\nu}, y)$. Také však $T \vdash \neg(\exists y)\Theta(\underline{\nu}, y)$ a máme spor v T. Dokážeme $\mathbf{N} \models \nu$. Nechť $\mathbf{N} \models \neg\nu$. Pak $\mathbf{N} \models \Theta(\underline{\nu}, \underline{d})$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ a tedy $\mathrm{Q} \vdash \Theta(\underline{\nu}, \underline{d})$, tudíž $\mathrm{Prf}_T(\nu, d)$, tj. $T \vdash \nu$, což je ve sporu s již dokázaným. □

4.4 Rekurze a Δ_1-definované funkce a realce

O funkcích $f \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ a relacích $r \subseteq \mathbb{N}^k$ mluvíme jako o číselných; je-li navíc $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}^k$, je f totální číselná (k-ární) funkce. Totální číselné funkce jsou heuristicky řečeno rekurzivní, jsou-li vyčíslitelné; matematická definice je v 4.4.4. Číselná relace je rekurzivní, je-li její charakteristická funkce rekurzivní.

V 4.4.7 je dokázáno:

> Totální číselná funkce resp. relace je rekurzivní, právě když je z Δ_1.
> Číselná relace je rekurzivně spočetná, právě když je ze Σ_1.

Tedy: všude, kde říkáme „totální funkce z Δ_1“ resp. „relace z $\Delta_1[\Sigma_1]$“ můžeme ekvivalentně říkat „rekurzivní funkce“ resp. „rekurzivní[rekurzivně spočetná] relace“.

4.4.1. Rekurzivní frazeologie.

Jazyk z ${}^{\triangle}\mathbf{N}$ je právě *rekurzivní jazyk*. Místo T je $\Delta_1[\Sigma_1]$-axiomatizovaná říkáme též, že T *je rekurzivní*[*rekurzivně spočetná*]; znamená to, že má *rekurzivní* [*rekurzivně spočetnou*] *axiomatiku*. Dále T je rozhodnutelná, právě když je Th_T rekurzivní. Položka 2) z 4.2.13 zní: Kompletní rekurzivně axiomatizovaná teorie T je rozhodnutelná. Místo Σ_1-kompletace říkáme též *rekurzivně spočetná kompletace*. Analogicky je tomu v dalších případech.

Základní vlastnosti rekurzivních funkcí a relací.

4.4.2. Číselné funkce a relace. $\mathrm{S}(x), \mathrm{I}^n_i(x_1, \ldots, x_n), \mathrm{K}_<, \mathrm{C}^n_i$.

1. Čísly rozumíme přirozená čísla. Symbol $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ značí n-tici čísel, tedy prvek z $\mathbb{N}^n$. Pro označení n-tic čísel používáme symbol $\overline{a}$; $\overline{a}_i$ je i-tý prvek z $\overline{a}$. Často přirozeně ztotožňujeme $\langle \overline{a}, \overline{b}\rangle$ s $\langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{b}_1, \ldots\rangle$.

Funkce resp. relace je, není-li uvedeno jinak, nějaká n-ární funkce $F \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ resp. relace $R \subseteq \mathbb{N}^n$; F je *totální*; když $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{N}^n$ a jinak je *parciální*. Na n-ární funkci F hledíme také jako na $n+1$-ární relaci $\{\langle \overline{a}, F(\overline{a})\rangle; \overline{a} \in \mathrm{dom}(F)\}$, o které mluvíme také jako o *grafu* funkce F a značíme ji $\mathcal{G}_F$. To, že $\overline{a}$ patří do relace R značíme jaké $\overline{a} \in R$ nebo $R(\overline{a})$.

Písmena F, G, H resp. P, Q, R značí dále zpravidla funkce resp. relace.

K vyjadřování vlastností funkcí a relací užíváme běžných výrazů: kvantifikací, logických spojek, operací s čísly a pod. Značí-li F funkci a R relaci, např. zápis

$(\exists x)(F(x,a) < b) \vee R(b+2)$ znamená: existuje přirozené číslo x tak, že $F(x,a) < b$ nebo $R(b+2)$.

Pro n-ární relaci R znamená $-R$ relaci $\mathbb{N}^n - R$. Průnik resp. sjednocení n-árních relací P, R značíme také symbolem $P \wedge R$ resp. $P \vee R$. Obdobně $\neg P$ značí totéž, co $-P$. Tedy např. $\neg P(\overline{a})$ znamená totéž, co $\overline{a} \notin P$. *Definiční obor*, též *projekce* relace R je relace $\{\overline{a} \in \mathbb{N}^{n-1};\ (\exists b)(\langle \overline{a}, b\rangle \in R)\}$; značí se $\mathrm{dom}(R)$. *Koprojekce* je relace $\{\overline{a} \in \mathbb{N}^{n-1};\ (\forall b)(\langle \overline{a}, b\rangle \in R)\}$; je rovná $-\mathrm{dom}(-R)$.

Charakteristická funkce n-ární relace R je n-ární totální funkce s hodnotami $0, 1$, nabývající hodnoty 0 právě na prvcích množiny R a 1 na $-R$. Značíme ji symbolem K_R.

Když R je n-ární relační symbol, K_R značí také n-ární funkční symbol takový, že (v příslušné numerické teorii) platí $\mathrm{K}_R(\overline{x}) = y \leftrightarrow R(\overline{x})\ \&\ y = \underline{0} \vee \neg R(\overline{x})\ \&\ y = \underline{1}$.

2. $\mathrm{S}(x) = x + 1$ je funkce *následník*, $\mathrm{I}^n_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $0 < i \leq n$, $0 < n$ je (*i-tá*) *projekce*. Dále definujeme *konstantní funkci* $\mathrm{C}^n_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ pro $n \geq 1$ vztahem $\mathrm{C}^n_i(\overline{a}) = i$. Binární funkci $\dot{-}$ definujeme vztahem: $x \dot{-} y = x - y$ pro $x \geq y$ a $x \dot{-} y = 0$ jinak.

4.4.3. μ-operace.

1. Když F resp. P je $(n+1)$-ární funkce resp. relace, řekneme, že jsou *speciální*, platí-li

$$(\forall \overline{a})(\exists x)F(\overline{a}, x) = 0 \quad \text{resp.} \quad (\forall \overline{a})(\exists x)P(\overline{a}, x).$$

Tedy: je-li $F(\overline{a}, x)$ speciální funkce, je $F(\overline{a}, x) = 0$ speciální relace.

2. μ-operace. Buď $P(\overline{a}, x)$ nějaká speciální $n+1$-ární relace. Pak $\mu x P(\overline{a}, x)$ značí (totální) funkci G takovou, že $G(\overline{a}) = \min\{b; P(\overline{a}, b)\}$.

Pro n-ární funkci F značíme $\mu x(R(\overline{a}, x) \vee x = F(\overline{a}))$ jako

$$(\mu x < F(\overline{a}))R(\overline{a}, x)$$

a říkáme, že to je funkce definována *F-omezenou μ-operací z R*; může nabýt hodnotu $F(\overline{a})$.

4.4.4. Rekurzivní funkce a relace.

Rekurzivní funkce definujeme induktivně následujícími pravidly:

- RF1. Funkce $\mathrm{S}(x), \mathrm{I}^n_i(x_1, \ldots, x_n), x + y, x \cdot y, \mathrm{K}_<$ jsou (základní) rekurzivní funkce.
- RF2. Je-li H k-ární rekurzivní funkce a $G_1, \ldots, G_k$ jsou m-ární rekurzivní funkce, je složená funkce $F(\overline{a}) = H(G_1(\overline{a}), \ldots, G_k(\overline{a}))$ rekurzivní.
- RF3. Je-li G speciální rekurzivní $(m+1)$-ární funkce, je $\mu x(G(\overline{a}, x) = 0)$ rekurzivní m-ární funkce.

Jinak řečeno: obor rekurzivních funkcí je nejmenší množina obsahující základní rekurzivní funkce, která je uzavřena na skládání a μ-operaci pro totální funkce.

3. *Rekurzivní relace* je taková relace, jejíž charakteristická funkce je rekurzivní. Místo rekurzivní relace se také říká *rekurzivní množina*.

4. Relace $S \subseteq \mathbb{N}^n$ je *rekurzivně spočetná*, existuje-li rekurzivní relace R tak, že $S(\overline{a}) \leftrightarrow (\exists x)R(\overline{a}, x)$ platí pro každé $\overline{a} \in \mathbb{N}^n$. Místo rekurzivně spočetná relace se také říká *rekurzivně spočetná množina*. Rekurzivně spočetné relace jsou tedy definiční obory rekurzivních relací.

TVRZENÍ 4.4.5.

1) *Jsou-li $Q, G_1, \ldots, G_k$ rekurzivní, je rekurzivní P, kde*
$$P(\overline{a}) \Leftrightarrow Q(G_1(\overline{a}), \cdots, G_k(\overline{a})).$$
2) *Je-li P speciální rekurzivní relace, je rekurzivní funkce $F(\overline{a}) = \mu x P(\overline{a}, x)$.*
3) *Každá konstanta C^n_i je rekurzivní.*
4) *Jsou-li P, Q m-ární rekurzivní relace, jsou i $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q$ rekurzivní.*
5) *Relace $<, \leq, >, \geq, =$ jsou rekurzivní.*

6) *Je-li P rekurzivní, jsou rekurzivní* $(\exists x \Diamond b)P(\overline{a}, x)$, $(\forall x \Diamond b)P(\overline{a}, x)$, *kde* $\Diamond$ *je* $<$ *nebo* $\leq$.

Důkaz. 1) $\mathrm{K}_P(\overline{a}) = \mathrm{K}_Q(G_1(\overline{a}), \cdots, G_k(\overline{a}))$.
2) $F(\overline{a}) = \mu x(\mathrm{K}_P(\overline{a}, x) = 0)$.
3) $\mathrm{C}^n_0(\overline{a}) = \mu x(\mathrm{I}^{n+1}_{n+1}(\overline{a}, x)) = 0)$. $\mathrm{C}^n_{i+1}(\overline{a}) = \mathrm{S}(\mathrm{C}^n_i(\overline{a}))$.
4) $\mathrm{K}_{\neg P}(\overline{a}) = \mathrm{K}_<(0, \mathrm{K}_P(\overline{a}))$, $\mathrm{K}_{P \vee Q}(\overline{a}) = \mathrm{K}_P(\overline{a}) \cdot \mathrm{K}_Q(\overline{a})$.
$(P \wedge Q)(\overline{a}) \leftrightarrow \neg(\neg P(\overline{a}) \vee \neg Q(\overline{a}))$.
5) $x \leq y$ je $\neg(y < x)$, což je rekurzivní dle 4) a rekurzivnosti $y < x$. Podobně pro $>, \geq, =$.
6) $(\exists x < b)P(\overline{a}, x)$ je $\mu x(P(\overline{a}, x) \vee x = b) < b$, tedy je rekurzivní dle 1), 5) a 2) Relace $(\forall x < b)P(\overline{a}, x)$ je rekurzivní, neboť to je $\neg(\exists x < b)\neg P(\overline{a}, x)$. Podobně pro $\leq$. □

VĚTA 4.4.6.

1) a) *Každá konečná podmnožina množiny* $\mathbb{N}^n$ *je rekurzivní.*
b) *Buďte* F, G *takové funkce, že* $G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ *platí pro každé* $x_1, \ldots, x_{n+1}$. *Je-li* F *rekurzivní, je* G *rekurzivní.*
c) *Funkce je rekurzivní, právě když je její graf rekurzivní.*
d) *Když* F, R *jsou* n*-ární rekurzivní funkce a relace,* $p : [1, n] \to [1, n]$ *zobrazení, jsou* $F(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(n)})$ *a* $R(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(n)})$ *rekurzivní.*

2) (O komplementu.) *Jsou-li relace* S *i její komplement* $-S$ *rekurzivně spočetné, je* S *rekurzivní.*

Důkaz. 1) a) Plyne snadno. b)
$G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = F(\mathrm{I}^{n+1}_1(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, \mathrm{I}^{n+1}_n(x_1, \ldots, x_{n+1}))$.
c) Buď F n-ární funkce a G jako v b). Pak

$$\mathcal{G}_F(x_1, \ldots, x_{n+1}) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mathrm{I}^{n+1}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Tedy $\mathcal{G}_F$ je rekurzivní, je-li F rekurzivní. Protože $F(\overline{a}) = \mu x \mathcal{G}_F(\overline{a}, x)$, platí i opačná implikace. d) $F(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(n)}) = F(\mathrm{I}^n_{p(1)}(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \mathrm{I}^n_{p(n)}(x_1, \ldots, x_n))$ a tvrzení pro F platí. Zcela obdobně to platí pro R. 2) Buďte P, R rekurzivní, že $S(\overline{a}) \leftrightarrow (\exists y)P(\overline{a}, y)$, $\neg S(\overline{a}) \leftrightarrow (\exists y)R(\overline{a}, y)$. Pak funkce F, definovaná vztahem $F(\overline{a}) = \mu y(P(\overline{a}, y) \vee R(\overline{a}, y))$ je zřejmě rekurzivní (neboť $P \vee R$ je speciální) a platí $S(\overline{a}) \leftrightarrow P(\overline{a}, F(\overline{a}))$. Tedy S je rekurzivní. □

VĚTA 4.4.7.

1) *Totální číselná funkce resp. relace je rekurzivní, právě když je z* Δ_1.

2) *Číselná relace je rekurzivně spočetná, právě když je ze* Σ_1.

Důkaz. 1) Dokážeme nejprve, že rekurzivní funkce jsou ze Σ_1 a rekurzivní relace z Δ_1. Základní rekurzivní funkce jsou po řadě definovány v $\mathbf{N}$ otevřenými formulemi s proměnnými $x_1, \ldots, y$: $y = \mathrm{S}(x_1)$, $y = x_i$, $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 \cdot x_2$, $(x_1 \leq x_2 \ \&\ x_1 \neq x_2 \ \&\ y = 0) \vee (x_2 \leq x_1 \ \&\ y = \mathrm{S}(0))$. Jsou-li funkce H_i definovány Σ_1-formulemi φ_i v $\mathbf{N}$, $i = 1, \ldots, k$ a funkce G je definována Σ_1-formulí φ v $\mathbf{N}$, definuje Σ_1-formule ψ tvaru $(\exists y_1, \ldots, y_k)(\varphi_1 \ \&\ \cdots \ \&\ \varphi_k \ \&\ \varphi)$ funkci $F(\overline{a}) = G(H_1(\overline{a}), \ldots, H_k(\overline{a}))$ v $\mathbf{N}$. Buď $F(\overline{a}) = \mu y(G(\overline{a}, y) = 0)$, kde $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ je speciální funkce, tj. platí $(\forall \overline{a} \in \mathbb{N}^k)(\exists y)G(\overline{a}, y) = 0$. Nechť Σ_1-formule $\varphi(\overline{x}, y, z)$ definuje G v $\mathbf{N}$, kde $\overline{x}$ je $x_1, \ldots, x_k$. Označme φ' formuli $(\forall z' \neq z)\neg\varphi(\overline{x}, y, z')$, přičemž z' nemá výskyt ve φ; φ' je logicky ekvivalentní Π_1-formuli a zřejmě definuje G v $\mathbf{N}$. Formule $\varphi(\overline{x}, y, 0)\ \&$ $(\forall y' < y)\neg\varphi'(\overline{x}, y', 0)$ jasně definuje F v $\mathbf{N}$ a je v $\mathbf{N}$ ekvivalentní Σ_1-formuli díky platnosti axiomů kolekce v $\mathbf{N}$. Konečně každá rekurzivní relace je z Δ_1, neboť ona i její komplement jsou ze Σ_1, protože takové jsou jejích charakteristické funkce.

Indukcí podle složitosti definující formule se dokáže, že platí:

Σ_0-formulí definovatelná (v $\mathbf{N}$, bez parametrů) relace je rekurzivní. (4.12)

Pro formuli aritmetiky φ tvaru $\varphi(\overline{x})$ s $\overline{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ buď $R_\varphi = \{\overline{a} \in \mathbb{N}^k; \mathbf{N} \models \varphi[\overline{a}]\}$. Je-li φ atomická tvaru $t(\overline{x})\Diamond s(\overline{x})$, kde t, s jsou termy a $\Diamond$ je $=$ či $\leq$, je $R_\varphi = \{\overline{a} \in \mathbb{N}^k; t^{\mathbb{N}}(\overline{a})\Diamond s^{\mathbb{N}}(\overline{a})\}$; to je rekurzivní relace, neboť $t^{\mathbb{N}}$, $s^{\mathbb{N}}$ jsou rekurzivní, což plyne jasně indukcí dle složitosti termů za použití 1) – 6) z 4.4.5. Jsou-li R_φ, R_ψ rekurzivní, jsou takové i $R_{\neg\varphi} = \neg R_\varphi$, $R_{\varphi\to\psi} = \neg R_\varphi \vee R_\psi$ dle 4) z 4.4.5 a pro χ tvaru $(Qx_{k-1} \leq y)\varphi$ (kde Q je kvantifikátor) je $R_\chi = (Qx_{k-1} < b)R_\varphi$ rekurzivní dle 6) z 4.4.5.

2) je nyní důsledkem (4.12) a již dokázané implikace z 2).

Dokončíme důkaz 1). Když je relace R z Δ_1, tak speciálně R i komplement R jsou ze Σ_1, dle 2) jsou rekurzivně spočetné, tedy rekurzivní. Tedy také: Je-li (graf) totální funkce F z Δ_1, je (graf) F rekurzivní. □

4.5 Silně nerozhodnutelné struktury

4.5.1. Expanze L-struktury $\mathcal{A}$ je *nepodstatná*, je-li její jazyk extenzí L pouze o konstantní symboly.

LEMMA 4.5.2. (O nepodstatné expanzi.) *Je-li nepodstatná expanze $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ silně nerozhodnutelná, je $\mathcal{A}$ silně nerozhodnutelná.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A} \models T$, L jazyk struktury $\mathcal{A}$. Označme T' teorii v jazyce struktury $\mathcal{A}'$ s týmiž axiomy jako T. Dle věty o konstantách je $\mathrm{Th}_T = \mathrm{Th}_{T'} \cap \mathrm{Fm}_L$; vpravo je Δ_1-množina, neboť $\mathcal{A}' \models T'$ a tedy $\mathrm{Th}_{T'}$ je Δ_1. □

TVRZENÍ 4.5.3. *Grupa* $\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ *je silně nerozhodnutelná.* ($\mathrm{Perm}(\mathbb{Z})$ *je množina všech bijekcí* $\mathbb{Z}$ *na* $\mathbb{Z}$, $\cdot$ *je skládání funkcí a* Id *je identita na* $\mathbb{Z}$.)

Důkaz. Označme $A = \mathrm{Perm}(\mathbb{Z})$. S resp. $S^i \in \mathrm{Perm}(\mathbb{Z})$ splňuje $S(k) = k + 1$ resp. $S^i(k) = k + i$ pro $i, k \in \mathbb{Z}$; speciálně S^1 je S a S^0 je identita na $\mathbb{Z}$. Pro $g \in A$ je $[g] = \{f \in A; f \cdot g = g \cdot f\}$ množina všech prvků z A, komutujících s g. Relace $i|j$ značí, že i dělí j v oboru $\mathbb{Z}$ celých čísel: $| = \{\langle i, j\rangle \in \mathbb{Z}^2; \underline{\mathbb{Z}} \models (\exists z)(x \cdot z = y)[i, j]\}$. Buď

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, +, 1, |\rangle, \quad \mathcal{B}^* = \langle B^*, \cdot, S, |^*\rangle, \text{ kde } B^* = \{S^i; i \in \mathbb{Z}\},\ S^i|^*S^j \Leftrightarrow i|j. \tag{4.13}$$

Platí, jak dokážeme níže:

A) V $\mathcal{B}$ je struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ definovatelná (bez parametrů).

B) $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^*$ via $h(i) = S^i$ pro $i \in \mathbb{Z}$.

C) V $\langle A, \cdot, \mathrm{Id}, S\rangle$ je struktura $\mathcal{B}^*$ definovatelná (bez parametrů).

Z A) užitím věty o silně nerozhodnutelné struktuře plyne, že $\mathcal{B}$ je silně nerozhodnutelná. Tedy dle B) je $\mathcal{B}^*$ silně nerozhodnutelná. Dle C) je $\mathcal{A}$ silně nerozhodnutelná, neboť v její nepodstatné expanzi o S je definovatelná silně nerozhodnutelná $\mathcal{B}^*$.

Důkaz A). V $\mathcal{B}$ jsou definovatelné bez parametrů Sn, NSn, Sq:

	Význam	Definující formule
$Sn(x, y, z)$	z je společný násobek x a y	$x\|z$ & $y\|z$
$NSn(x, y, z)$	z je největší společný násobek x a y	$Sn(x, y, z)$ & $(\forall z')(Sn(x, y, z') \to z\|z'$
$Sq(x) = y$	y je druhá mocnina x	$(\exists z)(y = x + z$ & $(\exists x')$ $(NSn(x, x+1, z+x+x)$ & $NSn(x, x', z)))$ (Srovnej s platností $NSn(x, x+1, x^2+x)$, $NSn(x, x-1, x^2-x)$ v $\underline{\mathbb{Z}}$.)

Pak formule $Sq(x+y) = Sq(x) + z + z + Sq(y)$ definuje násobení v $\underline{\mathbb{Z}}$. (Srovnej s $(x+y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$ platícím v $\underline{\mathbb{Z}}$.) Definovatelnost $-$ a 0 v $\mathcal{B}$ je jasná.

Důkaz B) plyne ihned z definic.

Důkaz C). Užijeme následující dvě tvrzení:

$$\text{a)} \quad [S] = \{S^i;\, i \in \mathbb{Z}\}, \qquad\qquad \text{b)} \quad i|j \Leftrightarrow [S^i] \subseteq [S^j]. \tag{4.14}$$

B^* lze definovat formulí $x \cdot S = S \cdot x$, neboť dle (4.14) a) je $B^* = [S]$.

$x|^*y$ (na B^*) lze dle (4.14) b) definovat formulí

$$(\forall z)(z \cdot S = S \cdot z \to (z \cdot x = x \cdot z)) \to (\forall z)(z \cdot S = S \cdot z \to (z \cdot y = y \cdot z)).$$

Zbývá dokázat (4.14).

a) $f \in [S] \Leftrightarrow f(k+1) = f(k) + 1$ pro každé $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(k) = f(0) + k = S^{f(0)}(k)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$; tudíž $f \in [S] \Leftrightarrow f = S^i$ pro nějaké $i \in \mathbb{Z}$.

b) Implikace $\Rightarrow$: když $j = ki$, tak pro $f \in [S^i]$ je $f(a+ki) = f(a) + ki$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$, tj. $f \in [S^j]$.

Implikace $\Leftarrow$. Buď $[S^{i+1}] \subseteq [S^j]$; dokazujeme $i+1|j$. Definujme $f(a) = a+i+1$ pro $i+1|a$, $f(a) = a$ jinak. Snadno se zjistí, že $f \in [S^{i+1}]$. Buď a s $i+1|a$. Je $S^j f(a) = a + j + i + 1 = f S^j(a)$. Když $i + 1 + j = 0$, tak to platí. Jinak nutně dle definice f je $i+1|a+j$; tedy i $i+1|j$. □

TVRZENÍ 4.5.4. *Buď* $\mathcal{D}_4 = \langle \mathbb{N}, R_4^D \rangle$, *kde*

$$R_4^D = \{\langle 1, m, n, m+n\rangle;\, m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 0, m, n, m \cdot n\rangle;\, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Struktura $\mathcal{D}_4$ *je silně nerozhodnutelná.*

Důsledek: Jazyk $\langle R \rangle$, *kde* R *je kvaternární relační symbol, je nerozhodnutelný.*

Důkaz. Struktura $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ je silně nerozhodnutelná, neboť je v ní definovatelná struktura $\mathbf{N}$. Struktura $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ je definovatelná v $\mathcal{D}_4$ dle následujícího:

$$\begin{array}{lcl} 0 = z & \leftrightarrow & R_4(z,z,z,z), \\ x \cdot y = z & \leftrightarrow & (\exists u)(R_4(u,u,u,u) \,\&\, R_4(u,x,y,z)), \\ 1 = z & \leftrightarrow & (\exists u)(R_4(u,u,u,u) \,\&\, R_4(u,z,z,z)), \\ x + y = z & \leftrightarrow & R_4(1,x,y,z). \end{array}$$

□

TVRZENÍ 4.5.5. *Buď* $\mathcal{D}_2 = \langle \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}, R_2^D\rangle$, *kde* R_2^D *je*

$$\begin{array}{llll} \{\langle\langle m,n\rangle, \langle m',n'\rangle\rangle; R_4^D(m,n,m',n')\} & & \cup & \\ \cup & \{\langle m, \langle m,n\rangle\rangle;\, m,n \in \mathbb{N}\} & \cup & \{\langle\langle m,n\rangle, n\rangle;\, m,n \in \mathbb{N}\} \\ \cup & \{\langle \infty, m\rangle;\, m \in \mathbb{N}\} & \cup & \{\langle\langle m,n\rangle, \infty\rangle;\, m,n \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

Struktura $\mathcal{D}_2$ *je silně nerozhodnutelná.*

Důsledek: jazyk $\langle R \rangle$, *kde* R *je binární relační symbol, je nerozhodnutelný.*

Důkaz. Struktura $\mathcal{D}_4$ je definovatelná v nepodstatné expanzi $\langle \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}, R_2^D, e^D\rangle$ struktury $\mathcal{D}_2$, kde e^D je ∞:

$\mathbb{N}$ je definováno formulí $\psi(x)$ tvaru $R_2(e,x)$.

R_4^D je definováno formulí $\varphi(x,y,x',y')$ tvaru

$$R_2(e,x) \,\&\, R_2(e,y) \,\&\, R_2(e,x') \,\&\, R_2(e,y') \,\&$$
$$(\exists u, u')\ (R_2(u,e) \,\&\, R_2(u',e) \,\&\, R_2(x,u) \,\&\, R_2(u,y) \,\&\, R_2(x',u') \,\&\, R_2(u',y')).$$

První řádek znamená, že x, y, x', y' jsou z $\mathbb{N}$. Dále u, u' jsou uspořádané dvojice, u je dvojice x, y; podobně je tomu s u'. □

TVRZENÍ 4.5.6. *Existuje silně nerozhodnutelný (obyčejný) graf.*

Důkaz. Definujme graf $\langle A, P^A\rangle$ následovně pomocí $\mathcal{D}_2$ z 4.5.5. Pro $d \in D_2 = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ buďte d_0, d_1, d_2 dány takto: když $d \in \mathbb{N}$, tak $d_0 = d$, $d_1 = \langle d, d\rangle$, $d_2 = d$. Když $d = \langle m,n\rangle \in \mathbb{N}^2$, tak $d_0 = m$, $d_1 = \langle m,n\rangle$, $d_2 = n$. Když $d = \infty$, tak $d_0 = \infty$, $d_1 = \langle \infty, \infty\rangle$, $d_2 = \infty$. A je tvořeno právě všemi d_i s $i < 3$, $d \in D_2$ a navíc dvěma elementy w_0, w_1. Binární relace P^A je tvořená právě prvky z $A^2 - \mathrm{Id}_A$ tvaru (i), (ii) a jejich inverzemi:

$$\langle d_0, d_1\rangle, \langle d_1, d_2\rangle, \langle w_0, d_0\rangle, \langle w_1, d_1\rangle \text{ pro } d \in D_2 \tag{i}$$
$$\langle d_0, d'_2\rangle \text{ pro } \langle d, d'\rangle \in R_2^D. \tag{ii}$$

Platí

$$\mathcal{D}_2 \text{ je definovatelné v jisté nepodstatné expanzi } \mathcal{A}' \text{ struktury } \langle A, P^A\rangle. \tag{4.15}$$

Odtud již plyne, že $\langle A, P^A\rangle$ je silně nerozhodnutelná struktura.

Naznačme důkaz (4.15). Buďte $c_\infty^A = \infty$, $e_0^A = w_0$, $e_1^A = w_1$, $c_{\infty\infty}^A = \langle\infty,\infty\rangle$ z $\mathcal{A}'$. Množinu $\mathbb{N}$ definuje $P(e_0, x)$ & $x \neq c_\infty$, množinu $\mathbb{N}^2$ definuje $P(e_1, x)$ & $x \neq c_{\infty\infty}$, množinu $\{\infty\}$ definuje $x = e_0$.

Poznamenejme, že $\mathcal{A}' \models P(e_2, z)$ & $P(x, z)$ & $P(z, y)$ & $P(e_0, x)$ & $P(e_0, y)$ & $x \neq c_\infty$ & $y \neq c_\infty[a_x, a_y, a_z]$ značí, že $a_z = \langle a_x, a_y\rangle$ a $a_x, a_y \in \mathbb{N}$. Není nyní obtížné nahlédnout, že (užitím eventuálně dalších konstant) lze definovat R_2^D. □

TVRZENÍ 4.5.7.

1) *Existuje silně nerozhodnutlný svaz. (Svaz je uspořádání, kde každá dvouprvková podmnožina má supremum a infimum; je to model teorie svazů.)*

2) *Existuje silně nerozhodnutelná struktura $\langle B, F^B, G^B\rangle$, kde F^B, G^B jsou unární funkce.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A} = \langle A, P^A\rangle$ jako v 4.5.6; označme $Y = A \cup P^A$.

1) Buď

$$B = \{X \subseteq Y;\ \langle a, b\rangle \in X \Rightarrow \{a, b\} \subseteq X \text{ pro každé } a, b\},$$
$$X \leq^B X' \Leftrightarrow X \subseteq X' \text{ pro } X, X' \text{ z } B.$$

Množina B je uzavřená na $\cup$ a $\cap$ a tedy struktura $\mathcal{B} = \langle B, \leq^B\rangle$ je svaz. Dále existuje struktura izomorfní s $\mathcal{A}$ definovatelná v $\mathcal{B}$. Tudíž $\mathcal{B}$ je silně nerozhodnutelná.

2) Buď $B = Y$ a $F^B(\langle a, b\rangle) = a$, $G^B(\langle a, b\rangle) = b$, $F^B(a) = a = G^B(a)$ pro a, b z B. Pak $\mathcal{A}$ je definovatelné v $\mathcal{B}$; tedy $\mathcal{B}$ je silně nerozhodnutelná. □

4.5.8. Tabulka silně nerozhodnutelných struktur.

V následující tabulce jsou uvedeny příklady teorií a jazyků, které mají silně nerozhodnutelný model. Připomeňme, že pro $\mathfrak{N} \models T$ dá nerozhodnutelnost T věta o nerozhodnutelnosti. Odtud např. plyne, že struktura $\langle \mathbb{N}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je silně nerozhodnutelná, neboť je v ní definovatelná struktura $\mathfrak{N}$.

Teorie, jazyk	Silně nerozhodnutelná struktura	Poznámka
P (Peanova aritmetika)	$\mathfrak{N}$	
Teorie okruhů	$\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$	$\mathfrak{N}$ definovatelná v $\underline{\mathbb{Z}}$
Teorie těles	$\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$	$\mathfrak{N}$ definovatelná v $\underline{\mathbb{Q}}$
Teorie grup	$\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot, \mathrm{Id}\rangle$	
$\langle R\rangle$, R kvaternární	$\mathcal{D}_4 = \langle \mathbb{N}, R_4^D\rangle$	$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ je definovatelná v $\mathcal{D}_4$.
$\langle R\rangle$, R binární	$\mathcal{D}_2 = \langle D_2, R_2^D\rangle$ $D_2 = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$	$\mathcal{D}_4$ definovatelná v nepodstatné expanzi $\mathcal{D}_2$.
Teorie obyčejných grafů	$\langle A, P^A\rangle$	Pomocí $\mathcal{D}_2$.
Teorie svazů	$\langle B, \subseteq\rangle$	$B \subseteq \mathcal{P}(A \cup P^A)$
$\langle F, G\rangle$, F, G unární	$\langle B, F^B, G^B\rangle$	$B = A \cup P^A$

Z uvedeného lze odvodit řadu důsledků. Např. v $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot\rangle$ je definovatelná struktura $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$; tedy je $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ silně nerozhodnutelná struktura. Důsledek: jazyk $\langle +, \cdot \rangle$ je nerozhodnutelný (tj. prázdná teorie v $\langle +, \cdot \rangle$ je nerozhodnutelná). Dále např. je teorie uspořádání nerozhodnutelná, neboť existuje silně nerozhodnutelný svaz.

4.6 Druhá Gödelova věta

4.6.1. Formule Con_α vyjadřující bezespornost teorie s axiomatikou α.

Zabýváme se teoriemi v Δ_1-definovaných jazycích. Nechť Σ_1-formule $\alpha(z)$ představuje axiomatiku L-teorie T, tj. $\alpha(z)$ defnuje Ax_T.

Formule φ_α^{Prf} se získá z $\varphi_{\mathrm{Ax}}^{Prf}$ (viz 4.8) tak, že nahradíme $\mathrm{Ax}((y)_u)$ formulí $\alpha(z/(y)_u)$. Nechť $Prf_\alpha(x,y)$ je Σ_1-formule ekvivalentní φ_α^{Prf} v $\mathrm{I}\Sigma_1{}^{\triangle}$ a $Thm_\alpha(x)$ buď Σ_1-formule $(\exists y)Prf_\alpha(x,y)$; vyjadřuje, že x je teorém T. Formuli $\neg Thm_\alpha(\underline{\mathrm{f}})$, kde f je sporná sentence $(\exists v_0)(v_0 \neq v_0)$, označíme symbolem

$$Con_\alpha;$$

je to tedy Π_1-sentence aritmetiky a formálně vyjadřuje bezespornost teorie T.

4.6.2. Formule formalizující dokazatelnost.

Formule $\theta(v)$ numerické teorie T *formalizuje dokazatelnost v* T (čili θ je *predikát formalizující dokazatelnost v* T), když pro formule φ, ψ teorie T platí:

D1. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \theta(\underline{\varphi})$.
D2. $T \vdash (\theta(\underline{\varphi}) \,\&\, \theta(\underline{\varphi \to \psi})) \to \theta(\underline{\psi})$.
D3. $T \vdash \theta(\underline{\varphi}) \to \theta(\underline{\theta(\underline{\varphi})})$.

VĚTA 4.6.3. (Druhá Gödelova věta (o nedokazatelnosti bezespornosti).) *Nechť T je extenze $\mathrm{I}\Sigma_1$ a Σ_1-formule α jazyka aritmetiky definuje Ax_T.*

1) *Je-li T bezesporná, tak $T \nvdash Con_\alpha$.*

2) *Podrobněji:*
   a) *Thm_α formalizuje dokazatelnost v T.*
   b) *$T \vdash Con_\alpha \leftrightarrow \nu$, kde ν je Gödelova sentence k Thm_α, tj. (dle diagonálního lemmatu) taková sentence aritmetiky, že $T \vdash \nu \leftrightarrow \neg Thm_\alpha(\underline{\nu})$.*

Důkaz. 1) je důsledkem 2) b) a první Gödelovy věty.

2) a) Dokazujeme D1. Je patrné, že Thm_α definuje množinu Thm_T. Tedy když $T \vdash \varphi$, tak $\mathbf{N} \models Thm_\alpha(\underline{\varphi})$ a tedy $T \vdash Thm_\alpha(\underline{\varphi})$ dle Σ_1-kompletnosti teorie Q. D2 se dokáže tak, že „formální důkaz“ ψ se získá „formální konkatenací“ „formálních důkazů“ formulí $\underline{\varphi}$ a $\underline{\varphi \to \psi}$. D3 se dokáže provedením důkazu D1 uvnitř teorie T za použití formalizované verze tvrzení o Σ_1-kompletnosti Q (jehož technicky ne zcela triviální důkaz neuvádíme). Důkaz D3 plyne pak takto: Protože $Thm_\alpha(\underline{\varphi})$ je Σ_1-sentence jazyka aritmetiky, je díky formalizované verzi tvrzení o Σ_1-kompletnosti Q dokazatelná v $\mathrm{I}\Sigma_1$ formule

$$Thm_\alpha(\underline{\varphi}) \to Thm_{[\mathrm{Q}]}(\underline{Thm_\alpha(\underline{\varphi})});$$

přitom [Q] značí formuli $z = \underline{Q1} \vee \cdots \vee z = \underline{Q8}$, kde $Q1, \ldots, Q8$ jsou axiomy teorie Q – formule [Q] zřejmě reprezentuje mimologické axiomy teorie Q v Q. Tím spíše platí dokazované $T \vdash Thm_\alpha(\underline{\varphi}) \to Thm_\alpha(\underline{Thm_\alpha(\underline{\varphi})})$.

b) Označme Thm_α jako θ. Dokážeme nejprve, a to jen pomocí D1 a D2, že

$$T \vdash \neg Con_\alpha \leftrightarrow (\theta(\underline{\varphi}) \,\&\, \theta(\underline{\neg\varphi})) \text{ pro každou } L(T)\text{-sentenci } \varphi. \tag{4.16}$$

Je $T \vdash \theta(\underline{\neg \mathrm{f}})$ dle D1, odtud a dále pomocí D1 máme

$$T \vdash \neg Con_\alpha \to (\theta(\underline{\mathrm{f}}) \,\&\, \theta(\underline{\neg \mathrm{f}})), \quad T \vdash \theta((\underline{\mathrm{f} \to (\neg \mathrm{f} \to \varphi}))).$$

Z toho dvojnásobným užitím D2 dostaneme $T \vdash \neg Con_\alpha \to \theta(\underline{\varphi})$. Zcela obdobně plyne $T \vdash \neg Con_\alpha \to \theta(\underline{\neg\varphi})$ a máme implikaci $\to$. Dokážeme opačnou. Dle D1 platí $T \vdash \theta(\underline{\varphi \to (\neg\varphi \to \mathrm{f})})$. Konečně $T \vdash (\theta(\underline{\varphi}) \,\&\, \theta(\underline{\neg\varphi})) \to \neg Con_\alpha$ získáme dvojnásobným užitím D2.

Nyní dokážeme $T \vdash Con_\alpha \leftrightarrow \nu$. Je $T \vdash \nu \to \neg\theta(\underline{\nu})$, tedy $T \vdash \nu \to Con_\alpha$ užitím (4.16). Dokažme opačnou implikaci. Protože $T \vdash \theta(\underline{\nu}) \to \neg\nu$, máme snadno $T \vdash \theta(\underline{\theta(\underline{\nu})}) \to \theta(\underline{\neg\nu})$. Je $T \vdash \neg\nu \to \theta(\underline{\nu})$. Dále dle D3 je $T \vdash \theta(\underline{\nu}) \to \theta(\underline{\theta(\underline{\nu})})$. Pak tedy $T \vdash \neg\nu \to (\theta(\underline{\nu}) \,\&\, \theta(\underline{\neg\nu}))$ a díky (4.16) máme $T \vdash \neg\nu \to \neg Con_\alpha$. □

Kapitola 5

Eliminace kvantifikátorů

Stručný obsah kapitoly.

- Elementární podstruktura, modelová kompletnost, vnoření, prvomodel.
- Eliminace kvantifikátorů.
- O izomorfním spektru.

5.1 Elementární podstruktura, modelová kompletnost, vnoření, prvomodel

5.1.1. Elementární podstruktura. Modelová kompletnost.

1. Struktura $\mathcal{A}$ je *elementární podstruktura* struktury $\mathcal{B}$, píšeme $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, když to je podstruktura $\mathcal{B}$ a pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathcal{A}$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ platí

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\overline{a}]. \tag{5.1}$$

Připomeňme, že když $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, tak (5.1) platí, je-li φ bezkvantifikátorová. Zřejmě když $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, tak $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

2. Teorie T je *modelově kompletní*, když pro její modely $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ s $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}$ je $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

PŘÍKLADY. Podstruktura $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ není elementární podstruktura, neboť 0 je nejmenší v $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, nikoli však v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$. Tudíž teorie lineárního uspořádání není modelově kompletní. Teorie následníka SC je kompletní a není modelově kompletní.

5.1.2. Izomorfní, elementární a parciální vnoření. Prvomodel.

Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dvě L-struktury.

1. Funkce $f : A \to B$ je *izomorfní vnoření*, stručně *vnoření* $\mathcal{A}$ do $\mathfrak{B}$, je-li prostá a dále platí:

(e1) Pro každé $m > 0$ a každý m-ární relační symbol R jazyka L a $a_1, \dots, a_m$ z A je $R^A(a_1, \dots, a_m) \Leftrightarrow R^B(f(a_1), \dots, f(a_m))$.

(e2) Pro každé m a každý m-ární funkční symbol F jazyka L a $a_1, \dots, a_m$ z A je $f(F^A(a_1, \dots, a_m)) = F^B(f(a_1), \dots, f(a_m))$. Speciálně tedy pro každý konstantní symbol c jazyka L je $f(c^A) = c^B$.

Zřejmě pro L-struktury $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je zobrazení $f : A \to B$ izomorfní vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, právě když to je izomorfizmus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B} \restriction f[A]$; strukturu $\mathcal{B} \restriction f[A]$ značíme $f[\mathcal{A}]$. Je-li $f[\mathcal{A}] \prec \mathcal{B}$, říkáme, že f je *elementární vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$*. To zřejmě platí, právě když pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathcal{A}$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ platí

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[f\overline{a}]. \tag{5.2}$$

2. *Parciální vnoření* $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ je funkce $f \subseteq A \times B$ taková, že (5.2) platí pro každou atomickou (ekvivalentně otevřenou) L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{l}(\overline{x})}$. Takové parciální vnoření f lze *bezprostředně prodloužit*, když pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $f \cup \{\langle a, b\rangle\}$ je parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

3. Model teorie T je její *algebraický prvomodel* resp. *prvomodel*, lze-li jej vnořit resp. elementárně vnořit do každého modelu teorie T.

Má-li T prvomodel $\mathcal{A}$, je $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ (a tedy je T kompletní), neboť každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s $\mathcal{A}$.

TVRZENÍ 5.1.3. *Má-li teorie T algebraický prvomodel a je modelově kompletní, je kompletní a její algebraický prvomodel je její prvomodel.*

Tudíž: teorie T s algebraickým prvomodelem $\mathcal{A}$ takovým, že $\mathrm{Th}(T) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, *není modelově kompletní.*

Důkaz. Pro modely $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ teorie T a její algebraický prvomodel $\mathcal{B}$ je, až na izomorfizmus, $\mathcal{B}$ podmodel $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, tedy díky modelové kompletnosti je $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}'$. Máme tedy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$ a také vidíme, že $\mathcal{B}$ je prvomodel T. □

PŘÍKLAD. Buď T jednoduchá bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky Q. Platí

a) $\mathbb{N}$ je algebraický prvomodel T.

b) $\mathbb{N}$ je prvomodel T, právě když T je ekvivalentní s $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$.

c) Když $\mathrm{Th}(T) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, není T modelově kompletní.

TVRZENÍ 5.1.4. *Buď $f : A \to B$ vnoření L-struktury $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Pak platí:*

a) *Platí $f(t^A(\overline{a})) = t^B(f\overline{a})$ pro L-term $t(\overline{x})$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$.*

b) *Platí (5.2) pro bezkvantifikátorovou L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in A^{\mathrm{l}(\overline{x})}$.*

Důkaz. a) plyne snadno indukcí podle složitosti termu t. b) Z a) plyne ihned dokazovaná ekvivalence pro φ atomickou a odtud indukcí pro φ bezkvantifikátorovou. □

LEMMA 5.1.5. (O parciálním vnoření.) *Neprázdné parciální vnoření lze jednoznačně rozšířit do izomorfizmu podstruktur generovaných definičním oborem a oborem hodnot.*

Důkaz. Buď f neprázdné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Pro term $t(\overline{x})$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ buď $g(t^A(\overline{a})) = t^B(f\overline{a})$; g je žádaný izomorfizmus $\mathcal{A}\langle \mathrm{dom}(f)\rangle$ a $\mathcal{B}\langle \mathrm{rng}(f)\rangle$. □

5.2 Eliminace kvantifikátorů

5.2.1. Eliminační množina formulí.

1. Nejmenší množina formulí obsahující danou množinu Γ formulí a uzavřená na $\neg$, $\&$, $\vee$ se značí $\mathrm{b}(\Gamma)$; její prvky se nazývají *booleovské kombinace* formulí z Γ.

2. Buď Γ množina L-formulí a T teorie v L. Množina Γ je *eliminační pro teorii* T, jestliže ke každé L-formuli $\varphi(\overline{x})$ s $\mathrm{l}(\overline{x}) > 0$ existuje booleovská kombinace $\psi(\overline{x})$ formulí z Γ tak, že $T \vdash \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$. Je-li Γ množina všech atomických formulí, říkáme, že T *má eliminaci kvantifikátorů.*

POZNÁMKA 5.2.2. Je-li Γ eliminační pro L-teorii T a φ je L-sentence, existuje booleovská kombinace $\psi(x_0)$ formulí z Γ tak, že $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(x_0)$. Tedy i $T \vdash \varphi \leftrightarrow (Qx_0)\psi(x_0)$ platí, kde Q je $\forall$ nebo $\exists$. Když navíc L obsahuje konstantní symbol c a $\varphi(x/c) \in \Gamma$ jakmile $\varphi \in \Gamma$, tak $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(x_0/c)$ a poslední formule je sentence z $\mathrm{b}(\Gamma)$.

TVRZENÍ 5.2.3.

1) *Teorie T má eliminaci kvantifikátorů, právě když pro každou otevřenou $L(T)$-formuli $\chi(\overline{x}, y)$ s $\mathrm{l}(\overline{x}) > 0$ existuje otevřená formule $\psi(\overline{x})$ tak, že*
$$T \vdash (\exists y)\chi(\overline{x}, y) \leftrightarrow \psi(\overline{x}).$$

2) *Má-li teorie T eliminaci kvantifikátorů, je modelově kompletní.*

Důkaz. 1) $\Rightarrow$ je jasná. Dokažme opačnou: Pro každou $L(T)$-formuli $\varphi(\overline{x})$ s $\mathrm{l}(\overline{x}) > 0$ existuje otevřená $\psi(\overline{x})$ tak, že $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Postupujeme indukcí podle složitosti φ. Je-li otevřená, tvrzení platí. Platí-li pro φ_i, $i < 2$, platí jasně i pro φ tvaru $\neg\varphi_0$ nebo tvaru $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1$. Je-li konečně φ tvaru $(\exists y)\varphi_0(\overline{x}, y)$ a $T \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \chi(\overline{x}, y)$ s χ otevřenou, existuje $\psi(\overline{x})$ otevřená tak, že $T \vdash (\exists y)\chi \leftrightarrow \psi$. Pak ovšem $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

2) Dokazovaná ekvivalence z (5.1) platí pro φ otevřenou a díky eliminaci kvantifikátorů pro každou L-formuli φ. □

PŘÍKLAD. Teorie těles charakteristiky 0 není modelově kompletní a nemá tedy eliminaci kvantifikátorů, neboť těleso $\underline{\mathbb{Q}}$ není elementární podstruktura tělesa $\underline{\mathbb{R}}$ (protože $\underline{\mathbb{Q}} \not\equiv \underline{\mathbb{R}}$).

5.2.4. 1-primitivní a 1-existenční formule. Koexistenční teorie.

1. *Elementární konjunkce* je formule tvaru $\bigwedge_{i<n} \chi_i$, kde χ_i jsou atomické nebo negace atomických formulí.

2. Je-li formule φ tvaru $(\exists y)\chi$, kde χ je elementární konjunkce resp. bezkvantifikátorová formule, říkáme, že φ je 1-*primitivní* resp. 1-*existenční formule.*

Pokud máme $\overline{y}$ místo y, říká se, že φ je *primitivní* resp. *existenční formule.*

3. Teorie T je [1-]*koexistenční*, když pro $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{B} \models T$, neprázdné konečné parciální vnoření f modelu $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ a každou [1-]primitivní formuli $\varphi(\overline{x})$ s $\mathrm{l}(\overline{x}) > 0$, a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{l}(\overline{x})}$ je
$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[f\overline{a}]. \tag{5.3}$$

V definici můžeme ekvivalentně místo [1-]primitivních formulí vzít [1-]existenční, neboť $\chi(\overline{x}, y)$ otevřená je logicky ekvivalentní formuli $\bigvee_{i<n} \chi_i(\overline{x}, y)$, kde $\chi_i(\overline{x}, y)$ jsou elementární konjunkce. Dále lze ekvivalentně v (5.3) vzít $\Rightarrow$ místo $\Leftrightarrow$, neboť f^{-1} je parciální vnoření $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Zřejmě: když pro každé $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{B} \models T$ lze každé neprázdné konečné parciální vnoření f modelu $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ bezprostředně prodloužit, je T 1-koexistenční.

VĚTA 5.2.5. *Buď T teorie.*

1) (Eliminační ekvivalent.) *Platí:*
T má eliminaci kvantifikátorů $\Leftrightarrow$ T je koexistenční $\Leftrightarrow$ T je 1-koexistenční.

2) (Eliminační kriterium.) *Když pro každé $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{B} \models T$ lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ bezprostředně prodloužit, má T eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. 1) Neuvádíme, není však obtížný. 2) T je zřejmě 1-koexistenční a tvrzení plyne z 1). □

V následující tabulce jsou uvedeny vlastnosti některých teorií co do eliminace kvantifikátorů, kompletnosti a modelové kompletnosti.

Teorie	Elim. kv.	Kompl.	Model. kompl.
PE (Čistá rovnost)	–	–	–
PE(∞) (extenze PE o „existuje nekonečně prvků“	+	+	+
PE(∞) (extenze PE o „existuje nekonečně prvků“	+	+	+

Pokračuje

Teorie	Elim. kv.	Kompl.	Model. kompl.
DeLO, DeLOc	+	+	+
DiLO	−	+	−
DiLO°	+	+	+
Pr (Presburgerova aritmetika)	−	+	+
RGh (Náhodný graf)	+	+	+
Nekonečné vektorové prostory	+	+	+
DAG_0	+	+	+
ACF	+	−	+
ACF_p, p prvočíslo nebo 0	+	+	+

DeLOc je extenze DeLO o $\{c_i < c_{i+1};\ i \in \mathbb{N}\}$, kde c_i jsou konstantí symboly.

DiLO° je extenze DiLO o $x <_n y \leftrightarrow$ „mezi x a y je právě n prvků“, $n \in \mathbb{N}$.

DAG_0 je teorie netriviálních divizibilních Abelových grup bez torze, tj. extenze teorie netriviálních Abelových grup o schemata divizibility a beztorznosti:

$$(\exists y)(my = x), \quad mx = 0 \to x = 0, \quad 0 < m < \omega.$$

ACF_p je teorie algebraicky uzavřených těles charakteristiky p.

5.3 O izomorfním spektru

VĚTA 5.3.1. (O mnoha neizomorfních modelech.) *Buď T spočetná kompletní teorie, která má nekonečný model. Nechť v $L(T)$ je binární relační symbol $\leq$ a existuje $\mathcal{A} \models T$ tak, že nějaká nekonečná podmnožina A je lineárně uspořádaná $\leq^A$. Pak pro každé $\kappa > \omega$ existuje 2^κ neizomorfních modelů teorie T.*

Důkaz neuvádíme. □

POZNÁMKA. Důkaz věty 5.3.1 lze nejjednodušeji provést za dodatečného předpokladu, že $\kappa > \omega_1$ a regulární. Je dále třeba použít poznatků o stacionárních množinách ordinálních čísel.

Větu z 5.3.1 lze zobecnit, a to i na nespočetné teorie. Nejsilnější tvrzení v tomto směru lze zformulovat užitím jednoho z klíčových pojmů teorie modelů, totiž pojmu stability.

Kompletní teorie T je *λ-stabilní*, kde λ je nekonečný kardinál, platí-li

$$\mathcal{A} \models T \;\&\; X \subseteq A \;\&\; |X| \leq \lambda \;\Rightarrow\; |\mathrm{S}^1(X, \mathcal{A})| \leq \lambda. \tag{5.4}$$

Teorie T je *superstabilní*, existuje-li kardinál μ tak, že T je λ-stabilní pro každý kardinál $\lambda \geq \mu$.

VĚTA. *Buď T kompletní teorie s nekonečným modelem, která není superstabilní. Pak pro každé $\lambda > \|L(T)\|$ existuje 2^λ neizomorfních modelů teorie T majících kardinalitu λ.*

TVRZENÍ 5.3.2. *Nechť $\mathcal{A} = \langle A, <, \ldots\rangle$ je nekonečný model spočetného jazyka takový, že $\langle A, <\rangle$ je lineární uspořádání. Pak teorie* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *není ω-stabilní*

Důkaz. Z věty o kompaktnosti plyne existence modelu $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ a množiny $X \subseteq B$ takové, že $\langle X, <^B\rangle$ je izomorfní s racionálními čísly. Pro každou dolní množinu $R \subseteq X$ uspořádání $\langle X, <^B\rangle$ je $\{c_r < v; r \in R\} \cup \{v < c_r; r \in X - R\}$ množina formulí konzistentní s $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_X)$. Protože existuje 2^ω uvažovaných dolních množin, má $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_X)$ jistě 2^ω kompletních typů a tedy $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ není ω-stabilní. □

Důležitý je vztah kategoričnosti a stability; pomocí něho lze dokázat zásadní Morleyovu větu o nespočetné kategoričnosti:

VĚTA. (Morleyova o nespočetné kategoričnosti.) *Kompletní spočetná teorie kategorická v nějaké nespočetné kardinalitě je kategorická v každé nespočetné kardinalitě.*

Uveďme základní tvrzení o vztahu kategoričnosti a stability.

VĚTA. *Když T je λ-kategorická pro nějaké $\lambda > \|L(T)\|$, tak T je κ-stabilní, jakmile $\|L(T)\| \leq \kappa < \lambda$. Speciálně: spočetná teorie, kategorická v nějaké nespočetné kardinalitě, je ω-stabilní.*

Uveďme ještě jedno zajímavé tvrzení.

TVRZENÍ. *Nechť spočetná kompletní teorie T má nejvýše spočetně neizomorfních spočetných modelů. Pak má T prvomodel a nemůže mít právě dva neizomorfní spočetné modely. Speciálně má spočetná ω-kategorická teorie prvomodel.*

Důkaz lze provést pomocí pojmu saturovaných a atomických struktur; neuvádíme jej. □