# 4. Fourierovy řady

## A. Rozvoje funkcí ve Fourierovy řady

**Příklad 4.1.** Nalezněte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

*Řešení.* Protože $f(x)$ je funkce spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, má zde spojitou derivaci a $f(-\pi) = f(\pi)$, konverguje její Fourierova řada na $\langle -\pi, \pi \rangle$ stejnoměrně k funkci $f(x)$. Vyčíslíme koeficienty této řady.

Protože $f(x)$ je sudá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, platí $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dvojí aplikací metody per-partes dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2\cos kx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{k}\Big[x^2\sin kx\Big]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k}x^2\sin k\pi - \frac{2}{k}\left(-\frac{1}{k}\Big[x\cos kx\Big]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{k^2}x^2\sin k\pi + \frac{2}{k^2}\pi\cos k\pi - \frac{2}{k^3}\sin k\pi. \end{aligned}$$

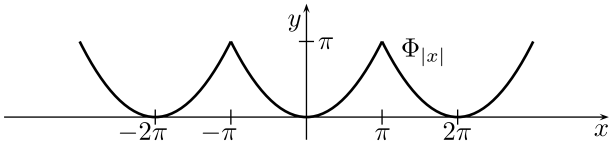
Ze vztahů $\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$ pro $k \in \mathbb{Z}$ pak plyne

$$a_k = \frac{2}{\pi}\frac{2}{k^2}\pi(-1)^k = \frac{4}{k^2}(-1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Hledaný Fourierův rozvoj má tedy tvar

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{8} + \cdots\right), \qquad x \in \langle -\pi, \pi \rangle. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že grafem této Fourierovy řady funkce $x^2$ je graf $x^2$ periodicky rozšířený z intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ (s periodou $2\pi$) na celou reálnou osu, viz obrázek.




Obr. 4.1: Součtová funkce Fourierovy řady funkce $x^2$

**Příklad 4.2.** Nalezněte Fourierův rozvoj funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in \langle -1, 0), \\ x & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

*Řešení.* Funkce $f(x)$ je na $\langle -1, 1\rangle$ spojitá (včetně první derivace) s výjimkou bodu $x = 0$, který je bodem nespojitosti prvního druhu. Dále zdůrazněme, že $f(-1) \neq f(1)$. Fourierova řada funkce $f(x)$ tedy bodově konverguje na $\langle -1, 1\rangle$ a její součet na $\langle -1, 1\rangle$ je roven $f(x)$ s případnou výjimkou bodu nespojitosti a krajních bodů.

Hodnota součtu řady v bodě nespojitosti $x = 0$ je rovna

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}.$$

Hodnota součtu řady v krajních bodech $x = -1$, $x = 1$ je rovna

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0.$$

Nyní přistoupíme k vyčíslení koeficientů hledané řady. Protože rozvoj provádíme na intervalu $\langle -l, l\rangle = \langle -1, 1\rangle$, z příslušných vzorců plyne:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},\\
a_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-1)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cos k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{k\pi}\Big[\sin k\pi x\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{k\pi}\Big[x\sin k\pi x\Big]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\Big[\cos k\pi x\Big]_0^1,
\end{aligned}$$

tedy

$$a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi^2} & \text{pro } k \text{ liché},\\ 0 & \text{pro } k \text{ sudé}.\end{cases}$$

Dále

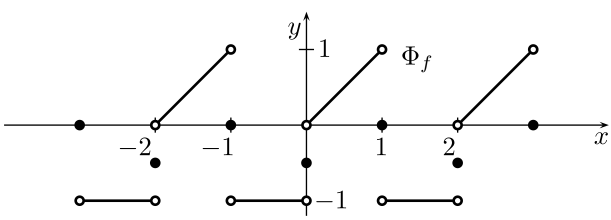
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-1)\sin k\pi x\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x\sin k\pi x\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{k\pi}\Big[\cos k\pi x\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{k\pi}\Big[x\cos k\pi x\Big]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

tedy

$$b_k = \frac{1}{k\pi}\left(1 - 2(-1)^k\right) = \begin{cases} \frac{3}{k\pi} & \text{pro } k \text{ liché},\\ -\frac{1}{k\pi} & \text{pro } k \text{ sudé}.\end{cases}$$

Odtud pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{3}{\pi}\sin\pi x - \dots.$$




Obr. 4.2: Součtová funkce Fourierovy řady funkce $f$

**Příklad 4.3.** Určete Fourierovu řadu funkce $f(x) = |x|$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Určete pomocí této hodnoty součet číselné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

*Řešení.* Daná funkce je sudá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (nakreslete si obrázek), proto $b_k = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$ a dále $a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \pi$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi k^2} \left[ (-1)^k - 1 \right] = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudá,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{pro } k \text{ lichá.} \end{cases}$$

Tedy hledaná řada je tvaru

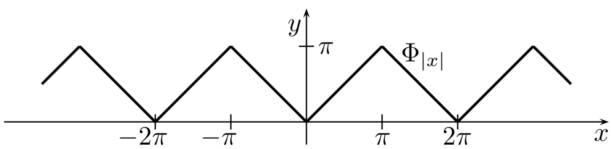
$$\Phi_{|x|} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

přičemž rovnost $\Phi_{|x|}$ a $f(x) = |x|$ nastává na uzavřeném intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Dosadíme do řady hodnotu $x = 0$, dostáváme rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Poznamenejme, že tuto rovnost jsme využili v příkladu 1.8.




Obr. 4.3: Součtová funkce Fourierovy řady funkce $|x|$

**Příklad 4.4.** Určete Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a určete druh konvergence.

*Řešení.* Znaménková funkce $\operatorname{sgn} x$ se definuje vztahem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

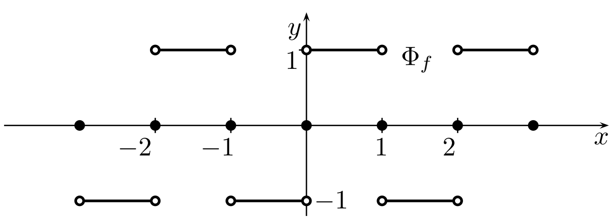
Jedná se tedy o lichou funkci, a proto $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2 \ldots$ a

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudá,} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{pro } k \text{ lichá.} \end{cases}$$

Odtud

$$\Phi_{\operatorname{sgn} x} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}.$$

Dosazením krajních bodů $x = \pm\pi$ a bodu nespojitosti $x = 0$ do vypočtené řady (nebo využitím příslušných vztahů pro hodnotu Fourierovy řady v krajních bodech a bodech nespojitosti) dostáváme, že hodnota řady je ve všech uvedených bodech nulová. Rovnost $\Phi_{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$ nastává ve všech bodech otevřeného intervalu $(-\pi, \pi)$. Konvergence Fourierovy řady je pouze bodová (prověřte předpoklady Dirichletovy věty; všimněme si také, že součtem spojitých členů řady je nespojitá funkce, což znamená, že konvergence řady nemůže být stejnoměrná).




Obr. 4.4: Součtová funkce Fourierovy řady znaménkové funkce

**Příklad 4.5.** Určete Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \langle -2, 2\rangle$ (integrály nepočítejte).

*Řešení.* Daná funkce je lichá, proto

$$\Phi_{\operatorname{arctg} x} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{2} x, \quad \text{kde } b_k = \int_0^2 \operatorname{arctg} x \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots .$$

## B. Sinový a kosinový rozvoj

**Příklad 4.6.** Vyjádřete funkci $f(x) = \cos x$, $x \in (0, \pi)$ jako součet sinové a kosinové Fourierovy řady.

*Řešení.* a) Uvažujme nejprve řadu kosinovou. Danou funkci dodefinujeme jako funkci sudou, tj. pro $x \in (-\pi, 0)$ klademe $f(x) = f(-x) = \cos(-x) = \cos x$. Potom dostáváme $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$ a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0; \\
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} = 0, \qquad k \neq 1; \\
a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \, dx = 1.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme vyjádření

$$\cos x = \cos x, \qquad x \in (0, \pi).$$

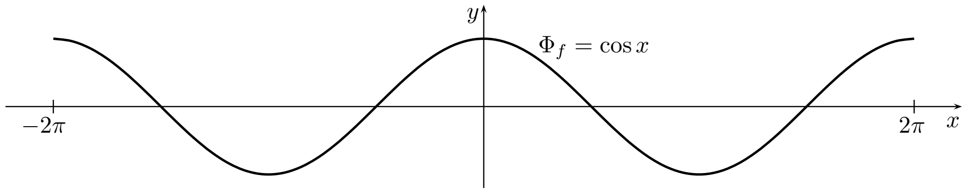
Fourierova řada tedy má jediný nenulový člen shodný s původní funkcí.

b) Nyní uvažujme řadu sinovou. Funkci $f(x)$ dodefinujeme jako funkci lichou, tj. pro $x \in (-\pi, 0)$ platí $f(x) = -f(-x) = -\cos(-x) = -\cos x$. Pak dostáváme $a_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ a

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(k+1)x + \sin(k-1)x) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^k + 1}{k+1} + \frac{(-1)^k + 1}{k-1} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2k[(-1)^k + 1]}{\pi(k^2 - 1)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ lichá, } k \neq 1, \\ \frac{4k}{\pi(k^2-1)}, & \text{pro } k \text{ sudá;} \end{cases} \\
b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0.
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx, \qquad x \in (0, \pi).$$




Obr. 4.5: Součtová funkce kosinové a sinové Fourierovy řady funkce $\cos x$

**Příklad 4.7.** V kosinovou řadu rozviňte funkci $f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$.

*Řešení.* Danou funkci dodefinujeme jako funkci sudou na $(-\pi, 0)$, čímž získáme funkci $|x|$. Další výpočet je proto analogický jako v příkladu 4.3, přičemž rovnost funkce $f(x) = x$ a příslušné kosinové řady nastává ve všech bodech intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

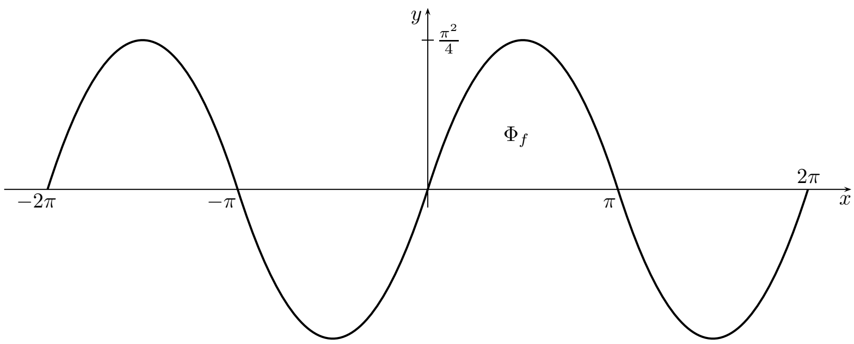
**Příklad 4.8.** V sinovou a kosinovou řadu rozviňte funkci $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in (0, \pi)$.

*Řešení.* V případě sinového rozvoje integrujeme per-partes

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{k^3\pi}\left[1 - (-1)^k\right] = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudá,} \\ \frac{8}{k^3\pi} & \text{pro } k \text{ lichá} \end{cases}$$

a dostáváme

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}, \qquad x \in (0, \pi)\ .$$



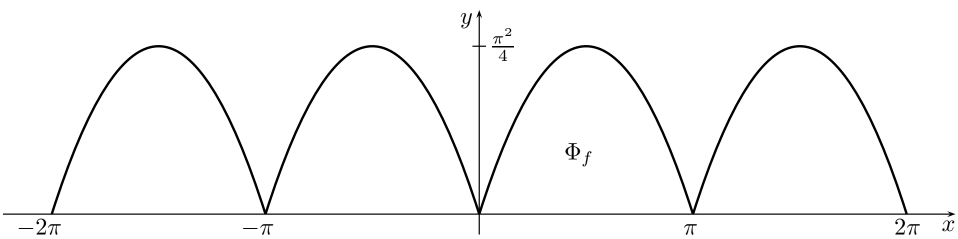

Obr. 4.6: Součtová funkce sinové Fourierovy řady funkce $f(x) = x(\pi - x)$

Podobně v případě kosinového rozvoje

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\cos kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{4}{k^2} & \text{pro } k \text{ sudá,} \\ 0 & \text{pro } k \text{ lichá,} \end{cases}$$

tedy

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}, \qquad x \in (0, \pi)\,.$$




Obr. 4.7: Součtová funkce kosinové Fourierovy řady funkce $f(x) = x(\pi - x)$