6. Funkce zadané implicitně

Příklad 1. Určete první derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $xy - \ln y = a$;

$[\, y' = \frac{y^2}{1-xy} \,]$

b) $y^x = x^y$;

$[\, y' = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1} \,]$

Příklad 2. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x = y - 4\sin y$;

$[\, \frac{1}{1-4\cos y},\ -\frac{4\sin y}{(1-4\cos y)^3} \,]$

b) $x - \ln y - y^2 = 0$;

$[\, \frac{y}{1+2y^2},\ \frac{y+2y^3-4y^2}{(1+2y^2)^3} \,]$

c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$;

$[\, \frac{x+y}{x-y},\ \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \,]$

d) $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$;

$[\, -\frac{x}{y},\ -\frac{x^2+y^2}{y^3} \,]$

e) $1 + xy - \ln(\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{-xy}) = 0$;

$[\, -\frac{y}{x},\ \frac{2y}{x^2} \,]$

f) $y^3 - 2xy + x^2 = 0$;

$[\, \frac{2y-2x}{3y^2-2x},\ \frac{4y'-2-6yy'^2}{3y^2-2x} \,]$

Příklad 3. Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^4 - xy + y^4 = 1$ je pro $x = 0$ a $y = 1$ rostoucí nebo klesající a konvexní nebo konkávní. Výsledek tohoto vašeho rozhodnutí sdělte neprodleně vedoucímu cvičení.

[Je rostoucí a konkávní.]

Příklad 4. Vypočtěte parciální derivace funkce $z = g(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4 = 0$;

$[\, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-x}{z-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-y}{z-xy} \,]$

b) $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$;

$[\, \frac{8x+y+1}{6z+y},\ \frac{x+4y-z}{y+6z} \,]$

c) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = a$;

$[\, \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z},\ \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z} \,]$

d) $\mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$;

$[\, -\frac{2xy}{\mathrm{e}^z+1},\ -\frac{x^2}{\mathrm{e}^z+1} \,]$

Příklad 5. Určete tečnou rovinu v bodě A ke grafu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně následující rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0,\ A = [2, -6, -3]$;

$[\, 2x - 6y - 3z - 49 = 0 \,]$

b) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0,\ A = [1, -2, 4]$;

$[\, x - 6y - 6z + 11 = 0\,]$

c) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8,\ A = [2, 2, 1]$;

$[\, x + y - 4z = 0\,]$

Příklad 6. Funkce $y = f(x)$ je implicitně určena rovnicí $x^3 + y^3 - 6xy = 0$. Nalezněte takové x, aby $f'(x) = 0$.

$[\ 2 \cdot 2^{1/3}\,]$

Příklad 7. Určete lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

[maximum pro $x = 4^{1/3}$]

b) $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$: ;

[maximum pro $x = 1,\ x = -1$]

Příklad 8. Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ je pro $x = y = 1$ konvexní nebo konkávní.

[Je konkávní.]

Příklad 9. Určete rovnici tečny a normály v bodě A ke grafu funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $xy + \ln y - 1 = 0,\ A = [1, 1]$;

$[\, x + 2y - 3 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\,]$

b) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0,\ A = [1, 2]$;

$[\, 14x - 13y + 12 = 0,\ 13x + 14y - 41 = 0\,]$

Příklad 10. Určete první a druhý diferenciál funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

$[\, dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy,\ d^2z = \frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2\,]$

b) $\ln z = x + y + z - 1$;

$[\, dz = \frac{z}{1-z}(dx + dy),\ d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2)\,]$

Příklad 11. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $z^3 - 2xz + y = 0$ v bodě $[1, 1]$. Přitom funkční hodnota v tomto bodě je $z = 1$.

$[\, T = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2\,]$