Přednáška 6

- obyčejné diferenciální rovnice
- směrové pole
- Cauchyova úloha
- Eulerova metoda numerického řešení Cauchyovy úlohy

Diferenciální rovnice a základní pojmy (1)

Mnohé fyzikální a jiné zákony lze popsat pomocí rovnic, v nichž jako neznámá vystupuje funkce, přičemž tyto rovnice obsahují derivaci, příp. derivace neznámé funkce. Tyto rovnice se nazývají diferenciální rovnice (DR).

Je-li hledaná funkce funkcí jedné proměnné, mluvíme o obyčejné diferenciální rovnici (ODR), je-li funkcí více proměnných (v rovnici tedy vystupují parciální derivace), mluvíme o parciální diferenciální rovnici (PDR). Je-li dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí, potom mluvíme o soustavě (obyčejných, popř. parciálních) diferenciálních rovnic.

Řád nejvyšší derivace, obsažené v dané diferenciální rovnici (soustavě diferenciálních rovnic), nazýváme řádem této rovnice (soustavy).

Motivace: *Pohyb hmotného bodu po přímce lze popsat podle Newtonova zákona síly vztahem*

$$F = m \cdot a,$$

kde F je působící síla, m je hmotnost bodu, a je jeho zrychlení. Označíme-li čas písmenem t a polohu hmotného bodu v čase t symbolem $y(t)$, pak $a = y''(t)$. Předpokládejme, že hmotnost bodu na čase nezávisí, a že zadaná síla F závisí pouze na čase t, poloze $y(t)$ a rychlosti $y'(t)$ bodu. Potom lze psát

$$m \cdot y''(t) = F(t, y(t), y'(t))$$

a tato rovnice představuje ODR 2. řádu.

Úmluva: *V zadání ODR proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, předchozí rovnici tak zapíšeme ve tvaru*

$$m \cdot y'' = F(t, y, y').$$

Diferenciální rovnice a základní pojmy (2)

Příklad:

$$y'''' + y'' + \sin x \cdot (y')^3 + xy - x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice čtvrtého řádu pro neznámou funkci $y(x)$.

Příklad:

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad a > 0$$

je parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro neznámou funkci $f(x,y)$.

Příklad:

$$\begin{aligned} u'' + \sin(x) \cdot (v')^3 + xu - x^3 &= 0, \\ v'' + \cos(x) \cdot (u')^3 + v - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

je soustava obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě neznámé funkce $v(x), u(x)$.

Příklad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

je soustava parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě neznámé funkce $f(x,y), g(x,y)$.

Diferenciální rovnice a základní pojmy (3)

Definice (Základní pojmy):

a) *Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje (či vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.*

b) *Parciální diferenciální rovnicí (PDR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytují parciální derivace hledané funkce dvou nebo více proměnných.*

c) *Řádem diferenciální rovnice nazýváme největší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici.*

d) *Diferenciální rovnici (DR) nazýváme lineární (LDR), je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci (případně derivacím).*

Příklad:

$$y''' + 2y'' + 3y' + y = e^x(2x^2 - 4)$$

je lineární obyčejná diferenciální rovnice třetího řádu pro neznámou funkci $y(x)$.

Obyčejné diferenciální rovnice (1)

Definice (ODR 1. řádu):
Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0$$

nebo ve speciálním případě, je-li rozřešena vzhledem k první derivaci, ve tvaru

$$y' = f(x, y),$$

který se nazývá normálním tvarem.

Užitím vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ lze každou ODR 1. řádu v normálním tvaru přepsat pomocí diferenciálů

$$h(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x,$$

tento tvar pak nazýváme diferenciálním.

Definice (ODR n-tého řádu):
Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nebo, je-li rozřešena vzhledem k n-té derivaci, ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Řešením ODR n-tého řádu nazýváme každou n-krát spojitě derivovatelnou funkci $y(x)$ na nějakém intervalu $I \subset \boldsymbol{R}$, která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost. ODR budeme považovat za vyřešenou, budeme-li znát všechna její řešení. Křivku (graf funkce $y(x)$), která znázorňuje některé řešení dané ODR, nazýváme integrální křivkou diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme integrálem diferenciální rovnice.

Směrové pole (1)

Geometrický význam ODR 1. řádu: Diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = f(x, y)$$

přiřazuje každému bodu $[x, y]$ definičního oboru D_f funkce f směrnici y' příslušného řešení. Tím je v D_f dáno pole směrů, tzv. směrové pole. Toto směrové pole lze graficky znázornit tak, že zakreslíme body $[x, y] \in D_f$ a tečny příslušných integrálních křivek o směrnicích $f(x, y)$ vyznačíme vektory s počátky v daných bodech.

Položíme-li $y' = c$, kde $c \in \boldsymbol{R}$, obdržíme křivky vyhovující rovnici $f(x, y) = c$, v jejichž bodech je danou rovnicí předepsána stejná hodnota směrnice c, tyto křivky se nazývají izokliny.

Z geometrického hlediska řešit diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$ znamená najít v oblasti D_f daného směrového pole křivky, které se v každém bodě dotýkají příslušného směru.

Geometrický význam ODR 2. řádu: U ODR druhého řádu

$$y'' = f(x, y, y')$$

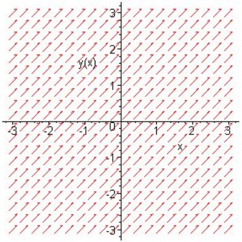
je každému bodu $[x, y]$ a směru y' přiřazena hodnota druhé derivace. Tím je tedy předepsána křivost hledané integrální křivky.

Rovnice vyššího řádu již nemají tak jednoduchou geometrickou interpretaci.

Směrové pole (2)

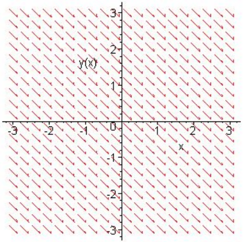
Příklad: *Směrové pole*

$$y' = 1$$



Příklad: *Směrové pole*

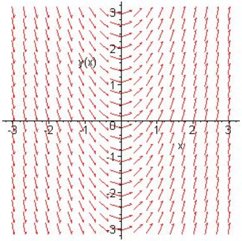
$$y' = -1$$



Směrové pole (3)

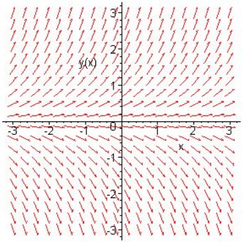
Příklad: *Směrové pole*

$$y' = 2x$$



Příklad: *Směrové pole*

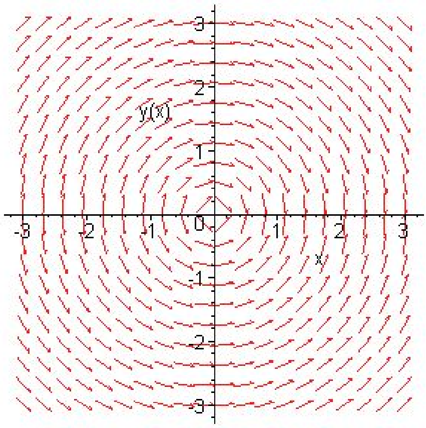
$$y' = y$$



Směrové pole (4)

Příklad: *Směrové pole*

$$y' = -\frac{x}{y}$$



Cauchyova úloha (1)

Definice (Cauchyova úloha):
Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Mějme dán libovolný, ale pevně daný bod $[x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \in D_f$. Úloha určit řešení této rovnice, které vyhovuje n počátečním podmínkám

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá Cauchyova úloha (nebo také počáteční problém). Speciálně Cauchyova úloha pro ODR 1.řádu je tvaru

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Původ názvu počátečních podmínek (a tedy i počátečního problému) plyne z toho, že se nejčastěji předepisují v bodě, který reprezentuje časový počátek.

Definice (Druhy řešení ODR):

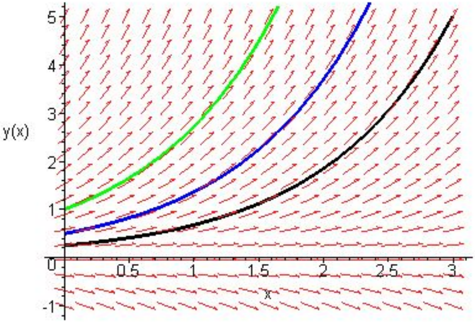
a) *Obecným řešením ODR n-tého řádu budeme rozumět každou funkci n-krát spojitě diferencovatelnou funkci $g(x, C_1, \dots, C_n)$ závisející na n obecných parametrech $C_1, \dots, C_n$, takových, že speciální (přípustnou) volbou $C_1, \dots, C_n$ lze získat řešení každého počátečního problému.*
b) *Partikulární řešení ODR n-tého řádu je takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$.*
c) *Singulární řešení je řešení ODR n-tého řádu, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou hodnot $C_1, \dots, C_n$. Singulárním řešením ODR n-tého řádu nazýváme každou křivku, v jejímž každém bodě je porušena jednoznačnost řešení, tj. každým bodem této křivky prochází ještě jiné řešení zadané DR.*

Cauchyova úloha (2)

Příklad: Obecným řešením rovnice $y' = y$ je funkce $y = g(x, C) = Ce^x$. Na obrázku níže jsou uvedeny tři partiklární řešení odpovídající postupně počátečním podmínkám

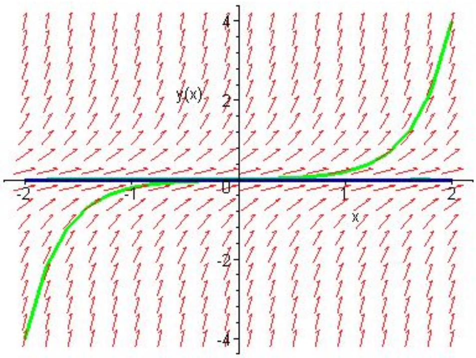
$$y(0) = \frac{1}{4}(\text{černá}),\ y(0) = \frac{1}{2}(\text{modrá}),\ y(0) = 1(\text{zelená}),$$

resp. hodnotám $C = \frac{1}{4}$ (černá), $C = \frac{1}{2}$ (modrá) a $C = 1$ (zelená).



Cauchyova úloha (3)

Příklad: Singulárním řešením rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ je křivka $y = 0$, neboť každým bodem $[a, 0]$ této křivky prochází ještě další řešení $y = (x-a)^3$, viz. obrázek, kde $y(0) = 0$.



Cauchyova úloha (4)

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení):
Nechť funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je definována a spojitá v otevřené množině D. Dále nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá v množině D: Potom pro rovnici

$$y' = f(x,y)$$

platí:

a) *Pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in D^\circ$ existuje funkce $y = u(x)$ a číslo $h > 0$ tak, že funkce $y = u(x)$ je pro $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ řešením Cauchyho úlohy*

$$y' = f(x,y), \quad u(x_0) = y_0.$$

b) *Jestliže dvě funkce $y = u(x)$ a $y = v(x)$, které jsou řešením rovnice $y' = f(x,y)$, si jsou rovny alespoň pro jednu hodnotu $x_1 \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, tedy $u(x_1) = v(x_1)$, potom jsou si rovny ve všech bodech intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$.*

Řešení $y = u(x)$, uvažované ve předchozí větě, lze často prodloužit na větší interval než je interval $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$. Jsou-li totiž opět v okolí bodu $[x_0 + h, u(x_0 + h)]$, popř. bodu $[x_0 - h, u(x_0 - h)]$ splněny předpoklady této věty, bude opět v dostatečně malém okolí tohoto bodu existovat jednoznačné řešení, které bude v důsledku jednoznačnosti splývat na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ s předchozím řešením $y = u(x)$
Funkci $y = w(x)$, která je opět řešením rovnice $y' = f(x,y)$, procházejícím bodem $[x_0, y_0]$ a je definovaná na větším intervalu než původní řešení $y = u(x)$, nazveme prodloužením původního řešení $y = u(x)$.
O řešení dané rovnice procházejícím zadaným bodem řekneme, že je maximální, jestliže jej již nelze více prodloužit.

Cauchyova úloha (5)

Má-li pravá strana diferenciální rovnice spojité všechny parciální derivace všech řádů v celé rovině, nemusí být maximální řešení, procházející zadaným bodem, definováno na celém intervalu $(-\infty, +\infty)$ (viz. následujíic příklad).

Příklad: Maximální partikulární řešení Cauchyho úlohy

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1,$$

které prochází bodem $[0, 1]$ je

$$y = \frac{-1}{x-1}.$$

Toto řešení je definováno na intervalu $(-\infty, 1)$ a nelze ho prodloužit.

Eulerova metoda numerického řešení Cauchyovy úlohy (1)

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu s počáteční podmínkou:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Diferenciální rovnice, které popisují reálný systém (odpovídají fyzikální úloze), nebudeme v řadě případů schopni analyticky vyřesit. Numerické metody nám však mohou pomoci získat přibližné hodnoty řešení v konečném počtu tzv. uzlových bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z definičního intervalu řešení$\langle x_0, x_n \rangle$. Symbolem h_i budeme značit rozdíl dvou sousedních uzlů $x_i - x_{i-1}$

Eulerova metoda je nejjednodušší metodou numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic s danými počátečními podmínkami. Pro jednoduchost budeme uvažovat Eulerovu metodu s konstantním krokem h, tj. s ekvidistantím dělením.

Uzlové body jsou dány vztahem

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, \ldots, n,$$

cekový počet kroků je pak

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}.$$

Eulerova metoda numerického řešení Cauchyovy úlohy (2)

Algotitmus:

1) y_0 je počáteční řešení
2) y_1 spočteme jako extrapolaci z hodnoty y_0, přičemž se na na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ řešení aproximuje přímkou, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má směrnici $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, tj. daná přímka má rovnici:

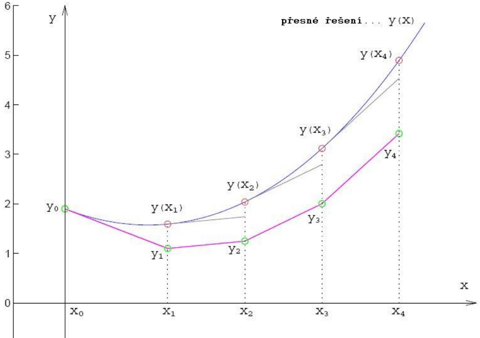
$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

Pro x_1 tedy dostaneme

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

3) ostatní hodnoty y_i spočítáme z rekurentního vztahu:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$



Eulerova metoda numerického řešení Cauchyovy úlohy (3)

Příklad:

		$h = 0,2$		$h = 0,1$	
x_n	přesné řešení $y(x_n)$	přibližné řešení y_n	chyba e_n	přibližné řešení y_n	chyba e_n
0	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	0,910			0,900	0,010
0,2	0,837	0,800	0,037	0,820	0,017
0,3	0,782			0,758	0,024
0,4	0,741	0,680	0,061	0,712	0,029
0,5	0,713			0,681	0,032
0,6	0,698	0,624	0,074	0,663	0,035