Jak na integrály

Per partes

$$\int (u' v) = uv - \int (u v')$$

Substituce

1. druh

př.:

$$\int (x e^{-x^2}) dx = \int (e^y - \frac{1}{2}) dy$$

$$y = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\text{x}$$

$$dy = -2\text{x}\, dx$$

2. druh

φ musí být prostá a musí svůj definiční obor zobrazit **NA** definiční obor integrované funkce.
př.:

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = y \frac{1}{\frac{1-y^3}{1+t^3}} 2 \frac{-1}{(1+y^3)^2} 3\text{y}^2 dy$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$y^3 (1+x) = (1-x)$$

$$x = \frac{1-y^3}{1+y^3} = -1 + \frac{2}{1+y^3}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2 \frac{-1}{(1+y^3)^2} 3\text{y}^3$$

$$dx = 2 - \frac{1}{(1+y^3)^2} 3\text{y}^3 dy$$

Racionální lomené funkce

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \; q(x) \neq 0$$

př.: $I = \int \frac{x^4}{x^3 - 1}$

1) Stupeň čitatele < stupeň jmenovatele => vydělíme
$$\frac{x^4}{x^3-1} = \frac{x^4 - x}{x^3-1} + \frac{x}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1} \Rightarrow$$
$$I = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^3-1}$$

2) Rozložíme jmenovatele na součin
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

3) Rozložíme funkci na parciální zlomky (činitelé s kořenem v **R** budou mít v čitateli jeden parametr, činitelé s kořenem v **C** budou mít v čitateli dva parametry, pokud je nějaký činitel v součinu *k* krát, tak bude i v rozkladu *k* krát – postupně s mocninami 1, 2, … , *k*)
$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

4) Vynásobíme rovnost původním jmenovatelem a najdeme čísla *a*, *b*, *c* atd. - nejprve dosazením nulových bodů a potom podle rovnosti koeficientů u jednotlivých mocnin neznámé
$$x = a(x^2+x+1) + (by+c)(x-1)$$
$$a = \frac{1}{3}$$
$$b = -\frac{1}{3}$$
$$c = \frac{1}{3}$$
$$I = \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1} \right)$$

Racionální lomené funkce s dalšími funkcemi

A) $\int R(\log x) \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; y = \log x$ substituce 1. druhu

B) $\int R(e^{ax}) dx \;\Rightarrow\; y = e^{ax}$ substituce 1. druhu

C) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \;\Rightarrow\; y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ substituce 2. druhu

D) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

a) Obsah odmocniny má 2 různé reálné kořeny => převedeme na C)
př.:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4\mathrm{x}-3}} = \int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$$
$$-x^2 + 4\mathrm{x} - 3 = (x-1)(3-x)$$

b) Obsah odmocniny nemá reálné kořeny

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+y$ (a musí být kladné)

př.:

$$I=\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+x-1}}\,dx \;\Rightarrow\; \sqrt{(x^2+x-1)}=x+y$$

$$x^2+x-1=x^2+2\mathrm{xy}+y^2 \;\Rightarrow\; x=\frac{y^2+1}{1-2\mathrm{y}} \quad \text{substituce 2. druhu}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2\mathrm{y}(1-2\mathrm{y})+(y^2+1)2}{(1-2\mathrm{y})^2}$$

$$I=\int \frac{1}{1+y+\frac{y^2+1}{1-2\mathrm{y}}}\,\frac{2\mathrm{y}(1-2\mathrm{y})+(y^2+1)2}{(1-2\mathrm{y})^2}\,dy$$

E) $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$

Možnosti seřazeny podle priorit:

a) $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \;\Rightarrow\; y=\sin x$

b) $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \;\Rightarrow\; y=\cos x$

c) $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x) \;\Rightarrow\; y=\tan x$ substituce 2. druhu

rada:

$$y=\tan x$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \;\Rightarrow\; y^2+1=\frac{1}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; \cos^2 x=\frac{1}{y^2+1}$$

$$x=\arctan y \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}$$

$$x=\varphi(y)=\arctan y+k\pi \qquad \varphi:\mathbb{R}\text{ na }\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

d) vždy lze $y=tg\left(\frac{x}{2}\right)$ - zoufalost substituce 2. druhu

rada:

$$y=\tan\frac{x}{2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\sin x=\frac{\sin\frac{x}{2}\;\cos\frac{x}{2}}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{2\mathrm{y}}{1+y^2}$$

$$x=2\arctan y \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy}=\frac{2}{1+y^2}$$

$$x=\varphi(y)=2\arctan y+2k\pi \qquad \varphi:\mathbb{R}\text{ na }(-\pi+2\mathrm{k}\pi;\pi+2\mathrm{k}\pi)$$

Užití integrálů

Délka křivky

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^{2}}$$

Objem tělesa vzniklého rotováním křivky podle osy *x*

$$V=\pi\int_{a}^{b} f^{2}(x)\,dx$$

Povrch (bez podstav) tělesa vzniklého rotováním křivky podle osy *x*

$$S=2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^{2}}\,dx$$

Známé primitivní funkce

Původní funkce	**Primitivní funkce**
x^{n}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^{2}x}$	$\tan x+c$
$\frac{1}{\sin^{2}}x$	$-\mathrm{cotan}\, x+c$
e^{x}	$e^{x}+c$
a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a}+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\arcsin x+c$
$\frac{1}{1+x^{2}}$	$\arctan x+c$