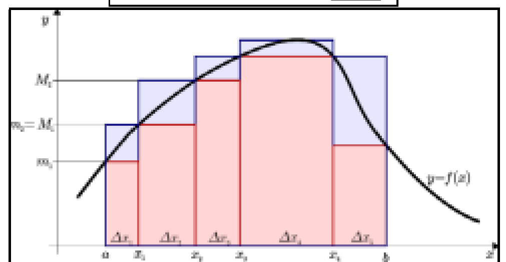
Integrál

Riemannův integrál (Darbouxova definice):

fce f:[a,b]->R ma na [a,b] **RI** pokud:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$



dělení intervalu [a, b]

$$D = (a_0, a_1.., a_k),\ I_i = [a_i, a_{i+1}]$$

dolní RI

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_D s(f,D)$$

dolní Riemannova suma

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{x \in I_i} f(x)$$

horní RI

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_D S(f,D)$$

horní Riemannova suma

$$S(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \sup_{x \in I_i} f(x)$$

Lebesgueova věta o existenci RI

fce f: [a,b]->R je Riemann.integrovat. ⇔ je na [a,b] omezená a množina jejich bodů nespojitosti má míru 0

1.základní věta analýzy (Souvislost RI a derivace)

fce F: [a,b]->R mající na [a,b] RI , F(x)=∫_a^x f ⇒ F je spoj.na [a,b] a také:

$$F'(x_0) = f(x_0)\ \forall x_0 \in [a,b]\ \text{(bod spojitosti f)}$$

2.základní věta analýzy (Souvislost RI a prim.fce)

fce f : [a, b] -> R má na [a, b] RI a prim.fci F. Potom, pro každou F, platí:

$$\int_a^b f = F(b) - (F(a)$$

Newtonův integrál

fce f : (a, b) -> R má prim.fci F na (a,b). Potom NI je:

$$(N)\int_a^b f = (\lim_{x\to b-} F(x)) - (\lim_{x \to a+} F(x))$$

vztah NI a RI

f je spojitá na [a,b], pak:

$$(N)\int_a^b f(x)x = (R)\int_a^b f(x)x$$

využití

délka křivky

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}x$$

objem rot.tělesa

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 x$$

objem koule

$$V = \pi \int_a^b f(\sqrt{r^2 - x^2})^2 x$$

Prim. funkce

Prim. funkce - Necht -∞<=a<b<=+∞ a f:(a,b)->R, pokud má F:(a,b)->R na (a,b) derivaci F'(x)=f(x), řekneme že F na (a,b) je prim. funkci k f

Tvar prim.fce

jeli F(x) prim. k f(x) na (a,b), je ∀c∈R F(x)+c prim. k f(x) na (a,b).

Linearita prim.fce

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))x = \alpha \int f(x)x + \beta \int g(x)x$$

o substituci

fce φ: (α,β)->(a,b) a f: (a,b)->R přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci:

fce F: (a,b)->R je na (a,b) primitivní fci f(x) pak:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C\ na\ (\alpha,\beta)$$

fce G: (α,β)->R je na (α,β) primitivní k fci f(φ (t))φ'(t) a platí φ((α,β))= (a,b) a φ'≠0 na (α,β) pak:

$$\int f(x)x = G(\varphi^{-1}(x)) + C\ na\ (a,b)$$

per partes

fce f,g spojité na (a,b) a fce F,G jsou k nim primitivní na (a,b) pak platí:

$$\int f(x)G(x)x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)x\ na\ (a,b)$$

Vícerozměrný RI

fce f: I->R omezená ma na I RI pokud:

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f = \int_I f$$

D - dělení n-rozměrného boxu I na podboxy J

$$I = [a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n] \subset R^n$$

objem boxu J

$$|J| = (b_1 - a_1).(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$$

dolní RI

$$\underline{\int_I} f = \sup_D s(f,D)$$

dolní Riemannova suma

$$s(f,D) = \sum_{J \in D} |J| \inf_{x \in J} f(x)$$

horní RI

$$\overline{\int_I} f = \inf_D S(f,D)$$

horní Riemannova suma

$$S(f,D) = \sum_{J \in D} |J| \sup_{x \in J} f(x)$$

Lebesgueova věta o existenci RI

fce f: I->R je Riemann.integrovat. ⇔ je na I omezená a množina jejich bodů nespojitosti má míru 0

Fubiniova

fce f: Z=X x Y->R, f je riemanovsky integrovatelná na Z pak:

$$\int_Z f(x,y))dxdy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right)dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx\right)dy\ \text{(a všechny existují)}$$