Teorie a jejich analýza

J. Mlček

2010

Obsah

Kapitola 1

Teorie a jejich vlastnosti

1.1 Axiomatiky teorií.

Seznam některých významných teorií s rovností.

Všechny uvedené jazyky jsou s rovností. Kromě L^v jsou tyto jazyky spočetné s konečnou signaturou. L^v má konečnou signaturu, právě když je F konečné těleso. Je-li F nekonečné, je $|F| = |L| = \|L\|$.

Aritmetické teorie

Robinsonova aritmetika Q.

Jazyk: $L^A = \langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$, S je unární funkční symbol, $+, \cdot$ jsou binární funkční symboly, 0 je konstantní symbol, $\leq$ je binární relační symbol.

Axiomy:
(Q1) $0 \neq \mathrm{S}x$
(Q2) $\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y$
(Q3) $x + 0 = x$
(Q4) $x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)$
(Q5) $x \cdot 0 = 0$
(Q6) $x \cdot \mathrm{S}y = x \cdot y + x$
(Q7) $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = \mathrm{S}y)$
(Q8) $x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

Někdy se ještě přidává axiom $x \leq y \vee y \leq x$.

Peanova aritmetika P.

Jazyk: $L^A = \langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$.

Axiomy: Q a *schema axiomů indukce* I_φ, φ je L^A-formule, I_φ je

$$(\varphi(0, \overline{y}) \mathbin{\&} (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}x, \overline{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \overline{y})$$

Booleovy algebry

Teorie Booleových algeber.

Jazyk: $L^{Ba} = \langle -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$, $\vee, \wedge$ jsou binární funkční symboly, $-$ unární funkční symbol, $0, 1$ jsou konstantní symboly.

Axiomy:

$x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$	$\diamond$ je $\vee$ nebo $\wedge$	(asociativita)
$x \diamond y = y \diamond x$	$\diamond$ je $\vee$ nebo $\wedge$	(komutativita)
$x \diamond (y \diamond' z) = (x \diamond y) \diamond' (x \diamond z)$	$\diamond$ [$\diamond'$] je $\vee$ [$\wedge$] nebo $\wedge$ [$\vee$]	(distributivita)
$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$		(absorbce)
$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0$		(komplementace)

Teorie (bez)atomárních Booleových algeber.

Teorie bBA *bezatomárních Booleových algeber* je obohacení teorie BA o axiom

$$\neg(\exists x)(\text{„}x \text{ je atom“}).$$

Teorie aBA *atomárních Booleových algeber* je obohacení teorie BA o axiom

$$x \neq 0 \to (\exists y)(\text{„}y \text{ je atom“} \ \ \& \ \ \text{„}y \text{ je pod } x\text{“}).$$

Přitom vlastnost „x je atom značí“, že x je nenulový a pod x je jen 0 nebo x a „y je pod x“ je vyjádřeno formulí $y \wedge x = y$. Tedy „x je atom“ vyjadřuje formule

$$x \neq 0 \ \& \ (\forall y)(y = y \wedge x \to (y = 0 \vee y = x)).$$

Uspořádání

Teorie uspořádání.
Jazyk: $L^o = \langle \leq \rangle$, $\leq$ je binární relační symbol.
Axiomy: $x \leq x$
$x \leq y \ \& \ y \leq x \to x = y$
$x \leq y \ \& \ y \leq z \to x \leq z$.

Teorie lineárního uspořádání a hustého lineárního uspořádání.
Teorie LO *lineárního uspořádání* je obohacení teorie uspořádání o *axiom dichotomie* $x \leq y \vee y \leq x$.

Přidáme-li ještě *axiom hustoty* $(x \leq y \ \& \ x \neq y) \to (\exists z)(x \leq z \leq y \ \& \ x \neq z \neq y)$, získáme *teorii hustého lineárního uspořádání* DeLO*; přidáním axiomů „neexistuje nejmenší ani největší prvek“ získáme DeLO.

Teorie diskrétního uspořádání DiLO**.**
Teorie DiLO je obohacení LO o axiomy existence *bezprostředního předchůdce* a *bezprostředního následníka*:

$$(\forall x)(\exists y)(y \leq x \ \& \ y \neq x \ \& \ (\forall z)((y \leq z \leq x) \to (z = y \vee z = x))),$$
$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y \ \& \ y \neq x \ \& \ (\forall z)((x \leq z \leq y) \to (z = y \vee z = x))).$$

Grafy

Teorie Gh **grafů (obyčejných neorientovaných bez smyček).**
Jazyk: $L^{gh} = \langle E \rangle$, E je binární relační symbol.
Axiomy: $xEy \to yEx$, $\neg(xEx)$

Teorie RGh **náhodného grafu.**
Teorie RGh náhodného grafu je teorie grafů obohacená o axiom $(\exists x, y)(x \neq y)$ a schema $\{\psi_n; 0 < n < \omega\}$, kde ψ_n je uzávěr formule

$$\bigwedge_{0<i,j\leq n} x_i \neq y_j \to (\exists z) \bigwedge_{0<i\leq n} (E(x_i, z) \ \& \ \neg E(y_i, z)). \tag{1.1}$$

Modelem teorie RGh je nekonečný graf takový, že pro každé dvě konečné disjunktní množiny X, Y jeho nějakých vrcholů existuje vrchol z spojený s každým vrcholem z X hranou a nespojený s žádným vrcholem z Y hranou. Takový spočetný graf se také nazývá *náhodný*.

Algebraické teorie

Teorie grup. Teorie Abelových grup.
Jazyk: $L^g = \langle +, -, 0 \rangle$, $+$ je binární funkční symbol, $-$ unární funkční symbol, 0 je konstantní symbol.

Axiomy:	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(asociativita $+$)
	$0 + x = x = x + 0$	(0 je (oboustranně) neutrální prvek)
	$x + (-x) = 0 = (-x) + x$	($-x$ je (oboustranně) inverzní prvek k x)

Přidáme-li k teorii grup *axiom komutativity* $x + y = y + x$, získáme *teorii Abelových grup*.

Teorie grup se často bere v *multiplikativním* jazyce $L^{\dot g} = \langle \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ izomorfním s L^g.

Poznamenejme, že teorie v jazyce $\langle + \rangle$, kde $+$ je binární funkční symbol, s axiomem $x+(y+z)=(x+y)+z$ (asociativita $+$), se nazývá **teorie pologrup**, a teorie v jazyce $\langle +, 0 \rangle$, kde $+$ je binární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy $x+(y+z)=(x+y)+z$ (asociativita $+$), $0+x=x=x+0$ (0 je (oboustranný) neutrální prvek), se nazývá **teorie monoidů**.

Teorie okruhů.
Jazyk: $L^r = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, $+, \cdot$ jsou binární funkční symboly, $-$ unární funkční symbol, $0, 1$ jsou konstantní symboly.
Axiomy: teorie Abelových grup v jazyce $\langle +, -, 0 \rangle$,
$1 \cdot x = x \;\&\; x \cdot 1 = x$ (1 je jednotka)
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita $\cdot$)
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).
Přidáme-li k teorii okruhů axiom komutativity pro $\cdot$, získáme *teorii komutativních okruhů.*
Pro $n > 0$

symbol $n1$ značí term $1 + 1 + \cdots + 1$ (n-krát).

Teorie těles FL, FL$_p$, FL$_0$.
Teorii těles FL získáme tak, že přidáme k teorii komutativních okruhů axiomy

$0 \neq 1$ (netrivialita),
$x \neq 0 \to (\exists y)(x \cdot y = 1)$ (existence inverzního prvku vůči $\cdot$).

Buď p prvočíslo. Přidáme-li k teorii těles axiom $p1 = 0$, získáme teorie FL$_p$ *těles charakteristiky* p.
Přidáme-li k teorii těles axiomy $p1 \neq 0$, p je prvočíslo, získáme teorie FL$_0$ *těles charakteristiky* 0.

Teorie algebraicky uzavřených těles ACF, ACF$_p$. Přidáme-li k teorii těles FL resp. FL$_p$ s p rovným nule nebo prvočíslu axiomy

$$(\forall x_0, \ldots, x_{n-1})(\exists y)(x_0 + x_1 \cdot y + \cdots x_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n = 0), \quad n \geq 1 \text{ přirozené,} \tag{1.2}$$

získáme teorii ACF resp. ACF$_p$ *algebraicky uzavřených těles* resp. *algebraicky uzavřených těles charakteristiky* p.
Axiomy (1.2) zaručují, že každý normovaný polynom stupně $n \geq 1$ má kořen.

Teorie vektorových prostorů nad tělesem F.
Jazyk: $L^v = \langle +, -, 0, \underline{r} \rangle_{r \in F}$, $+$ je binární funkční symbol, $-$ unární funkční symbol, 0 je konstantní symbol, $\underline{r}$ je unární funkční symbol.
Axiomy: axiomy teorie grup v aditivním jazyce $\langle +, -, 0 \rangle$,
$\underline{r}(x+y) = \underline{r}(x) + \underline{r}(y)$, $\underline{(r +^F s)}(x) = \underline{r}(x) + \underline{s}(x)$, kde $r, s \in F$,
$\underline{(r \cdot^F s)}(x) = \underline{r}(\underline{s}(x))$, $\underline{1^F}(x) = x$, kde $r, s \in F$.

Poznamenejme, že $\underline{r}(x)$ symbolicky reprezentuje násobek skalárem r a zapisuje se zpravidla jako rx. Index ^{F} se často vynechává.

Teorie (levých) R**-modulů**, kde R je okruh, má týž jazyk a axiomy jako teorie vektorových prostorů nad tělesem F, píšeme-li všude místo F symbol R.

1.2 Algebraické teorie

1.2.1 Vektorové prostory

Teorie vektorových prostorů nad tělesem F je teorie v jazyce $\langle +, -, 0, \underline{r} \rangle_{r \in F}$ se známými axiomy. Přitom $\underline{r}$ je unární funkční symbol, který značíme stručně r a $r(x)$ jako rx. Modely uvažované teorie jsou vektorové prostory nad F.

Buď $\mathcal{A} = \langle A, +^A, -^A, 0^A, r^A \rangle_{r \in F}$ vektorový prostor nad F. Místo $r^A(a)$ píšeme stručně ra; je to násobek vektoru a skalárem r. Dále $-a$ je *vektor opačný* k vektoru a. Buďte $a_1, \ldots, a_n$ vektory a $r_1, \ldots, r_n$ skaláry; pak $r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$ je *lineární kombinace vektorů* $a_1, \ldots, a_n$ *s koeficienty* $r_1, \ldots, r_n$; značíme ji také symbolem $\sum_{i=1,\ldots n} r_i a_i$. Vektory $a_1, \ldots, a_n$ jsou *nezávislé*, jestliže jejich lineární kombinace je nulový vektor jen tehdy, když všechny koeficienty této kombinace jsou nulové skaláry; v opačném případě jsou *lineárně závislé*. Buď $X \subseteq A$. Množina X je lineárně nezávislá, je-li *lineárně nezávislá* každá její konečná podmnožina. Množina X *generuje* A, je-li každý prvek z A lineární kombinací nějakých prvků z X. Množina X je *báze* A, je-li lineárně nezávislá a generuje A. To nastává, právě když lze každý prvek z A vyjádřit jako lineární kombinaci s nenulovými koeficienty nějakých konečně prvků z X, přičemž je toto vyjádření, až na pořadí sčítanců, jediné. Maximální lineárně nezávislá množina je zřejmě báze A. Z principu maximality plyne snadno, že každou lineárně nezávislou množinu lze rozšířit do maximální lineárně nezávislé množiny. Každý netriviální vektorový prostor tedy má bázi. Přitom každé dvě báze daného prostoru mají stejnou kardinalitu a ta se nazývá *dimenze* prostoru; značíme ji $\dim \mathcal{A}$. Můžeme definovat, že triviální prostor má dimenzi 0. Nechť A, B jsou vektorové prostory nad F s bázemi po řadě X, Y a nechť $|X| = |Y|$. Je-li G prosté zobrazení X na Y, existuje jediný izomorfizmus H prostoru A a B, $H \supseteq G$. Stačí definovat $H(\sum_{i \le n} r_i a_i) = \sum_{i \le n} r_i G(a_i)$ pro prvky $a_0, \ldots, a_n$ z X a skaláry $r_0, \ldots, r_n$. Díky tomu, že X, Y jsou báze, je totiž definice korektní, zobrazení je prosté a na a dále je jasně homomorfizmem.

TVRZENÍ 1.2.1.1. (Izomorfním spektrum vektorových prostorů.) *Buď F těleso, $\mathcal{A}$ vektorový prostor nad F a T teorie vektorových prostorů nad F.*

1) *Buď $|F| < \omega$. Je-li $\dim(\mathcal{A}) = n$, je $|A| = |F|^n$. Je-li $\dim(\mathcal{A}) \ge \omega$, je $|A| = \dim(\mathcal{A})$.*

$$\textit{Důsledek: } \mathrm{I}(\lambda, T) = \begin{cases} 0 & \textit{když } |F|^n \neq \lambda < \omega \textit{ pro každé } n < \omega \\ 1 & \textit{když } |F|^n = \lambda \textit{ pro nějaké } n \\ 1 & \textit{když } \lambda \ge \omega. \end{cases}$$

2) *Buď $|F| \ge \omega$. Je-li $0 < \dim(\mathcal{A}) \le |F|$, je $|A| = |F|$. Je-li $\dim(\mathcal{A}) > |F|$, je $|A| = \dim(\mathcal{A})$.*

$$\textit{Důsledek: } \mathrm{I}(\lambda, T) = \begin{cases} 0 & \textit{když } 0 < \lambda < |F| \\ |\lambda^+ \cap \mathbf{Cn}| & \textit{když } \lambda = |F| \\ 1 & \textit{když } \lambda > |F|. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení o $\mathcal{A}$ plynou z elementárních vlastností vektorových prostorů. Zbývá objasnit pro $|F| \ge \omega$ důsledek $\mathrm{I}(\lambda, T) = |\lambda^+ \cap \mathbf{Cn}|$, když $\lambda = |F|$. V tomto případě je počet dimenzí uvažovaných modelů, z nichž každá určuje jeden izomorfní typ, roven počtu nenulových kardinálních čísel nejvýše rovných λ; těch je právě $|\lambda^+ \cap \mathbf{Cn}|$. □

TVRZENÍ 1.2.1.2. (O nekonečných vektorových prostorech.) *Buď T teorie nekonečných vektorových prostorů nad tělesem F. Pak:*

1) *T je λ-kategorická pro každý nekonečný kardinál $\lambda > |F|$ a tedy i kompletní.*

2) *T má eliminaci kvantifikátorů a je tedy i modelově kompletní.*

3) *T má vlastnost, že každé neprázdné konečné parciální vnoření mezi jejími modely lze bezprostředně prodloužit, právě když je F konečné.*

Důkaz. 1) Dva modely teorie T, které mají mohutnost $\lambda > |F|$, mají každý bázi; ta má nutně mohutnost λ. Odtud ihned plyne izomorfizmus uvažovaných modelů.

2) Dokážeme, že T je 1-koexistenční. Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ modely T a f neprázdné konečné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Buď $(\exists y)\chi(\overline{x}, y)$ formule 1-primitivní, kde χ je elementární konjunkce. Nechť $\mathcal{A} \models \chi[\overline{a}, d]$ pro nějaké $\overline{a}$ z $\mathrm{dom}(f)$ a $d \in A$; hledáme $d' \in B$ s $\mathcal{B} \models \chi[f\overline{a}, d']$. Nechť $\mathcal{A}' = \mathcal{A}\langle \mathrm{dom}(f)\rangle$ a $\mathcal{B}' = \mathcal{B}\langle \mathrm{rng}(f)\rangle$. Když $d \in A'$, tj. $d = t^A(\overline{a})$ pro nějaký term $t(\overline{x})$, je $d' = t^B(f\overline{a})$ hledané. Nechť nyní $d \in A - A'$. Existuje-li $d' \in B - B'$, má požadovanou vlastnost. Nechť $B = B'$. Existuje vlastní elementární rozšířená $\mathcal{C} \succ \mathcal{B}$. Pro $c \in C - B$ je jasně $\mathcal{C} \models \chi[f\overline{a}, c]$, tedy $\mathcal{C} \models (\exists y)\chi[f\overline{a}]$ a díky elementaritě platí i $\mathcal{B} \models (\exists y)\chi[f\overline{a}]$.

3) Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ modely T. Je-li F konečné, mají $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nekonečnou dimenzi a tedy lze každé neprázdné konečné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ bezprostředně prodloužit. Je-li F nekonečné, nechť $\mathcal{A}$ má dva generátory a_0, a_1 a $\mathcal{B}$ jen jeden b_0. Pak zobrazení $f = \{\langle a_0, b_0\rangle\}$ nelze prodloužit do a_1. □

TVRZENÍ 1.2.1.3. *Buď T teorie vektorových prostorů nad konečným tělesem F. Teorie T_n rozšiřující T právě o axiom „existuje právě $|F|^n$ prvků" s $n \in \mathbb{N}$ a T_∞ rozšiřující T právě o schema „existuje nekonečně prvků" jsou (až na ekvivalenci teorií) právě všechny kompletní jednoduché extenze T. Tvoří Σ_1-kompletaci T a T je tedy rozhodnutelná.*

Důkaz plyne z průběhu izomorfního spektra teorie T. □

1.2.2 Grupy

VĚTA 1.2.2.1.

1) *Existuje silně nerozhodnutelná grupa. Tudíž teorie grup je nerozhodnutelná.*
2) (W. Szmielew.) *Teorie Abelových grup je rozhodnutelná.*

Důkaz. 1) $\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ je silně nerozhodnutelná grupa. 2) Důkaz neuvádíme; je dosti komplikovaný – viz k tomu např. [2, s. 669].

1.2.3. Teorie divisibilních Abelových grup bez torze.

Teorie AG_0 *Abelových grup bez torze* je rozšíření teorie AG Abelových grup o *schema beztorznosti*:

$$mx = 0 \to x = 0, \qquad 0 < m < \omega.$$

Schema divisibility je následující seznam formulí:

$$(\exists y)(my = x), \qquad 0 < m < \omega.$$

Teorie DAG_0 *netriviálních divisibilních Abelových grup bez torze* je rozšíření AG_0 o axiom netriviálnosti $(\exists x)(x \neq 0)$ a schema divisibility.

PŘÍKLADY modelů teorie DAG_0: $\langle \mathbb{Q}, +, -, 0\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, -, 0\rangle$.

TVRZENÍ 1.2.3.1.

1) *Teorie* DAG_0 *netriviálních divisibilních Abelových grup bez torze má eliminaci kvantifikátorů.*
2) *Model* $\langle \mathbb{Q}, +, -, 0\rangle$ *je algebraický prvomodel teorie* DAG_0, *tedy je* DAG_0 *kompletní. Tudíž* DAG_0 *je ekvivalentní s* $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, +, -, 0\rangle)$ *a je rozhodnutelná.*

Důkaz. 1) Buď DAG_0° rozšíření DAG_0 o definice $r(x) = y \leftrightarrow n_r y = m_r x$, kde r je nenulové racionální a m_r, n_r jsou celá nesoudělná, $0 < n_r$ a $r = m_r/n_r$. Buď ještě $0(x) = 0$. Existence y plyne z divizibility, jednoznačnost z beztorznosti.

V DAG_0° platí axiomy vektorových prostorů nad tělesem racionálních čísel, má tedy eliminaci kvantifikátorů. Formule $\varphi(\overline{x})$ teorie DAG_0 je tedy v DAG_0° ekvivalentní nějaké otevřené formuli $\psi'(\overline{x})$ jazyka $L(\mathrm{DAG}_0^\circ)$. Atomická formule teorie

DAG_0° je v ní ekvivalentní formuli tvaru $\sum_{i<n} r_i x_i = 0$; každá taková je v DAG_0° ekvivalentní formuli jazyka grup tvaru $\sum_{i<n} k_i x_i = 0$ pro vhodná k_i celá. Tudíž je $\psi'(\overline{x})$ v DAG_0° ekvivalentní nějaké otevřené formuli $\psi(\overline{x})$ jazyka grup. Jelikož je DAG_0° konzervativní rozšíření DAG_0, máme $\mathrm{DAG}_0 \vdash \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$. 2) je snadným důsledkem 1). $\square$

1.3 Aritmetické teorie

1.3.1 Varia

1.3.1.1. Axiom nejmenšího prvku.

Buď L jazyk s $\leq$ a φ jeho formule. *Axiom nejmenšího prvku* pro φ dle x je formule

$$(\exists x)\varphi \to (\exists x)(\varphi \ \&\ (\forall y \leq x)(x \neq y \to \neg\varphi(x/y))),$$

kde y nemá výskyt ve φ a je různé od x; značíme jej $\mathrm{L}^x_{\varphi,L}$, stručněji $\mathrm{L}_{\varphi,L}$. Dále $\mathrm{L}_{\Phi,L}$ buď $\{\mathrm{L}^x_{\varphi,L};\ \varphi \in \Phi,\ x$ je proměnná$\}$. Je-li L zřejmé z Φ, píšeme L_Φ místo $\mathrm{L}_{\Phi,L}$.

TVRZENÍ 1.3.1.2. $\mathrm{Q} \cup \{x < \mathrm{S}x\} \cup \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{L\mathrm{A}}}$ *dokazuje* $\mathrm{I}_{\mathrm{Fm}_{L\mathrm{A}}}$.

Důkaz. Dokazujeme

$$T \vdash (\varphi(0) \ \&\ (\forall x)(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{S}x))) \to (\forall x)\varphi(x), \tag{1.3}$$

kde T je $\mathrm{Q} \cup \{x < \mathrm{S}x\} \cup \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{L\mathrm{A}}}$ v jazyce aritmetiky rozšířeném o nové konstanty a $\varphi(x)$ je formule tohoto jazyka. Z platnosti $\mathrm{I}^x_{\neg\varphi}$, $x \neq 0 \to (\exists z)x = \mathrm{S}z$ v T plyne $T, \neg(\forall x)\varphi(x), \varphi(0) \vdash (\exists z)(\neg\varphi(\mathrm{S}z) \ \&\ (\forall z' < \mathrm{S}z)\varphi(z'))$. Je $T \vdash z < \mathrm{S}z$, tedy $T, \neg(\forall x)\varphi(x), \varphi(0) \vdash (\exists z)(\varphi(z) \ \&\ \neg\varphi(\mathrm{S}z)$, tj. (1.3) platí. $\square$

TVRZENÍ 1.3.1.3. (O extenzích Robinsonovy aritmetiky Q.)

1) *Pro jednoduchou bezespornou extenzi T teorie* Q *je $\mathbf{N}$ její algebraický prvomodel.*
2) *Každá bezesporná rekurzivní extenze T teorie* Q *má kontinuum jednoduchých kompletních neekvivalentních extenzí. Speciálně je* $\mathrm{I}(\omega, T) = 2^\omega$.
3) *Když T je jednoduchá bezesporná extenze teorie* Q *a* $\mathrm{Th}(T) \neq \mathrm{Th}(\mathbf{N})$, *tak T není modelově kompletní.*
4) *Jednoduchá bezesporná extenze T teorie* Q *není ekvivalentní otevřené* $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$*-teorii.*
5) *Buď T bezesporná jednoduchá rekurzivní extenze teorie* Q *a* $\mathbf{N} \models T$. *Pak existují* Π_1*-sentence φ_i s $i \in \mathbb{N}$ takové, že teorie $T_n = T \cup \{\varphi_i;\ i < n\}$ splňují:*
$$\mathbf{N} \models T_n \text{ a } T_n \nvdash \varphi_n \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. 1) Buď $\mathcal{A} \models T$. Definujme $h : \mathbb{N} \to A$ takto: $h(n) = (\underline{n})^A$ $(= S^A \cdots S^A(0^A)$, S^A aplikováno n-krát). Pak je to hledané vnoření, neboť $\mathrm{Q} \vdash S(\underline{n}) = \underline{Sn}$, $\mathrm{Q} \vdash \underline{m} \diamond \underline{n} = \underline{m \diamond n}$, kde $\diamond$ je $+$ nebo $\cdot$ a $\mathrm{Q} \vdash \underline{m} \leq \underline{n} \Leftrightarrow m \leq n$.

2) Každá bezesporná jednoduchá extenze teorie T o konečně axiomů je nerozhodnutelná a nekompletní. Pro každý vrchol σ stromu $\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^n 2, \subseteq \rangle$ sestrojíme bezespornou jednoduchou extenzi T_σ teorie T o konečně axiomů takto: Buď $T_\emptyset$ teorie T. Máme-li T_σ, buď φ_σ nezávislá sentence teorie T_σ. Buď φ_{σ_0} formule $\neg\varphi_\sigma$ a φ_{σ_1} formule φ_σ; buď $T_{\sigma\_i} = T_\sigma \cup \{\sigma\_i\}$. ($\sigma\_i$ značí $\sigma \cup \{\langle n, i \rangle\}$, kde $n = \mathrm{dom}(\sigma)$.) Pro $f \in {}^{\mathbb{N}}2$ buď T_f extenze T právě o axiomy $\varphi_{f\restriction n}$ s $n \in \mathbb{N}$ (tj. $T_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_{f\restriction n}$). Pro $f \neq g \in {}^{\mathbb{N}}2$ a nejmenší n s $f(n) \neq g(n)$ je v jedné z teorií T_f, T_g formule $\varphi_{f\restriction n+1}$, právě když je v druhé její negace. Je-li T'_f jednoduchá kompletní extenze T_f, jsou T'_f s $f \in {}^{\mathbb{N}}2$ hledané teorie.

3) Protože T má algebraický prvomodel, má předpoklad modelové kompletnosti T za následek, že $\mathbf{N}$ je prvomodel T a tedy $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathbf{N})$.

4) Buď $\mathcal{A}$ nestandardní model T, tj. takový, že $\mathbf{N}$ je jeho vlastní podstruktura; buď $a \in A-\mathbb{N}$. Pak podstruktura $\mathcal{B} = \mathcal{A}\langle a\rangle \subseteq \mathcal{A}$ není model T. Je totiž každý prvek z B tvaru $t^A[a]$ pro nějaký $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$-term $t(x)$ a $T \vdash x \leq t(x)$. Tudíž neexistuje $b \in B$ s $S^A(b) = a$ (pro takové b je $b <^A a$, $b \notin \mathbb{N}$). Avšak $T \vdash x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(Sy = x)$.

5) Sestrojíme T_n a φ_n rekurzí. Buď $T_0 = T$. Máme-li již T_n, buď φ_n formule ν k T_n dle 1. Gödelovy věty; buď T_{n+1} extenze T_n o axiom φ_n. □

1.3.2 Robinsonova aritmetika Q

TVRZENÍ 1.3.2.1. *Pro teorii* Q *platí:*

1) *Má algebraický prvomodel* $\mathbf{N}$.
2) *Má kontinuum jednoduchých kompletních neekvivalentních extenzí. Speciálně je* $\mathrm{I}(\omega, \mathrm{Q}) = 2^\omega$.
3) *Není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*
4) *Není ekvivalentní otevřené* $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$*-teorii.*

Důkaz. Vše je speciálním případem tvrzení z 1.3.1.3. □

1.3.2.2. Modely teorie Q.

Popíšeme 3 typy QA, QB, QC modelů teorie Q.

1. Typ QA poskytuje např. model $\mathcal{A}$ s nereflexivním tranzitivním $\leq$ a „největším prvkem“.

Typ QB poskytuje model $\mathcal{A}$, jehož uspořádání nestandardních prvků je libovolné lineární uspořádání a $+, \cdot$ jsou komutativní. Speciálně může být $\leq^A$ dobré a pak $\mathcal{A} \models \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{LA}}$.

Typ QC poskytuje např. model $\mathcal{A}$ s $\mathcal{A} \models \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{LA}}$ a nekomutativním $+$ a další.

2.Každý z modelů typu QX sestrojíme jako $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$-strukturu $\mathcal{A}$, kde
$$A = \mathbb{N} \cup \mathbb{O}, \quad \mathbb{N} \cap \mathbb{O} = \emptyset, \quad \mathbb{O} \neq \emptyset. \tag{1.4}$$
Funkce struktury $\mathcal{A}$ jsou vždy rozšířením $\mathrm{S}, +, \cdot$ modelu $\mathbf{N}$; značíme je opět $\mathrm{S}, +, \cdot$. Vždy bude S identita na $\mathbb{O}$. Uspořádání $\leq^A$ je nutně definováno takto:
$$a \leq^A b \Leftrightarrow a' + a = b \text{ pro nějaké } a' \in A.$$

V konstrukcích modelů typu QX písmena m, n resp. a, b resp. Ω s čárkami, indexy apod. značí libovolný prvek z $\mathbb{N}$ resp. z A resp. z $\mathbb{O}$.

Model QA.

$\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq\rangle$-strukturu $\mathcal{A}$ definujeme následovně: $A = \mathbb{N} \cup \mathbb{O}$, $\mathrm{S}, +, \cdot$ modelu $\mathbf{N}$ rozšíříme na A následovně.

1) $\Omega^* \in \mathbb{O}$ je pevný prvek.
2) $\mathrm{S}\Omega = \Omega$.
3) $a + \Omega = \Omega^*$, $\Omega + n = \Omega$.
4) $\Omega \cdot a = \Omega^*$ pro $a \neq 0$, $\Omega \cdot 0 = 0$, $n \cdot \Omega = \Omega$.

Je $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq^A\rangle \models \mathrm{Q}$.

Dále platí:

a) $n \leq^A \Omega$, $\Omega \leq^A \Omega' \Leftrightarrow \Omega' = \Omega^*$. Speciálně:
$$\Omega \not\leq^A \Omega' \text{ pro } \Omega, \Omega' \in \mathbb{O} - \{\Omega^*\}, \quad \leq^A \text{ je tranzitivní.}$$
b) Když $|\mathbb{O}| \geq 2$, $+$ není komutativní: pro $\Omega \in \mathbb{O} - \{\Omega^*\}$ je
$$n + \Omega = \Omega^* \neq \Omega = \Omega + n.$$
c) $\cdot$ není komutativní.

Modifikujme

3) na 3') $\Omega' + \Omega = \Omega^*$, $\Omega + n = \Omega = n + \Omega$.

4) na 4') $\Omega \cdot \Omega' = \Omega^*$, $\Omega \cdot 0 = 0$, $0 \cdot \Omega = \Omega$, $\Omega \cdot n = \Omega = n \cdot \Omega$ pro $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

Pak místo b) máme:
b') $+$ je komutativní.

Model QB.
Buď $\langle \mathbb{O}, \lhd \rangle$ lineární uspořádání. $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$-strukturu $\mathcal{A}$ definujeme následovně: $A = \mathbb{N} \cup \mathbb{O}$. Označme $\langle A, \lhd' \rangle$ součet $\langle \mathbb{N}, < \rangle + \langle \mathbb{O}, \lhd \rangle$ (kde prvky z $\mathbb{N}$ jdou před všemi prvky z $\mathbb{O}$ a na $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{O}$ splývá $\lhd'$ s $<$ resp. $\lhd$). Operace $\mathrm{S}, +, \cdot$ modelu $\mathcal{N}$ rozšíříme na A následovně.

1) $\mathrm{S}\Omega = \Omega$.
2) $a + \Omega = \Omega + a = \max_{\lhd'}(\Omega, a)$.
3) $a \cdot \Omega = \Omega \cdot a = \max_{\lhd'}(\Omega, a)$ pro $a \neq 0$, $0 \cdot \Omega = \Omega \cdot 0 = 0$.

Je $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq^A \rangle \models \mathrm{Q}$.
Dále platí:

a) $+, \cdot$ jsou komutativní.
b) $\Omega <^A \Omega' \Leftrightarrow \Omega \lhd \Omega'$.
Když $\lhd$ je dobré uspořádání, je $<^A$ dobré uspořádání; pak $\mathcal{A} \models \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{LA}}$.
Důkaz. Když $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x, \overline{y})[\overline{d}]$ pro $\overline{d}$ z A, buď c prvek $\unlhd$-nejmenší takový, že $\mathcal{A} \models \varphi[c, \overline{d}]$. Pak $\mathcal{A} \models (\varphi(x, \overline{y})\ \&\ (\forall z < x)\neg\varphi(z, \overline{y}))[c, \overline{d}]$. □

Model QC.
Buď $f : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$, $G : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$. $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$-strukturu $\mathcal{A}$ definujeme následovně: $A = \mathbb{N} \cup \mathbb{O}$. Operace $\mathrm{S}, +, \cdot$ modelu $\mathcal{N}$ rozšíříme na A následovně.

1) $\mathrm{S}\Omega = \Omega$.
2) $a + \Omega = f(\Omega)$, $\Omega + n = \Omega$.
3) $\Omega \cdot a = f(\Omega)$ pro $a \neq 0$, $\Omega \cdot 0 = 0$, $n \cdot \Omega = G(\Omega)$.

Je $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq^A \rangle \models \mathrm{Q}$.
Dále platí:

a) Je-li f konstantní s $f(\Omega) = \Omega_0$, jsou $+, \cdot$ konstantní a tedy komutativní na $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$. Je-li navíc $G(\Omega) = \Omega_0$ na $\mathbb{O}$, je $\Omega \cdot n = n \cdot \Omega = \Omega_0$ pro $n \neq 0$.
b) $\Omega' \leq^A \Omega \Leftrightarrow \Omega = f(\Omega')$. Tudíž:
je-li $f(\Omega) \neq \Omega$ na $\mathbb{O}$, tak $\Omega' \leq^A \Omega \leq^A \Omega'' \Rightarrow \Omega' \not\leq^A \Omega''$.
c) Buď $\langle \mathbb{O}, \lhd \rangle$ dobré uspořádání a nechť $\Omega \lhd f(\Omega)$ pro $\Omega \in \mathbb{O}$. Pak
$$\mathcal{A} \models \mathrm{L}_{\mathrm{Fm}_{LA}}.$$
Důkaz. Platí $\Omega' <^A \Omega \Rightarrow \Omega' \lhd \Omega$ pro každé Ω, Ω' z $\mathbb{O}$, neboť pro $\Omega' <^A \Omega$ je $f(\Omega') = \Omega$ dle b) a $\Omega' \lhd f(\Omega')$. Když $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x, \overline{y})[\overline{d}]$ pro $\overline{d}$ z A, buď c prvek $\unlhd$-nejmenší s $\mathcal{A} \models \varphi[c, \overline{d}]$. Pak i
$$\mathcal{A} \models (\varphi(x, \overline{y})\ \&\ (\forall z < x)\neg\varphi(z, \overline{y}))[c, \overline{d}].$$ □

1.3.3 Peanova aritmetika P

TVRZENÍ 1.3.3.1. *Pro teorii* P *platí:*

1) *Má algebraický prvomodel* $\mathcal{N}$.
2) *Má kontinuum jednoduchých kompletních neekvivalentních extenzí. Speciálně je* $\mathrm{I}(\omega, \mathrm{P}) = 2^\omega$.
3) *Není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*
4) *Není ekvivalentní otevřené* $\langle \mathrm{S}, +, \cdot, 0, \leq \rangle$*-teorii.*
5) *Uspořádání spočetného nestandardní modelu* P *je izomorfní s uspořádáním*
$$\mathbb{N} + (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}).$$

Důkaz. 1) – 4) je speciálním případem tvrzení z 1.3.1.3.

5) Buď $\mathcal{A}$ spočetný nestandardní model P, N množina jeho standardních prvků. Je $\langle N, \leq^A \rangle \cong \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Buď $\mathrm{S}_n^A(a) = \mathrm{S}^A \cdots \mathrm{S}^A a$, S^A aplikováno n-krát.

$$\rho(a,b) = \begin{cases} n & \text{když } \mathrm{S}_n^A(a) = b \\ -n & \text{když } \mathrm{S}_n^A(b) = a \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$$

Na A definujme ekvivalence $\sim$ tak, že: $a \sim b$ právě když

$$a \sim b \Leftrightarrow \rho(a,b) \neq \infty.$$

Je jasně $N = 0^A/\sim$. Na $(A-N)/\sim$ definujme relaci $\lhd$ takto: pro $a, b \in A - N$ buď

$$a/\sim \quad \lhd \quad b/\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \leq^A b \text{ a } a \not\sim b.$$

Pak $\langle (A-N)/\sim, \lhd \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, neboť se snadno zjistí, že $\langle (A-N)/\sim, \lhd \rangle$ je spočetné husté lineární uspořádání bez konců (tj. je to model DeLO). Nechť H je izomorfizmus uspořádáni $\lhd$ a racionálních čísel. Buď W výběr z tříd ekvivalence $\sim$ a pro $a \in A-N$ buď $a' \in W$ s $a \sim a'$. Pro $a \in A - N$ buď

$$h(a) = \langle H(a/\sim), \rho(a', a) \rangle.$$

Pak to je izomorfizmus $\langle A - N, \leq^A \rangle$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ a ten rozšíříme na hledaný tak, že položíme ještě $h(\mathrm{S}_n^A(0^A)) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$. □

1.3.4 Presburgerova aritmetika Pr

1.3.4.1. Presburgerova aritmetika Pr.

má jazyk $\langle \mathrm{S}, +, 0 \rangle$, který je extenzí jazyka následníka s nulou o binární funkční symbol + "sčítání". Axiomy jsou:

$$\begin{array}{llll} \text{(Q1)} & 0 \neq \mathrm{S}x, & \text{(Q2)} & \mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y, \\ \text{(Q3)} & x + 0 = x, & \text{(Q4)} & x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x+y), \end{array}$$

schema axiomů indukce I_φ, φ je formule jazyka aritmetiky Pr.

Přitom I_φ – tzv. *axiom indukce pro* $\varphi(x, \overline{y})$ – je generální uzávěr formule

$$(\varphi(0, \overline{y})\ \&\ (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}x, \overline{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \overline{y}). \tag{1.5}$$

Struktura $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$ je Pr, který lze izomorfně vnořit do každého modelu $\mathcal{A} \models$ Pr via $n \mapsto \underline{n}^A$; je to tedy algebraický prvomodel model Pr. Pro $\mathcal{A} \models$ Pr je prvek tvaru $\underline{n}^A$ *standardní prvek* $\mathcal{A}$; prvek, který není standardní, je *nestandardní prvek* $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je *nestandardní model* Pr, má-li nestandardní prvek.

Term $t + (t + \dots) \dots)$, + aplikováno $(n-1)$-krát, značíme nt, $0t$ je 0.

1.3.4.2. Aritmetika Pr° a Pr'.

1. Buď Pr° extenze Pr o definice

$$\begin{gathered} x < y \leftrightarrow (\exists z \neq 0)(x + z = y), \\ P_n(x) \leftrightarrow (\exists y)(ny = x) \ (\text{„}n \text{ dělí } x\text{“}) \text{ pro } 1 < n < \omega. \end{gathered} \tag{1.6}$$

V Pr° je dokazatelné:

1) (Q1) – (Q4), + je asociativní a komutativní, $x + z = y + z \rightarrow x = y$.
2) $<$ je ostré lineární diskrétní uspořádání s nejmenším prvkem 0 a bez největšího, $\mathrm{S}x$ je následník x a dále je $<$ izotonní vůči S, +.
3) $\bigvee_{i<n} P_n(x+i)$ pro $1 < n < \omega$. ($\mathbb{N}$-divizibilita).

2. Aritmetika Pr' má jazyk $\langle \mathrm{S}, +, 0, <, P_n \rangle_{n>1}$ a axiomy (1.6), 1) – 3).

1.3.4.3. V Pr' je dokazatelné:

- $\mathrm{S}^m x = \mathrm{S}^n x + y \leftrightarrow \mathrm{S}^{m-n} x = y$, $mx = nx + y \leftrightarrow (m-n)x = y$, $(m+n)x = mx + nx$ pro $0 \leq n \leq m \in \omega$.
- $nx = 0 \rightarrow x = 0$ pro $0 < n < \omega$.
- $nx = nx' + \underline{k} \rightarrow \underline{k} = 0\ \&\ x = x'$ pro $0 \leq k < n > 1$.
- $(\exists y)(ny \leq x < ny + \underline{n})$ pro $0 < n < \omega$.

VĚTA 1.3.4.4. *Teorie* Pr$'$ *má eliminaci kvantifkátorů a je kompletní a modelově kompletní.*

Důkaz. Lze dokázat, že Pr$'$ je prvotní a 1-modelově kompletní; důkaz neuvádíme, není však příliš obtížný.

Odtud plyne eliminace kvantifikátorů pro Pr$'$ a modelová kompletnost – viz 1.3.4.7. Protože $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, 0, <, P_n\rangle_{n>1}$ lze izomorfně vnořit do každého modelu teorie Pr$'$, je Pr$'$ i kompletní. □

VĚTA 1.3.4.5. *Teorie* Pr *má následující vlastnosti.*

1) *Je kompletní, ekvivalentní s* $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, 0\rangle)$, $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, 0\rangle$ *je její prvomodel.*

2) *Je rozhodnutelná.*

3) *Je modelově kompletní a nemá eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. 1) Protože konzervativní rozšíření Pr$^\circ$ teorie Pr je jednoduchá extenze Pr$'$, je Pr kompletní díky kompletnosti Pr$'$ – viz 1.3.4.4. Má model $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, 0\rangle$, tedy je ekvivalentní s teorií tohoto modelu. Odtud plyne, že $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, +, 0\rangle$ je prvomodel Pr.

2) plyne z kompletnosti a Δ_1-axiomatizovatelnosti Pr.

3) Dokážeme, že Pr je modelově kompletní. Buďte $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ modely Pr. Pro jejich přirozené expanze („definicemi“) $\mathcal{A}^\circ$, $\mathcal{B}^\circ$ do modelů teorie Pr$^\circ$ platí $\mathcal{A}^\circ \subseteq \mathcal{B}^\circ$; to se dokáže díky vlastnostem $<$, P_m v Pr. Jelikož jde také o modely Pr$'$, je $\mathcal{A}^\circ \prec \mathcal{B}^\circ$ díky eliminaci kvantifikátorů teorie Pr$'$ – viz 1.3.4.4 a tedy i $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dokážeme, že Pr nemá eliminaci kvantifikátorů. Buď $\mathcal{A}$ spočetný nestandardní model Pr, $a \in A$ nestandardní prvek $\mathcal{A}$. Pak $f = \{\langle a + a, a + a + \underline{1}\rangle\}$ je parciální vnoření $\mathcal{A}$ do sebe. Atomická formule $\psi(x)$ teorie Pr je totiž ekvivalentní v Pr formuli tvaru $mx = \underline{n}$ s m, n přirozenými. Odtud je jasné, že $\mathcal{A} \models \psi[a+a] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[a+a+1]$. Dále $\mathcal{A} \models (\exists y)(y + y = x)[a + a]$. Avšak $\mathcal{A} \not\models (\exists y)(y + y = x)[f(a + a)]$; Pr tedy není koexistenční a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů. □

1.3.4.6. 1-modelová kompletnost a prvotnost teorie.

1. T je 1-*modelově kompletní*, jestliže pro modely $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ teorie T s $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ pro každou bezkvantifikátorovou formuli $\psi(\overline{x}, y)$ a $\overline{a}$ z A platí:
$$\mathcal{A} \models (\forall y)\psi(\overline{a}, y) \Rightarrow \mathcal{B} \models (\forall y)\psi(\overline{a}, y).$$

2. Teorie T je *prvotní*, když pro každou podstrukturu $\mathcal{C}$ nějakého modelu T, existuje $\mathcal{C}' \models T$ tak, že $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ a pro každé $\mathcal{A} \models T$ splňující $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ existuje vnoření $h : \mathcal{C}' \to \mathcal{A}$ identické na C.

TVRZENÍ 1.3.4.7. *Je-li* T 1-*modelově kompletní a prvotní, má eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Dokážeme, že T je 1-koexistenční. Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ modely T a f neprázdné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Nechť $\psi(\overline{x}, y)$ bezkvantifikátorová, $\overline{a}$ z $\mathrm{dom}(f)$ a $\mathcal{A} \models (\exists y)\psi(\overline{a}, y)$; dokazujeme, že $\mathcal{B} \models (\exists y)\psi(f\overline{a}, y)$.

Buď $g \supseteq f$ izomorfizmus podstruktury $\mathcal{A}_0$ struktury $\mathcal{A}$ generované $\mathrm{dom}(f)$ a podstruktury $\mathcal{B}_0$ struktury $\mathcal{B}$ generované $\mathrm{rng}(f)$. Díky prvotnosti existuje $\mathcal{A}' \models T$ s $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}'$ a vnoření $h : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ identické na A_0 a dále vnoření $h' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ identické na A_0, kde $\mathcal{B}'$ se získá z $\mathcal{B}$ ztotožněním $\mathcal{B}_0$ s $\mathcal{A}_0$ pomocí g; tedy $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}'$ a existuje izomorfizmus $g' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, rozšiřující g.

Díky 1-modelové kompletnosti je $\mathcal{A}' \models (\exists y)\psi(h^{-1}\overline{a}, y)$. Pak i $\mathcal{A}' \models (\exists y)\psi(\overline{a}, y)$, neboť h je identita na A_0. Odtud $\mathcal{B}' \models (\exists y)\psi(\overline{a}, y)$, neboť h' je identita na A_0 a nakonec $\mathcal{B} \models (\exists y)\psi(f\overline{a}, y)$, neboť $g'\overline{a} = f\overline{a}$. □

1.3.5 Teorie následníka.

1.3.5.1. **Teorie následníka** SC.
Je to teorie v jazyce následníka $\langle \mathrm{S} \rangle$, jejímiž axiomy jsou

$$\begin{array}{ll} \text{(Q0)} & (\exists x)((\forall y)(\mathrm{S}y \neq x) \ \&\ (\forall z \neq x)(\exists y)(\mathrm{S}y = z)), \\ \text{(Q2)} & \mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y, \\ \text{SC-schema} & x \neq \mathrm{S}^n x;\ n > 0 \text{ je přirozené.} \end{array}$$

Každý term teorie SC je ekvivalentní termu tvaru $\mathrm{S}^n x$. Každá atomická $\langle \mathrm{S} \rangle$-formule je v SC ekvivalentní formuli tvaru $\mathrm{S}^n x = y$, kde n je přirozené, x, y jsou proměnné (ev. stejné).

Buď SC° rozšíření teorie SC o definici konstantního symbolu c:

$$c = y \leftrightarrow (\forall z)(\mathrm{S}z \neq y) \ \&\ (\forall y' \neq y)(\exists z)(\mathrm{S}z = y').$$

TVRZENÍ 1.3.5.2.

1) a) SC *má jen nekonečné modely, je kategorická v každé nespočetné kardinalitě a je tedy kompletní a speciálně ekvivalentní s* $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle)$. *Dále je teorie* SC *rozhodnutelná.*

   b) *Existuje právě spočetně neizomorfních spočetných modelů teorie* SC. *Model* $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle$ *je algebraický prvomodel* SC.

   c) SC *není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

   d) SC *není konečně axiomatizovatelná.*

   e) SC *není axiomatizovatelná otevřenými* $\langle \mathrm{S} \rangle$*-formulemi, tj.* SC *není ekvivalentní otevřené* $\langle \mathrm{S} \rangle$*-teorii.*

2) SC° *má eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A} = \langle A, S \rangle \models \mathrm{SC}$. Označme

$$a_0 \tag{1.7}$$

(jediný) prvek z A, který nemá předchůdce, tj. není $Sa = a_0$ pro žádné $a \in A$. Evidentně je A nekonečné. Dále definujme ekvivalenci $\sim_A$ na A tak, že $a \sim_A b \Leftrightarrow S^n a = b$ nebo $S^n b = a$ pro nějaké n přirozené; označme A' výběr z faktorů $\sim_A$, obsahující a_0. Pro $a \in A$ buď $a' \in A'$ s $a \sim_A a'$; pak existuje jediné n tak, že $S^n a' = a$, buď pak $e(a) = n$, nebo $S^n a = a'$, buď pak $e(a) = -n$. Potom zobrazení $a \mapsto e(a)$ je izomorfizmus $\langle a/{\sim_A}, S \rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, \mathrm{S}^{\mathbb{Z}} \rangle$, když $a \not\sim_A a_0$ a izomorfizmus $\langle a/{\sim_A}, S \rangle$ a $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}^{\mathbb{N}} \rangle$ jinak. Platí zřejmě:

$$\text{Pro } \mathcal{A} \models \mathrm{SC},\ \mathcal{B} \models \mathrm{SC} \text{ je } \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow |A/{\sim_A}| = |B/{\sim_B}|. \tag{1.8}$$

1) a) je důsledkem (1.8). Platí i b). Třída izomorfních modelů se spočetným modelem $\mathcal{A}$ teorie SC je totiž jednoznačně určená číslem $|A/{\sim_A}|$ a takovými čísly jsou právě kardinály $1, 2, \ldots, \omega$. Konečně pro $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}$ buď $\mathcal{A}_0$ podmodel $\mathcal{A}$ s univerzem $a_0/{\sim_A}$, kde a_0 je z (1.7). Zřejmě je $\mathcal{A}_0 \cong \langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle$. c) SC není modelově kompletní, neboť podstruktura $\mathcal{A}$ struktury $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle$ s univerzem $A = \mathbb{N} - \{0\}$ je model SC, není to však elementární postruktura $\langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle$, neboť $\mathcal{A} \not\models (\exists y)(\mathrm{S}y = x)[1]$, ale $\langle \mathbb{N}, S \rangle \models (\exists y)(\mathrm{S}y = x)[1]$. Tudíž SC nemůže mít eliminaci kvantifikátorů. d) Pokud je SC axiomatizovatelná jedinou sentencí, je tato dokazatelná v nějakém fragmentu $T = \text{(Q0)}, \text{(Q2)}, \{\mathrm{S}^n x \neq x;\ n < k\}$ pro jisté $k > 1$. Existuje konečný model $\mathcal{A} \models T$ (totiž $\langle k, S \rangle$, kde $Sn = n + 1$ pro $n < k - 1$, $S(k - 1) = 0$); je pak $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}$, avšak každý model SC je nekonečný – spor. e) Pro $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}$ s $|A/{\sim_A}| > 1$ buď $a \in A$ takový, že $a_0 \not\sim_A a$, kde a_0 je z (1.7). Pak $a/{\sim_A}$ je univerzum podstruktury $\mathcal{A}$ a není to model SC. Tudíž SC není axiomatizovatelná otevřenými $\langle \mathrm{S} \rangle$-formulemi.

2) Nechť f je neprázdné konečné parciální vnoření modelu $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}^\circ$ do $\mathcal{B} \models \mathrm{SC}^\circ$ a $|B| > |A|$; pak lze jasně f bezprostředně prodloužit. Odtud plyne 1-koexistence SC° a tedy eliminace kvantifikátorů. 1-koexistenci lze ovšem dokázat i přímo. □

1.3.5.3. **Teorie** SC0 **následníka s nulou.**
Je to teorie v jazyce následníka s nulou $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$, jejímiž axiomy jsou

$$(\mathrm{Q1})\ 0 \neq \mathrm{S}x,\ \ (\mathrm{Q2})\ \mathrm{S}x = \mathrm{S}y \to x = y,\ \ (\mathrm{Q7})\ x \neq 0 \to (\exists y)(\mathrm{S}y = x),$$
$$\text{SC-schema}\quad x \neq \mathrm{S}^n x;\ n > 0 \text{ je přirozené.}$$

Každý $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$-term je roven v SC0 termu tvaru $\mathrm{S}^n 0$ nebo $\mathrm{S}^n x$. Každá atomická $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$-formule je v SC ekvivalentní formuli tvaru $\mathrm{S}^n x = y$, $\mathrm{S}^n x = 0$, $\mathrm{S}^n 0 = x$, $\mathrm{S}^n 0 = 0$, kde n je přirozené, x, y jsou proměnné (ev. stejné).

SC0-*schema indukce* je tvořeno právě axiomy indukce I_φ tvaru

$$(\varphi(0, \overline{y})\ \&\ (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(\mathrm{S}x, \overline{y}))) \to (\forall x)\varphi(x, \overline{y}),$$

kde φ je $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$-formule.

TVRZENÍ 1.3.5.4.

1) a) SC0 *je kategorická v každé nespočetné kardinalitě, je tedy kompletní a speciálně ekvivalentní s* $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, S, 0\rangle)$ *a s* $\langle \mathrm{S}, 0\rangle$*-teorií s axiomy*

$$\{(\mathrm{Q1}), (\mathrm{Q2}), (\mathrm{Q7})\} \cup \text{SC0-}\textit{schema indukce.}$$

Dále je SC0 *rozhodnutelná teorie.*

b) *Existuje právě spočetně neizomorfních spočetných modelů teorie* SC0.

c) SC0 *není konečně axiomatizovatelná.*

2) SC0 *má eliminaci kvantifikátorů a je tedy i modelově kompletní.*

Důkaz je zcela analogický důkazu tvrzení 1.3.5.2. V 1) musíme navíc ještě dokázat, že v teorii s axiomy (Q1), (Q2), Q7) a SC0-schematem indukce je dokazatelné SC-schema, což je snadné. □

1.4 Teorie uspořádání

1.4.1 Husté lineární uspořádání

TVRZENÍ 1.4.1.1. (Vlastnosti teorie DeLO.)

1) $\mathrm{I}(\kappa, \mathrm{DeLO}) = \begin{array}{ll} 1 & \textit{pro } \kappa = \omega, \\ 2^\kappa & \textit{pro } \kappa \textit{ nespočetné.} \end{array}$

Speciálně je DeLO *kompletní a rozhodnutelná.*

2) DeLO *má eliminaci kvantifikátorů a je tedy modelově kompletní.*

3) $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ *je prvomodel teorie* DeLO.

4) *Teorie* DeLO *není ekvivalentní otevřené teorii.*

Důkaz. 1) Snadno se sestrojí rekurzí izomorfizmus dvou spočetných modelů teorie DeLO; DeLO je tedy ω-kategorická o odtud plyne kompletnost. Tvrzení pro κ nespočetné plyne z A.1.1, 3).

2) Každé neprázdné konečné parciální vnoření mezi modely DeLO lze jasně bezprostředně prodloužit, DeLO je tedy koexistenční a tedy má eliminaci kvantifikátorů.

3) Je-li $\mathcal{A} \models$ DeLO, jasně lze $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ vnořit do $\mathcal{A}$ na nějaký podmodel $\mathcal{A}'$. Díky eliminaci kvantifikátorů je zřejmě $\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}$.

4) Podstruktura modelu otevřené teorie T je model T. Podstruktura $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ modelu $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ teorie DeLO není model DeLO; tedy DeLO není ekvivalentní otevřené teorii. □

1.4.2 Diskrétní lineární uspořádání

1.4.2.1.

1. Označme Γ_{DiLO} množinu všech formulí tvaru

$$x = y,\ x < y,\ \chi_n(x,y) \text{ s } n < \omega,$$

kde $\chi_n(x,y)$ značí formuli $x < y \quad \&$ "mezi x a y existuje právě n prvků". Tedy $\chi_0(x,y)$ znamená, že "x je bezprostřední předchůdce y".

2. Buď DiLO$^\circ$ rozšíření DiLO o binární predikáty $<_n$ s $n < \omega$, definované takto:

$$x <_n y \leftrightarrow \chi_n(x,y).$$

Označme $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$ jednoznačnou expanzi $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ do modelu DiLO$^\circ$.

TVRZENÍ 1.4.2.2.

1) $\mathrm{I}(\kappa, \mathrm{DiLO}) = 2^\kappa$ *pro* κ *nekonečné.*

2) a) *Teorie* DiLO *není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

b) DiLO *není ekvivalentní otevřené teorii.*

3) DiLO$^\circ$ *má eliminaci kvantifikátorů;* Γ_{DiLO} *je tedy eliminační pro* DiLO.

4) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$ *je algebraický prvomodel* DiLO$^\circ$. *Tedy:*

a) DiLO$^\circ$ *je kompletní a tedy i* DiLO *je kompletní a obě jsou rozhodnutelné.*

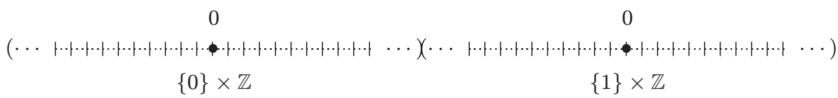
b) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$ *je prvomodel* DiLO$^\circ$ *a tedy* $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ *je prvomodel* DiLO.

5) *Zobrazení* $f = \{\langle\langle 0,0\rangle, 0\rangle\}$ *je parciální vnoření* $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ + \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$ *do* $\langle \mathbb{Z}, < \rangle^\circ$, *které nelze bezprostředně rozšířit do* $\langle 1, 0\rangle$.

Důsledek: Eliminace kvantifikátorů teorie DiLO$^\circ$ *neimplikuje bezprostřední rozšiřitelnost neprázdných konečných parciálních vnoření mezi modely* DiLO$^\circ$.

Důkaz. 1) plyne z A.1.1, 2).

2) a) Buď $\underline{\mathbb{Z}}$ kanonické uspořádání celých čísel. Pak $\mathcal{A} = \underline{\mathbb{Z}} + \underline{\mathbb{Z}} \models$ DiLO. Buď $\mathcal{B}$ podstruktura s univerzem $B = \{\langle 0, c\rangle;\ c \leq 0\} \cup \{\langle 1, c\rangle;\ c \geq 0\}$. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou modely DiLO, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, avšak není $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$.



b) Podstruktura modelu otevřené teorie T je model T. Protože

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \subseteq \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \models \text{DiLO a } \langle \mathbb{N}, \leq \rangle \not\models \text{DiLO},$$

není DiLO ekvivalentní otevřené teorii.

3) Zřejmě je DiLO$^\circ$ je 1-koexistenční; tedy DiLO$^\circ$ má eliminaci kvantifikátorů.

4) Jasně lze $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$ vnořit do každého modelu teorie DiLO$^\circ$.

a) DiLO$^\circ$ je kompletní, neboť má eliminaci kvantifikátorů a algebraický prvomodel. Protože DiLO$^\circ$ je konzervativní extenze DiLO, je i DiLO kompletní.

b) Jasně je $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ algebraický prvomodel DeLO. Je-li teorie modelově kompletní, je její algebraický prvomodel jejím prvomodelem; odtud plyne zbytek tvrzení.

5) je jasné. □

1.5 Grafy

1.5.1 Obyčejné grafy. Náhodný graf.

Teorie Gh grafů (obyčejných neorientovaných bez smyček) je teorie v jazyce $L^{gh} = \langle E \rangle$, kde E je binární relační symbol, a s axiomy: $xEy \to yEx$, $\neg(xEx)$.

TVRZENÍ 1.5.1.1. *Existuje silně nerozhodnutelný graf a tedy teorie grafů je nerozhodnutelná.*

Důkaz neuvádíme. □

1.5.1.2. Teorie RGh náhodného grafu. Pravděpodobnost $\overline{\nu}_m(\varphi)$.

1. Je to teorie grafů obohacená o axiom $(\exists x, y)(x \neq y)$ a schema $\{\psi_n; 0 < n < \omega\}$, kde ψ_n je uzávěr formule

$$\bigwedge_{0<i,j\leq n} x_i \neq y_j \rightarrow (\exists z) \bigwedge_{0<i\leq n} (E(x_i, z) \,\&\, \neg E(y_i, z)). \tag{1.9}$$

Modelem teorie RGh je nekonečný graf takový, že pro každé dvě konečné disjunktní množiny X, Y jeho nějakých vrcholů existuje vrchol z spojený s každým vrcholem z X hranou a nespojený s žádným vrcholem z Y hranou. Takový spočetný graf se také nazývá *náhodný.*

2. Pro $0 < m < \omega$ buď $\nu_m(\varphi)$ počet právě všech neizomorfních grafů s právě m vrcholy, v nichž platí φ a $\overline{\nu}_m(\varphi)$ pravděpodobnost, že graf s právě m vrcholy splňuje φ. Tedy $\nu_m(\top)$ je počet neizomorfních grafů s právě m vrcholy a dále

$$\overline{\nu}_m(\varphi) = \nu_m(\varphi)/\nu_m(\top).$$

TVRZENÍ 1.5.2.

1) a) *Teorie* RGh *je ω-kategorická (a tedy kompletní), má eliminaci kvantifikátorů a prvomodel.*
b) *Teorie* RGh *je rozhodnutelná.*

2) (0-1 pravidlo pro grafy.) *Pro sentenci φ jazyka teorie grafů platí*

a) RGh $\vdash \varphi \Leftrightarrow \lim_m \overline{\nu}_m(\varphi) = 1$, b) $\lim_m \overline{\nu}_m(\varphi) = 1$ *nebo* $\lim_m \overline{\nu}_m(\varphi) = 0$.

Důkaz. 1) a) RGh je bezesporná. Je-li totiž $\mathcal{A}$ spočetný graf, existuje spočetný graf $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ takový, že pro každé konečné disjunktní $X, Y \subseteq A$ existuje $b \in A'$ tak, že platí $E^{A'}(a, b)$ pro každé $a \in X$ a $\neg E^{A'}(a, b)$ pro každé $a \in Y$; pro každé $X \subseteq A$ konečné přidáváme b_X a příslušné hrany. Spočetný model teorie RGh najdeme jako sjednocení grafů $\mathcal{A}_n$, $n < \omega$, kde $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{n+1} = (\mathcal{A}_n)'$.

Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models$ RGh (nutně nekonečné). Zřejmě lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ bezprostředně prodloužit. Odtud plyne:
– RGh je ω-kategorická teorie a tedy i kompletní.
– RGh je koexistenční a tedy má eliminaci kvantifikátorů.
– Jediný (až na izomorfizmus) spočetný náhodný graf lze vnořit do každého náhodného grafu.

b) plyne z kompletnosti RGh, neboť jde o teorii rekurzivně axiomatizovanou.

2) nedokazujeme. □

1.6 Další teorie

1.6.1 Teorie o konstantách

Čistá teorie CE_κ konstant.
Jazyk: $L^{\mathrm{CE}_\kappa} = \langle c_i \rangle_{i\in\kappa}$, c_i jsou konstantní symboly.
Axiomy: $\emptyset$
Speciálně CE_0 je teorie PE čisté rovnosti.

Teorie $\mathrm{CE}_\kappa(\infty)$ konstant s nekonečně prvky.
Jazyk: $L^{\mathrm{CE}_\kappa} = \langle c_i \rangle_{i\in\kappa}$, c_i jsou konstantní symboly.
Axiomy: Existuje nekonečně prvků.

Teorie $\mathrm{C'E}_\kappa$ **různých konstant.**
Jazyk: $L^{\mathrm{C'E}_\kappa} = \langle c_i \rangle_{i\in\kappa}$, c_i jsou konstantní symboly.
Axiomy: $c_i \neq c_j$, $i \neq j$ a $i, j \in \kappa$

TVRZENÍ 1.6.1.1. *Buď k přirozené, T teorie* $\mathrm{CE_k}(\infty)$ *(tj. teorie v jazyce* $\langle c_i \rangle_{i\in k}$ *s rovností, kde* c_i *jsou konstantní symboly, přičemž T má axiomy vyjadřující „existuje nekonečně prvků“).*

1) *Pro ekvivalenci E na k buď*

$$T_E = T \cup \{c_i = c_j;\ \langle i, j\rangle \in E\} \cup \{c_i \neq c_j;\ \langle i, j\rangle \notin E\}.$$

Přitom ekvivalencí na k existuje právě $B(k)$*, kde* $B(k)$ *je k-té Bellovo číslo.*

a) *Pro* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_E$ *téže kardinality je* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$*; speciálně je* T_E *kompletní.*

b) *Jednoduchá kompletní extenze teorie T je až na ekvivalenci teorií právě* $L(T)$*-teorie tvaru* T_E*.*

c) $\mathrm{I}(\kappa, T) = B(k)$ *pro každou nekonečnou kardinalitu* κ*.*

d) *Každá konečně axiomatizovatelná* $L(T)$*-teorie je rozhodnutelná.*

2) a) *T má eliminaci kvantifikátorů; je tedy modelově kompletní.*

b) *Pro* $k \geq 2$ *není T kompletní a tedy nemá algebraický prvomodel.*

Důkaz. 1) a) platí evidentně. b) Buď T' nějaká kompletní jednoduchá extenze T. Buď E taková ekvivalence na k, že $\langle i, j\rangle \in E \Leftrightarrow T \vdash c_i = c_j$. Díky kompletnosti T' máme $\langle i, j\rangle \notin E \Leftrightarrow T' \vdash c_i \neq c_j$, tedy $T_E \subseteq \mathrm{Th}(T')$, tedy i $\mathrm{Th}(T_E) \subseteq \mathrm{Th}(T')$. Platí i opačná inkluze, neboť pro sentenci φ s $T' \vdash \varphi$ nutně $T_E \vdash \varphi$, protože jinak $T' \vdash \varphi, \neg\varphi$. c) plyne ihned z a) a b). d) Podle b) existuje kompletace teorie T tvořená konečně teoriemi tvaru T_E a z jejího tvaru je vidět, že ji lze vzít jako Δ_1 (tj. rekurzivní). Dle kompletačního kriteria rozhodnutelnosti je T rozhodnutelná a pak je rozhodnutelná i jednoduchá extenze T o konečně axiomů.

2) a) Jasně lze neprázdné konečné parciální vnoření mezi modely T bezprostředně prodloužit, tedy má T eliminaci kvantifikátorů a je proto i modelově kompletní. b) Pro $k \geq 2$ je $B(k) \geq 2$ a T tedy není kompletní. Kdyby měla T algebraický prvomodel, byla by kompletní. □

1.6.2 Teorie jedné unární relace

Čistá teorie UE **jedné unární relace.**
Jazyk: $L^{\mathrm{UE}} = \langle U \rangle$ s rovností, U je unární relační symbol.
Axiomy: $\emptyset$

Čistá teorie $\mathrm{UE}(m, n)$ **jedné unární relace pro** $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m + n \neq 0$**.**
Jazyk: $L^{\mathrm{UE}} = \langle U \rangle$ s rovností, U je unární relační symbol.
Axiomy: Existuje právě m prvků splňujících U a
existuje právě n prvků splňujících $\neg U$

TVRZENÍ 1.6.2.1.

1) *Jednoduchá kompletní extenze teorie* UE *je až na ekvivalenci teorií právě teorie* $\mathrm{UE}(m, n)$ *s* $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m + n \neq 0$.

Důsledek: Konečně axiomatizovatelná $L(\mathrm{UE})$*-teorie je rozhodnutelná.*

2) *Každá teorie* $\mathrm{UE}(m, n)$ *s* $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a* $m + n \neq 0$ *má eliminaci kvantifikátorů a je tedy modelově kompletní.*

3) *Pro* $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *s* $m + n = \infty$ *a* $\kappa \geq \omega$ *je*

$$\mathrm{I}(\kappa, \mathrm{UE}(m,n)) = \begin{cases} 1 & \textit{když } m < \infty \textit{ nebo } n < \infty, \\ 2 \cdot |\kappa \cap \mathbf{Cn}^\infty| + 1 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

(Připomeňme, že $\kappa \cap \mathbf{Cn}^\infty = \{\lambda \in \mathbf{Cn}^\infty;\ \lambda < \kappa\}$*; např.* $|\omega_5 \cap \mathbf{Cn}^\infty| = 5$*.)*

Důkaz. 1) Každá teorie $\mathrm{UE}(m,n)$ je kompletní. Když totiž $m+n < \infty$, má $\mathrm{UE}(m,n)$ až na izomorfizmus právě jeden model (a to velikosti $m+n$); tedy je kompletní. Když $m + n = \infty$, má $\mathrm{UE}(m,n)$ až na izomorfizmus právě jeden model velikosti ω; tedy je kompletní.

Je-li T jednoduchá kompletní extenze teorie UE, tak $\mathrm{UE}(m,n) \subseteq \mathrm{Th}(T)$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Díky kompletnosti $\mathrm{UE}(m,n)$ a T je nutně $\mathrm{Th}(\mathrm{UE}(m,n)) = \mathrm{Th}(T)$.

Důsledek. Podle dokázaného má UE kompletaci a z jejího tvaru je vidět, že ji lze vzít jako Δ_1 (tj. rekurzivní).

2) Snadno se zjistí, že neprázdné konečné parciální vnoření mezi modely $\mathrm{UE}(m,n)$ lze bezprostředně prodloužit.

3) Případ $m < \infty$ nebo $n < \infty$ je jasný. Buď $m = \infty = n$, $\kappa \geq \omega$. Uvažované modely můžeme brát ve tvaru $\langle \kappa, U \rangle$; až na izomorfizmus jsou tedy právě takové, že $U = \lambda$ nebo $\kappa - U = \lambda$ s $\omega \leq \lambda < \kappa$ a ještě jeden model s $|u| = |\kappa - U| = \kappa$. □

1.6.3 Teorie DeLO^* a některé extenze teorie DeLO.

1.6.3.1. **Teorie hustého lineárního uspořádání** DeLO^* je extenze LO o *axiom hustoty*

$$(x \leq y \ \&\ x \neq y) \to (\exists z)(x \leq z \leq y \ \&\ x \neq z \neq y).$$

Přidáním axiomu „existuje nejmenší[největší, nejmenší i největší] prvek“ získáme

$$\mathrm{DeLO}^-[\mathrm{DeLO}^+, \mathrm{DeLO}^\pm];$$

buď $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^\diamond$ expanze $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ do modelu $\mathrm{DeLO}^\diamond$, kde $\diamond$ je $-, +, \pm$; vznikne přidáním nejmenšího[největšího, nejmenšího i největšího] prvku.

Připomeňme, že DeLO je extenze DeLO^* o axiom „neexistuje ani nejmenší ani největší prvek“.

TVRZENÍ 1.6.3.2.

1) DeLO^* *má právě 4 neekvivalentní jednoduché kompletní extenze, a to* $\mathrm{DeLO}^\diamond$*, kde* $\diamond$ *je* $-, +, \pm$ *či prázdné. Důsledek:* DeLO^* *je rozhodnutelná.*

2) $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^\diamond$*, kde* $\diamond$ *je* $-, +, \pm$ *či prázdné, je algebraický prvomodel* DeLO^*.

Důkaz. 1) Je-li T jednoduchá kompletní extenze DeLO^*, $\mathcal{A}$ spočetný model T, je $\mathcal{A}$ jasně izomorfní některému modelu $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^\diamond$. Tudíž $\mathrm{DeLO}^\diamond$ jsou právě všechny neekvivalentní jednoduché kompletní extenze DeLO^*. Tím je dána kompletace DeLO^*; můžeme ji jistě vzít jako Δ_1 (tj. rekurzivní). 2) Snadno zjistíme, že každé $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^\diamond$ lze vnořit do $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a tento model zase do každého modelu teorie DeLO^*. □

TVRZENÍ 1.6.3.3. *Vlastnosti teorie* DeLO^+.

1) *Je* ω*-kategorická a tedy kompletní a rozhodnutelná.*

2) *Není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

3) *Buď* T *extenze* DeLO^+ *o definici* $P(x) \leftrightarrow (\forall z)(z \leq x)$.

   a) T *má eliminaci kvantifikátorů.*

   b) $\mathcal{A} = \langle \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^+, P^A \rangle$ *je prvomodel* T.

4) a) DeLO^+ *má eliminační množinu tvořenou právě formulemi*

$$\mathrm{AFm}, \qquad (\forall z)(z \leq x) \ (x \text{ je proměnná}).$$

b) *Má prvomodel, a to* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^+$.

Důkaz. 1) Snadno sestrojíme izomorfizmus dvou daných spočetných modelů teorie DeLO^+. 2) $\langle \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 0\}, \leq \rangle$ je podmodel, nikoli však elementární, modelu $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^+$. 3) a) Každé konečné neprázdné parciální vnoření mezi dvěma modely teorie T lze bezprostředně prodloužit, tedy má T eliminaci kvantifikátorů. b) Zřejmě lze model $\mathcal{A} = \langle \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle^+, P^A \rangle$ izomorfně vnořit do každého modelu $\langle \mathcal{B}, P^B \rangle \models T$, kde $\mathcal{B} \models \mathrm{DeLO}^+$; díky eliminaci kvantifikátorů jde o elementární vnoření − $\mathcal{A}$ je prvomodel T. 4) a) plyne ihned z 3) a), b) pak z 3) b). □

1.6.3.4. **Teorie** DeLOc je extenze teorie DeLO o rekurzivní množinu spočetně konstantních symbolů c_n a axiomy

$$\{c_n < c_{n+1}; n < \omega\}.$$

DeLOc je rekurzivně axiomatizovaná.

TVRZENÍ 1.6.3.5.

1) a) DeLOc *má eliminaci kvantifikátorů.*
   b) $\langle \mathbb{Q}, \leq, n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *je algebraický prvomodel teorie* DeLOc.
   c) DeLOc *je kompletní a* $\langle \mathbb{Q}, \leq, n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *je její prvomodel.*
   d) DeLOc *je rozhodnutelná.*

2) DeLOc *má právě 3 spočetné neizomorfní modely.*

Důkaz. 1) a) Snadno se zjistí, že DeLOc je 1-koexistenční.

b) Jestliže je $\mathcal{A} = \langle A, \leq^A, c_n^A \rangle_{n\in\mathbb{N}} \models \mathrm{DeLO}c$, buď $f(n) = c_n^A$. Pak f snadno rozšíříme do vnoření $\langle \mathbb{Q}, \leq, n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ do $\mathcal{A}$.

c) je bezprostřední důsledek a) a b).

d) plyne z toho, že DeLOc je rekurzivně axiomatizovaná a kompletní.

2) Model $\langle A, \leq^A, c_n^A \rangle_{n\in\mathbb{N}} \models \mathrm{DeLO}c$ teorie DeLOc je druhu (di), právě když platí podmínka (di) s $i = 1, 2, 3$, kde $C_A = \{c_n^A; n \in \mathbb{N}\}$:

(d1) C_A je neomezené v $\langle A, \leq^A \rangle$.
(d2) C_A má supremum v $\langle A, \leq^A \rangle$.
(d3) C_A je omezené a nemá supremum v $\langle A, \leq^A \rangle$.

Je vidět, že dva spočetné modely teorie DeLOc jsou izomorfní, právě když mají týž druh (di). □

POZNÁMKA 1.6.3.6.

1. a) Každé neprázdné konečné parciální vnoření jednoho modelu teorie DeLOc do jiného nelze bezprostředně prodloužit.

b) $\langle \mathbb{Q}, \leq, n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je izomorfní s každým spočetným modelem druhu (d1).

2. Buď T extenze DeLOc o konstantní symbol d a axiomy $c_n \leq d$ s $n \in \mathbb{N}$. Pak T má obdobné vlastnosti jako DeLOc. (Prvomodel je zde $\langle \mathbb{Q}, \leq, 1 - 2^{-n}, 1 \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.)

1.6.3.7. **Teorie** DeLOd je extenze teorie DeLO o unární relační symbol P a axiomy vyjadřující, že P je neprázdná dolní množina bez posledního prvku a s neprázdným komplementem:

$$(\exists x)P(x), \quad (P(x) \,\&\, y \leq x) \to P(y),$$
$$\neg(\exists z)(P(z) \,\&\, (\forall x)(P(x) \to x \leq z)), \quad (\exists x)\neg P(x).$$

DeLOd je rekurzivně axiomatizovaná.

Označme

$$\mathcal{A}_0 = \langle \mathbb{Q}, \leq, P^{A_0} \rangle, \quad \text{kde } P^{A_0} = \{a \in \mathbb{Q}; a < 0\},$$
$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{Q}, \leq, P^{A_1} \rangle, \quad \text{kde } P^{A_1} = \{a \in \mathbb{Q}; a < \sqrt{2}\},$$
$$T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \text{ pro } i = 0, 1.$$

TVRZENÍ 1.6.3.8.

1) a) *Každý spočetný model teorie* DeLOd *je izomorfní s* $\mathcal{A}_0$ *nebo* $\mathcal{A}_1$.

b) DeLOd *má právě dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze, a to* T_0, T_1*; ty jsou* ω*-kategorické.*

c) DeLOd *je rozhodnutelná teorie.*

2) DeLOd *není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

3) a) T_0 *má eliminaci kvantifikátorů.*
b) T_1 *není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. 1) a) Buď $\mathcal{B}$ spočetný model DeLOd. Když $\sup(P^B)$ neexistuje, je jasně $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_0$; jinak je $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_1$. b) je bezprostřední důsledek a). c) plyne z toho, že DeLOd je rekurzivně axiomatizovaná a dle b) má rekurzivní kompletaci.

2) Buď $\mathcal{B} = \langle P^A \cup \{a \in \mathbb{Q};\, 2\sqrt{2} \le a\}, \le, P^A\rangle$; je to model T_1. Platí $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_1$, není to však elementární podmodel $\mathcal{A}_1$, neboť $2\sqrt{2}$ je nejmenší s vlastností $\neg P$ v $\mathcal{B}$, nikoli však v $\mathcal{A}_1$ (kde to je $\sqrt{2}$).

3) a) Každé neprázdné konečné parciální vnoření jednoho modelu teorie T_0 do jiného lze bezprostředně prodloužit. Dle eliminačního kriteria má tedy T_0 eliminaci kvantifikátorů.

b) Podle důkazu položky 2) není T_1 modelově kompletní. □

1.6.4 Teorie o ekvivalencích

1.6.4.1. **Teorie** $\mathrm{E}^{1,<\omega}$ je v jazyce $\langle E\rangle$ s axiomy vyjadřujícími:

„E je ekvivalence“, „existuje právě jeden n prvkový E-faktor“, $0 < n < \omega$.

Označme ji dále stručně T.

- Buď T° extenze T o axiomy
$$P_n(x) \leftrightarrow \text{„}E[x] \text{ je právě } n\text{-prvková“},\ 0 < n < \omega.$$

- Buď $\{P'_n;\, 0 < n < \omega\}$ rozklad ω takový, že každé P'_n je právě n-prvkové a
$$E' = \{\langle i,j\rangle \in \omega \times \omega;\, (\exists n)(i,j \in P'_n)\}.$$

Zřejmě je $\langle \omega, E'\rangle \models T$, $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega} \models T^\circ$.

TVRZENÍ 1.6.4.2. (Vlastnosti teorie $T = \mathrm{E}^{1,<\omega}$.)

1) a) $\mathrm{I}(\omega, T) = \omega$.

b) $\mathrm{I}(\kappa, T) = |\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty|}$ *pro každý kardinál* $\kappa \ge \omega$.

Speciálně: T *není* κ*-kategorická pro žádné* $\kappa \ge \omega$, $\mathrm{I}(\omega_n, T) = \omega$, $\mathrm{I}(\omega_\omega, T) = 2^\omega$.

2) a) T° *má eliminaci kvantifikátorů.*

b) $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ *lze izomorfně vnořit do každého modelu teorie* T°. T° *je kompletní a* $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ *je její prvomodel.*

c) *Každé neprázdné parciální vnoření mezi modely teorie* T° *nelze bezprostředně prodloužit.*

3) a) T *je kompletní, má eliminační množinu* Γ *tvořenou právě formulemi*
$$x = y, \qquad x\,E\,y, \qquad \text{„}E[x] \text{ má právě } n \text{ prvků“},\ 0 < n < \omega.$$

b) T *není modelově kompletní a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.*

c) $\langle \omega, E'\rangle$ *je prvomodel* T.

Důkaz. 1) a) Je-li $\langle \omega, E\rangle \models T$ spočetný model, je počet nekonečných E-faktorů konečný nebo rovný omega. Odtud je patrné, že je $\mathrm{I}(\omega, T) = \omega$.

b) Pro $\kappa = \omega$ tvrzení platí. Buď dále $\kappa \geq \omega$.

Pro $\langle \kappa, E\rangle \models T$ buď $f_E : \kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty \to \kappa^+ \cap \mathbf{Cn}$ takové, že

$$f_E(\lambda) \text{ je počet } \lambda\text{-prvkových } E\text{-faktorů.} \tag{1.10}$$

Zřejmě pro $\langle \kappa, E\rangle \models T$, $\langle \kappa, E'\rangle \models T$ je $\langle \kappa, E\rangle \cong \langle \kappa, E'\rangle \Leftrightarrow f_E = f_{E'}$. Máme dokázat, že funkcí $f : \kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty \to \kappa^+ \cap \mathbf{Cn}$ takových, že

$$\textstyle\sum_{\lambda \in \kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty} f(\lambda) \cdot \lambda = \kappa \tag{1.11}$$

je alespoň $|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty|}$; pak jich je právě tolik.

Funkce $f \in {}^{\kappa \cap \mathbf{Cn}}(\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty)$, kterou rozšíříme do κ hodnotou 1, splňuje (1.11). Protože $|{}^{\kappa \cap \mathbf{Cn}}(\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty)| = |\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|\kappa \cap \mathbf{Cn}^\infty|}$ a dále $|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|\kappa \cap \mathbf{Cn}^\infty|}$ je rovno $|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}|^{|\kappa^+ \cap \mathbf{Cn}^\infty|}$, jsme hotovi.

2) a) Snadno se zjistí, že T° je 1-koexistenční.

b) Tvrzení o vnoření je zřejmé. Protože má T° eliminaci kvantifikátorů, je kompletní. V důsledku toho je výše uvedené vnoření elementární a $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ je tedy prvomodel.

c) Buď f vnoření $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ do $\langle \omega + \omega, E'', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ ($\models T^\circ$), kde E'' je rovno E' na ω a má jediný faktor, obsahující prvek ω ($\in \omega + \omega$). Pak pro $\emptyset \neq X \subseteq \omega$ je $g = f^{-1} \restriction X$ parciální vnoření, které nelze rozšířit do prvku ω.

3) a) T° je konzervativní rozšíření T, díky kompletnosti T° je T kompletní. Zbytek je reformulací toho, že T° má eliminaci kvantifikátorů.

b) Buď $\mathcal{A} = \langle A, E\rangle \models T$, přičemž, $X \subseteq A$ obsahující právě jeden prvek z každého E-faktoru. Pak podstruktura $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ s $B = A - X$ je model T a není to elementární podstruktura $\mathcal{A}$. Totiž pro $x \in X$ s $|E[x]| = n > 1$ $(n < \omega)$ existuje $b \in B$ s $\langle x, b\rangle \in E$. Platí „$E[b]$ je n-prvková“ v $\mathcal{A}$, ale „$E[b]$ je $(n-1)$-prvková“ v $\mathcal{B}$.

c) Tvrzení plyne bezprostředně z toho, že $\langle \omega, E', P'_n\rangle_{0<n<\omega}$ je prvomodel T°. $\square$

1.7 Tabulky

1.7.1 Eliminace kvantifikátorů, kompletace, rozhodnutelnost

V následující tabulce jsou uvedeny vlastnosti některých teorií co do eliminace kvantifikátorů, kompletnosti a modelové kompletnosti. Ve sloupci „Kompl." značí symbol $-^*$, že teorie je nekompletní, má však rekurzivní (tj. Δ_1-) kompletaci.

Všechny uvedené teorie kromě „nekonečných vektorových prostorů" jsou v rekurzivních jazycích a rekurzivně axiomatizovatelné. Tudíž díky rekurzivní kompletovatelnosti jsou rozhodnutelné.

Teorie nekonečných vektorových prostorů nad konečným a obecněji rekurzivním tělesem má rekurzivní jazyk a je rekurzivně axiomatizovatelná a díky kompletnosti je rozhodnutelná.

Teorie	Elimin. kvant.	Kompl.	Model. kompl.
PE (Čistá rovnost)	$-$	$-^*$	$-$
$\mathrm{PE}(\infty)$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{CE_k}(\infty)$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$	$+$	$-^*$	$+$
$\mathrm{UE}(m, n)$ s $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m+n \neq 0$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{E}^{1,<\omega}$	$-$	$+$	$-$
DeLO, DeLOc	$+$	$+$	$+$
DeLO^+	$-$	$+$	$-$
DeLOd	$-$	$-^*$	$-$
DiLO	$-$	$+$	$-$
DiLO°	$+$	$+$	$+$
Pr (Presburgerova aritmetika)	$-$	$+$	$+$
SC (Teorie následníka)	$-$	$+$	$-$
SC°	$+$	$+$	$+$
RGh (Náhodný graf)	$+$	$+$	$+$
Nekonečné vektorové prostory	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{DAG_0}$	$+$	$+$	$+$
ACF	$+$	$-^*$	$+$
ACF_p, p je prvočíslo nebo 0	$+$	$+$	$+$

- DeLOc je extenze DeLO o $\{c_i < c_{i+1};\ i \in \mathbb{N}\}$, kde c_i jsou konstantní symboly.
- DeLO^+ je extenze DeLO o „existuje největší prvek".
- DeLOd je extenze DeLO o unární predikát P a axiomatiku vyjadřující, že P je neprázdná dolní množina bez největšího prvku s neprázdným komplementem.
- DiLO° je extenze DiLO o $x <_n y \leftrightarrow$ „mezi x a y je právě n prvků", $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathrm{E}^{1,<\omega}$ je v jazyce $\langle E \rangle$, kde E je binární relační symbol, s axiomy vyjádřujícími: „E je ekvivalence", „existuje právě jeden n prvkový E-faktor", $0 < n < \omega$.
- SC° je extenze teorie SC o definici konstantního symbolu c:
$$c = y \leftrightarrow (\forall z)(\mathrm{S}z \neq y)\ \&\ (\forall y' \neq y)(\exists z)(\mathrm{S}z = y').$$
- $\mathrm{DAG_0}$ je teorie netriviálních divizibilních Abelových grup bez torze, tj. extenze teorie netriviálních Abelových grup o schemata divizibility a beztorznosti:
$$(\exists y)(my = x), \quad mx = 0 \rightarrow x = 0, \quad 0 < m < \omega.$$
- ACF_p je teorie algebraicky uzavřených těles charakteristiky p.

1.7.2 Nerozhodnutelnost

K důkazu nerozhodnutelnosti teorie se užívají:
Věta o Δ_1-neoddělitelnosti 4.3.3 a věta o nerozhodnutelnosti 4.3.4.
Kriteria nerozhodnutelnosti 4.3.6.
Silně nerozhodnutelné struktury a věta o silně nerozhodnutelné struktuře 4.3.10.

V následující tabulce uvádíme některé silně nerozhodnutelné struktury. Připomeňme, že expanze L-struktury $\mathcal{A}$ je nepodstatná, je-li její jazyk extenzí L pouze o konstantní symboly – viz 4.5.1. Další detaily jsou v 4.5.

Silně nerozhodnutelná struktura	Poznámka
$\mathcal{A} \models T$, kde T je bezesporná extenze Q	Z věty o nerozhodnutelnosti.
$\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$	$\mathcal{N}$ definovatelná v $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.
$\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$	$\mathcal{N}$ definovatelná v $\underline{\mathbb{Z}}$.
$\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$	$\underline{\mathbb{Z}}$ definovatelná v $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ pomocí Lagrangeovy věty.
$\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$	$\mathcal{N}$ definovatelná v $\underline{\mathbb{Q}}$ dle věty J. Robinsonové.
$\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot, \mathrm{Id} \rangle$	
$\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot \rangle$	$\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot, \mathrm{Id} \rangle$ definovatelná v $\langle \mathrm{Perm}(\mathbb{Z}), \cdot \rangle$
$\mathcal{D}_4 = \langle \mathbb{N}, R_4^D \rangle$, $R_4^D \subseteq \mathbb{N}^4$	$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je definovatelná v $\mathcal{D}_4$.
$\mathcal{D}_2 = \langle D_2, R_2^D \rangle$, kde $D_2 = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$, $R_2^D \subseteq (D_2)^2$	$\mathcal{D}_4$ definovatelná v nepodstatné expanzi $\mathcal{D}_2$.
Obyčejný graf $\mathcal{A} = \langle A, P^A \rangle$	$\mathcal{D}_2$ je definovatelné v jisté nepodstatné expanzi $\mathcal{A}$.
Svaz $\mathcal{C} = \langle C, \subseteq \rangle$	$C \subseteq \mathcal{P}(A \cup P^A)$.
$\langle B, F^B, G^B \rangle$, F^B, G^B unární funkce	$B = A \cup P^A$, $F^B(\langle a, b \rangle) = a$, $G^B(\langle a, b \rangle) = b$, $F^B(a) = a = G^B(a)$ pro a, b z B. $\mathcal{A}$ je definovatelná v $\mathcal{B}$.

1.7.3 f-homogenita. Prvomodely

Následující pojem f-homogenní teorie umožňuje stručně formulovat důležitou vlastnost teorie, související zejména s ω-kategoričností, existencí algebraického prvomodelu a eliminací kvantifikátorů, neboť implikuje koexistenci. Např. teorie DeLOc není f-homogenní, je však koexistenční.

1.7.3.1. Teorie T je f-*homogenní*, lze-li každé neprázdné konečné parciální vnoření mezi dvěma modely teorie T bezprostředně prodloužit.

TVRZENÍ 1.7.3.2. *Nechť bezesporná teorie T ve spočetném jazyce má nekonečný model, je* f-*homogenní a pro každé dva spočetné modely teorie T existuje neprázdné konečné parciální vnoření některého z nich do druhého. Pak T je ω-kategorická, má eliminaci kvantifikátorů a má prvomodel.*

Důkaz. Z předpokladů ihned plyne, že každé dva spočetné modely teorie T jsou izomorfní a také, že spočetný model teorie T lze vnořit do každého modelu teorie T; tudíž T má algebraický prvomodel. Dále je T koexistenční, tudíž má eliminaci kvantifikátorů a algebraický prvomodel je prvomodel. □

Uveďme ještě jedno tvrzení o prvomodelech.

TVRZENÍ 1.7.3.3. *Má-li T algebraický prvomodel, je každá bezkvantifikátorová sentence dokazatelná nebo vyvratitelná v T. Má-li T prvomodel, je kompletní.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je algebraický prvomodel T. Pro bezkvantifikátorovou sentenci φ a libovolný model $\mathcal{B}$ teorie T máme $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$. Dokazované tvrzení tedy platí. Podobně je tomu, má-li T prvomodel. $\square$

1.7.3.4. V následující tabulce je uvedeno vždy o dané teorii, zda je ω-kategorická, f-homogenní, koexistenční a dále její prvomodel, pokud existuje. Symbol $-^*$ v kolonce ω-kateg. značí, že teorie není ω-kategorická, je však kompletní.

Teorie	ω-kateg.	f-homog.	Koexist.	Prvomodel
DeLO^*	$-$	$-$	$-$	Nemá. Má 4 alg. prvomod.
DeLO^+	$+$	$-$	$-$	$\langle \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq \rangle$
DeLOc	$-^*$	$-$	$+$	$\langle \mathbb{Q}, \leq, n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$
DiLO	$-^*$	$-$	$-$	$\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$
DiLO°	$-^*$	$-$	$+$	$\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle^\circ$
Pr	$-^*$	$-$	$-$	$\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, + \rangle$
SC	$-^*$	$-$	$-$	$\langle \mathbb{N}, \mathrm{S} \rangle$
SC°	$-^*$	$-$	$+$	$\langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, 0 \rangle$
$\mathrm{CE_k}(\infty)$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$	$-$	$+$	$+$	Nemá
RGh	$+$	$+$	$+$	Spoč. model

Z tabulky je např. vidět, že f-homogenita nesplývá s koexistencí a že z f-homogenity neplyne ω-kategoričnost.

Dokážeme uvedené vlastnosti teorie SC°.

Kompletnost plyne z toho, že jde o teorii kategorickou v každé nespočetné kardinalitě. Dále má SC° právě spočetně neizomorfních spočetných modelů – viz též 1.3.5.2.

SC° není f-homogenní. Buď totiž $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \mathrm{S}, 0 \rangle$ standardní model SC°, $\mathcal{B}$ nestandardní model SC° s $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $b \in B - A$. Pak funkce f s $\mathrm{dom}(f) = \{0^B\}$ a $f(0^B) = 0^A$ je parciální vnoření $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$, které nemá bezprostřední prodloužení do b.

Dokažme 1-koexistenci SC°. Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ modely SC°, f neprázdné konečné parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$. Buď $(\exists y)\chi(\overline{x}, y)$, kde χ je elementární konjunkce, a nechť $\mathcal{A} \models \chi[\overline{a}, b]$ pro nějaké $\overline{a}$ z $\mathrm{dom}(f)$; hledáme $b' \in A'$ tak, aby $\mathcal{B} \models \chi[f\overline{a}, b']$. Můžeme předpokládat, že $\mathrm{l}(\overline{x}) = |\mathrm{dom}(f)|$. Formule χ je konjunkce nějakých $\mathrm{S}^n x_i = y$ nebo $\mathrm{S}^n y = x_i$ nebo $S_n x_i = x_j$ či negací takových formulí. Označme dále pro $n \geq 0$ a $c \in A$ jako $(\mathrm{S}^A)^{-n} c$ takový prvek $d \in A$, že $(\mathrm{S}^A)^n d = c$, pokud existuje. Když $(\mathrm{S}^n)^A c = a_i$, existuje $(\mathrm{S}^B)^{-n} f(a_i)$. Nyní b' najdeme takto: Když $(\mathrm{S}^A)^n a_i = b$, buď $b' = (S^B)^n f(a_i)$. Když $(\mathrm{S}^A)^n b = a_i$, buď $b' = (S^B)^{-n}(f a_i)$. Jinak zvolme $b' \in A'$ různé od všech $(S^B)^n f(a_i)$ a všech $(S^B)^{-n} f(a_i)$. $\square$

Příloha A

Dodatek

A.1 Neizomorfní lineární uspořádání

VĚTA A.1.1.

1) a) *Existuje právě kontinuum neizomorfních spočetných lineárních uspořádání.*

   b) *Obecněji: Pro nekonečné κ je právě 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání kardinality κ.*

2) *Pro nekonečné κ je právě 2^κ neizomorfních lineárních diskrétních uspořádání kardinality κ.*

3) *Pro nespočetné κ je právě 2^κ neizomorfních hustých lineárních uspořádání bez konců, které mají kardinalitu κ.*

Důkaz. Pracujeme s ostrými uspořádáními. Buď $\langle \mathcal{A}_i \rangle_{i\in I}$ soubor (ostrých) lineárních uspořádání $\mathcal{A}_i = \langle A_i, <_i \rangle$, $\langle I, <^I \rangle$ lineární uspořádání. Buď $\sum_{i\in I} \mathcal{A}_i = \langle A, < \rangle$ suma souboru uspořádání $\langle \mathcal{A}_i \rangle_{i\in I}$, tj.:

$$A = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times A_i), \qquad \langle i, a\rangle < \langle i', a'\rangle \Leftrightarrow i < i' \text{ nebo } i = i' \text{ a } a <_i a'.$$

Pak $\mathcal{A} = \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i$ je (ostré) lineární uspořádání. Je-li $I = 2\,(= \{0,1\})$, místo $\sum_{i\in I} \mathcal{A}_i$ se píše $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$. Říkejme, že $A_{(i)} = \{i\} \times A_i$ je komponenta úspořádání $\mathcal{A} = \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i$ (i-tá či s indexem i); chápeme ji též jako uspořádání $\mathcal{A}$ zúžené na množinu $A_{(i)}$.

1) a) Volme $\langle I, <^I \rangle = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\mathcal{B}_0 = \langle 1, < \rangle$ a $\mathcal{B}_1 = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ (uspořádání přirozených čísel, jednoprvkové ostré uspořádání a uspořádání celých čísel). Pro $f : I \to 2$ buď $\mathcal{A}^f = \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i^f$, kde $\mathcal{A}_i^f = \mathcal{B}_{f(i)}$; to je spočetné ostré lineární uspořádání. Buď $g : I \to 2$. Platí:

> je-li h izomorfizmus $\mathcal{A}^f$ a $\mathcal{A}^g$, je h-obraz komponenty K uspořádání $\mathcal{A}^f$ komponenta $\mathcal{A}^g$. (A.1)

Dokažme to pro K nekonečnou. Poznamenejme, že $h[K]$ (= h-obraz K) je interval bez konců. Buď L komponenta v $\mathcal{A}_g$ s nejmenším indexem i taková, že protne $h[K]$; je nutně nekonečná. Dále $L \supseteq h[K]$, neboť jinak pro $\beta \in L \cap h[K]$ a $\beta' \in h[K] - L$ je $\beta < \beta'$ a interval $[\beta, \beta']$ je spočetný, což není možné. Kdyby $L \supsetneq h[K]$, tak mezi některými dvěma prvky v L je spočetně prvků, což není možné.

Buď nyní K jednoprvková, L jako výše. Kdyby L byla nekonečná, tak $h^{-1}[L]$ obsahuje K a tedy dle již dokázaného je $K = h^{-1}[L]$ – spor.

Platí dále

> je-li h izomorfizmus $\mathcal{A}^f$ a $\mathcal{A}^g$, je $h_i = h\restriction A_{(i)}^f$ izomorfizmus komponent $\mathcal{A}_{(i)}^f$, $\mathcal{A}_{(i)}^g$ pro každé $i \in I$. (A.2)

Existuje-li totiž $i \in I$ tak, že h_i není izomorfizmus komponent $\mathcal{A}^f_{(i)}$, $\mathcal{A}^g_{(i)}$, vezměme první i takové. Dle (A.1) je h_i izomorfizmus $\mathcal{A}^f_{(i)}$ a nějaké komponenty $\mathcal{A}^g_{(j)}$ s jistým $j > i$; pak ale prvek z $\mathcal{A}^g_{(i)}$ nemá h-vzor.

Z (A.2) ihned plyne: $f \neq g \Rightarrow \mathcal{A}^f \ncong \mathcal{A}^g$. Protože $|{}^I 2| = 2^\omega$, jsme hotovi.

b) Jako $\langle I, <^I \rangle$ volme nejmenší dobré uspořádání dané nekonečné kardinality κ. Pro $f : I \to 2$ je pak $\mathcal{A}^f$ kardinality κ a výše řečené platí i zde a tedy uvažovaných neizomorfních uspořádání je 2^κ.

2) Pro ostré lineární uspořádání $\mathcal{A} = \langle A, <^A \rangle$ buď $\mathcal{A}(\mathbb{Z}) = \langle A \times \mathbb{Z}, <_{Le} \rangle$ lexikografické uspořádání. Je diskrétní a kardinality $\max(|A|, \omega)$. Nechť $\mathcal{B} = \langle B, <^B \rangle$ je lineární uspořádání. Pak platí $\mathcal{A}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Buď totiž h isomorfizmus $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ a $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$; definujme $H : A \to B$ takto:

$$H(a) = b \Leftrightarrow \text{existuje } j \in \mathbb{Z} \text{ s } h(\langle a, 0 \rangle) = \langle b, j \rangle.$$

Pak to je jasně zobrazení na B a

$$\begin{aligned} a <^A a' \quad &\Leftrightarrow \quad \langle a, 0 \rangle <^{\mathcal{A}(\mathbb{Z})} \langle a', 0 \rangle \text{ a mezi } \langle a, 0 \rangle, \langle a', 0 \rangle \text{ je nekonečně prvků} \\ &\Leftrightarrow \quad h(\langle a, 0 \rangle) <^{\mathcal{B}(\mathbb{Z})} h(\langle a', 0 \rangle) \text{ a mezi } h(\langle a, 0 \rangle), h(\langle a', 0 \rangle) \text{ je nekonečně} \\ & \quad \text{prvků} \quad \Leftrightarrow \quad H(a) <^B H(a'). \end{aligned}$$

Jelikož na $\kappa \geq \omega$ je 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání $\mathcal{A}$, máme 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ na $\kappa \times \mathbb{Z}$, tedy 2^κ neizomorfních diskrétních lineárních uspořádání, majících každé velikost univerza κ.

3) Buď κ nespočetný kardinál. Volme $\langle I, <^I \rangle$ jako nejmenší (ostré) dobré uspořádání kardinality κ. Buď Ω nejmenší dobré uspořádání kardinality ω_1, Ω^* inverzní uspořádání k Ω. (Ω lze vzít jako první nespočetný ordinál, který je totéž, co ω_1.) Buď $\mathcal{B}_0$ lexikografické uspořádání $(\Omega^* + \Omega) \times \mathbb{Q}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 + \mathbb{Q}$. To jsou hustá lineární neizomorfní uspořádání bez konců, obě kardinality ω_1. Dále každý interval v $\mathcal{B}_0$ je nejvýše spočetný. Pro $f : I \to 2$ je tedy $\mathcal{A}^f$ husté lineární (ostré) uspořádání bez konců, které má kardinalitu κ, neboť jeho univerzum je sjednocením κ množin kardinality ω_1 ($\leq \kappa$). Platí (A.1) s analogickým důkazem: argument spočetnosti nahradíme argumentací kardinalitou ω_1 a nový možný případ, že $L \supseteq h[K]$, přičemž $h[K]$ je izomorfní s $\mathcal{B}_0$ a L s $\mathcal{B}_1$, vyloučíme díky tomu, že „koncové $\mathbb{Q}$“ musí být dolní množinou nějakého $h[K']$, což díky typu uspořádání $\mathbb{Q}$ a K' není možné. Platí (A.2) včetně důkazu. Tedy platí i dokazované tvrzení. $\square$

Literatura

[1] Hájek, P., Pudlák, P., Metamathematics of First-Order Arithmetic, Springer, 1998

[2] Hodges, W., Model Theory, Cambridge University Press, 1993

[3] Shoenfield, J.,R., Mathematical Logic, A. K. Peters, 2001

[4] Sochor, A., Klasická matematická logika, UK v Praze – Karolinum, 2001

[5] Švejdar, V., Logika neúplnost, složitost a nutnost, Academia, 2002