ÚLOHY Z PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

Instance, varianty.

UF.1.1. Substituovatelnost.

1. Buď φ formule

$$(\exists z)(x = z) \,\&\, y < x$$

a dále x, y, z různé proměnné, F unární funkční symbol, c konstantní symbol.

Uveďte, zda je term t substituovatelný do φ za proměnnou v v následujících případech:

a) t je $F(z)$, v je x. Řešení: Ne.
b) t je $F(z)$, v je y. Řešení: Ano.
c) t je $F(x)$, v je x. Řešení: Ano.
d) t je $F(c)$, v je y. Řešení: Ano.

2. Buď φ formule

$$(\forall x)((\exists z)(z < x \,\&\, y = z) \vee z \neq x)$$

a dále x, y, z různé proměnné, G binární funkční symbol, c konstantní symbol.

Uveďte, zda je term t substituovatelný do φ za proměnnou v v následujících případech:

a) t je $G(c, x)$, v je y Řešení: Ne.
b) t je $G(c, y)$, v je y Řešení: Ano.
c) t je $G(c, c)$, v je z Řešení: Ano.
d) t je $G(z, x)$, v je z Řešení: Ne.

UF.1.2. Instance. Varianty.

1. Nechť y není volná ve φ a je substituovatelná za x do φ, φ' je $\varphi(x/y)$. Zjistěte, zda $\varphi'(y/x)$ je φ. Zdůvodněte odpověď.

Řešení: Oba předpoklady dohromady zaručují, že volný výskyt y ve φ' je právě tam, kde je volný výskyt x v φ. Tedy x je substituovatelné za y do φ' a také rovnost obou uvažovaných formulí platí.

2. Buďte x, y, z, u různé proměnné, Q kvantifikátor. Odpovězte a zdůvodněte, zda v následujících případech platí:

ψ je varianta φ.

a) φ je $(Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq x))$
ψ je $(Qz)(z < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq z))$
Řešení: Ne. z není substituovatelné za x do $x < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq x)$.

b) φ je $(Qx)(x < y \vee (\forall z)(z = y \,\&\, z \neq x))$
ψ je $(Qy)(y < y \vee (\forall z)(z = y \,\&\, z \neq y))$
Řešení: Ne. y je volná ve φ.

c) φ je $(Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq x))$
ψ je $(Qu)(u < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq u))$
Řešení: Ano. u není volná ve φ a je substituovatelná za x do $x < y \vee (\exists z)(z = y \,\&\, z \neq x)$.

3. Buď P unární predikátový symbol,
φ formule $(\exists y)(y = x) \,\&\, P(x)$, φ' formule $(\exists y)(y = y) \,\&\, P(y)$.

a) Je $(\forall x)\varphi'$ varianta $(\forall x)\varphi$?
Řešení: Ne.

b) Je x substituovatelné do φ' za y?
Řešení: Ano.

c) Je φ rovno $\varphi'(y/x)$?
Řešení: Ne. $\varphi'(y/x)$ je $(\exists y)(y = y) \,\&\, P(x)$.

d) Je $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'(y/x)$?
Řešení: Ano. Je $\vdash (\exists y)(y = x) \leftrightarrow (\exists y)(y = y)$, protože obě formule z ekvivalence jsou dokazatelné. Odtud $\vdash (\exists y)(y = x) \,\&\, P(x) \leftrightarrow (\exists y)(y = y) \,\&\, P(x)$.

Pojem modelu a splňování. Axiomatizovatelnost.

UF.1.3. Platnost formule v modelu.

1. Buď φ formule $P(x) \to (\forall x)P(x)$, kde P je unární relační symbol. V právě kterých strukturách $\langle A, P^A \rangle$ neplatí φ ani $\neg\varphi$?

Řešení: Právě když $\emptyset \neq P^A \neq A$.

2. Buď φ formule $x = c$, kde c je konstantní symbol. V právě kterých strukturách $\langle A, c^A \rangle$ neplatí φ ani $\neg\varphi$?

Řešení: Právě když $|A| \geq 2$.

3. Buď φ formule $P(x) \to (\forall x)R(x)$, kde P, R jsou různé unární predikátové symboly. V právě kterých strukturách $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$ neplatí φ ani $\neg\varphi$?

Řešení: Právě když $\emptyset \neq P^A \neq A \neq R^A$.

Zřejmě totiž:

$\mathcal{A} \not\models \varphi \Leftrightarrow P^A \neq \emptyset$ a $R^A \neq A$, $\quad \mathcal{A} \not\models \neg\varphi \Leftrightarrow P^A \neq A$ nebo $R^A = A$.

UF.1.4. Korektnost substituce.

Buď φ formule $(\exists y)(x \neq y)$ s různými proměnnými x, y. Buď φ' výsledek „nekorektní substituce“ y do φ za volný výskyt x. Buď $\mathcal{A}$ struktura. Uvažujme tvrzení:

$$\text{Pro každé } e : \mathrm{Var} \to A \text{ je } \mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(x/y[e])]. \tag{$*$}$$

a) Uveďte, zda $(*)$ platí pro $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$, kde $+$ je sčítání přirozených čísel.

Řešení: Ne.

b) Uveďte, zda $(*)$ platí pro $\mathcal{A} = \langle \{0\}, R \rangle$, kde $R = \{\langle 0, 0 \rangle\}$.

Řešení: Ano.

c) Právě pro které modely $\mathcal{A} = \langle A \rangle$ (teorie čisté rovnosti) platí $(*)$?

Řešení: Právě pro $\mathcal{A}$ s A jednoprvkovým.

UF.1.5. Axiomatizovatelnost.

1. Buď $\mathsf{K} = \{\langle A \rangle;$ velikost A je sudá nebo nekonečná$\}$ třída modelů jazyka L čisté rovnosti. Zjistěte, zda je K axiomatizovatelná, případně najděte její axiomatiku.

Řešení: $T = \{\neg$„existuje právě $2k + 1$ prvků“; $k \in \mathbb{N}\}$ axiomatizuje K.

2. Nechť T je teorie v jazyce L s rovností taková, že T má model a každý její model je nekonečný. Buď $0 < n \in \mathbb{N}$. Najděte L-teorii T' tak, aby $\mathsf{M}^\infty(T') = \mathsf{M}^\infty(T)$ a T' měla nějaké konečné modely, a to všechny:

a) právě n-prvkové,

b) právě n-prvkové nebo $2n$-prvkové.

Řešení: Buď $T' = \{\varphi \vee \psi;\ \varphi \in T\}$ s vhodným ψ.

3. Buď $0 < n \in \mathbb{N}$. Najděte teorii T v nějakém jazyce s rovností, která má nekonečné modely, nemá spočetný model, má konečné modely, všechny kardinality nejvýše n.

Řešení: Buď $L = \langle c_i;\ i \in \mathbb{R} \rangle$ s konstantními symboly c_i a T_0 buď L-teorie $\{c_i \neq c_j;\ i, j \in \mathbb{R}, i \neq j\}$; hledaná T je L-teorie

$$\{\varphi \vee \text{„existuje nejvýše } n \text{ prvků“};\ \varphi \in T_0\}.$$

4. Buď $L = \langle U \rangle$ s rovností, přičemž U je unární relační symbol, $0 < n \in \mathbb{N}$ a

$$\mathsf{K} = \{\langle A, U^A \rangle;\ U^A \text{ je nekonečná nebo nejvýše } n\text{-prvková}\}$$

je třída L-struktur. Zjistěte, zda je K axiomatizovatelná, případně najděte její axiomatiku.

Řešení: Nechť T_0 je teorie L-teorie

$$\{(\exists x_0, \ldots, x_{m-1})(\textstyle\bigwedge_{i<j<m} x_i \neq x_j \ \&\ \bigwedge_{i<m} U(x_i));\ 0 < m \in \mathbb{N}\}.$$

Pro L-strukturu $\mathcal{A}$ platí: $\mathcal{A} \models T_0 \Leftrightarrow |U^A| \geq \omega$. Buď χ sentence „existuje nejvýše n prvků x s $U(x)$“. Pak $T = \{\varphi \vee \chi;\ \varphi \in T_0\}$, axiomatizuje K.

Izomorfní spektra.

UF.1.6. Izomorfní spektra v jazyce $\langle U, c\rangle$.

Buď $L = \langle U, c\rangle$, kde U je unární relační a c konstantní symbol.

1. Popište izomorfní spektrum L-teorie $T = \{U(c)\}$.

   Řešení: $\mathrm{I}(\kappa, T) = |\mathbf{Cn} \cap \kappa|$. Modely $\langle \kappa, U', c'\rangle$, $\langle \kappa, U'', c''\rangle$ teorie T jsou izomorfní, právě když $\langle |U'|, |\kappa - U'|\rangle = \langle |U''|, |\kappa - U''|\rangle$, přičemž $|U'| \geq 1$. Všech různých dvojic $\langle |U'|, |\kappa - U'|\rangle$ s $|U'| \geq 1$, $U' \subseteq \kappa$ je právě $|\mathbf{Cn} \cap \kappa|$. Pro $\kappa < \omega$ je totiž $|\mathbf{Cn} \cap \kappa| = \kappa$. Pro $\kappa \geq \omega$ je buď $|U'|$ jakékoli kardinality $< \kappa$, nebo $|U'| = \kappa$ a pak může být $|\kappa - U'|$ jakékoli kardinality $\leq \kappa$; takových možností je $|\mathbf{Cn} \cap \kappa| + |\mathbf{Cn} \cap \kappa| = |\mathbf{Cn} \cap \kappa|$.

2. Popište izomorfní spektrum L-teorie $T = \{(\exists! x)U(x)\}$.

   Řešení: $\mathrm{I}(\kappa, T) = 1$ pro $\kappa = 1$ a 2 pro $\kappa > 1$.

UF.1.7. Izomorfní spektrum jazyka spočetně konstant.

Buď $L = \langle c_i\rangle_{i<\omega}$, kde c_i jsou konstantní symboly.

1. Pro L-strukturu $\mathcal{A}$ definujeme ekvivalenci E^A na ω:

$$i\; E^A j \quad \Leftrightarrow \quad c_i^A = c_j^A.$$

Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dvě L-struktury téže velikosti.

a) Platí:

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad E^A = E^B \text{ a } |A - \{c_i^A;\, i < \omega\}| = |B - \{c_i^B;\, i < \omega\}|. \tag{1}$$

Speciálně je nejvýše kontinuum neizomorfních L-struktur dané kardinality.

b) Jsou-li $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ konečné nebo nespočetné, platí:

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad E^A = E^B. \tag{2}$$

c) Najděte spočetné $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, pro které (2) neplatí.

2. Pro $\kappa \geq 2$ je $\mathrm{I}(\kappa, L) = 2^\omega$.

   Návod: Užijte toho, že na ω je kontinuum různých ekvivalencí s λ třídami, když $2 \leq \lambda \leq \omega$.

   Řešení: Buď E ekvivalence na ω, $\lambda(E)$ počet tříd E. Pro $\kappa \geq \lambda(E)$ definujme L-strukturu $\kappa^E = \langle \kappa, c_i^E\rangle_{i<\omega}$ tak, aby platilo: $c_i^E = c_j^E \Leftrightarrow i\, E\, j$. Pak:

$$\text{Jsou-li } E, E' \text{ ekvivalence na } \omega \text{ tak } \kappa^E \cong \kappa^{E'} \Leftrightarrow E = E'.$$

   Tedy: jelikož je na ω kontinuum různých ekvivalencí s λ třídami, jakmile $2 \leq \lambda \leq \omega$, existuje alespoň kontinuum neizomorfních L-struktur kardinality $\kappa\, (\geq 2)$ a dle (1) jich není více.

UF.1.8.

Teorie DiLO diskrétního lineárního uspořádání má pro každé $\kappa \geq \omega$ právě 2^κ neizomorfních modelů kardinality κ.

Návod: Užijte toho, že pro každé $\kappa \geq \omega$ je právě 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání s univerzem kardinality κ.

Řešení: Pro ostré lineární uspořádání $\mathcal{A} = \langle A, <^A\rangle$ buď $\mathcal{A}(\mathbb{Z}) = \langle A \times \mathbb{Z}, <_{Le}\rangle$ lexikografické uspořádání. Je diskrétní a kardinality $\max(|A|, \omega)$. Nechť $\mathcal{B} = \langle B, <^B\rangle$ je lineární uspořádání. Pak platí $\mathcal{A}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Buď totiž h isomorfizmus $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ a $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$; definujme $H : A \to B$ takto:

$$H(a) = b_a \Leftrightarrow \text{existuje } j_a \in \mathbb{Z} \text{ s } h(\langle a, 0\rangle) = \langle b_a, j_a\rangle.$$

Pak to je jasně zobrazení na B a

$$\begin{aligned} a <^A a' \quad &\Leftrightarrow \quad h(\langle a,0\rangle) <^{\mathcal{B}(\mathbb{Z})} h(\langle a',0\rangle) \text{ a mezi } h(\langle a,0\rangle),\ h(\langle a',0\rangle) \text{ je nekonečně prvků} \\ &\Leftrightarrow \quad b_a <^B b_{a'} \quad \Leftrightarrow \quad H(a) <^B H(b). \end{aligned}$$

Jelikož na $\kappa \geq \omega$ je 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání $\mathcal{A}$, máme 2^κ neizomorfních lineárních uspořádání $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$ na $\kappa \times \mathbb{Z}$, tedy 2^κ neizomorfních diskrétních lineárních uspořádání, majících každé velikost univerza κ.

Základy dedukce.

UF.1.9. Syntaktický důkaz bezespornosti teorie rovnosti v L.

Nechť T je teorie rovnosti v L, tj. L-teorie s rovností bez mimologických axiomů. Buď d nový konstantní symbol. Pro L-formuli φ buď φ^* formule, která se získá z φ odstraněním všech kvantifikací a nahrazením každého termu konstantním symbolem d. Pak φ^* je výrok nad prvovýroky $d = d$, $R(d, \ldots, d)$, kde R je relační symbol z L.

a) Je-li φ logický axiom nebo axiom rovnosti, kromě axiomu $x = x$, je φ^* tautologie.

Řešení: Pro logický axiom φ, který není axiomem rovnosti, to je jasné. Axiomy rovnosti φ kromě $x = x$ přejdou na φ^* tvaru

$$d = d \to d = d \to \cdots \to (R(d, \ldots, d) \to R(d, \ldots, d))$$

nebo

$$d = d \to d = d \to \cdots \to d = d$$

a pak ovšem $\overline{v}(\varphi^*) = 1$.

b) $T \vdash \varphi \Rightarrow \overline{v}(\varphi^*) = 1$, jakmile v je ohodnocení uvedených prvovýroků takové, že platí $v(d = d) = 1$. Speciálně je T bezesporná.

Návod: Užijte indukci na teorémech T.

Řešení: Indukcí na teorémech T. Pro axiom φ to platí, neboť $(x = x)^*$ je $d = d$. Buď $v(d = d) = 1$. Nechť pro ψ, $\psi \to \varphi$ to platí. Pak $1 = \overline{v}((\psi \to \varphi)^*) = \overline{v}(\psi^* \to \varphi^*)$ a $\overline{v}(\psi^*) = 1$, tedy $\overline{v}(\varphi^*) = 1$. Platí-li to pro φ, tak $\overline{v}(((\forall x)\varphi)^*) = \overline{v}(\varphi^*) = 1$.

UF.1.10. Dokazatelné, vyvratitelné, nezávislé a bezesporné formule.

1. Buďte P, R různé unární predikátové symboly. Zdůvodněte, zda formule φ je dokazatelná, vyvratitelná či nezávislá v logice, kde φ je

a) $P(x)$ b) $P(x) \to R(x)$
c) $(\forall x, y)(P(x) \to (R(x) \to P(x)))$ d) $(\exists x)P(x)$

Řešení: a) Nezávislá. $\langle 1, \emptyset \rangle \models \neg\varphi$, $\langle 1, 1 \rangle \models \varphi$. b) Nezávislá. $\langle 2, \emptyset, 2 \rangle \models \varphi$, $\langle 2, 2, \emptyset \rangle \models \neg\varphi$. c) Dokazatelná, neboť $P(x) \to (R(x) \to P(x))$ je tautologie. d) Nezávislá. $\langle 1, \emptyset \rangle \models \neg\varphi$, $\langle 1, 1 \rangle \models \varphi$.

2. Najděte nějaké nezávislé sentence teorie čisté rovnosti, teorie lineárního uspořádání, teorie grup, teorie těles.

3. Nechť $T \vdash (\exists x)\varphi(x)$. Co lze říci o dokazatelnosti, vyvratitelnosti, nezávislosti, konzistenci φ, $\neg\varphi$ vzhledem k T?

UF.1.11. Vlastnosti kvantifikátorů.

1. $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((Qx)\varphi \to (Qx)\psi)$, kde Q značí kvantifikátor.

Návod: Užijte větu o konstantách.

Řešení: Buďte T logické axiomy v jazyce rozšířeném o nové konstantní symboly c_i; $\varphi(x, x_1/c_1, \cdots)$ resp. $\psi(x, x_1/c_1, \cdots)$ označme $\varphi'(x)$ resp. $\psi'(x)$ (konstanty substituujeme za všechny volné proměnné, kromě x). Pak $T, (\forall x)(\varphi' \to \psi') \vdash \varphi' \to \psi'$, dle pravidla distribuce kvantifikátoru i $T, (\forall x)(\varphi' \to \psi') \vdash (Qx)\varphi' \to (Qx)\psi'$ a zbytek dá věta o dedukci a konstantách.

2.

a) $\vdash (\forall x)\varphi \to (\exists x)\varphi$.

Řešení: Je $\vdash (\forall x)\varphi \to \varphi$, $\vdash \varphi(x) \to (\exists x)\varphi$; odtud pomocí pravidla tranzitivity implikace plyne dokazované.

b) $\vdash \varphi \to (\forall x)\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\exists x)\varphi \to (\forall x)\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\forall x)\neg\varphi \vee (\forall x)\varphi$.

Řešení: Prvá ekvivalence. Implikace $\Rightarrow$: $\vdash \varphi \to (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \vdash (\forall x)(\varphi \to (\forall x)\varphi) \Rightarrow \vdash (\exists x)\varphi \to (\forall x)\varphi$. Implikace $\Leftarrow$: $\vdash (\exists x)\varphi \to (\forall x)\varphi \Rightarrow \vdash (\forall x)(\varphi \to (\forall x)\varphi) \Rightarrow \vdash \varphi \to (\forall x)\varphi$. Užitím de Morganových vztahů plyne druhá ekvivalence.

3.

a) $\vdash (\forall x)(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\varphi$.

Řešení: i) $\vdash (\forall x)(\forall x)\varphi \to (\forall x)\varphi$ dává axiom substituce.

ii) $\vdash (\forall x)\varphi \to (\forall x)(\forall x)\varphi$ plyne z $\vdash (\forall x)\varphi \to (\forall x)\varphi$ pravidlem $\forall$-zavedení.

Z i), ii) plyne ihned dokazované.

b) $\vdash (\exists x)(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\varphi$.

Řešení: i) $(\exists x)(\forall x)\varphi \to (\forall x)\varphi$ dává pravidlo $\exists$-zavedení.

ii) $(\forall x)\varphi \to (\exists x)(\forall x)\varphi$ plyne z platného vztahu $\vdash \psi \to (\exists x)\psi$. Z i), ii) plyne ihned dokazované.

UF.1.12. Vytýkání kvantifikátorů - protipříklady.

1. $\nvdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$.

Řešení: Buď $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly, $a \in P^A \subseteq R^A \subsetneq A$. Pak

$$\mathcal{A} \models (\forall x)(P(x) \to R(x)), \qquad \mathcal{A} \not\models (P(x) \to (\forall x)R(x))[a].$$

Tedy $\mathcal{A} \not\models (\forall x)(P(x) \to R(x)) \to (P(x) \to (\forall x)R(x))$.

2. $\nvdash (\varphi \to (\forall x)\psi) \to (\forall x)(\varphi \to \psi)$.

Řešení: Buď $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly, $a \in A - P^A$, $\emptyset \neq P^A \not\subseteq R^A$. Pak

$$\mathcal{A} \models (P(x) \to (\forall x)R(x))[a], \qquad \mathcal{A} \not\models (\forall x)(P(x) \to R(x)).$$

Tedy $\mathcal{A} \not\models (P(x) \to (\forall x)R(x)) \to (\forall x)(P(x) \to R(x))$.

3. $\nvdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\exists x)\psi)$.

Řešení: Buď $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$, kde P, R jsou unární predikátové symboly, $a \in P^A \subsetneq A$, $R^A = \emptyset$. Pak

$\mathcal{A} \models (\exists x)(P(x) \to R(x))$ (protože existuje $b \in A - P^A$),

$\mathcal{A} \not\models (P(x) \to (\exists x)R(x))[a]$ (protože je $a \in P^A$).

Tedy $\mathcal{A} \not\models (\exists x)(P(x) \to R(x)) \to (P(x) \to (\exists x)R(x))$.