(5) $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \quad \left(\overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } R \right)$

bodová konvergence: $0 \le \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \le \frac{x^2}{n^2}$, $x\in R, n\in N$ $\Big\} \Rightarrow$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$ konverguje pro každé $x\in R$

$\underset{\text{srovnávací krit.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ bodově konverguje v R

lok. stejnoměrná konvergence:

Ať $a>0$, $|x|\le a$ $\quad 0 \le \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \le \frac{x^2}{n^2} \le \frac{a^2}{n^2} \Longrightarrow$

$\underset{\text{(Weierst)}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \rightrightarrows$ na $\langle -a,a\rangle$ pro každé $a>0$,

$\Longrightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na R

konvergence není stejnoměrná na R:

neboť $\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ bodově (na R),

ale ne stejnoměrně $\left(\sup_{x\in R} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) = +\infty \to +\infty! \right)$

(6) DÚ: Vyšetřete podobně bodovou, stejnoměrnou, případně lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

(i) $\sum_{1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$ (bodově k. v R, $\rightrightarrows$ v $\langle -a,a\rangle$ pro $\forall a>0$, ne $\rightrightarrows$ v R, $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ v R)

(ii) $\sum_{1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ (bodově v $(-1,1\rangle$, $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$,
nekonverguje stejnoměrně na žádném int.
$(\varepsilon,1)$ $(0<\varepsilon<1)$, i když
$x^n - x^{n+1} \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1\rangle$)

(iii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$: bodově konverg. na $(-\infty,-3\rangle \cup (-1,+\infty)$,
$\overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$, nekonv. stejn. na
žádném okolí (prstencovém) bodu (-1).

(7) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ – 1, vyšetřit obor konvergence
2, konverguje řada na oboru konvergence stejnoměrně nebo aspoň lokálně stejnoměrně?

bodová konvergence: $x=0$ ... řada konverguje

pro $x \neq 0$ $\quad \left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2|x|}$ $(*)$
$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x|}$ konverg. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ daná řada konverguje (dokonce absolutně) v R

stejnoměrná konvergence

odhadu $(*)$ lze použít pro $|x| \geq a > 0$: $\left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right| \leq \frac{1}{n^2 a}$,
$\sum \frac{1}{n^2 a}$ konverg. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ řada $\rightrightarrows$ na intervalech $(-\infty, -a\rangle$ a $\langle a, +\infty)$, $a>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ řada $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$

odhad $(*)$ ale nelze užít v okolí 0 : pro $x \to 0$ ... $\frac{1}{n^2|x|} \to +\infty$

je možné se pokusit o přesnější "vyšetření" pomocí
$\sup\limits_{x \in R} |f_n(x)|$ $\left(= \max\limits_{x \in R} |f_n(x)| \text{ zde} \right)$:

$f_n(x)$ jsou funkce spojité na R, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0 = f(0)$, $\Big\} \Rightarrow$

$f_n'(x) = 0 \iff x_n = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, ($f_n$ jsou liché fce)

$\max\limits_{x \in R} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$
$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ konv. $\Big\} \Longrightarrow$ (Weierstrass)

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} \rightrightarrows$ na R

(8) Označme $\sum_1^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)} = f(x)$, $x \in R$ (příklad 7)

Protože $\sum_1^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)} \rightrightarrows f(x)$ na R, lze (věty o záměně sumace a ....)

(i) $f(x)$ je spojitá fce v R (neboť $\frac{x}{n(1+nx^2)} = f_n(x)$ jsou fce spojité na R)

(ii) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sum_1^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)} = \sum_1^\infty \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} = \sum_1^\infty 0 = 0$$

(iii) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_1^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)}\right)dx = \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{x}{n(1+nx^2)}\,dx =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \frac{2nx}{1+nx^2}\,dx = \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2}\left[\ln(1+nx^2)\right]_0^1 =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2} \ln(1+n)$$

Pozn.: Z věty o záměně sumace a integrálu víme, že ($\sum f_n \rightrightarrows$ na $\langle 0,1\rangle$) $f \in R(\langle 0,1\rangle)$ a $\sum_1^\infty \frac{1}{2n^2}\ln(1+n)$ konverguje – (což nemusíme zjišťovat);

pokuste se vyšetřit konvergenci řady $\sum \frac{1}{2n^2}\ln(1+n)$ přímo.

(iv) v R lze vyjádřit i primitivní fci k $f(x)$:

$$\int \left(\sum_1^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)}\right)dx = \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2}\int \frac{2nx}{1+nx^2}\,dx =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2}\ln(1+nx^2) + C$$ – víme, že řada konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu $\langle a,b\rangle \subset R$, tedy lokálně stejn. v R

Pokuste se (jako cvičení) toto vyšetřit i přímo!

(9) Neabsolutní stejnoměrná konvergence

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \rightrightarrows \text{ v } R \ :$$

Dirichletovo kritérium, zde spec. Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci:

$$\frac{1}{n+\sin x} \le \frac{1}{n-1} \text{ pro } n,\ x \in R \Rightarrow \frac{1}{n+\sin x} \rightrightarrows 0 \text{ v } R,$$
$$n = 2, 3, \dots$$

$$\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}_2^{\infty} \text{ je klesající pro každé } x \in R \quad \Rightarrow$$

(a $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n$ má omezenou (stejně) posloupnost částečných součtů – (Leibniz).)

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \rightrightarrows \text{ v } R$$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \rightrightarrows$ v R (ukažte stejně, jako v příkl. 9)

tedy: 1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ je funkce spojitá v R

2) $$\lim_{x\to\pm\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \sum_{1}^{\infty} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = 0$$

3) k $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ existuje na R primitivní funkce a

$$\int\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}\right)dx = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \int \frac{1}{n+x^2}\,dx =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} + c, \quad x \in R$$

příčemž $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \rightrightarrows$ na R :

(Abelovo kritérium): $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje (stejnoměrně)

$n \in N$, $\left| \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ v R (stejně omezená posloupnost v R)

a $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \right\}_1^\infty$ je pro každé $x \in R$ monotónní

4) $$\sum_1^\infty \left(\frac{(-1)^k}{k+x^2} \right)' = \sum_1^\infty (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2}$$

na int. $\langle -a, a \rangle$, $a > 0$: $\left. \begin{array}{l} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2x}{(k+x^2)^2} \right| \leq \frac{2a}{k^2}, \\ \sum_1^\infty \frac{2a}{k^2} \text{ konverguje} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2}$ konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu (α, β)
(a tedy lok. stejnoměrně na R)

tedy, $$\left(\sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{k+x^2} \right)' = \sum_1^\infty (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2} \quad \text{v } R$$

(věta o záměně sumace a derivování)

(11) DÚ Pomocí nekonečné řady vyjádřete

$$\int_0^1 \left(\sum_1^\infty \frac{1}{x^2+k^2} \right) dx \qquad \left(= \sum_1^\infty \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k} \right)$$

(Zkuste ukázat nezávisle na větě o záměně sumace a R-integrálu konvergenci výsledné řady)

(12) <u>Dú:</u> Spočítejte $\lim\limits_{x \to 1} \sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

(řada konverguje stejnoměrně na $(0,+\infty)$ – Abelovo kritérium, $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_1^\infty \dots = \sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2}\ln 2$)

(13) <u>Dú:</u> Spočítejte $\lim\limits_{x \to 0+} \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2^n \cdot n^x}$.

(řada konverguje stejnoměrně na $(0,+\infty)$ – Weierstrass – – tedy $\lim\limits_{x\to 0+} \sum\limits_1^\infty \dots = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1$)

(14) <u>Dú:</u> Ukažte, že funkce $f(x) = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^x}$ má na intervalu $(1,+\infty)$ derivaci (dokonce derivace všech řádů).

(řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(1,+\infty)$ – dokažte, že konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle a,+\infty)$, $a>0$ (Weierstrass), k odhadu derivace

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{-\ln n}{n^x} \quad \text{na intervalu } \langle a,+\infty)$$

lze užít omezenosti shora posloupnosti $\left\{\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right\}$ pro lib. $\varepsilon>0$ – $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0$)