Jak na Fubiniho a diferenciální rovnice

Fubiniho věta – počítání obsahů nebo integrálů na intervalech

Formálně

Věta T 6 (Fubini - důkaz jen pro $n = 2$). *Nechť f je spojitá funkce na n-rozměrném intervalu I. Pak*

$$(R)\int_I f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\cdots\Big(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_n\Big)\,dx_{n-1}\Big)\dots\Big)dx_1.$$

Postup výpočtu

1) Ideální je si situaci namalovat nebo představit. Pokud to nejde, snažíme se alespoň spočítat průsečíky, to nám může pomoci při stanovení okrajů počítané oblasti.
2) Použijeme Fubiniho větu
   a) Pokud máme počítat objem či obsah množiny, počítáme $\int_I F$, kde F = 1.
   b) Pokud máme počítat obecně $\int_I F$, použijeme následující vztah přímo.

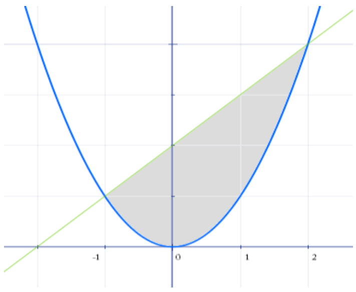
$$\int_I F = \int_{a_1}^{b_1}\left(\dots\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f(x_1, \dots, x_n)dx_n\right)\dots\right)dx_1$$

Příklad

Spočítejte obsah množiny $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$.

1) Spočítáme průsečíky a nakreslíme si obrázek:

$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 2$$



Proměnná *x* se pohybuje v rozmezí *-1* a *2* a pro pevné *x* se *y* pohybuje od x^2 do *x + 2*.

2) Použijeme vztah a počítáme:

$$\int_M 1 = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2} 1dy\right)dx = \int_{-1}^{2} [y]_{x^2}^{x+2}\,dx = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = \cdots$$

Fubiniho věta – počítání integrálů

Postup výpočtu

1) Vnitřek integrálu si upravíme tak, abychom dostali rozdíl dvou podobných členů, které se liší jen jednou proměnnou apod. (např. $a^2 - b^2$).
2) Ve výrazu založíme novou proměnnou *y* a výraz upravíme do podoby např. $[y^2]_{y=b}^{y=a}$.
3) Výraz uvnitř integrálu zderivujeme podle *y* a zapíšeme jako integrál $\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}(2y)\, dy$.
4) Pomocí Fubiniho věty prohodíme vnitřní a vnější integrál. $\int_m^n \int_a^b \dots = \int_M \; = \int_a^b \int_m^n \dots$
5) Dopočítáme integrál.

Příklad

Nechť a > 0, b > 0. Spočítejte hodnotu integrálu $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$.

1) Už máme.
2)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x}\right]_{y=b}^{y=a} dx$$

3)

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x}\right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-yx^2}}{x}\right) dy\right) dx = \int_0^\infty \left(\int_b^a \left(x^2 . \frac{e^{-yx^2}}{x}\right) dy\right) dx$$

4)

$$\int_0^\infty \left(\int_b^a x . e^{-yx^2}\, dy\right) dx = \int_M \; = \int_b^a \left(\int_0^\infty x . e^{-yx^2} dx\right) dy$$

5)

$$\int_b^a \left(\int_0^\infty x . e^{-yx^2} dx\right) dy = \int_b^a \left[\frac{e^{-yx^2}}{-2y}\right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

Diferenciální rovnice prvního řádu

Formálně

Věta L 4 (o lepení řešení). *Nechť $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbf{R}$ spojitá. Nechť y_l je řešení diferenciální rovnice*

$$y' = f(x,y) \text{ na intervalu } (a-\delta, a)$$

a y_r je řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(a, a+\gamma)$. Nechť navíc existují limity

$$\lim_{x\to a-} y_l(x) = \lim_{x \to a+} y_r(x) = A.$$

Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x) \text{ pro } x \in (a-\delta, a) \\ A \text{ pro } x = a \\ y_r(x) \text{ pro } x \in (a, a+\gamma) \end{cases}$$

je řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(a-\delta, a+\gamma)$.

Postup výpočtu

1) Rozhodneme o typu rovnice
   a) $y'(x) = f(x)$ … Provedeme bod 2)d)ii).
   b) $y'(x) = g(y)$ … Provedeme bod 2)d)ii).
   c) $y'(x) = f(x)g(y)$ … Provedeme bod 2)d)ii).
   d) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ … Provedeme bod 2)d).
   e) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}\ \alpha \neq 0, 1$ … Provedeme bod 2).
2) $y'(x) = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$ (Bernouliho rovnice)
   a) Zavedeme substituci
      $z(x) = \left(y(x)\right)^{1-\alpha}$
   b) Ze substituce vypočítáme $y(x)$ a $y'(x)$.
   c) Vypočítané rovnice dosadíme do původní rovnice. Tím se rovnice převede na lineární rovnici 1. řádu s proměnnou z.

   d) $z'(x) = a(x)z + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)
      i) Vyřešíme homogenní rovnici $z'(x) = a(x)z$.

      ii) $z'(x) = f(x)g(z)$ (separované proměnné)
         (1) Pro $g(z) \equiv 0$ nalezneme vyhovující z, která jsou řešením rovnice na $\mathbb{R}$.
         (2) Vytvoříme rovnici ve tvaru
             $$\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{dz}{dx} = f(x)$$
         (3) Převedeme dx na pravou stranu rovnice a rovnici zintegrujeme. Dostaneme
             $$\int \frac{dz}{g(z)} = \int f(x)dx$$
         (4) Funkce zintegrujeme a dostaneme rovnici ve tvaru
             $H(z) = F(x) + c$
         (5) Z rovnice vyjádříme y. Najdeme tedy inverzní funkci k H. Výsledná rovnice vypadá takto:
             $z(x) = H^{-1}(F(x) + c)$
         (6) Projdeme celý postup a určíme definiční obor funkce a integrační konstanty.
         (7) Pokusíme se rozšířit definiční obor přilepením nějakých konstantních řešení, která najdeme tak, že funkci $g(\alpha)$ ze zadání položíme identicky rovnu nule. Při lepení bychom měli ověřit, že slepovaná řešení v bodě lepení opravdu navazují. Měli bychom tedy ověřit rovnost limit ve větě 4. Lepení se provádí jen v bodech, kde $g(\alpha) \equiv 0$. Slepit můžeme jakoukoliv kombinaci řešení.

      iii) Nalezneme jedno řešení ve tvaru $z_0(x) = c(x)e^{A(x)}$ metodou variace konstant.
         (1) V řešení vypočítaném v ii) dosadíme z_0 za z.
         (2) Upravené řešení dosadíme do původní rovnice (ve tvaru $z'(x) = a(x)z + b(x)$) za z. Budeme tedy muset řešení ještě zderivovat.
         (3) Měly by se zkrátit všechny členy, kde se vyskytuje $c(x)$.
         (4) Vyjádříme $c'(x)$ jako funkci x.
         (5) Zintegrujeme $c'(x)$ a získáme tak $c(x)$
         (6) Funkci $c(x)$ dosadíme do rovnice získané v bodu (1). Dostaneme tak $z_0(x)$.
         (7) Obecné řešení vytvoříme tak, že do rovnice $z(x) = z_0(x) + c(x)e^{A(x)}$ dosadíme $z_0(x)$ z bodu (6), kde $c(x)e^{A(x)}$ je řešení homogenní rovnice vypočítané v bodě ii).
         (8) Projdeme celý postup a určíme definiční obor řešení a integračních konstant.

   e) Výslednou rovnici pro z dosadíme zpět do rovnice pro $y(x)$ vypočítané v bodě d).
   f) Projdeme celý postup a určíme definiční obor funkce a definiční obor integračních konstant. Mj. zkontrolujeme, na jakém oboru je výsledná funkce y diferencovatelná.

Příklad

Nalezněte řešení následující diferenciální rovnice: $xy^2y' = x^2 + y^2$.

1) $y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$

   $y' = \dfrac{1}{x}y + x \cdot y^{-2} \Rightarrow \ krok\ 2)$

2) $y'(x) = a(x)y + b(x)y^\alpha$ (Bernouliho rovnice)
   a) $\alpha = -2$

      $z(x) = y^3$
   b) $y(x) = \sqrt[3]{z} \qquad y'(x) = \frac{1}{3}(z)^{-\frac{2}{3}} \cdot z'$ $\qquad z \neq 0$
   c) $\frac{1}{3} \cdot z^{-\frac{2}{3}} \cdot z' = \frac{\sqrt[3]{z}}{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{z}^2} \quad /\cdot 3z^{\frac{2}{3}}$

      $z' = \frac{3}{x}z + 3x$ $\qquad x \neq 0$

---

   d) $z'(x) = a(x)z + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)
      i) $z' = \frac{3}{x}z$

---

      ii) $z'(x) = f(x)g(z)$ (separované proměnné)
         (1) Pro $g(z) \equiv 0$ je $z(x) \equiv 0$ řešením na $\mathbb{R}$
         (2) $\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{3}{x}$ $\qquad x \neq 0,\ z \neq 0$
         (3) $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{3}{x} dx$
         (4) $\ln|z| = 3\ln|x| + c \quad c \in \mathbb{R}$
         (5) $|z| = e^{3\ln|x|+c} \quad c \in \mathbb{R}$

             $|z| = \left(e^{\ln|x|}\right)^3 \cdot e^c \quad c \in \mathbb{R}$

             $|z| = x^3 \cdot c \quad c \in (0; \infty)$

             $z = cx^3$
         (6) $na\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
         (7) $na\ \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R} \quad (protože\ z \equiv 0\ je\ řešením)$

---

      iii) Nalezneme jedno řešení ve tvaru $z_0(x) = c(x)e^{A(x)}$ metodou variace konstant.
         (1) $z_0 = c(x)x^3$
         (2) $c'(x)x^3 + 3c(x)x^2 = \frac{3}{x}c(x)x^3 + 3x$ $\qquad x \neq 0$
         (3) $c'(x)x^3 = 3x$
         (4) $c'(x) = \frac{3}{x^2}$
         (5) $c(x) = -\frac{3}{x}$
         (6) $z_0 = -\frac{3}{x}x^3 = -3x^2$
         (7) $z(x) = -3x^2 + cx^3$
         (8) $na\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad c \in \mathbb{R}$

---

   e) $y(x) = \sqrt[3]{-3x^2 + cx^3}$
   f) $z \neq 0$

      $-3x^2 + cx^3 \neq 0$

      $x \neq 0 \ \ \& \ \ x \neq \dfrac{3}{c}$

      $na\ \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{c}\right\} \qquad c \in \mathbb{R}$ Na tomto oboru je $y(x)$ diferencovatelná

Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Formálně

Definice. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme *charakteristickým polynomem* rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Věta T 9 (FSŘ pro rovnici n-tého řadu s konstantními koeficienty)**.** *Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu násobnosti $s_1, \ldots, s_k$ (tedy $s_1 + \ldots + s_k = n$). Pak funkce*

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots,\ e^{\lambda_k x}, \ldots,\ x^{s_k-1}e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \text{ na } \mathbf{R}.$$

Věta T 11 (o speciální pravé straně pro rovnici n-tého řadu - bez důkazu)**.** *Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, nechť $P_n(x)$ je polynom n-tého stupně a $(\alpha + i\beta)$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k = 0$, $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$). Pak rovnice*

$$y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad (\text{ popřípadě } P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)$$

má na $\mathbf{R}$ řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^kQ_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^kR_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde Q_n a R_n jsou polynomy stupně n.

Postup výpočtu

1) Vypočteme rovnici ve formátu $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$
   a) Sestrojíme charakteristický polynom $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$
   b) Vypočteme kořeny polynomu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$
   c) Do F. S. přidáme členy
      i) Je-li kořen λ_i reálné číslo přidáme $e^{\lambda_i x}$
      ii) Je-li kořen λ_i komplexní číslo ve tvaru $n = \alpha + i\beta$ přidáme $e^{\alpha x}\cos\beta x$ a pro komplexně sdružený kořen $e^{\alpha x}\sin\beta x$
      iii) Je-li kořen λ_i s-násobný, pak přidáme $e^{\lambda_i x}$, $x\,e^{\lambda_i x}$, $x^2e^{\lambda_i x}$, … , $x^{s-1}e^{\lambda_i x}$
   d) Z F. S. stanovíme řešení $y(x) = c_1(člen\ z\ F.S.)$ + $c_2(člen\ z\ F.S)$ + …
   e) Máme-li v zadání počáteční podmínky v nějakém bodě $y^{(n)}(x) = z$, potom pomocí derivování $y(x) = \cdots$ a řešení lineárních rovnic dopočtem konstanty

   Poznámka: $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

2) V případě, že pravá strana původní rovnice není rovna nule, tak počítáme následovně
   a) Zkusíme, jestli pravá strana vyhovuje větě 11, pak pokračujeme na bod d)

b) V případě, že pravá strana jako celek větě nevyhovuje, zkusíme pravou stranu rozdělit na jednotlivé členy, u nichž vyzkoušíme jako v bodě a).
derivování $y_0(x) = A + B \implies y_1(x) = A$ a $y_2(x) = A$
c) Ani jeden případ nebyl splněn a pokračujeme tedy na bod e)
d) Počítáme dle věty 11
  i) Určíme n – stupeň polynomu, $\alpha, \beta, k = násobnost\ kořenu\ \alpha + i\,\beta$
  ii) Za Q_n, R_n dosadíme $ax^2 + bx + c$ dle stupně polynomu
  iii) Derivujeme rovnici do maximálního stupně derivace původní rovnice
  iv) Určíme polynomy Q_n, R_n
  v) Vypočítáme $y_i(x) = \dots$
  vi) Výsledek $y(x) = y(x)\ z\ bodu\ 1) + y_i(x)$
  vii) Konec příkladu
e) Počítáme pomocí variace konstant $y(x) = c_1(x)(člen\ z\ F.S.)$ + $c_2(x)(člen\ z\ F.S)$ + …
  i) Vypočítáme $y'(x)$
  ii) Přidáme rovnici ve tvaru $c_1{}'(x)(cosi)$ + $c_2{}'(x)(cosi)$ = 0
  iii) Derivujeme rovnici do maximálního stupně derivace původní rovnice
  iv) Po zkrácení dopočítáme derivace konstant a konstanty
  v) Určíme výslednou rovnici $y_i(x)$
  vi) Výsledek $y(x) = y(x)\ z\ bodu\ 1) + y_i(x)$
  vii) Konec příkladu

Příklad 1)

$\underline{y'' - 3y' + 2y = 0}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$c_1 + c_2 = 2$

$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ na\ \mathbb{R}$

$c_1 + 2c_2 = 3$

$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$

$\underline{\underline{y(x) = e^x + e^{2x}}}$

Příklad 2)d)

$\underline{y'' + 3y' + 2y = e^x - 2x}$

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$
   $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$
   $\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ na\ \mathbb{R}$
2) $y_1{}'' - 3y_1{}' + 2y_1 = e^x$
   $y_2{}'' - 3y_2{}' + 2y_2 = -2x$
   $y_0 = y_1 + y_2$
   $y_0{}'' - 3y_0{}' + 2y_0 = e^x - 2x$
   $y_1\colon P_n \equiv 1, n = 0, \alpha = 1, \beta = 0, \alpha + i\,\beta = 1 \rightarrow \mathrm{k} = 1$
   $y_1 = axe^x$
   $y_1' = ae^x + axe^x$

$y_1'' = 2ae^x + axe^x$
$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 2ae^x + axe^x - 3ae^x - 3axe^x + 2axe^x = e^x$
$-ae^x = e^x \rightarrow a = -1$
$\underline{y_1 = -xe^x}$
$y_2: n = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \alpha + i\,\beta = 0 \rightarrow \mathrm{k} = 0$
$y_2 = a + bx$
$y_2' = b$
$y_2'' = 0$
$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = -3b + 2a + 2bx = -2x \quad \rightarrow \quad -3b + 2a = 0 \quad \& \quad 2b = b$
$b = -1, a = \frac{3}{2}$
$\underline{y_2 = -x - \frac{3}{2}}$

$\underline{\underline{y(x) = -xe^x - x - \frac{3}{2} + c_1e^x + c_2e^{2x}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\, na\, \mathbb{R}$

Příklad 2)e)

$\underline{y'' + y = \frac{1}{\sin x}}$

1) $y'' + y = 0$
$\lambda^2 + \lambda = 0 \qquad \lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$
$\underline{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\, na\, \mathbb{R}$
2) $y_0(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x\, y_0'(x) = c_1' \cos x - c_1 \sin x + c_2' \sin x + c_2 \cos x$
trik: $c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$
$y_0''(x) = -c_1' \sin x - c_1 \cos x + c_2' \cos x - c_2 \sin x$
$\frac{1}{\sin x} = y_0''^{(x)} + y_0(x) = -c_1' \sin x + c_2' \cos x \,/\, \sin x$
$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \,/ - \cos x$
$1 = c_1'(-\sin^2 x - \cos^2 x) = -c_1' \rightarrow \quad c_1 = -x$
$c_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow \quad c_2 = \log|\sin x|$
$\underline{y_0(x) = -x \cos x + \log|\sin x| \sin x}$

$\underline{\underline{y(x) = -x \cos x + \log|\sin x| \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\, na\, (k\pi, (k+1)\pi)\; k \in \mathbb{Z}$