Přednáška 9

- lineární DR n-tého řádu bez pravé strany
- lineární DR n-tého řádu s pravou stranou
- struktura množiny všech řešení lineární DR
- metoda variace konstant
- lineární DR s konstantními koeficienty a speciálním tvarem pravé strany

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (1)

Definice (Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu):
Lineární diferenciální rovnice (LDR) n-tého řádu je rovnice tvaru

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

kde $y = y(x)$, pravá strana $b(x)$ a koeficienty $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu $I = (a, b)$, $a < b$, $a, \in \boldsymbol{R}^*$ a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$.

Úmluva: Pro zkrácení zápisu budeme používat symbol (operátor)

$$L_n(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

Pak má LDR n-tého řádu tvar

$$L_n(y) = b(x).$$

Definice (Homogenní/Nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu):
Rovnici

$$L_n(y) = b(x),$$

kde pravá strana $b(x) \neq 0$ nazýváme nehomogenní LDR (LDR s pravou stranou).
Rovnici

$$L_n(y) = 0,$$

kde pravá strana $b(x) = 0$ nazýváme homogenní LDR (LDR bez pravé strany).
Homogenní LDR, která vznikne z původní nehomogenní LDR anulací její pravé strany, nazýváme přiřazenou homogenní LDR k nehomogenní LDR.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2)

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení LDR n-tého řádu):
Nechť jsou funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x), b(x)$ spojité na interavlu I, $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \boldsymbol{R}$ a nechť $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Potom pro libovolné $[y_0, \ldots, y_{n-1}] \in \boldsymbol{R}^n$ existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice

$$L_n(y) = b(x),$$

které vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(x_0) = y_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

a které je definováno na intevalu I.

Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (1)

Věta (Linearita operátoru $L(\cdot)$):
Operátor $L : C^n(I) \to C(I)$ tvaru

$$L_n(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

definuje lineární zobrazení.

Symbolem V_H budeme značit množinu všech řešení homogenní LDR, neboli množinu všech funkcí z prostoru $C^n(I)$, které zobrazení L zobrazuje na nulovou funkci (V_H je jádrem zobrazení L).

Věta (Dimenze množiny V_H):
Množina V_H je lineárním podprostorem prostoru $C^n(I)$ a má konečnou dimenzi rovnu řádu příslušné homogenní LDR, tj.

$$\dim V_H = n.$$

Definice (Fundamentální systém):
Bázi prostoru V_H nazveme fundamentálním systémem (soustavou) řešení homogenní LDR.

Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2)

Nechť

$$y_1(x), \quad , \dots, y_n(x)$$

je fundamentální systém řešení homogenní LDR. Pak každé řešení homogenní LDR lze zapsat jako lineární kombinace funkcí fundamentálního systému ve tvaru

$$y_H(x) = y(x, \mathbf{C}) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

kde $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in \boldsymbol{R}^n$

Definice (Obecné řešení homogenní LDR):
Nechť funkce $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^n(I)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní LDR. Výraz

$$y_H(x) = y(x, \mathbf{C}) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

kde $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in \boldsymbol{R}^n$, nazýváme obecným řešením homgenní LDR a platí

$$V_H = \left\{ y(x, \mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x);\ \mathbf{C} \in \boldsymbol{R}^n \right\}.$$

Ke znalosti obecného řešení homogenní LDR stačí určit n lineárně nezávislých řešení této rovnice. V případě zcela obecných koeficientů $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ neznáme obecnou metodu, která by nám umožnila stanovit tato lineárně nezávislá řešení.

Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (3)

Definice (Wronského determinant):
Nechť funkce $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$. Potom funkce $W(y_1, \dots, y_2)$ definovaná na intervalu I následovně

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in I.$$

se nazývá Wronského detrminant (wronskián).

K určení lineární závislosti či nezávislosti daných řešení homogenní LDR n-tého řádu využijeme vztahů z lineární algebry pro Wronského determinant.

Věta (Lineární závislost/nezávislost řešení):
Nechť $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení homogenní LDR n-tého řádu definovaná na intervalu I. Potom jejich Wronského determinant je buď všude roven nule nebo existuje bod $x_0 \in I$ takový, že $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$. V prvním případě jsou funkce lineárně závislé, v druhém nezávislé.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (1)

Definice (Struktura množiny všech řešení nehomogenní LDR):
Obecné řešení y_N nehomogenní LDR $L(y) = b(x)$ je tvaru

$$y_N = y_N(x, \mathbf{C}) = y_H(x, \mathbf{C}) + y_p(x), \quad \mathbf{C} \in \boldsymbol{R}^n$$

kde $y_H(x, C)$ je řešení přiřazené homogenní LDR a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení nehomogenní LDR $L(y) = b(x)$. Označíme-li symbolem V_N množinu všech řešení nehomogenní LDR, lze psát

$$V_N = \{y_H(x, \mathbf{C}) + y_p(x);\ \mathbf{C} \in \boldsymbol{R}^n\} = \{y(x) + y_p(x);\ y(x) \in V_H\} = V_H + y_p(x)$$

Při hledání obecného řešení nehomogenní LDR postupujeme ve dvou krocích. Nejprve určíme obecné řešení přiřazené homogenní LDR (lze ve speciálních případech) a pak určíme jedno partikulární řešení nehomogenní LDR (např. metodou variace konstant, metodou odhadu pro speciální pravou stranu). Nakonec obě řešení sečteme.

LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty (1)

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s obecnými koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

Jestliže funkce $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nezávisí na proměnné x, tj.

$$a_0(x) = a_0, \quad a_1(x) = a_1, \quad \ldots, \quad a_n(x) = a_n, \quad \text{kde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$$

má LDR konstantní koeficienty.

Definice (LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty):
Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_ny = b(x),$$

kde pravá strana $b(x)$ je spojitá funkce na nějakém intervalu $I = (a, b)$, $a < b$, $a, \in \boldsymbol{R}^*$, $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$ a $y = y(x)$ značí řešení této rovnice.

LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty je speciálním případem LDR n-tého řádu, tzn. všechna tvrzení platná pro LDR n-tého řádu s obecnými koeficienty se přenáší na LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty.

LDR *n*-tého řádu s konstatními koeficienty (2)

Definice (Charakteristický polynom):
Nechť $L_n(y) = 0$ je homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \dots, n$ a $a_0 \neq 0$. Polynom

$$\chi_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

nazýváme charakteristickým polynomem homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty. Algebraickou rovnici

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

nazýváme charakteristickou rovnicí homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty.

Nechť $L_n(y) = 0$ je homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty. Jestliže předpokládáme řešení ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

pak platí

$$\begin{aligned} L_n(y) = L_n(e^{\lambda x}) &= a_0(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(e^{\lambda x})' + a_n e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n). \end{aligned}$$

Tedy

$$L_n(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Z této ekvivalence vyplývá, že funkce $y(x) = e^{\lambda x}$ je řešením homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty $L_n(y) = 0$ práve když koeficient $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořenem charakteristického polynomu této rovnice.

LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty (3)

Pokud má charakteristický polynom $\chi_n(x)$ právě n navzájem různých (obecně komplexních) kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pak můžeme snadno sestavit n lineárně nezávislých řešení, tj. fundamentální systém:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{n-1} x}, e^{\lambda_n x}$$

Má-li charakteristický polynom vícenásobné kořeny je situace složitější.

Věta (Konstrukce fundamentálního systému):
Nechť charakteristický polynom $\chi_n(x)$ LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty má právě k, $k \le n$, navzájem různých (komplexních) kořenů s násobnostmi $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tj. platí

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = a_0(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k},$$

kde $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ a $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Pak fundamentální systém je tvořen níže uvedenými funkcemi

$$\begin{array}{ccccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2 e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2 e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\
\vdots, & \vdots, & \vdots, & \ddots, & \vdots, \\
e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & x^2 e^{\lambda_k x}, & \ldots, & x^{n_k-1}e^{\lambda_k x}.
\end{array}$$

Funkce tvaru $e^{\lambda x}P(x)$, kde $P(x)$ je polynom, nazýváme kvazipolynomy.

LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty (4)

Má-li charakteristický polynom $\chi_n(x)$ také komplexní kořeny, získáme obecně ve fundamentálním systému funkce komplexní proměnné, což není žádoucí v případě DR s reálnými funkcemi.

Definice (Eulerův vzorec):
Nechť $\phi \in \mathbb{R}$, pak platí vztah

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

který nazýváme Eulerův vzorec.

Z vlastností polynomů s reálnými koeficienty je známo, že pokud mají komplexní kořeny, tak se vždy vyskytují v párech jako komplexně sružená čísla a mají také stejnou násobnost.

Nechť $\lambda_1 = a + ib$ a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - ib$ jsou komplexně sdružené kořeny charakteristického polynomu $\chi_n(x)$, bez újmy na obecnosti jednoduché násobnosti. Užitím Eulerova vzorce získáme

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) \\ v(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)), \end{aligned}$$

dvě lineárně nezávislá řešení LDR jako komplexní funkce. Provedeme-li však s funkcemi $u(x), v(x)$ následující lineární kombinace

$$\frac{1}{2}(u(x) + v(x)) = e^{ax}\cos(bx), \quad \frac{1}{2i}(u(x) - v(x)) = e^{ax}\sin(bx),$$

získáme tak dvě lineárně nezávislá řešení LDR jako reálné funkce.

LDR *n*-tého řádu s konstatními koeficienty (5)

Věta (Reálný fundamentální systém):
Je-li komplexní funkce

$$y(x) = p(x) + iq(x), \quad p(x), q(x) : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$$

řešením homogenní LDR n-tého řádu s konstatními koeficienty. Pak reálné funkce $p(x), q(x)$ jsou rovněž řešením této LDR.
Speciálně, je-li $a + ib$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ kořenem charakteristického polynomu $\chi_n(x)$ o násobnosti m, pak funkce

$$x^0 Re(e^{(a+ib)x}) = e^{ax}\cos(bx), \dots, x^{m-1} Re(e^{(a+ib)x}) = x^{m-1} e^{ax}\cos(bx)$$
$$x^0 Im(e^{(a+ib)x}) = e^{ax}\sin(bx), \dots, x^{m-1} Im(e^{(a+ib)x}) = x^{m-1} e^{ax}\sin(bx)$$

jsou reálným řešením této LDR.

Změníme-li v původním fundamentálním systému řádky příslušné komplexním číslům dle předchozí věty, získáme tak zcela reálný fundamentální systém.

Příklad: *Určete fundamentální systémy pro následující LDR*

$$a)\ y'' - 2y' - 3y = 0$$
$$b)\ y'' - 2y' + y = 0$$
$$c)\ y'' + y = 0$$

Metoda variace konstant (1)

Uvažujme nehomogenní LDR n-tého řádu s obecnými koeficienty $L(y) = b(x)$. Metodu variace konstant můžeme použít jen tehdy, známe-li obecné řešení přiřazené homogenní LDR, resp. její fundamentální systém.

Nechť funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x) \in C^n(I)$ tvoří fundamentální systém řešení přiřazené homogenní LDR, pak obecné řešení homgenní LDR je tvaru

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \boldsymbol{R}.$$

Partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní LDR hledáme metodou variance konstant, tj. ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x),$$

kde $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ jsou hledané neznámé funkce, jejichž první derivace určíme jako řešení soustavy rovnic (s maticí z Wronského determinantu)

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_1'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_1'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1''(x) + C_1'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) &= 0,\\
\vdots \quad + \quad \vdots \quad + \ddots + \quad \vdots \quad &= 0,\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_1'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_1'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}
\end{aligned}$$

a následnou integrací obdržíme $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, které nakonec dosadíme do vztahu pro partikulární řešení $y_p(x)$.

Metoda odhadu pro speciální pravou stranu (1)

Uvažujme nehomogenní LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty $L(y) = b(x)$, kde funkce na pravé straně je speciálního typu

$$b(x) = e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \boldsymbol{R},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou dané polynomy.

V tomto případě můžeme použít při hledání partikulárního řešení $y_p(x)$ metodu odhadu pro speciální pravou stranu, kdy pokládáme

$$y_p(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \boldsymbol{R},\ k \in \boldsymbol{N}_0$$

kde $R(x), S(x)$ jsou polynomy s dosud neurčenými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů $P(x), Q(x)$.

Hledané partikulárního řešení $y_p(x)$ má formálně stejný tvar jako pravá strana $b(x)$ až na činitel x^k. Čísla $a, b \in \boldsymbol{R}$ jsou dána pravou stranou, polynomy $R(x), S(x)$ učíme metodou neučitých koefcientů (dosadíme-li je do dané LDR) a číslo $k \in \boldsymbol{N}_0$ určíme podle násobnosti kořene $\alpha = a + ib$ v charakteristické rovnici $\chi_n(\lambda) = 0$ příslušné k přiřazené homogenní LDR. Tedy:

- $k = 0$, není-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$,
- $k =$ násobnost kořene α, je-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$.

Příklad: *Určete obecná řešení pro následující nehomogenní LDR*

$a)$ $y'' - 2y' - 3y = -3x + 1$ $\quad$ $b)$ $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$

$c)$ $y'' + y = 5e^{x}\sin x$ $\quad$ $d)$ $y'' + y = 2\cos x$