Provozně ekonomická fakulta

Teoretická informatika
Tomáš Foltýnek
foltynek@pef.mendelu.cz

Predikátová logika

Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně

Opakování z minulé přednášky

- Z čeho se skládá jazyk výrokové logiky?
- Jaká jsou schémata pro axiomy VL?
- Formulujte odvozovací pravidlo modus ponens
- Jaký je rozdíl mezi syntaktickou a sémantickou dokazatelností ve VL?
- Co říká věta o dedukci?
- Co říká věta o neutrální formuli?

Jazyk predikátové logiky

- Jazyk predikátové logiky se skládá z:
  - proměnných
  - relačních symbolů
  - funkčních symbolů
  - konstant
  - predikátů
  - kvantifikátorů
  - logických spojek
  - závorek

Proměnné

- V matematické logici pracujeme s různými **reálnými objekty**
  - čísla
  - body prostoru
  - prvky algebraických struktur
- Pro označení libovolného prvku z daného oboru používáme **proměnné**
- Jedná se o klasické chápání proměnných z nižší matematiky

Symboly pro relace

- Výroková logika měla atomické v.f.
- Predikátová logika má **symboly pro relace**
- Každý symbol pro relace má přiřazenu **aritu** (četnost)
  - Arita je vždy nezáporná, může být i 0
- Symboly pro relace lze rozdělit na
  - **funkční**
    - vyjadřují **operace** s objekty daného oboru
    - u čísel např. sčítání, násobení apod.
  - **predikátové** (vztahy a vlastnosti)

Konstanty

- Některé speciální prvky v dané oblasti lze označit za **významné**
  - např. neutrální prvek grupy
  - čísla 0, 1, apod.
- Pro jejich označení užíváme zvláštní symboly – **konstanty**
- Konstanta je **nulární funkční symbol**

Predikáty

- Matematika zkoumá **vlastnosti** objektů a **vztahy** mezi nimi
- V daném oboru pak tyto vlastnosti a vztahy můžeme nazvat **predikáty**
- Příklady
  - vlastnost – „být záporným číslem”
    - vlastnost je unární predikát
  - vztah – „být menší než”
    - vztah je binární predikát, případně predikát vyšší arity
- Označují se **predikátovými symboly**

Kvantifikátory

- **Existenční kvantifikátor $\exists$**
  vyjadřuje existenci požadovaného objektu v daném oboru
- **Univerzální kvantifikátor $\forall$**
  vyjadřuje platnost pro všechny objekty z daného oboru

Termy

- **Termy** v PL definujeme induktivně:
  - Každá proměnná je term
  - Je-li R funkční symbol arity n a jsou-li $t_1, \dots, t_n$ termy, pak také $R(t_1, \dots, t_n)$ je term
  - Nic jiného není term
- Tedy též každá konstanta je term

Atomické formule

- **Atomické formule** predikátové logiky jsou výrazy jazyka PL nad termy:
  - rovnosti $t_i = t_j$
  - relace $R(t_1, \ldots, t_n)$
- R je predikátový symbol arity n
- Rovnost lze chápat jako speciální případ binárního predikátového symbolu

Formule

- **Formule** predikátové logiky:
  - Každá atomická formule je formule
  - Jsou-li φ a ψ formule, pak $\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ jsou formule
  - Je-li x proměnná a φ formule, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou formule
  - Nic jiného není formule

Vázaný a volný výskyt proměnné

- Výskyt proměnné x je **vázaný**, nachází-li se v nějaké podformuli φ tvaru $(\forall x)\varphi$ nebo $(\exists x)\varphi$
- V tomto případě se podformule φ nazývá **obor (platnosti) kvantifikátoru**
- Pokud není výskyt proměnné vázaný, jedná se o **volný výskyt** proměnné
- Proměnná x se nazývá **volnou proměnnou**, existuje-li
  její volný výskyt ve formuli φ
- Formule bez volných proměnných se nazývá **uzavřená formule**

Realizace jazyka PL

- **Realizací jazyka** rozumíme algebraickou strukturu složenou z
  - neprázdné množiny M zvané univerzum
  - pro každý funkční symbol f četnosti n je dáno **zobrazení** $f\colon M^n \to M$
  - pro každý predikátový symbol R četnostni n kromě rovnosti je dána **relace** $R \subseteq M^n$
  - relace = představuje rovnost objektů z M

Ohodnocení proměnných

- Pro zkoumání pravdivosti musíme volným proměnným přiřadit prvky množiny M
- **Ohodnocením proměnných** nazveme zobrazení z množiny e všech proměnných do univerza M dané realizace jazyka PL
- Ohodnocení proměnné x prvkem m v rámci všech ohodnocení proměnných e značíme
  - $e(x) = m$
  - $e(x/m)$

Hodnota termu

- **Hodnota termu** t v realizaci M při daném ohodnocení e se označuje $t[e]$ a definuje se indukcí následovně
  - je-li t proměnná, potom $t[e]$ je $e(x)$
  - je-li t term tvaru $f(t_1,\dots,t_n)$, kde f je funkční symbol četnosti n a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak $t[e]$ je $f(t_1[e], \dots, t_n[e])$
- Hodnota termu je závislá pouze na ohodnocení proměnných

Pravdivost formule I.

- **Pravdivost formule** φ v realizaci M při ohodnocení e ($M \models \varphi[e]$)
  - je-li φ at.f. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, kde R je predikátový symbol arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak φ je pravdivá právě tehdy, když $(t_1[e], \ldots, t_n[e]) \in R$
  - je-li φ at.f. tvaru $\underline{t_1 = t_2}$, *kde* t_1 a t_2 jsou termy, pak φ je pravdivá, právě když $t_1[e]$ je tentýž prvek jako $t_2[e]$

Pravdivost formule II.

- je-li φ tvaru $\neg\psi$, kde ψ je formule jazyka, pak φ je pravdivá, právě když ψ není pravdivá f., analogicky ostatní spojky
- je-li φ tvaru $(\forall x)\psi$, kde ψ je f. jazyka, pak φ je pravdivá právě když pro každý prvek $m \in M$ je $\psi[e(x/m)]$ pravdivé
- je-li φ tvaru $(\exists x)\psi$, kde ψ je f. jazyka, pak φ je pravdivá právě když existuje $m \in M$ tak, že $\psi[e(x/m)]$ pravdivé

Pravdivost formule III.

- **Pravdivost uzavřené formule** v dané realizaci nezávisí na ohodnocení proměnných
- Pravdivost formule závisí jen na ohodnocení **volných proměnných**
- Formule φ jazyka L je **logicky platná** (též **tautologie**), jestliže je platná ve všech realizacích
  - Nelze rozhodnout konečným algoritmem, zda zadaná formule je logicky platná

Logická ekvivalence

- Formule φ a ψ jsou **logicky ekvivalentní**, pokud v lib. realizaci M jazyka L při libovolném ohodnocení e je $M \models \varphi[e] \Leftrightarrow M \models \psi[e]$.
- **Příklady** logicky ekvivalentních formulí
  - $(\exists x)\varphi$ $\quad$ $\neg(\forall x(\neg\varphi))$
  - $(\forall x)\varphi$ $\quad$ $\neg(\exists x(\neg\varphi))$
  - $(\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi$ $\quad$ $(\forall x)(\varphi \wedge \psi)$
  - $(\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi$ $\quad$ $(\exists x)(\varphi \vee \psi)$
- **Každá formule** jazyka L je logicky ekvivalentní nějaké formuli, v níž se nevyskytuje $\exists$ (totéž lze tvrdit i o $\forall$).

Omezení počtu spojek

- Každá formule jazyka predikátové logiky je **logicky ekvivalentní** formuli vytvořené z atomických formulí jen pomocí logických spojek $\neg$, $\Rightarrow$ a kvantifikátoru $\forall$.
- Lze aplikovat naše vědomosti z výrokové logiky (Sheffer, Pierce) a rozšířit je jen o jeden kvantifikátor.

Substituce termů

- Term t je **substituovatelný** za proměnnou x do formule φ, jestliže žádný volný výskyt proměnné x ve formuli φ neleží v oboru některého kvantifikátoru $\forall y$ nebo $\exists y$, kde y je proměnná obsažená v termu t.
- Pak značíme $\varphi_x[t]$ formuli, která vznikne z φ **nahrazením** každého volného výskytu x termem t.

Splnitelná množina formulí

- Směřujeme k budování deduktivní soustavy predikátové logiky
- Množina formulí F se nazývá **splnitelná** právě tehdy, když existuje taková realizace jazyka PL, v níž jsou všechny formule pravdivé
- Tato realizace se nazývá **model množiny** formulí
- Jestliže k dané množině formulí F neexistuje model, pak se množina F nazývá **nesplnitelná množina formulí**.

Příklad splnitelné množiny formulí

- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, $P(a)$, $(\exists x)\neg Q(x)$
- Příklad modelu uvedené množiny formulí
  - Univerzum jsou celá čísla
  - P(x) značí „x je dělitelné deseti“
  - Q(x) značí „x je sudé“
  - a = 10
- Není to tautologie, neboť realizace, v níž by Q(x) značilo dělitelnost třemi, není modelem uvedené množiny formulí

Existenční a univerzální uzávěr predikátové formule

- Nechť α je otevřená formule PL a x_1, x_2, … x_n jsou všechny její volné proměnné. Pak formuli
  - $(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\alpha$ nazveme **existenční uzávěr** formule α
  - $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\alpha$ nazveme **univerzální uzávěr** formule α
- Vlastnosti uzávěrů:
  - Jsou to uzavřené formule
  - Formule je splnitelná, je-li splnitelný její $\exists$ uzávěr
  - Formule je kontradikcí, není-li splnitelný její $\exists$ uzávěr
  - Formule je tautologií, je-li její $\forall$ uzávěr tautologií.

Sémantický důsledek

- Řekneme, že formule α je **sémantický důsledek** množiny formulí S, pokud každý model množiny formulí S je též modelem formule α
  - Tedy pokud v každé realizaci, v níž jsou pravdivé všechny formule z S, je pravdivá i formule α
- Sémantický důsledek se též nazývá **tautologický důsledek**, nebo říkáme, že formule α **sémanticky (tautologicky) vyplývá** z množiny formulí S.
- Sémantický důsledek značíme $S \models \alpha$

Vlastnosti sémantických důsledků

- Jestliže $\alpha \in S$, pak $S \models \alpha$
- Je-li $R \subseteq S$ a $R \models \alpha$, pak i $S \models \alpha$
  - Doplněním předpokladů zůstávají dosud odvozená tvrzení platná
- Tautologie sémanticky vyplývá z každé množiny formulí
  - i prázdné
- Z nesplnitelné množiny formulí sémanticky vyplývá libovolná formule
- Dvě formule jsou logicky ekvivalentní $\Leftrightarrow$ mají stejné modely

Deduktivní soustava PL

- Analogie deduktivní soustavy výrokové logiky
- Problém správnosti úsudku
  - Tedy problém rozhodnout, zda z dané množiny předpokladů sémanticky vyplývá daný závěr
- **Úsudek** je formálně definován analogicky jako ve výrokové logice
  - Místo výrokových formulí používáme predikátové formule
    - Výrokové formule jsou jejich podmnožinou

Odvozovací pravidla PL

- Pravidlo odloučení (modus ponens)
  - $A, (A \Rightarrow B) \vdash B$
- Pravidlo generalizace
  - $P \vdash (\forall x)P(x)$
- Pravidlo specializace
  - $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
- Princip nepřímého důkazu
  - $A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$
- Přidání existenčního kvantifikátoru
  - $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

Příklady úsudků v PL I.

- Aristotelův sylogismus
  - Každý člověk je smrtelný
  - Aristoteles je člověk
  - Závěr: Aristoteles je smrtelný
- Ověření správnosti
  - Č(x) = x je člověk, S(x) = x je smrtelný, a = Aristoteles
  - $(\forall x)(Č(x) \Rightarrow S(x)),\ Č(a) \vdash S(a)$
  - Důkaz použitím pravidla specializace a pravidla modus ponens

Příklady úsudků v PL II.

- Předpoklady:
  - Kdo lže, ten krade.
  - Kdo krade, ten zabíjí.
  - Kdo zabíjí, ten skončí na šibenici.
  - Pepíček neskončil na šibenici
- Závěr:
  - Pepíček je pravdomluvný
- Formalizace:
  - $(\forall x)(L(x) \Rightarrow K(x)), (\forall x)(K(x) \Rightarrow Z(x)), (\forall x)(Z(x) \Rightarrow Š(x)), \neg Š(p) \vdash \neg L(p)$
  - Důkaz použitím pravidla specializace, obměn implikací, tranzitivity implikace a pravidla modus ponens

Příklady úsudků v PL III.

- Předpoklady
  - Jestliže nikdo nevykradl banku, všichni jsou chudí.
  - Viktor je bohatý
- Závěr
  - Viktor vykradl banku
- Formalizace
  - $(\forall x)\neg KB(x) \Rightarrow (\forall y)CH(y)), \neg CH(v) \models KB(v)$
  - Obměna implikace: $(\exists y)\neg CH(y) \Rightarrow (\exists x)KB(x)$
    - Jestliže existuje někdo, kdo není chudý, pak musí existovat někdo, kdo vykradl banku
  - Z ničeho však neplyne, že ten, kdo vykradl banku, je tentýž člověk, jako ten, který není chudý.

Axiomatika PL

- **Abeceda** – množina symbolů jazyka predikátové logiky (definováno dříve)
- **Formule** – definujeme analogicky jako již výše pomocí formulé PL
- **Jazyk** – tvořen abecedou a formulemi
- **Axiomy** – je jich nekonečně mnoho, lze je však zadat pomocí základních schémat axiomů predikátové logiky

Schémata pro axiomy PL I.

- Platnost schémat z výrokové logiky

  (A1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

  (A2) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \eta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \Rightarrow \eta))$

  (A3) $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
- Nové **schéma axiomu kvantifikátoru**

  (A4) $(\forall x(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x\psi))$
- Nové **schéma axiomu substituce**

  (A5) $(\forall x\varphi) \Rightarrow (\varphi_x[t])$

Schémata pro axiomy PL II.

- Nové **schéma axiomu rovnosti**

  (A6) $x = x$ pro každou proměnnou x
- Na základě axiomu rovnosti lze rozšířit rovnost jako **axiom na rovnosti funkčních a predikátových symbolů** s proměnnými. Jedná se o vyjádření

  $$(x_1 = y_1 \Rightarrow(\dots \Rightarrow(x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \dots))$$

Odvozovací pravidla

- **Pravidlo MP (modus ponens)** známe z výrokové logiky:
- „Z formulí φ, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ se odvodí ψ"

- Nové **pravidlo GP (generalizace)**
- „Pro libovolnou proměnnou x z formule φ se odvodí formule $(\forall x)\varphi$"

Dokazování v PL

- Chová se **stejně jako ve VL**
- Opět je to **posloupnost formulí**, které jsou buď axiomy nebo závěry užití obou pravidel
- Poslední pravidlo je dokazovaná formule
- Můžeme použít **teorie**, o které rozšíříme axiomy (předpoklady)