MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Párování v grafech

TEORIE GRAFŮ

Brno 2009 Jana Vítečková

Příklad 1

Na mezinárodní setkání přijelo 13 vyslanců z různých zemí, z nich každý ovládal jeden až čtyři světové jazyky. Kolik dvojic vyslanců si může zároveň navzájem pohovořit bez pomoci překladatele?

Tento problém je možno řešit nalezením maximálního párování v grafu, jehož vrcholy jsou vyslanci a jehož hrany spojují vyslance, kteří ovládají stejný jazyk.

Základní pojmy

Definice 1. *Párování* v grafu G je taková množina hran $P \subseteqq E(G)$, že žádné dvě hrany z množiny P nemají společný vrchol. Je zřejmé, že je-li P párování a $P' \subseteqq P$, pak P' je také párování. Dokonce i prázdná množina je párováním. O vrcholech, které jsou incidentní s některou z hran párování P, říkáme, že jsou párováním P *nasyceny* nebo též *pokryty.* O ostatních vrcholech říkáme, že jsou v párování P volné. Párování, které nasycuje všechny vrcholy grafu, nazýváme *perfektním párováním.*

Definice 2. Buď dán graf G a v něm párování P. *Střídavá cesta* vzhledem k párování P je taková neorientovaná cesta, že její hrany střídavě leží v P a neleží v P a je-li krajní vrchol cesty nasycen v párování P, pak hrana, která jej nasycuje, je částí cesty. *Střídavá kružnice* vzhledem k párování P je kružnice, jejíž hrany střídavě leží a neleží v párování P. Střídavá kružnice má vždy sudý počet hran.

- *Maximální párování* grafu je párování s maximálním možným počtem hran. Graf může mít mnoho různých maximálních párování.

Věta 1. *Párování P v grafu G je maximální právě tehdy, když v grafu G vzhledem k párování P neexistuje střídavá cesta spojující dva volné vrcholy.*

Rychlý algoritmus pro maximální párování

Jde o algoritmus pro hledání střídavé cesty, jejíž krajní vrcholy jsou volné v párování P. Začínáme v nějakém volném vrcholu r, který nazveme *kořenem*, a vytváříme tzv. *střídavý strom*, který má tu vlastnost, že každá cesta v tomto stromě, která začíná v r, je střídavou cestou. Strom vytváříme pomocí značkování vrcholů, přičemž používáme dva druhy značek: vrcholy stromu značkujeme střídavě jako *vnější* a *vnitřní*, přičemž kořen r je vnější.

- Jestliže najdeme hranu, která spojuje vnější vrchol s nějakým volným vrcholem různým od r, máme střídavou cestu s volnými krajními vrcholy a můžeme zvětšit párování.

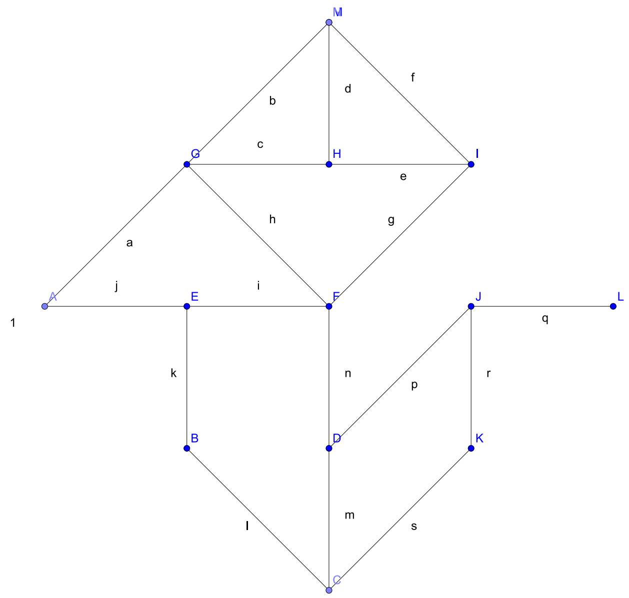
- Jestliže najdeme hranu, která spojuje dva vnější vrcholy (a která tedy neleží v párování), našli jsme kružnici liché délky, která bývá nazývána *květem*. Květ kazí vlastnost střídavého stromu, totiž že cesta začínající v r je střídavou cestou. Proto všechny vrcholy květu nahradíme jediným vrcholem a hrany, které vedly z vnějšku do květu, vedeme do tohoto vrcholu. Tato operace bývá nazývána *uříznutím květu*. Dále pokračujeme s upraveným grafem a dále se snažíme střídavý strom rozšířit.

- Jestliže střídavý strom nelze dále rozšířit a nenastává žádný z předchozích případů, tj. když z vnějšších vrcholů vedou hrany pouze do vnitřních vrcholů, odstraníme z grafu celý strom a všechny hrany s ním incidentní. Lze totiž dokázat, že část párování, která ležela ve stromě, je částí některého maximálního párování. To znamená, že vynechanou částí grafu se již není třeba dále zabývat.

Tento postup opakujeme, dokud buď nezredukujeme graf na prázdný (pak stávající párování je již maximální), nebo dokud nenalezneme střídavou cestu s volnými krajními vrcholy. V tomto druhém případě lze stávající párování zvětšit. Jestliže však střídavá cesta prochází přes vrchol, který vznikl uříznutím květu, musíme nejprve květ obnovit a najít v něm chybějící část střídavé cesty. To se může i několikrát opakovat, neboť uříznutý květ mohl být součástí dalšího květu atd.

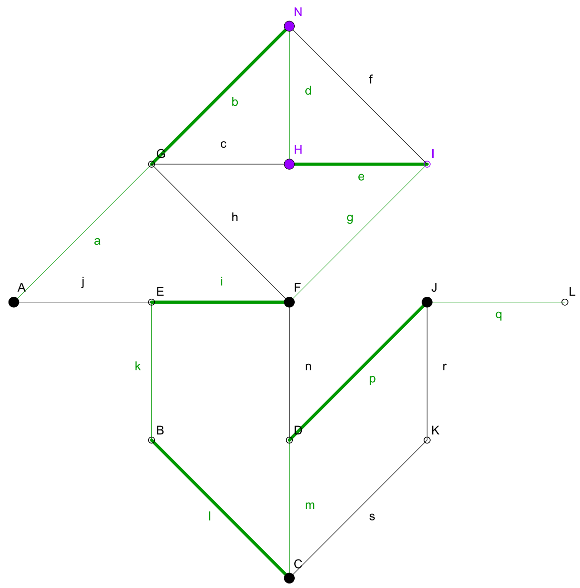
Řešení

Graf zadaného příkladu je znázorněn na obrázku 1.



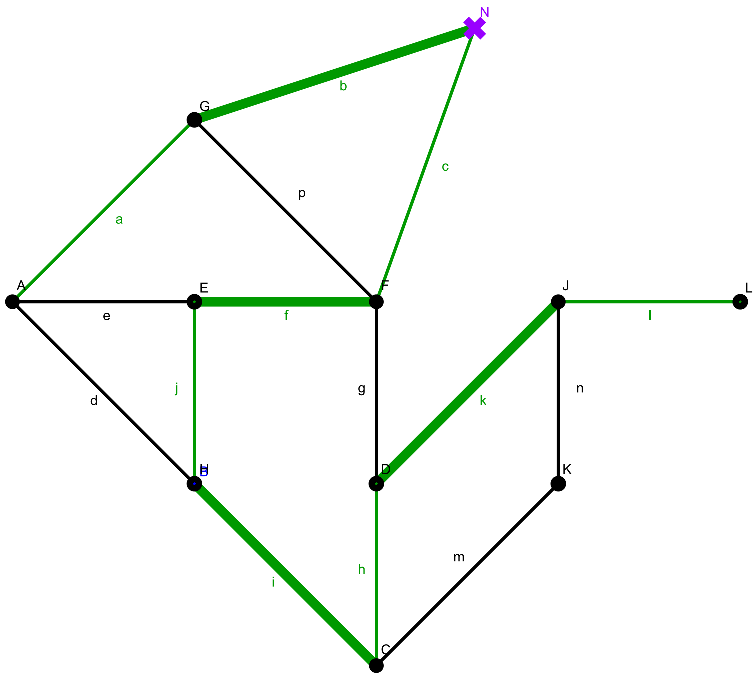
Obrázek 1: Zadání

Vrchol A nazveme *kořenem* a vytváříme *střídavý strom* (je znázorněn zelenou barvou).Vnější vrcholy jsou kresleny jako plné tečky.

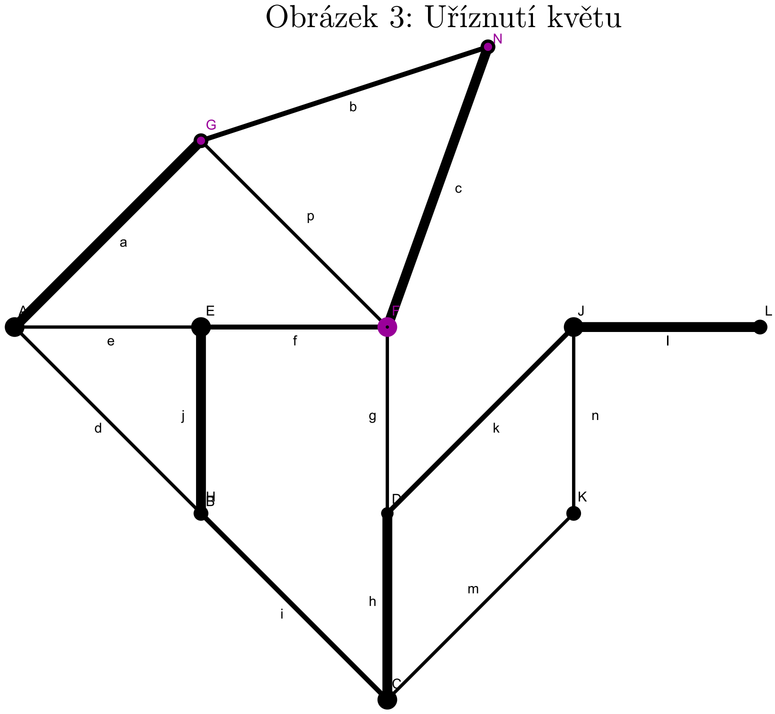


Obrázek 2: Květ I, H, N

Květ uřízneme a zvětšíme párování.

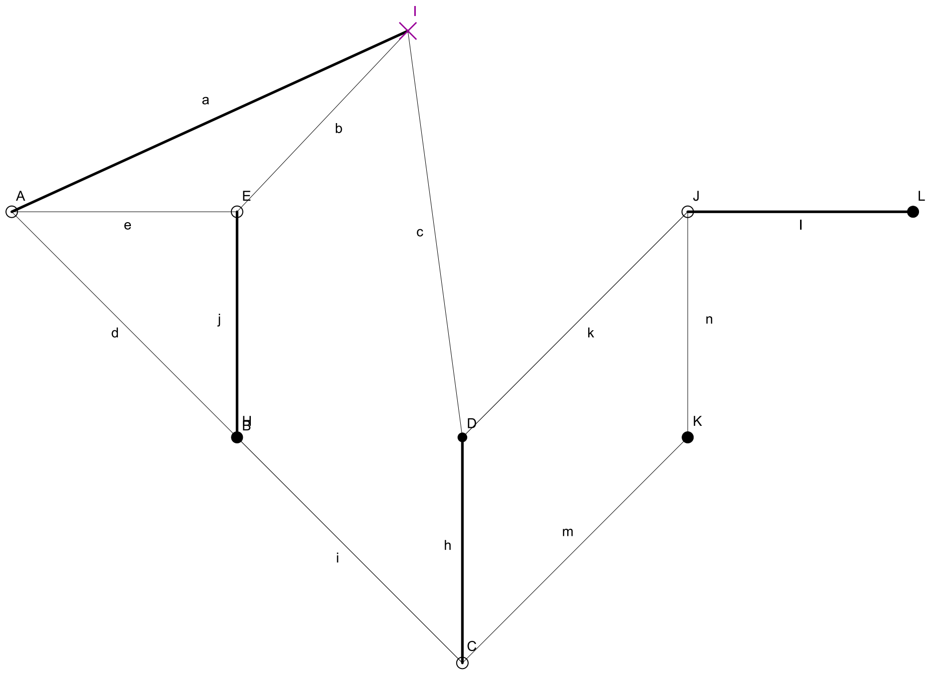


Obrázek 3: Uříznutí květu

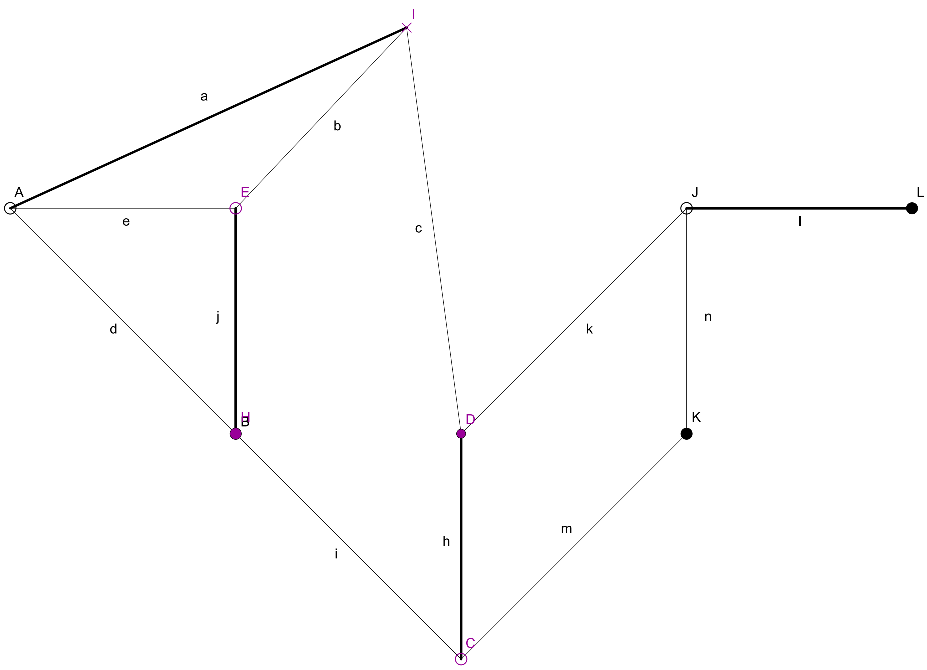


Obrázek 4: Zlepšující cesta

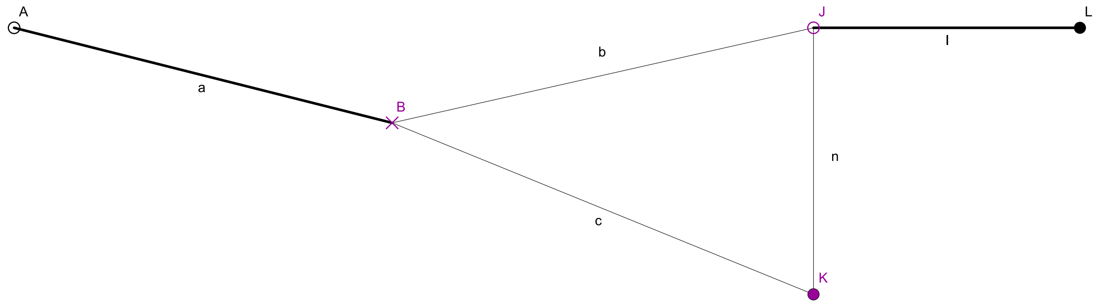
Dále pokračujeme s upraveným grafem.Vznikl nový květ, který upět uřízneme.

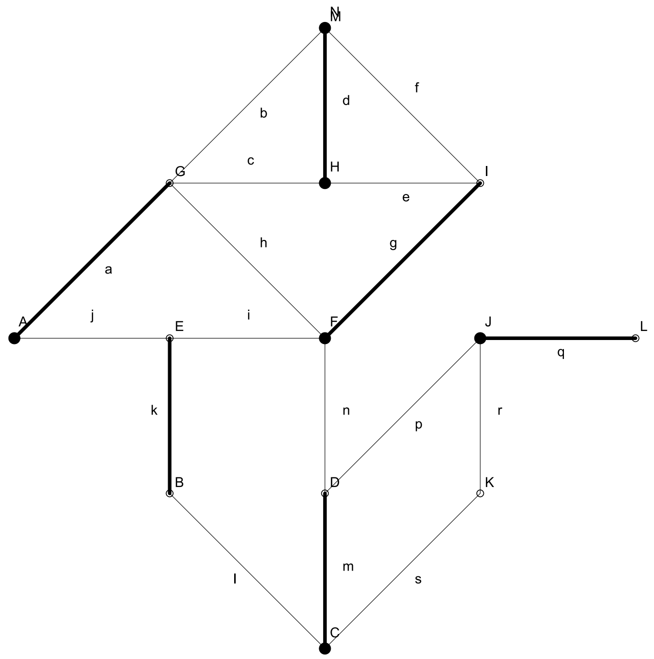


Obrázek 5: Uříznutí nového květu



Obrázek 6: Označení dalšího květu

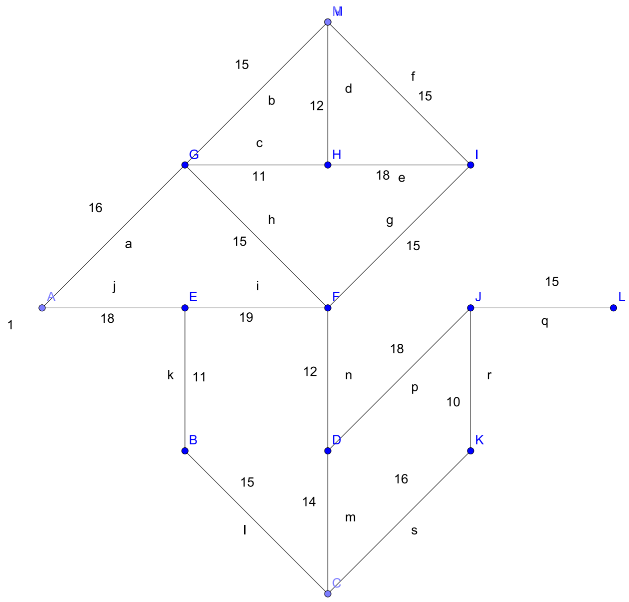




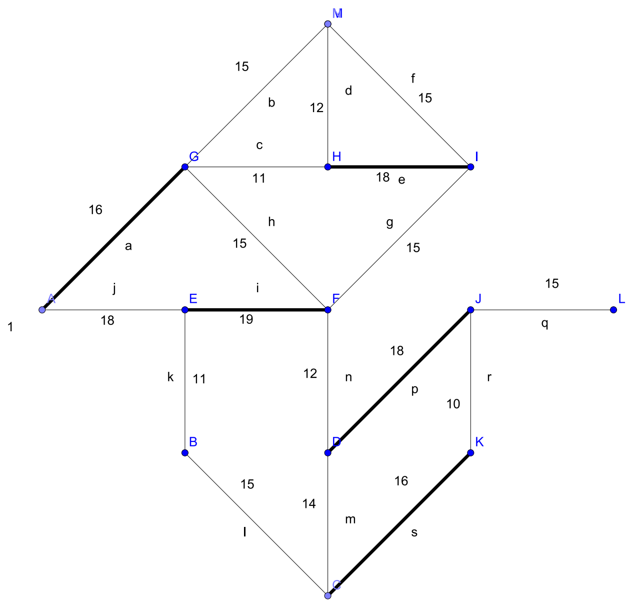
Obrázek 7: Výsledné maximální párování

Příklad 2 - Výpočet nejdražšího párování

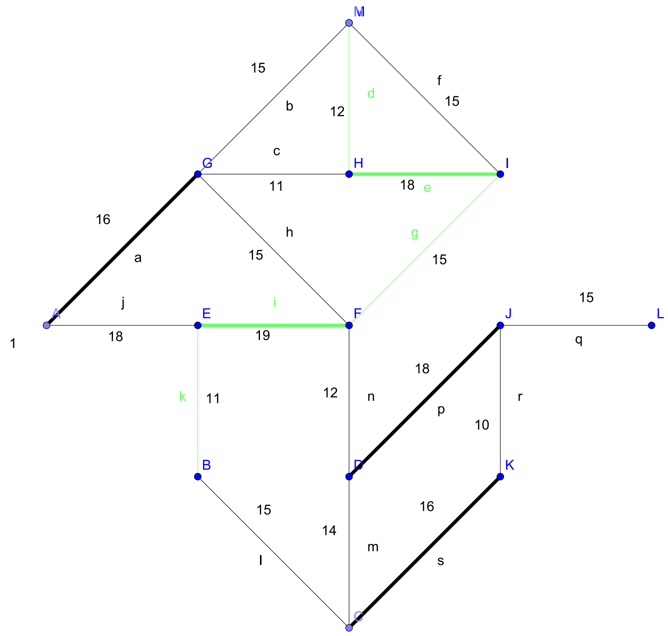
Mějme ohodnocený graf z příkladu 1. Hodnoty hran znamenají počet kroků, které musí vyslanec udělat, aby si mohl pohovořit se svým „kolegou“. Jaký je největší možný počet kroků, které by vyslanci mohly celkem provést?



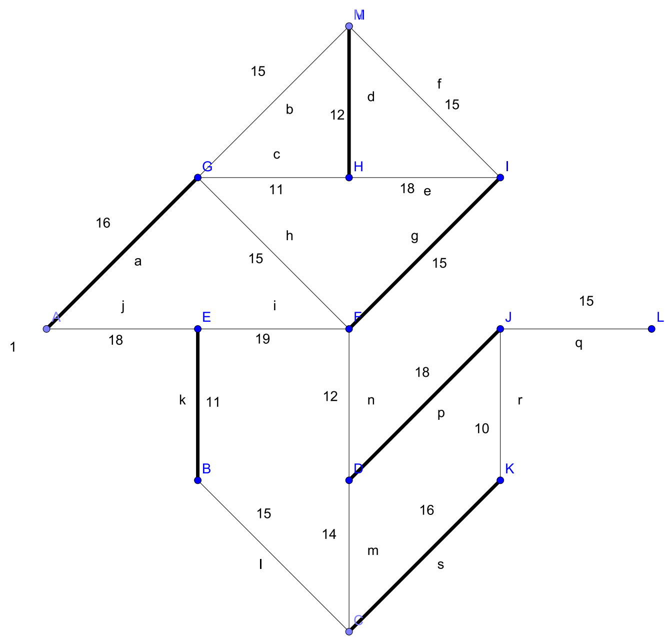
Obrázek 8: Zadání ohodnocení hran



Obrázek 9: Cena párování = 87



Obrázek 10: Nalezení zlepšující cesty



Obrázek 11: Cena párování = 88

První párování se provedlo tzv. „hladovým“ postupem: postupně se přidávaly vždy nejdražší přijatelné hrany a střídavé cesty a hrany se hledaly ručně.

Závěr

Vidíme, že maximální párování nemusí být jediné, což je vidět už v příkladu 1. Stejně tak mohly ležet v párování hrany p, s místo hran m, q. Úloha o nejdražším párování je obecnější. Úlohu o nejlevnějším maximálním párování lze na ni převést změnou cen.

Literatura

[1] Demel J. *Grafy a jejich aplikace*. Praha : Academia 2002

[2] Fuchs E. *Dikrétní marematika pro učitele*. Brno 2001