Přednáška 8

- aplikace diferenciálních rovnic
- technické úlohy, Newtonův pohybový zákon
- geometrické úlohy, ortogonální trajektorie
- exaktní diferenciální rovnice

Aplikace DR - přírodní a technické vědy (1)

Fyzikální význam derivace funkce v aplikacích:
Derivace $f'(t)$ udává rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(t)$ v bodě t.

Příklad: *Je-li například $f(t)$ množství jedinců dané populace v čase t, je $f'(t)$ rychlost změny velikosti populace.*

Příklad: *Je-li $f(t)$ koncentrace nějaké látky v čase t, je $f'(t)$ rychlost změny koncentrace.*

Příklad: *Udává-li $f(t)$ dráhu přímočarého pohybu, kterou hmotný bod urazí za čas t, je $f'(t)$ jeho rychlost.*

Aplikace DR - přírodní a technické vědy (2)

Problém rozpadu radioaktivní látky:

Rychlost rozpadu radioaktivní látky je přímo úměrná množství dosud nerozpadlé části této látky. Hledejme funkci $R : t \to R(t)$, která popisuje závislost množství nerozpadlého části radioaktivní látky na čase t.

Rychlost rozpadu radioaktivní látky lze označit jako okamžitou změnu množství nerozpadlého radioaktivní látky, tj.

$$R'(t) = -kR(t),$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti daná vlastnostmi radioaktivní látky (poločasem rozpadu).

Obecné řešení této diferenciální rovnice 1. řádu získáme pomocí separace proměnných:

$$R(t) = Ce^{-kt},$$

Hledáme-li procentuální podíl radioaktivní látky, která se rozpadne za danou dobu, uvažujeme počáteční podmínku $R(0) = 100$, ze které stanovíme parametr $C = 100$.

Příklad: *Kolik procent původního množství R_0 radia se rozpadne za 200 let, jestliže isotop radia ^{226}Ra má poločas rozpadu 1602 let?*

Řešení: *Konstantu úměrnosti k určíme z poločasu rozpadu (doby, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky), tj.*

$$R(1602) = 50 = 100e^{-1602k} \Rightarrow \ln(0.5) = -1602k \Rightarrow k = 4.327 \cdot 10^{-4}.$$

Procentuální podíl nerozpadlého isotopu radia po 200 letech

$$R(200) = 100 \cdot e^{-4.327\cdot 10^{-4}\cdot 200} \doteq 91.7\%.$$

Aplikace DR - přírodní a technické vědy (3)

Newtonův zákon ochlazování:
Rychlost ochlazování daného tělesa na okolním prostředí (např. vzduchu) je přímo úměrná rozdílu teploty T tělesa a teploty T_v okolního prostředí (vzduchu).
Nechť $k > 0$ značí koeficient úměrnosti, pak teplota $T(t)$ tělesa v čase t je řešením počátečního problému

$$T'(t) = -k(T(t) - T_v), \quad T(0) = T_0$$

kde $T_0 > 0$ je počáteční teplota tělesa.
Je-li $T_v = T_v(t)$, je daná DR lineární 1.řádu. Speciálně je-li T_v konstantní, získáme rovnici se separovanými proměnnými

Obecné řešení DR s konstantní T_v pro $T(t) \neq T_v$ je

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -k(T - T_v) \\
\frac{\mathrm{d}T}{T - T_v} &= -k\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_v} &= -k \int 1\mathrm{d}t \\
\ln|T - T_v| &= -kt + \ln|C|, \quad C \in \boldsymbol{R} - \{0\}, \\
T &= Ce^{-kt} + T_v, C \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}$$

Fyzikálně přípustné řešení je pouze s volbou $C > 0$.

Aplikace DR - přírodní a technické vědy (4)

Příklad: *Je-li teplota vzduchu $T_v = 20^\circ C$ a těleso se za 20 minut ochladilo z počáteční teploty $T_0 = 100^\circ C$ na $60^\circ C$, za jak dlouho se ochladí na $30^\circ C$?*
Řešení: *Obecné řešení úlohy ochlazování je tvaru*

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_v, \quad C > 0,\ k > 0$$

Nespecifikované konstanty C a k určíme z počáteční podmínky

$$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = Ce^0 + T_v \Rightarrow C = 100 - 20 = 80$$

a vztahu

$$T(20) = 60 \Rightarrow 60 = 80e^{-20k} + 20 \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-20k} \Rightarrow -20k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}$$

Vývoj tepltoty T(t) na čase t lze vyjádřit vztahem

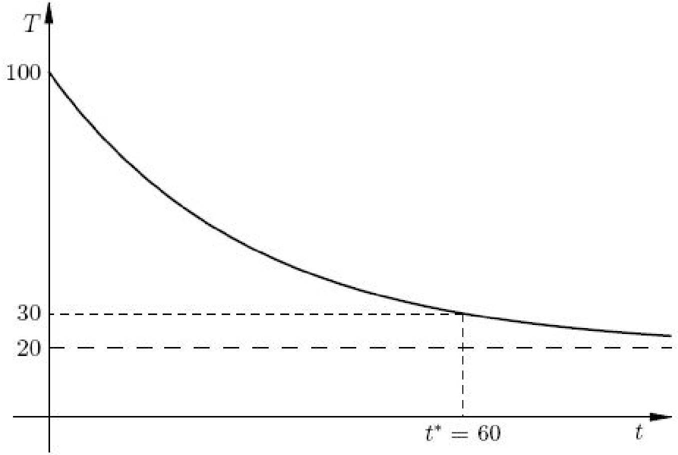
$$T(t) = 80e^{(-t\ln 2)/20} + 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} + 20$$

Teplota tělesa se ochladí na $30^\circ C$ v čase t_K, který stanovíme jako řešení rovnice

$$T(t_K) = 30 \Rightarrow 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t_K/20} + 20 = 30 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{t_K/20} = \frac{1}{8} \Rightarrow t_K = 60 \ \ (1hod.)$$

Aplikace DR - přírodní a technické vědy (5)

Vývoj teploty



Ortogonální trajektorie (1)

Definice (Ortogonální trajektorie):
Nechť je dána jednoparametrická soustava křivek v rovině tvaru

$$F(x, y, C) = 0, \quad c \in \mathbf{R},$$

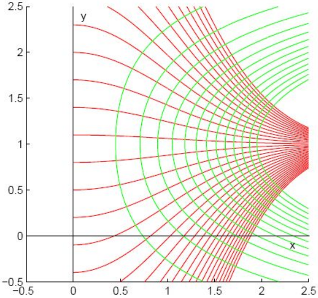
kde C je parametr. Ortogonální trajektorie k této soustavě je soustava křivek popsaných rovnicí

$$G(x, y, C) = 0, \quad c \in \mathbf{R},$$

která ma vlastnost, že libovolné dvě křivky

$$k_1 : \qquad y = f(x, C), \quad \text{splňující} \quad F(x, y, C) = 0,$$
$$k_2 : \qquad y = g(x, C), \quad \text{splňující} \quad G(x, y, C) = 0,$$

se protnou pod pravým úhlem (jejich tečny sestrojené v jejich průsečíku jsou navzájem kolmé).



Ortogonální trajektorie (2)

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y)$$

s vhodnou pravou stranou, pak tato rovnice má nekonečně mnoho řešení, které můžeme popsat jako soustavu křivek s rovnicí

$$F(x, y, C) = 0, \quad c \in \boldsymbol{R}.$$

Nyní budeme řešit opačný problém, tj. k soustavě křivek $F(x, y, C) = 0$ hledáme příslušnou diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$, kterou modifikujeme dle požadavku kolmosti křivek $\left(y'_G = -\frac{1}{y'_F}\right)$do tvaru

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}, \text{ resp. } y' = g(x, y).$$

Řešení této rovnice pak můžeme popsat jako soustavu křivek s rovnicí

$$G(x, y, C) = 0, \quad c \in \boldsymbol{R},$$

které představují ortogonální trajektorie k původní soustavě.

Příklad: *Určete ortogonální trajetktorie k soustavě křivek:*

$$y - Cx = 0, \quad C \in \boldsymbol{R}.$$

Exaktní DR (1)

Nechť $P : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak totální diferenciál funkce $P(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ lze vyjádřit

$$\mathrm{d}P(x_0, y_0; \mathbf{h}) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)h_2,$$

ekvivalentně píšeme

$$\mathrm{d}P(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

Předpokládejme dále, že totální diferenciál je nulový v každém bodě, tzn. tečná rovina funkce $P(x, y)$ je rovnoběžná s osami x a y v každém bodě. Tato vlastnost implikluje, že funkce $P(x, y)$ je konstantní.

Z nulovosti totálního diferenciálu v každém bodě, dostaneme vztah

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

který společně s označením $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ přepíšeme do diferenciální rovnice

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)y' = 0,$$

jejíž obecné řešení je tvaru

$$P(x, y) = c, \quad c \in \boldsymbol{R}.$$

Exaktní DR (2)

Definice (Exaktní rovnice):
Nechť $G \subset \boldsymbol{R}^2$ je otevřená jednoduše souvislá množina. Nechť dále $f : G \to \boldsymbol{R}$, $g : G \to \boldsymbol{R}$ a nechť existuje $P : G \to \boldsymbol{R}$ taková, že

$$f(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y), \quad g(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \quad \forall [x,y] \in G.$$

Pak se rovnice

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

nazývá exaktní.

Ekvivalentně lze exaktní rovnici zapsat

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \text{ resp. } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0, \text{ pro } g(x,y) \neq 0.$$

Věta (Obecné řešení exaktní rovnice):
Nechť

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

je exaktní rovnice definovaná na otvřené jednoduše souvislé množině G a funkce $P(x,y)$ splňuje vztahy

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = g(x,y), \quad \forall [x,y] \in G.$$

Pak obecné řešení je tvaru

$$P(x,y) = c, \quad c \in \boldsymbol{R}.$$

Exaktní DR (3)

Věta (O řešitelnosti exaktní rovnice):
Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená jednoduše souvislá množina. Nechť dále $f : G \to \mathbb{R}$, $g : G \to \mathbb{R}$. Pak rovnice

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

je exaktní právě tehdy, když

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \quad \forall [x,y] \in G.$$

Příklad: *Řešte exaktní diferenciální rovnici:*

$$2xyy' + y^2 = 0$$