Přednáška 11

- funkční řady
- stejnoměrná konvergence
- mocninné řady

Funkční řady - základní pojmy (1)

Definice (Funkční řada a definiční obor funkční řady):
Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí $f_n : D_{f_n} \to \mathbb{R}$. Funkční řadou rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

a definičním oborem $D\left(\sum f_n\right)$ této funkční řady je vzájemný průnik definičních oborů funkcí f_n, $n = 1, \ldots, +\infty$, tj.

$$D\left(\sum f_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_{f_n}$$

Dosadíme-li za x určité číslo $x_0 \in D\left(\sum f_n\right)$, obdržíme z funkční řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ číselnou řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \cdots$$

Definice (Bodová konvergence a obor konvergence):
Říkáme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje bodově v množine $I^* \subseteq D\left(\sum f_n\right)$, jestliže pro každou hodnotu $x_0 \in I^*$ konverguje číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$. Množinu I^* nazýváme oborem konvergence (konvergenčním oborem) funkční řady.

Při určování oboru konvergence I^* často budeme používat limitní podílové nebo odmocninové kritérium.

Funkční řady - základní pojmy (2)

Příklad: *Určete obor konvergence následujících funkčních řad*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^n(x) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{x^2}\right)^n$$

Definice (Částečný součet a zbytek řady):
Nechť je na intervalu I definována funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Funkci $s_k(x)$ tvaru

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) \cdots + f_k(x)$$

nazýváme k-tým částečným součtem funkční řady.
Vynecháme-li v řadě $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ prvních k členů, dostáváme řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{k+n} = f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x), \dots$$

kterou nazýváme k-tým zbytkem řady a značíme $R_k(x)$.
Součtem funkční řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ rozumíme funkci

$$s(x) = \lim_{k\to+\infty} s_k(x),$$

která je definována pro všechna x, ve kterých existuje konečná limita $\lim_{k\to+\infty} s_k(x)$, tj. na oboru konvergence $I^* \subseteq I$ této funkční řady. Potom píšeme

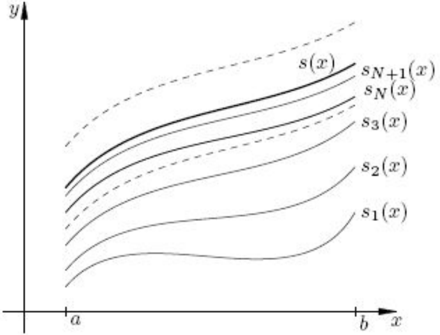
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in I^*.$$

Stejnoměrná konvergence (1)

Definice (Stejnoměrná konvergence):
Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v intervalu I k funkci $s(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ této řady splňuje tuto vlastnost: vezmeme-li libovolně úzký pás obsahující funkci $s(x)$, pak vždy existuje takový člen $s_N(x)$ dané posloupnosti částečných součtů, že tento člen a všechny následující (tj. $s_{N+1}(x), s_{N+2}(x), \ldots$) leží v tomto pásu pro všechna $x \in I$. Pak píšeme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \rightrightarrows s(x), \quad x \in I.$$

Obor stejnoměrné konvergence budeme značit I^{**}, protože může být jen částí oboru konvergence I^*.



Stejnoměrná konvergence (2)

Pro praktické ověření stejnoměrné konvergence není uvedená definice stejnoměrné konvergence snadno použitelná. V řadě případech nám však postačí pouze rozhodnout, zdali je daná funkční řada stejnoměrně konvergentní bez ohledu na znalost jejího součtu. Uveďme tedy následující jednoduché kritérium stejnoměrné konvergence.

Věta (Weierstrassovo kritérium):
Funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní v intervalu I^{**}, jestliže k ní existuje majorantní konvergentní číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, tj. konvergentní řada, jejímiž členy jsou konstanty A_k splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I^{**}$ nerovnosti

$$|f_n(x)| \leq A_n, \quad x \in I^{**}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

V následujících třech větách uvedeme základní vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad.

Věta (Spojitost funkční řady):
Nechť funkce $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ jsou spojité v intervalu I a nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v tomto intervalu. Pak funkce $s(x)$ je také spojitá v intervalu I.

Stejnoměrná konvergence (3)

Věta (Integrace funkční řady):
Nechť funkce $f_n(x)$, $n \in \boldsymbol{N}$ jsou integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak funkce $s(x)$ je také integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right).$$

Věta (Derivace funkční řady):
Nechť funkce $f_n(x)$, $n \in \boldsymbol{N}$ jsou spojité na intervalu I. Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu I a nechť řada derivací $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ konverguje v tomto intervalu stejnoměrně. Pak má $s(x)$ v I derivaci a platí

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x), \quad x \in I.$$

Příklad: *Dokažte stejnoměrnou konvergenci následujících funkčních řad na I^{**}, je-li*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \quad I^{**} = \boldsymbol{R} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x^2n^2}}{n^2}, \quad I^{**} = \boldsymbol{R}$$

Mocninné řady - základní pojmy (1)

Mocninné řady jsou speciálním případem funkčních řad jejichž členy jsou mocninné funkce.

Definice (Mocninná řada):

Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 rozumíme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

kde $a_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}_0$ jsou konstanty, které nazýváme koeficienty mocninné řady.

Je-li středem mocninné řady bod $x_0 = 0$ získáme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Částečné součty každé mocninné řady jsou polynomy

$$s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k$$

Definičním oborem mocninné řady je interval $(-\infty, +\infty)$. Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, tj. $x_0 \in \boldsymbol{I}^*$.

Poloměr konvergence (1)

Věta (O poloměru konvergence):
Ke každé mocninné řadě $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ existuje takové číslo $R \geq 0$ (připouštíme i $R = +\infty$), že pro všechna

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

tato řada absolutně konverguje a na druhou stranu pro všechna

$$x \in \mathbf{R} - \langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$$

tato řada diverguje. Hodnotu R pak nazýváme poloměrem konvergence.

Zápisem $R = 0$ rozumíme, že mocninná řada konverguje pouze ve svém středu, a hodnota $R = +\infty$ znamená, že mocninná řada konverguje na celé reálné ose.

Struktura oboru konvergence I^* mocninných řad je velmi jednoduchá - mohou nastat pouze 3 případy

- $I^* = \{x_0\}$ pro $R = 0$
- I^* je interval konečné délky symetrický kolem bodu x_0 pro $0 < R < +\infty$
- $I^* = (-\infty, +\infty)$ pro $R = +\infty$

V koncových bodech oboru konvergence může řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergovat (absolutně nebo relativně), případně divergovat. Tyto případy musíme vždy vyšetřit zvlášť.

Poloměr konvergence (2)

Věta (Určení poloměru konvergence):
Nechť existuje (konečná nebo nekonečná) limita

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Potom pro poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *platí*

$$R = \frac{1}{\rho}$$

Přitom pro $\rho = +\infty$ *klademe* $R = 0$ *a pro* $\rho = 0$ *klademe* $R = +\infty$.

Pokud existuje jedna z limit $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}/a_n|$ nebo $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ uvedených v předešlé větě, existuje i druhá limita a obě limity jsou si rovny. Větu pro výpočet poloměru konvergence lze použít pouze v případě, že mocniny v řadě po sobě jdoucích členů se zvyšují vždy o 1, tedy nikoliv například v případě řady $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

Příklad: *Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninných řad:*

$$a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n8^n}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n!(x+1)^n, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{n!}$$