Přednáška 7

- řešení diferenciálních rovnic (DR) elementárními metodami
- DR se separovanymi proměnnými
- DR s homogenní funkcí
- lineární DR 1. řádu a metoda variace konstant

ODR se separovanými proměnnými (1)

Definice (Rovnice se separovanými proměnnými):
Nechť I, J jsou otevřené intervaly a dále nechť $f : I \times J \to \boldsymbol{R}$ je funkce dvou proměnných taková, že existují funkce $g : I \to \boldsymbol{R}$ a $h : J \to \boldsymbol{R}$, pro něž platí

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y).$$

Rovnice $y' = f(x, y)$ se pak nazývá rovnicí se separovanými proměnnými.

Hledáme-li obecné řešení ODR se separovanými proměnnými, formálně postupujeme následně

$$\begin{aligned}
y' &= g(x)h(y)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= g(x)h(y)\\
\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} &= g(x)\mathrm{d}x\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} &= \int g(x)\mathrm{d}x\\
H(y) &= G(x) + c,
\end{aligned}$$

získáme tak řešení v implicitním tvaru (pokud funkce H není identita), které se budeme snažit vyjádřit v explicitním tvaru (bude-li to možné).

ODR se separovanými proměnnými (2)

Věta (Tvar řešení rovnice se separovanými proměnnými):
Nechť I, J jsou otevřené intervaly a dále nechť funkce $g : I \to \boldsymbol{R}$ a $h : J \to \boldsymbol{R}$ jsou spojité na intervalu I, resp. J. Nechť pro každé $y \in J$ je $h(y) \neq 0$ a dále nechť $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ jsou libovolné body. Pak má počáteční problém

$$y' = g(x) \cdot h(y), \quad y(x_0) = y_0$$

řešení definované na nějakém intervalu I. Toto řešení je určeno implicitně vzorcem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} = \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s \quad \forall\, x \in I.$$

Pro $h(y) = 1$ se rovnice redukuje na tvar $y' = g(x)$, jejíž obecné řešení dostaneme jejím integrováním

$$y \stackrel{c}{=} \int y' \mathrm{d}y \stackrel{c}{=} \int g(x)\mathrm{d}x.$$

K existenci a jednoznačnosti řešení stačí spojitost funkce g na daném intervalu I. Potom partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ je

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

ODR se separovanými proměnnými (3)

Pro $g(x) = 1$ se rovnice redukuje na tvar $y' = h(y)$. V případě, že že $h(y) = 0$ má tato rovnice řešení $y = y_0$. Pro $h(y) \neq 0$ můžeme tuto rovnici vydělit funkcí h a jejím integrováním opět dostaneme obecné řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \stackrel{c}{=} \int \frac{y'}{h(y)} \mathrm{d}y \stackrel{c}{=} \int 1 \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} x.$$

K existenci a jednoznačnosti řešení stačí spojitost funkce h na daném intervalu J. Potom partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ je

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}$$

Příklad: *Určete obecné řešení následujících rovnic*

$$a)\ y' = 3\sqrt{x}, \quad b)\ y' = y^2, \quad c)\ y' = \frac{x(y^2-1)}{(x^2-1)y}.$$

Obecně separovatelnou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y)y' = 0,$$

kde g_1, g_2 jsou spojité funkce na intervalu I a h_1, h_2 jsou spojité funkce na intervalu J. Za předpokladu $g_2(x)h_1(y) \neq 0$ lze tuto rovnici převést na rovnici separovanými proměnnými tvaru

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} + \frac{h_2(y)}{h_1(y)} y' = 0$$

a k jejímu obecnému řešení přidat i konstantní křivky $y = y_i$ na I, kde čísla y_i jsou nulovými body funkce $h_1(y)$.

ODR s homogenní funkcí (1)

Definice (Homogenní funkce stupně k):
Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť dále $f : G \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Jestliže pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

nazýváme f homogenní funkcí stupně k.

Definice (Rovnice s homogenní funkcí):
Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina taková, že $[tx, ty] \in G$ pro $t \neq 0$, pokud $[x, y] \in G$. Nechť dále $f : G \to \mathbb{R}$ je homogenní funkce stupně k. Pak se rovnice $y' = f(x, y)$ nazývá rovnicí s homogenní funkcí. V případě $k = 0$ lze použít zápis $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Někdy se můžeme setkat se zápisem rovnice s homogenní funkcí ve tvaru

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0,$$

kde g, h jsou homogenní funkce stejného stupně k.

Hledáme-li obecné řešení ODR s homogenní funkcí stupně k zavádíme substituci

$$z(x, y) = \frac{y(x)}{x}, \quad y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

a řešíme rovnici

$$z + xz' = f(x, xz), \quad \text{resp. } z + xz' = x^k f(1, z),$$

kterou snadno převedeme na rovnici se separovanými proměnnými.

ODR s homogenní funkcí (2)

Uvažujme diferenciální rovnici tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$$

Rozlišujeme následující případy:
a) je- li $\alpha = \beta = a = b = 0$, pak

$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + C,$$

b) je- li $\beta = b = 0$, pak

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) \Rightarrow y = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)x + C,$$

c) je- li $\gamma = c = 0$, pak získáme homogenní rovnici

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$

d) je- li $b \neq 0$ a $a\beta - \alpha b = 0$, pak $\alpha = \frac{\beta}{b}a$ a rovnici upravíme na tvar

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\frac{\beta}{b}(\alpha x+\beta y)+\gamma}\right), \text{ resp. } z' = a + b\,f\left(\frac{z+c}{\frac{\beta}{b}z+\gamma}\right) \quad \text{pro } z = ax + by(x).$$

ODR s homogenní funkcí (3)

e) $a\beta - \alpha b \neq 0$, pak vyřešíme soustavu rovnic

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$
$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$

a zavedeme substituci

$$u = x - x_0 \qquad x = x_0 + u$$
$$v = y - y_0 \qquad y = y_0 + v,$$

pro kterou platí

$$v(u) = y(x) - y_0 = y(x_0 + u) - y_0 \Rightarrow y(x) = v(x - x_0) + y_0$$

a dostaneme tak novou rovnici s homogenní funkcí

$$v' = y' = f\left(\frac{a(x_0 + u) + b(y_0 + v) + c}{\alpha(x_0 + u) + \beta(y_0 + v) + \gamma}\right) = f\left(\frac{au + bv + ax_0 + by_0 + c}{\alpha u + \beta v + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma}\right)$$
$$= f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right).$$

Příklad: *Určete obecné řešení rovnice*

$$a)\ y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \qquad b)\ y' = \frac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}.$$

Lineární diferenciální rovnice 1.řádu (1)

Definice (LDR 1.řádu):
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť dále $p : I \to \mathbb{R}$ a $f : G \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak rovnici

$$y' + p(x)y = f(x),$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Věta (LDR 1.řádu pro Cauchyho úlohu):
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť dále $p : I \to \mathbb{R}$, $f : G \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $x_0 \in I$. Pak Cauchyho úloha

$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

má pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ právě jedno řešení $y(x)$ v intervalu I.

Definice (Homogenní/Nehomogenní LDR 1.řádu):
Rovnici

$$y' + p(x)y = f(x),$$

kde pravá strana $f(x) \neq 0$ nazýváme nehomogenní LDR (LDR s pravou stranou).
Rovnici

$$y' + p(x)y = 0,$$

kde pravá strana $f(x) = 0$ nazýváme homogenní LDR (LDR bez pravé strany).
Homogenní LDR, která vznikne z původní nehomogenní LDR anulací její pravé strany, nazýváme přiřazenou homogenní LDR k nehomogenní LDR.

Lineární diferenciální rovnice 1.řádu (2)

Věta (Struktura množiny všech řešení LDR 1.řádu):
Nechť V_H označuje množinu všech řešení homogenní rovnice

$$y' + p(x)y = 0,$$

nechť dále V_N značí množinu všech řešení nehomogenní rovnice

$$y' + p(x)y = f(x),$$

a nechť y_p je nějaká funkce, která řeší nehomogenní rovnici. Pak platí

$$V_N = \{y_p + y_H;\ y_H \in V_H\}.$$

Věta (Obecné řešení homogenní LDR 1.řádu):
Nechť je dána homogenní rovnice

$$y' + p(x)y = 0,$$

Pak množina všech řešení homogenní rovnice je

$$V_H = \left\{ Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\ C \in \boldsymbol{R} \right\},$$

a funkci tvaru

$$y_H = y_H(x, C) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\ C \in \boldsymbol{R},$$

nazýváme obecným řešením homogenní rovnice.

Lineární diferenciální rovnice 1.řádu (3)

Známe-li množinu řešení homogenní LDR 1. řádu, stačí nám k určení obecného řešení nehomogenní LDR 1.řádu nalézt jedno partikulární řešení nehomogenní LDR a obě řešení nakonec sečíst.

Při hledání partikulárního řešení y_p využijeme tvaru obecného řešení y_H a hledáme funkci tvaru

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

kde $C(x)$ je taková funkce, že y_p řeší nehomogenní LDR. Tento postup, kdy konstatnu $C \in \boldsymbol{R}$ z homogenního řešení formálně zaměníme za funkci $C(x)$, se nazývá metoda variace konstanty.

Věta (Partikulární řešení nehomogenní LDR 1.řádu):
Nechť je dána nehomogenní rovnice

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Pak partikulární řešení nehomogenní rovnice je dáno vztahem

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

kde

$$C(x) = \int f(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Funkci tvaru

$$y_p = y_p(x) = \left(\int f(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

nazýváme partikulárním řešením nehomogenní rovnice.

Lineární diferenciální rovnice 1.řádu (4)

Při řešení lineární diferenciální rovnice pro Cauchyovu úlohu

$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

postupujeme následujícím způsobem:

1) sestavíme bázi množiny všech řešení homogenní rovnice, tj. nalezneme funkci y_B splňující
$$y_B' + p(x)y_B = 0 \quad \wedge \quad y \neq 0,$$
2) stanovíme partikulární řešení y_p, tj. nalezeneme alespoň jednu funkci, která řeší nehomgenní rovnici s pravou stranou f,
3) zkonstruujeme obecné řešení ve tvaru
$$y = y_p + c \cdot y_B, \quad c \in \boldsymbol{R},$$
4) určíme konstantu c tak, aby řešení vyhovalo počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$.

Příklad: *Nalezněte řešení Cauchyho úlohy:*

$$y' + 2xy = x^3, \quad y(0) = -1.$$

Bernoulliho rovnice (1)

Definice (Bernoulliho rovnice):
Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a nechť dále $p : I \to \mathbf{R}$ a $f : G \to \mathbf{R}$ jsou spojité funkce. Pak rovnici

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

nazýváme Bernoulliho rovnicí.

Pokud by v ve výše uvedené rovnici bylo $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$, získali by jsme tak lineární rovnici prvního řádu.

Triviálním řešením Bernoulliho rovnice je $y = 0$, za předpokladu $y \neq 0$ rovnici upravíme na tvar

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)y^{(1-\alpha)} = f(x),$$

a dále substitucí $z = y^{1-\alpha}$, resp. $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ na tvar

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = f(x) \;\Leftrightarrow\; z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x),$$

která představuje lineární diferenciální rovnici pro funkci z.

Příklad: *Určete obecné řešení rovnice*

$$y' + xy = xy^3$$