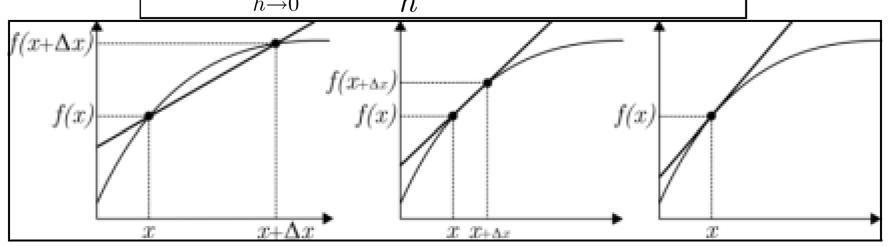
derivace f v bodě a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ pokud existuje}$$



aritmetika derivací

$$(bf + cg)'(a) = bf'(a) + cg'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}, \text{ pokud } g(a) \neq 0$$

derivace složenné funkce

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

derivace inverzní funkce

f je spojitá a ryze monotóní na intervalu a f(a)=b

je ryze monotóní (rostoucí/klesající) aby vůbec měla inverzní

- je-li f'(a) ≠0: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$
- je-li f'(a) =0 (f rostoucí): $(f^{-1})'(b) = +\infty$
- je-li f'(a) =0 (f klesající): $(f^{-1})'(b) = -\infty$

derivace a spojitost

f má v a vlastní derivaci ⇒ f je v a spojitá

derivace a průběhy funkcí

nutná podmínka lokálního extrému
f má v a lokální extrém ⇒ buď neexistuje f'(a), nebo f'(a)=0

derivace a monotonie
f je spojitá na [a,b] a ∃f' na celém (a,b)
- $f' > 0$ (resp. $\geq$) na $(a,b) \Rightarrow f$ rostoucí (resp.neklesající) na $[a,b]$
- $f' < 0$ (resp. $\leq$) na $(a,b) \Rightarrow f$ klesající (resp.nerostoucí) na $[a,b]$

konvexita a konkavita zaručují jednostranné derivace
f je na intervalu konvexní/konkávní ⇒ má na vnitřku int. jednostranné derivace
- f na (a,b) konvexní/konkávní ⇒ f na (a,b) spojitá

2.derivace a konvexita/konkávita
f' je spojitá na (a,b) a ∃f'' na celém (a,b)
- $f'' > 0$ (resp. $\geq$) na $(a,b) \Rightarrow f$ ryze konvexní (resp.konvexní) na (a,b)
- $f'' < 0$ (resp. $\leq$) na $(a,b) \Rightarrow f$ ryze konkávní (resp.konkávní) na (a,b)

f je **konvexní** na I pokud:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 :$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

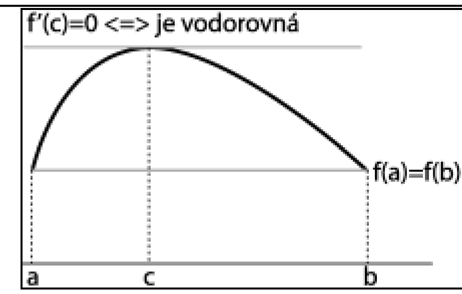
nutná podmínka inflexe
f''(a) ≠ 0 ⇒ f nemá v a inflexi

postačující podmínka inflexe
f' spojitá na (a, b), z ∈ (a, b), f'' < 0 na (a, z) a f'' > 0 na (z, b) (nebo naopak) ⇒ z je bod inflexe f

věty o střední hodnotě

Rolleova

$$f \text{ spojitá na } [a,b], \exists f' \text{ na celém } (a,b) \text{ a } f(a) = f(b)$$
$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

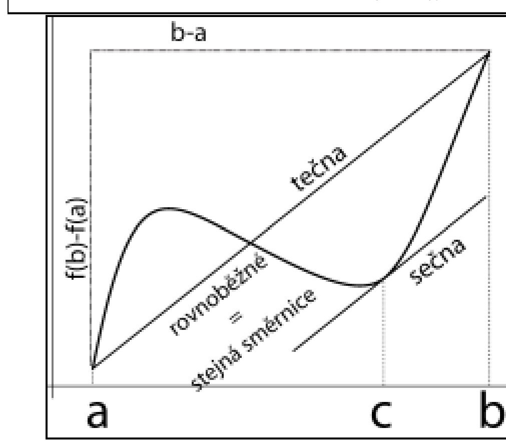


Důkaz:
-Nechť funkce f je konstantní. Potom derivace f'(x)=0.
-Nechť funkce f není konstantní. Jelikož f(a) = f(b) a funkce není konstantní, musí existovat d ∈ (a,b) takové, že f(d) > f(a) = f(b) nebo f(d) < f(a) = f(b). Předpokládejme, že f(d) > f(a) = f(b).

Využijeme věty tvrdící, že každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu [a,b] nabývá na tomto intervalu svého maxima i minima a zabývejme se maximem. Jelikož existuje d ∈ (a,b) takové, že f(d) > f(a) = f(b), tak maximum nemůže ležet ani v a, ani v b. Leží tedy uvnitř intervalu, v bodě c. Z věty o nutné podmínce lokálního extrému vyplývá, že tedy v bodě c, kde se nalézá lokální extrém funkce, f'(c) = 0.
-Analogické tvrzení platí i pro minimum.

Lagrangeova

$$f \text{ spojitá na } [a,b] \text{ a } \exists f' \text{ na celém } (a,b)$$
$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



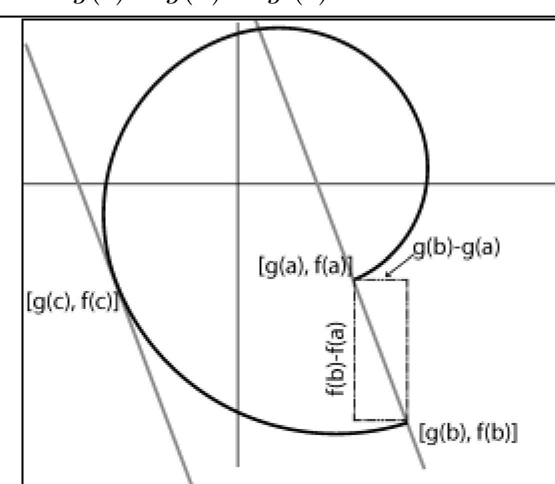
Důkaz:
Předpokládejme, že existuje taková konstanta k, že pro g(x)=f(x)-kx platí g(a)=g(b). Potom funkce g(x) splňuje Rolleovu větu a platí, že existuje c, kde g'(c)=0 - platí potom ale, že g'(c)=f'(c)-k, tj. f'(c)=g'(c)+k = 0 + k = k, tj. v c je derivace f právě tato konstanta.

Pokusme se tuto konstantu k najít -- musí platit, že g(a)=g(b), tj. f(a)-ka = f(b)-kb, tj. k(b-a)=f(b)-f(a), tj.:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cauchyho

$$f, g \text{ spojité na } [a,b], \exists f' \text{ na celém } (a,b) \text{ a } g' \text{vlastní a nenulová}$$
$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Důkaz:
Kdyby g(a)=g(b), tak by podle Rolleovy věty existovalo c ∈ (a,b), že g'(c)=0, což nesmí, tedy g(a) ≠ g(b).

Předpokládejme, že existuje taková konstanta k, že pro H(x)=f(x)-kg(x) platí H(a)=H(b). Potom funkce H(x) splňuje Rolleovu větu a platí, že existuje c, kde H'(c)=0 -- platí potom ale, že H'(c)=f'(c)-kg'(c)=0, tj. f'(c)=kg'(c) ⇒ f'(c)/g'(c)=k.

Pokusme se tuto konstantu k najít -- musí platit, že H(a)=H(b), tj. f(a)-kg(b) = f(b)-kg(b), tj. k(g(b)-g(a))=f(b)-f(a), tj.

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

L'hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ nebo } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty, \text{ a}$$
$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ a } g'(x) \neq 0 \ \forall x \in P(a, \delta),$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$