5. Logika – dedukce *(Markéta Popelová 7.11.2009)*

LAx logické výrokové axiomy (schémata):

1. (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. (PL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. (PL3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Modus ponens (pravidlo odloučení): Z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ.

Poznámky: Pravdilo modus ponens (MP) se dá použít následovně:

- $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ (Toto doslova říká z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ.)
- Jestliže $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \varphi \to \psi$, pak i $T \vdash \psi$. (Neboli když v T je dokazatelné φ a $\varphi \to \psi$, pak v T je dokazatelné i ψ.)
    - Speciálně (pro prázdné T) jestliže $\vdash \varphi$ a $\vdash \varphi \to \psi$, pak i $\vdash \psi$. (Neboli když je dokazatelné φ a $\varphi \to \psi$, pak je dokazatelné i ψ.)
- Zároveň můžeme zkombinovat předchozí možnosti: Jestliže $T \vdash \varphi \to \psi$, pak $T, \varphi \vdash \psi$.

Tvrzení 2.2.3

1) (O korektnosti) *Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.*
2) *Má-li teorie model, je bezesporná.*

Důkaz:

1) (O korektnosti) Budeme dokazovat indukcí na teorémech. Každý axiom z T je v T pravdivý. Ukažme si, že každý logický axiom LAx je pravdivý, tedy i v T pravdivý.

    1. (PL1)
    2. (PL2)
    3. (PL3)

    Dále jsou-li v T pravdivé φ a $\varphi \to \psi$, pak je v T pravdivé i ψ, neboť:

$$M(T) \subset M(\varphi) \text{ a } M(T, \varphi) \subset M(T, \psi) \text{ tedy } (M(T) \cap M(\varphi)) \subset (M(T) \cap M(\psi)).$$

$$\text{Tedy } M(T) = (M(T) \cap M(\varphi)) \subset (M(T) \cap M(\psi)) \subset M(\psi).$$

2) Připomeňme, že teorie je *bezesporná*, jestliže existuje formule, která v ní není dokazatelná. Pokud má teorie model, tak v něm určitě nebude platit φ a zároveň $\neg\varphi$ pro žádný výrok φ. Tedy bude existovat výrok (formule), který není dokazatelný.

♡

Tvrzení 2.2.4 *Buďte φ a ψ dvě formule výrokové teorie T. Pak*

1) $\vdash \varphi \to \varphi$
2) (O dedukci) $T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$

Důkaz:

1) Nechť ψ je výrok $\varphi \to \varphi$. Pak platí:

(1)	$\vdash \varphi \to \psi$	(PL1) ve tvaru $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(2)	$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$	(PL1)
(3)	$\vdash (\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi))$	(PL2)
(4)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi)$	MP (2) a (3)
(5)	$\vdash \varphi \to \varphi$	MP (1) a (4)

2) (O dedukci) Tvrzení rozdělme na dvě implikace:

   1. $T \vdash \psi \to \varphi \Rightarrow T, \psi \vdash \varphi$
      Tato implikace vyplývá ihned použitím modus ponens (viz poznámky pro použití MP třetí hlavní odrážka).
   2. $T, \psi \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to \varphi$
      Tuto implikaci dokážeme indukcí na teorémech terie $T \ \cup \ \psi$ (což můžeme zapisovat jako teorie T, ψ).

      1. Buď φ axiom teorie T, ψ. Pak nastane jedna ze dvou možností:

         1. φ je rovno ψ, pak $T \vdash \psi \to \varphi$ plyne z 1. (Poznamenejme ještě, že pokud je (logicky) dokazatelný výrok σ, tedy $\vdash \sigma$, pak je výrok σ dokazatelný i v libovolné teorii: $T \vdash \sigma$.)
         2. φ je přímo axiom teorie T (neboli $\varphi \in T$). Pak pomocí MP z $T \vdash \varphi$ (tedy i $T, \psi \vdash \varphi$) a (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ plyne $T \vdash \psi \to \varphi$.

      2. Nechť φ je odvozeno pomocí MP z χ a $\chi \to \varphi$ a nechť pro tyto teorémy χ a $\chi \to \varphi$ tvrzení platí:

         · $T, \psi \vdash \chi \Rightarrow T \vdash \psi \to \chi$
         · $T, \psi \vdash \chi \to \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to (\chi \to \varphi)$

         Neboť χ a $\chi \to \varphi$ jsou teorémy teorie T, ψ, tak jsou dokazatelné v T, ψ. Proto platí

         $$(1)\ T \vdash \psi \to \chi \quad \text{a} \quad (2)\ T \vdash \psi \to (\chi \to \varphi).$$

         Po použití MP na (2) a (PL2) ve tvaru

         $$(\psi \to (\chi \to \varphi)) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi))$$

dosteneme

$$(3)\ T \vdash ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi)).$$

Opět použijme MP, tentokrát na (1) a (3) a dostaneme

$$T \vdash (\psi \to \varphi).$$

♡

Lemma: 2.2.5. *Pro výroky φ, ψ platí:*

[a]	i)	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$		ii)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
	ii)	$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$	[c]		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
	iii)	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	[d]		$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
[b]	i)	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	[e]		$\vdash \neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Důkaz:

[a] i)	(1)		$\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(PL1)
	(2)	$\neg\varphi$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(O dedukci)
	(3)	$\neg\varphi$	$\vdash \varphi \to \psi$	(MP) (2) & (PL3)
	(4)		$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	(MP) (2) & (PL3)
[a] ii)	(5)	$\neg\varphi$	$\vdash \varphi \to \psi$	(O dedukci)
	(6)	$\{\neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \psi$	(O dedukci)
[a] iii)	(7)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(vlastnost množin)
	(8)	φ	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	(O dedukci)
	(9)		$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(O dedukci)
[b] i)	(1)		$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	[a] i)
	(2)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	(O dedukci)
	(3)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(MP) (2) & (PL3)
	(4)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \varphi$	(O dedukci)
	(5)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(O dedukci)
[b] ii)	(1)		$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	[b] i)
	(2)		$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP) (1) & (PL3)
[c]	(1)	$\{\neg\neg\varphi, \varphi \to \psi\}$	$\vdash \psi$	(MP)
	(2)		$\vdash \psi \to \neg\neg\psi$	[b] i)
	(3)	$\{\neg\neg\varphi, \varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\neg\psi$	(MP) (1) & (2)
	(4)	$\varphi \to \psi$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	(O dedukci)
	(5)	$\varphi \to \psi$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(MP) (4) & (PL3)
	(6)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(O dedukci)

$$
\begin{array}{llrll}
[\mathrm{d}] & (1) & & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi) & \text{2.2.4. 1)} \\
 & (2) & \varphi \to \psi & \vdash \varphi \to \psi & \text{(O dedukci)} \\
 & (3) & \{\varphi \to \psi, \varphi\} & \vdash \psi & \text{(O dedukci)} \\
 & (4) & \varphi & \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi & \text{(O dedukci)} \\
 & (5) & \varphi & \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi) & \text{(MP) (4) \& (PL3)} \\
 & (5) & & \vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)) & \text{(O dedukci)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrll}
[\mathrm{e}] & (1) & & \vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) & [\mathrm{d}] \\
 & (2) & \neg\varphi & \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi) & \text{(O dedukci)} \\
 & (3) & & \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi) & \text{(O dedukci)} \\
 & (4) & & \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi & \text{(MP) (3) \& (PL3)}
\end{array}
$$

$\heartsuit$

7. Logika – počty ve výrokovce *(MP únor 2010)*

Buď $|\mathbf{P}| = l$ přirozené nenulové a nechť teorie $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ má model.

Neekvivalentní (kompletní) P-teorie.

Existuje 2^{2^l} neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií a právě 2^l kompletních neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií.

Všech modelů na $|\mathbf{P}| = l$ prvovýrocích je 2^l (každý prvovýrok může nabývat jedné ze dvou hodnot). Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model. Teorie jsou neekvivalentní, když mají různé třídy modelů. Proto počet kompletních neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií je $\underline{2^l}$ (stačí vybrat jeden z možných modelů).

Když nemusí být teorie kompletní, může mít modelů více – a to libovolnou podmnožinu možných modelů. Takových podmnožin je $\underline{2^{2^l}}$, proto je tolik i neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií.

Neekvivalentní pravdivé, lživé a nezávislé výroky.

Teorie T má $2^{2^l-|M(T)|}$ neekvivalentních pravdivých a také lživých výroků a dále má $(2^{|M(T)|} - 2) \cdot 2^{2^l-|M(T)|}$.

Výrok φ je pravdivý v T, neboli $T \models \varphi$, jestliže platí v každém modelu teorie T, neboli $M(T) \subseteq M(\varphi)$. Všechny neekvivalentní pravdivé výroky v T mají stejné ty modely, které má T a liší se v těch ostatních. Tedy nás zajímá, kolik je těch ostatních – tolik, co podmnožin $2^l - |M(T)|$. Proto má T $\underline{2^{2^l-|M(T)|}}$ neekvivalentních pravdivých výroků.

Výrok φ je lživý v T, jestliže $T \models \neg\varphi$, neboli $\neg\varphi$ platí v každém modelu jako T. Tedy stejnou úvahou jako v předchozím (je místo φ uvažujeme $\neg\varphi$ dojdeme ke stejnému výsledku $\underline{2^{2^l-|M(T)|}}$.

Počet všech neekvivalentních nezávislých výroků v T je počet všech – počet pravdivých – počet lživých, tedy $2^{2^l} - 2^{2^l-|M(T)|} - 2^{2^l-|M(T)|} = 2^{2^l} - 2 \cdot 2^{2^l-|M(T)|} = \underline{(2^{|M(T)|} - 2) \cdot 2^{2^l-|M(T)|}}$.

Neekvivalentní (kompletní) jednoduché extenze teorie.

Existuje právě $|M(T)|$ neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí T a $2^{|M(T)|}$ neekvivalentních jednoduchých extenzí T (z nichž jedna je sporná).

Teorie S je extenze T, jestliže $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$, což je právě tehdy, když $M(S) \subseteq M(T)$. S je jednoduchá extenze T, jestliže $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(S)$.

Extenze S teorie T tedy má některé z modelů teorie T, kterých je $|M(T)|$. Pokud má být S kompletní, tak musí mít model jediný, tedy neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie T je $\underline{|M(T)|}$.

Pokud nemusí být S kompletní, tak si vybere libovolnou podmnožinu modelů T, tedy neekvivalentních jednoduchých extenzí T je $\underline{2^{|M(T)|}}$.

T-sémanticky neekvivalentní nezávislé výroky teorie T.

Kolik je T-sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků teorie T?

Výroky φ a ψ jsou T-sémanticky ekvivalentní, neboli $\varphi \sim_T \psi$, jestliže

$$M(T, \varphi) = M(T, \psi),$$

neboli $M(T \cup \varphi) = M(T \cup \psi)$. Neboli $M(T) \cap M(\varphi) = M(T) \cap M(\psi)$.

Ukážeme, že dva libovolné výroky φ, ψ pravdivé v T jsou T-sémanticky ekvivalentní.

$T \models \varphi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi) \Rightarrow M(T, \varphi) = M(T) \cap M(\varphi) = M(T)$.

$T \models \psi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\psi) \Rightarrow M(T, \psi) = M(T) \cap M(\psi) = M(T)$.

Tedy T-sémanticky neekvivalentní výrok pravdivý v T je jediný. Stejně tak lživý.

Všech T-sémanticky neekvivalentních výroků je tolik, kolik je podmnožin $M(T)$ (neboť se musí lišit právě v modelech teorie T), tedy $2^{|M(T)|}$.

Proto všech T-sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků je $\underline{2^{|M(T)|} - 2}$.

Neekvivalentní výroky sémanticky ekvivalentní fixnímu výroku φ.

Buď $\varphi \subseteq VF_{\mathbf{P}}$. Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \sim_T \varphi$ (jsou T-sémanticky ekvivalentní φ)?

Musí tedy platit, že $M(T) \cap M(\varphi) = M(T) \cap M(\psi)$. Všechny takové výroky ψ se tedy musí shodovat v těch modelech, co má φ společné s teorií T, ale lišit se v těch ostatních. Ty, co má φ společné s T, jsou již dané. Zajímá nás tedy jen to, v kolika modelech se mohou lišit – v tolika, co je podmnožin $2^l - |M(T)|$. Proto všech neekvivalentních výroků T-sémanticky ekvivalentních φ je $\underline{2^{2^l - |M(T)|}}$.

Neekvivalentní výroky ψ, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$.

Nechť φ je výrok. Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$?

Neekvivalentních ψ takových, že $\psi \models \varphi \Leftrightarrow M(\psi) \subseteq M(\varphi)$ je tolik, co podmnožin $M(\varphi)$, tedy $2^{|M(T)|}$.

Neekvivalentních ψ takových, že $\varphi \models \psi \Leftrightarrow M(\varphi) \subseteq M(\psi)$ je tolik, co „nadmnožin“ $M(\varphi)$, tedy $2^{2^l - |M(T)|}$.

Neekvivalentní ψ takový, že $\psi \models \varphi$ a $\varphi \models \psi$, tedy $M(\psi) = M(\varphi)$, je jediný (neboť modely φ jsou dané a on má mít přesně ty stejné).

Proto neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$ je

$$\underline{2^{|M(T)|} + 2^{2^l - |M(T)|} - 1}$$

(jednoduchý princip inkluze a exkluze).

Neekvivelntní výroky pravdivé v teorii $\{\varphi \vee \psi\}$.

Nechť $\{\varphi, \psi\}$ nemá model. Kolik je neekvivalentních pravdivých výroků χ teorie $\{\varphi \vee \psi\}$?

Má platit $\{\varphi \vee \psi\} \models \chi$, tedy $M(\varphi \vee \psi) = (M(\varphi) \cup M(\psi)) \subseteq M(\chi)$. Zajímá nás tedy, kolik je „nadmnožin“ $M(\varphi) \cup M(\psi)$. Tolik, co podmnožin $^{\mathbf{P}}2 - (M(\varphi) \cup M(\psi))$, tedy $2^{2^l - |M(\varphi) \cup M(\psi)|}$.

Uvědomme si, že

$$|M(\varphi) \cup M(\psi)| = |M(\varphi)| + |M(\psi)| - |M(\varphi \cap \psi)| = |M(\varphi)| + |M(\psi)|,$$

neboť $M(\varphi) \cap M(\psi) = \emptyset$, jelikož $\{\varphi, \psi\}$ nemá dle zadání žádný model.

Tedy neekvivalentních výroků pravdivých v teorii $\{\varphi \vee \psi\}$ je $\underline{2^{2^l - |M(\varphi)| + |M(\psi)|}}$.