Počet koster K_n

VĚTA (Cayleyho formule):

$\forall n \geq 2$: počet koster grafu K_n je n^{n-2} (tedy počet stromů na $\{1,\ldots,n\}$).

Příklad:

$n = 2$: $\underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet}$
$2^0 = 1$ kostra.

$n = 3$: $\underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \underset{3}{\bullet}$, $\underset{2}{\bullet} - \underset{1}{\bullet} - \underset{3}{\bullet}$, $\underset{1}{\bullet} - \underset{3}{\bullet} - \underset{2}{\bullet}$
$3^1 = 3$ kostry.

$n = 4$: 12 koster typu housenka, 4 kostry typu vějíř.

DŮKAZ:

Slunce: Strom, v němž všechny hrany jsou zorientovány směrem od jediného vrcholu (středu slunce).

Pozorování 1:

Počet stromů na $\{1,\ldots,n\}$ je roven

$$\frac{\text{počtu slunců na } \{1,\ldots,n\}}{n}$$

DŮKAZ:

Každý strom odpovídá n sluncím (máme v každém stromu n možností volby středu). *Q.E.D.*

Sousluní: Orientovaný graf, kde každá komponenta je slunce.

Pozorování 2:

Po odstranění libovolných k hran ze slunce dostaneme sousluní s $k+1$ komponentami (slunci).

DŮKAZ:

Zřejmý z obrázku. Vyhozením hrany ze slunce se slunce rozpadne na 2 další slunce. *Q.E.D.*

Pozorování 3:

Přidáním orientované hrany do sousluní dostaneme opěr sousluní, právě když přidaná hrana vede do středu libovolné jiné komponenty (slunce).

DŮKAZ:

Z obrázku.

Důkaz věty:

Z grafu izolovaných vrcholů 1,...,n dostaneme slunce na $\{1,\ldots,n\}$ postupným přidáváním $n-1$ orientovaných hran právě, když přidaná hrana vždy vede z libovolného vrcholu do středu jiné komponenty.

Máme $n(n-1)$ možností volby první hrany. Možností volby druhé hrany máme $n(n-2)$. Pro třetí hranu máme $n(n-3)$ možností. ... Pro $(n-1)$. hranu máme $n \cdot 1$ možností.

Celkem máme $n^{n-1}(n-1)!$ možností, jak zvolit 1. až $(n-1)$. hranu. Každé slunce dostaneme $(n-1)!$-krát. Slunců tedy dostaneme n^{n-1} a stromů tak bude n^{n-2}.

Q.E.D.