# 4. Fourierovy řady

## A. Základní pojmy

Při řešení technických úloh se často setkáváme s periodickými funkcemi. Nejjednodušším netriviálním příkladem periodických funkcí jsou základní goniometrické funkce sinus a kosinus. Lze proto očekávat, že periodická funkce se dá aproximovat buď lineární kombinací konečného počtu goniometrických funkcí, nebo přímo nekonečnou funkční řadou, jejíž členy jsou goniometrické funkce.

V dalších úvahách se omezíme na periodické funkce s periodou $2\pi$ (zobecnění na případ funkcí s libovolnou periodou je snadné, a bude naznačeno v závěru kapitoly). Protože základními goniometrickými funkcemi s touto periodou jsou funkce $\cos kx$, $\sin kx$, kde $k$ je přirozené číslo, uvedeme nejprve následující pojmy.

**Definice 4.1. (Trigonometrická řada a polynom)** *Trigonometrickou řadou* rozumíme nekonečnou funkční řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots , \tag{4.1}$$

kde $a_k$, $b_k$ jsou konstanty. Přitom $n$-tý částečný součet řady (4.1)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

se nazývá *trigonometrický polynom* stupně $n$.

Poznamenejme, že „nultý“ člen této řady $a_0 \cos 0x + b_0 \sin 0x = a_0$ je zaveden v obvyklejším tvaru $a_0/2$ (početní důvod této formální změny bude uveden později).

**Definice 4.2.** Dá-li se nějaká funkce $f(x)$ vyjádřit trigonometrickou řadou (4.1), takže platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.2}$$

kde $a_k$, $b_k$ jsou vhodné konstanty, říkáme, že jsme funkci $f(x)$ rozvinuli v trigonometrickou řadu.

**Poznámka 4.3.** *Neperiodické funkce* lze rozvinout v trigonometrickou řadu (4.1) pouze v nějakém intervalu délky $2\pi$. Mimo tento interval nabývá totiž funkce definovaná řadou (4.1) hodnot periodicky se opakujících, což u neperiodické funkce není.

Předmětem této kapitoly bude zejména posouzení některých základních otázek, které s aproximací pomocí trigonometrických řad souvisejí (např. výpočet koeficientů $a_k, b_k$, problém konvergence výše uvedené řady k dané funkci $f(x)$ apod.)

**Ortogonalita trigonometrického systému.** Ukazuje se, že při výpočtu koeficientů $a_k$, $b_k$ a obecně v úvahách o aproximaci trigonometrickými řadami je zásadní vlastností tzv. *ortogonalita* (kolmost) systému funkcí $\{\cos kx, \sin kx\}$. Zaveďme proto následující pojmy.

**Definice 4.4.** Řekneme, že funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ *integrovatelná s kvadrátem* (*s druhou mocninou*), jestliže integrál

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

existuje a má konečnou hodnotu. Snadno prověříme, že tuto vlastnost má např. každá funkce spojitá nebo alespoň po částech spojitá v $\langle a, b\rangle$.

**Definice 4.5.** Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou funkce integrovatelné s kvadrátem v $\langle a, b\rangle$. Pak výraz

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme *skalárním součinem* funkcí $f(x)$, $g(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li uvedená hodnota skalárního součinu nulová, tj.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pak funkce $f(x)$, $g(x)$ nazveme *ortogonální* v $\langle a, b\rangle$.

**Poznámka 4.6.** a) Platí: jestliže funkce $f$ je integrovatelná s kvadrátem v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom je také absolutně integrovatelná, tj. $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ a integrovatelná, tj. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

b) Jsou-li funkce $f$ a $g$ integrovatelné s kvadrátem v $\langle a, b\rangle$, potom součin těchto funkcí je integrovatelný v témže intervalu, tj. skalární součin je konečný.

**Definice 4.7.** Nechť funkce $f$ je integrovatelná s kvadrátem. Nezáporné číslo

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

nazýváme *normou funkce* $f$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

**Definice 4.8.** Nechť je dán (konečný nebo nekonečný) systém funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots,$ které jsou v intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelné s kvadrátem. Říkáme, že tyto funkce tvoří v intervalu $\langle a, b\rangle$ *ortogonální systém*, jsou-li každé dvě různé funkce tohoto systému ortogonální, tj. platí

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad i \neq j,$$

Obvykle přitom předpokládáme

$$\|\varphi_i\|^2 = \int_a^b [\varphi_i(x)]^2\,\mathrm{d}x \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots\;,$$

tj. do ortogonálního systému nezahrnujeme funkce nulové nebo skoro všude nulové.

**Věta 4.9.** (Nekonečný) trigonometrický systém funkcí

$$\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots\}$$

je ortogonální v libovolném intervalu délky $2\pi$, tj. v intervalu $\langle c, c + 2\pi\rangle$.

Ortogonalita tohoto systému se dokáže počtářským ověřením příslušných vzorců (pro každé dvě různé funkce $f(x)$, $g(x)$ z tohoto systému musí platit $\int_c^{c+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, kde $c$ je libovolné reálné číslo). Snadno lze spočítat, že

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}\,, \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}\,, \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}\,.$$

Dvojnásobek (a tedy určitá asymetrie) u funkce $\varphi_0(x) = 1$ je důvodem, proč ve vztahu (4.1) vystupuje nultý člen ve tvaru $a_0/2$.

Poznamenejme, že v množině všech integrovatelných funkcí s kvadrátem existují i jiné (nekonečné) ortogonální systémy než systém trigonometrický!

**Poznámka 4.10.** Princip rozvoje funkcí do Fourierových řad je následovný: předpokládejme, že funkci $f$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci (nekonečného) ortogonálního systému $\{\varphi_k\}$ na nějakém intervalu $\langle a;b\rangle$, tj. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$. Násobme nyní rovnost funkcí $\varphi_m$ a integrujme na intervalu $\langle a;b\rangle$, tj.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Předpokládejme dále, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ konverguje stejnoměrně k $f(x)$ na $\langle a;b\rangle$. Potom je možné zaměnit znak sumace a integrace, tj.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože funkce $\varphi_k$ jsou ortogonální, dostáváme

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=c_k\int_a^b \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow c_k=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Koeficienty $c_k$ se nazývají Fourierovy koeficienty.

Na základě ortogonality trigonometrického systému funkcí v libovolném intervalu délky $2\pi$ a této poznámky lze odvodit následující větu, podle které se určí hodnoty koeficientů $a_k, b_k$ ve vyjádření (4.2).

**Věta 4.11. (Určení koeficientů $a_k, b_k$)** Konverguje-li trigonometrická řada (4.1) stejnoměrně k integrovatelné funkci $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$, potom platí

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\,,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\,,\quad k=1,2,\dots. \tag{4.3}$$

**Definice 4.12. (Fourierova řada)** Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$. Pak trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{4.4}$$

kde koeficienty $a_k$, $b_k$ jsou vyjádřeny vztahy (4.3), nazýváme *Fourierovou řadou* funkce $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a značíme ji symbolem $\Phi_f$. Píšeme přitom

$$f\sim\Phi_f\,. \tag{4.5}$$

Zápis (4.5) označuje, že funkční řada $\Phi_f$ patří k funkci $f(x)$. Pokud řada $\Phi_f$ konverguje k funkci $f(x)$, potom píšeme $f(x)=\Phi_f(x)$

**Poznámka 4.13.** Přiřazení Fourierovy řady $\Phi_f$ k dané funkci $f(x)$ vyjádřené vztahem (4.5) je prozatím formální. Připomeňme, že vzorce pro koeficienty $a_k$, $b_k$ byly odvozeny za předpokladu stejnoměrné konvergence této řady. Dosud však nevíme, zda uvedená řada vůbec konverguje (příp. jaký je její součet). Lze nicméně ukázat, že mezi všemi trigonometrickými polynomy (4.2) danou funkci aproximuje v jistém smyslu nejlépe ten polynom, jehož koeficienty jsou dány právě vztahy (4.3); tento „nejlepší“ polynom je tedy právě částečný součet Fourierovy řady.

## B. Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierovy řady

V tomto oddíle uvedeme podmínky, při jejichž splnění je součet Fourierovy řady funkce $f(x)$ roven $f(x)$, příp. podmínky zaručující stejnoměrnou konvergenci této řady.

Funkci $f(x)$ nazveme *po částech spojitou* na intervalu $\langle a, b\rangle$, má-li na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti, přičemž všechny tyto body jsou body nespojitosti prvního druhu (tj. existují zde konečné a různé jednostranné limity).

**Věta 4.14. (Dirichletova)** Nechť $f(x)$ je periodická funkce s periodou $2\pi$, tj. $f(x+2\pi) = f(x)$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$, a nechť $f(x)$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ po částech spojitá a má zde po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada $\Phi_f$ konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ k aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva funkce $f(x)$, takže platí:

(1) $\Phi_f(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$, v němž je $f(x)$ spojitá;

(2) $\Phi_f(x) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0-} f(x) + \lim_{x\to x_0+} f(x)]$ v každém bodě $x_0 \in (-\infty, \infty)$, v němž je $f(x)$ nespojitá.

**Poznámka 4.15. (O konvergenci rozvoje neperiodické funkce)** Předpokládejme, že $f(x)$ je po částech spojitá na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a má zde po částech spojitou derivaci (nepožadujeme tedy, aby $f(x)$ byla periodická s periodou $2\pi$; nemusí tedy ani platit $f(-\pi) = f(\pi)$). Pak se tvrzení Dirichletovy věty změní takto:

(1) $\Phi_f(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f(x)$ spojitá;

(2) $\Phi_f(x) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0-} f(x) + \lim_{x\to x_0+} f(x)]$ v každém bodě $x \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f(x)$ nespojitá;

(3) $\Phi_f(-\pi) = \Phi_f(\pi) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to -\pi+} f(x) + \lim_{x\to \pi-} f(x)]$.

Vlastnosti (1) – (3) tedy udávají, k jaké funkci konverguje Fourierova řada $\Phi_f$ na uzavřeném intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Na intervalu $(-\infty, \infty)$ pak zřejmě $\Phi_f$ konverguje k tzv. $2\pi$-periodickému rozšíření této funkce.

**Příklad 4.16.** Stanovme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ v intervalu $(-\pi, \pi)$ a ukažme, k jaké funkci tato řada konverguje na $(-\infty, \infty)$.

*Řešení.* Podle vzorců (4.3) je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = 0\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2\pi\cos k\pi}{k\pi} = (-1)^{k+1}\frac{2\pi}{k\pi} \quad \Rightarrow \quad b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\,.$$

Tedy

$$x \sim 2\Big(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\Big) \equiv \Phi_f. \tag{4.6}$$

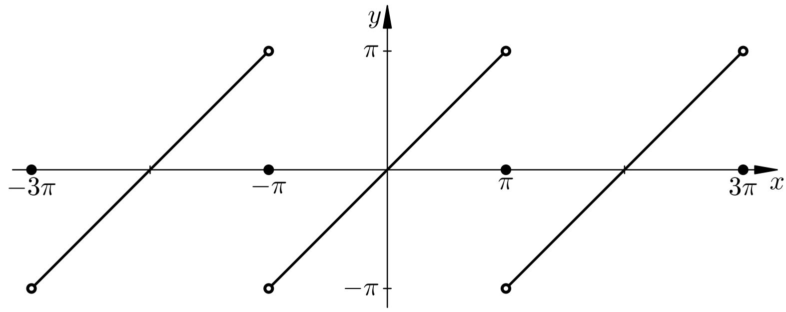
Stanovili jsme tedy hodnotu součtu Fourierovy řady $\Phi_f$ funkce $f(x) = x$ v intervalu $(-\pi, \pi)$. K určení hodnoty součtu dané řady v krajních bodech $x = \pm\pi$ lze postupovat buďto podle vztahu (3) uvedeného v poznámce za Jordanovou větou, nebo přímým dosazením těchto krajních bodů do vyjádření (4.6). V obou případech ihned dostáváme, že hodnota součtu řady je pro $x = \pm\pi$ nulová.

K posouzení konvergence řady (4.6) k funkci $f(x) = x$ stačí ověřit platnost předpokladů poznámky za Dirichletovou větou (neboť $f(x) = x$ není periodická). Vzhledem ke spojitosti funkce $f(x)$ platí

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = 2\Big(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\Big)\,, \tag{4.7}$$

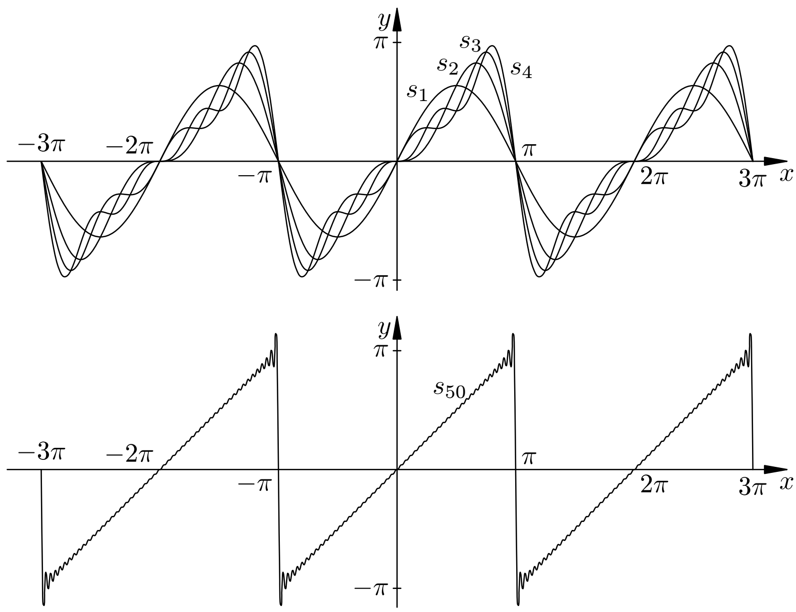
kde $x \in (-\pi, \pi)$, a pro tato $x$ tedy konverguje daná řada k funkci $f(x) = x$.

Součet této řady na $(-\infty, \infty)$ je pak určen $2\pi$-periodickým rozšířením z intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Graf tohoto rozšíření (a tedy i graf součtu příslušné Fourierovy řady $\Phi_f$) na intervalu $(-\infty, \infty)$ je zachycen na obr. 4.1.




Obr. 4.1: Součtová funkce

Na závěr tohoto příkladu ještě graficky ilustrujme konvergenci Fourierovy řady ke svému součtu. Místo dané nekonečné řady uvažujme pouze její $n$-tý částečný součet $s_n(x)$ (uvažujeme tedy prvních $n$ členů této řady představujících trigonometrický polynom stupně $n$). Pro různé hodnoty $n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 50$) pak dostáváme následující grafická vyjádření:




Obr. 4.2: Graf vybraných částečných součtů

Z obr. 4.2 je dobře vidět, že je-li částečný součet této řady vyššího stupně, začínají se příslušné funkce v bodech $x = (2k + 1)\pi$ „trhat“ a grafy těchto částečných součtů se vskutku blíží k nespojité součtové funkci znázorněné na obr. 1.

Nyní se budeme zabývat otázkou, kdy Fourierova řada funkce $f(x)$ konverguje stejnoměrně na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Především zdůrazněme, že stejnoměrnou konvergenci lze očekávat pouze u Fourierových řad spojitých funkcí (členy této řady jsou totiž spojité funkce $\sin kx$, $\cos kx$, jejichž součtem musí být v případě stejnoměrné konvergence opět spojitá funkce).

**Věta 4.17. (Jordanovo kritérium stejnoměrné konvergence)** Nechť $f(x)$ je periodická funkce s periodou $2\pi$, která je na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ spojitá a má po částech spojitou derivaci. Potom Fourierova řada $\Phi_f$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

**Poznámka 4.18. (O stejnoměrné konvergenci rozvoje neperiodické funkce)** Není-li $f(x)$ periodická, avšak splňuje oba zbývající předpoklady předcházející věty, pak lze dokázat stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady $\Phi_f$ k funkci $f(x)$ na libovolném intervalu $\langle a, b \rangle \subset (-\pi, \pi)$. Je-li navíc $f(-\pi) = f(\pi)$, pak stejnoměrná konvergence $\Phi_f$ k $f(x)$ platí přímo na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

**Poznámka 4.19. (O sudé a liché funkci)** Vraťme se ještě jednou k výpočtu Fourierových koeficientů $a_k, b_k$ ve výše uvedeném příkladu. Skutečnost, že hodnoty koeficientů $a_k$ jsou pro všechna přirozená $k$ nulové, totiž není náhodná. Lze snadno zjistit, že se jedná o důsledek lichosti funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Tento poznatek nyní zobecníme do následujícího tvrzení:

Nechť funkce $f(x)$ je na $(-\pi, \pi)$ integrovatelná. Je-li zde $f(x)$ sudá, tj.

$$f(-x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (-\pi, \pi),$$

potom příslušná Fourierova řada je kosinová, takže

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Je-li $f(x)$ na tomto intervalu lichá, tj.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (-\pi, \pi),$$

potom příslušná Fourierova řada je sinová, takže

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

**Sinová a kosinová řada.** Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $(0, \pi)$. V některých úlohách požadujeme, aby příslušná Fourierova řada byla pouze sinová řada, resp. pouze kosinová řada. Z předcházející poznámky plyne, že k tomuto účelu je třeba dodefinovat funkci $f(x)$ na interval $(-\pi, 0)$ jako funkci lichou, resp. sudou, a poté sestrojit příslušnou Fourierovu řadu.

**Příklad 4.20.** Vyjádřeme funkci $f(x) = \cos x$, $x \in (0, \pi)$ jako součet sinové a kosinové Fourierovy řady.

*Řešení.* a) Uvažujme nejprve řadu kosinovou. Danou funkci dodefinujeme jako funkci sudou, tj. pro $x \in (-\pi, 0)$ klademe $f(x) = f(-x) = \cos(-x) = \cos x$. Potom dostáváme $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$ a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = 0\,, \\
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} = 0\,, \qquad k \neq 1\,, \\
a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme vyjádření

$$\cos x = \cos x, \qquad x \in (0, \pi).$$

Fourierova řada tedy má jediný nenulový člen shodný s původní funkcí.

b) Nyní uvažujme řadu sinovou. Funkci $f(x)$ dodefinujeme jako funkci lichou, tj. pro $x \in (-\pi, 0)$ platí $f(x) = -f(-x) = -\cos(-x) = -\cos x$. Pak dostáváme $a_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ a

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(k+1)x + \sin(k-1)x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^k + 1}{k+1} + \frac{(-1)^k + 1}{k-1} \right]_0^{\pi} = \frac{2k[(-1)^k + 1]}{\pi(k^2 - 1)} = \begin{cases} 0\,, & \text{pro } k \text{ lichá, } k \neq 1\,, \\ \frac{4k}{\pi(k^2-1)}\,, & \text{pro } k \text{ sudá}\,; \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Platí tedy

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kx, \qquad x \in (0, \pi).$$

**Poznámka 4.21.** (**Fourierova řada v obecném případě**) Na závěr této kapitoly si ukážeme, jak lze výše odvozené výsledky snadno využít k nalezení Fourierových řad funkcí s obecnou periodou $2l$. Budeme tedy dále uvažovat periodické funkce $f(x)$ s periodou $2l$, případně funkce definované na obecném intervalu délky $2l$, tj. na intervalu $\langle c, c+2l\rangle$. Pak obecněji platí, že nekonečný systém funkcí

$$1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

je ortogonální v libovolném intervalu $\langle c, c+2l\rangle$ délky $2l$. Příslušná Fourierova řada pak má tvar

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

kde funkce $f(x)$ je integrovatelná na $\langle c, c+2l\rangle$. Pro Fourierovy koeficienty přitom platí

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Poznamenejme, že výsledky uvedené v této kapitole pro interval $\langle -\pi, \pi\rangle$ lze nyní snadno přeformulovat pro interval $\langle c, c+2l\rangle$.

**Příklad 4.22.** Určeme Fourierovu řadu $\Phi_f$, která je periodickým prodloužením funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

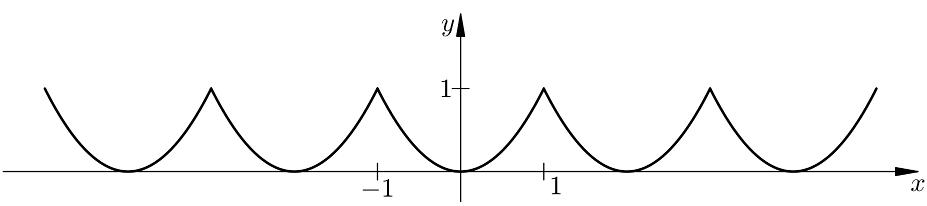
*Řešení.* Pomocí předcházejících vzorců (kde $c = -1$, $l = 1$) a vzhledem k sudosti dané funkce dostáváme $b_k = 0$ a

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad a_k = 2\int_0^1 x^2 \cos k\pi x\,\mathrm{d}x = 2\left\{\left[x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\,\mathrm{d}x\right\} =$$
$$= -2\left\{\left[2x\frac{-\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Odtud dosazením do vztahu (4.4) dostáváme

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi x, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle, \tag{4.8}$$

přičemž konvergence řady je na daném intervalu stejnoměrná. Vně tohoto intervalu pak nalezená Fourierova řada stejnoměrně konverguje k funkci, která je periodickým prodloužením funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1, 1\rangle$, a která je znázorněna na obr. 4.3.




Obr. 4.3: Periodické prodloužení paraboly

**Užití Fourierových řad.** Kromě řady významných uplatnění v teorii obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, která budou uvedena později, lze Fourierovy řady využít také ke stanovení součtu některých číselných řad. Jestliže např. do vztahu (4.8) dosadíme $x = 0$, dostáváme vyjádření

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Zvolíme-li $x = 1$, pak dostáváme

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2k}}{k^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Shrnutí poznatků o Fourierových řadách

Fourierovy řady jsou limitou posloupnosti trigonometrických polynomů, které mají část složenou z kosinů a část ze sinů. Používají se především při studiu jevů s periodickým charakterem. Výhodou těchto řad je skutečnost, že požadavky kladené na jejich konvergenci k rozvíjené funkci jsou slabší než v případě rozvojů do Taylorových řad (nepožadujeme např. existenci derivací všech řádů dané funkce v daném bodě; nepožadujeme dokonce ani spojitost rozvíjené funkce). Rovněž výpočet koeficientů může být (zejména při použití numerických metod) jednodušší záležitostí než u řad Taylorových.

Rozvojů funkcí do Fourierových řad se s úspěchem používá především k hledání (periodických) řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic.