Soustava lin.rovnic

definujeme jako:

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

afinní podprostor / lin.množina F

F je podmn. VP V, U je podprostor V

$$F = \mathbf{x} + U = \{\mathbf{x} + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}$$

- F určuje U:
  $$U = \{\mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F\}$$
- **geom.interpretace**
  - dim(F)=dim(U)
  - **přímka** = 1-dimenzionální F
  - **rovina** = 2-dimenzionální F
  - **nadrovina** = n-1 dimenzionální F n-dim. prostoru
  - ⇑ platí i v eukleid.prostoru
- **souvislost řešení hom.a nehom.soustav:**
  řešení soustavy je afinní podpr. F
  $$F = \{\mathbf{x}_0 + L\}$$
  kde $\mathbf{x_0}$ je 1 řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  a L je množ. všech řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
  - A**x**=**0** je **homogenní** soustava
    - množina řešení A**x**=**0** je ortog.doplněk řádků A
      $$L = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}^{\perp}$$

řešení soustavy
- sestavit rozšířenou matici soustavy
- převézt pomocí elem.úprav do odst.tvaru
- zpětnou substitucí najít všechna řešení

Gaussova eliminace

$$O(m + n^2)$$

- setřídíme řádky podle p(i)
- najdeme řádky p(i)==p(i+1)
  a přičteme k i+1 řádku k-násobek i-tého
  $$k = -\frac{a_{i+1,p(i)}}{a_{i,p(i)}}$$
- opakujeme předchozí 2 dokud ∃ p(i)==p(i+1)

Zpětná substituce

Buď (A **b**) rozšířená matice soustavy A**x**=**b** v odstupňovaném tvaru (získaná pomocí elementárních úprav). Pokud počáteční úsek nul na nějakém řádku má délku n (tedy nenulové číslo je jen ve sloupci pravých stran), soustava nemá řešení. Jinak nazveme **bázové proměnné** ty, v jejichž sloupci je v nějakém řádku první nenulové číslo, ostatní nazveme **volné**. Existuje potom jednoznačné přiřazení hodnot bázovým proměnným tak, že dohromady tvoří řešení soustavy. Každé řešení je navíc možné získat touto metodou

lze zapsat jako

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- A je matice soustavy
- **b** je sloupcový vektor pravých stran
  - A**x**=**b** je **nehomogenní** ⇔ ∃bi≠0
  - **Frobeniova věta**
    A**x**=**b** má alespoň 1 řešení ⇔ rank(A)=rank(A **b**)
    - (A **b**) je **rozšířená matice soustavy**
- **x** je sloupcový vektor neznámých

elementární úpravy
- přičtení j-tého řádku k i-tému i≠j
  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A$$
- vynásobení i-tého řádku číslem α≠0
  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A$$
  - matice elem.operace se vytvoří provedením operace na matici I
- přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému i≠j
- záměna 2 řádků
  - jdou vyjádřit z předchozích 2
- elem.úpravy na (A **b**) soustavy A**x**=**b** nemění množinu řešení soustavy
  - Důkaz: **TODO**

odtupňovaný tvar- matice v níž jsou první nenulové prvky řádků zvané **pivoty** uspořádány jako schody klesající zleva doprava