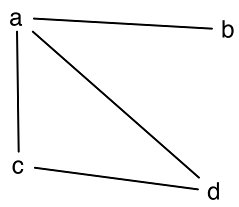
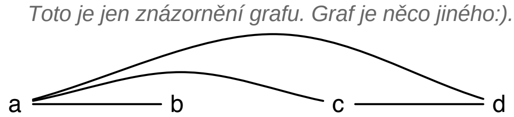
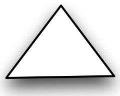
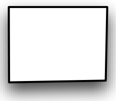
- *#1: 06/10/6*
- **Přednášející**
- **Literatura**
- **Co je diskrétní matematika**
- **Příklady úloh**
- **Pojmy**
- *#2: 06/10/13*
- **Binární relace**
- **Uspořádání**
- **Zobrazení, permutace a faktoriál**
- *#3: 06/10/20*
- **Zobrazení (pokračování)**
- **Kombinační číslo**
- **Binomická věta**
- **Multinomická věta**
- *#4: 06/10/27*
- **Multinomická věta (z minula)**
- **Odhady faktoriálů a kombinačních čísel**
- **Princip inkluze a exkluze**
- *#5: 06/11/03*
- **Princip inkluze a exkluze (pokračování)**
- **Úvod do teorie grafů**
  - **Definice.** *Graf G* je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je libovolná konečná množina (obecněji libovolná) a $E \subseteq$ (V nad 2)
    - V … vrcholy (vertices)
    - E … hrany (edges)
  - Př.: G = {{a,b,c,d} {{a,b}, {a,c}, {a,d}, {c,d}}
    - 

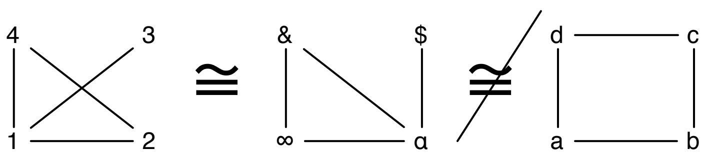
      Toto je jen znázornění grafu. Graf je něco jiného:).
    - 

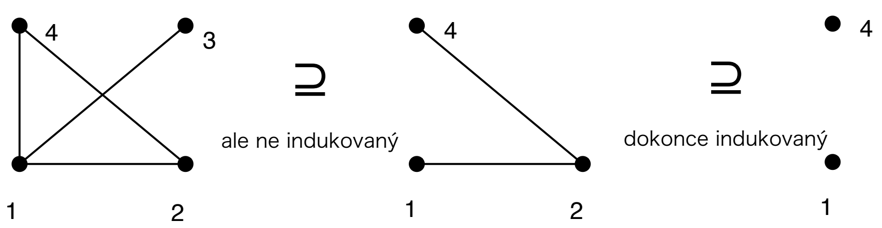
  - **Definice.** *Úplný graf K_n* (na n vrcholech): všechny možné hrany
    - K_n = (V,(V nad 2)), |V| = n
  - **Definice.** *Kružnice*

- $C_n = (\{v_1,\ldots,v_n\}, \{ \{v_1,v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_n, v_{n-1}\}, \{v_n,v_1\} \}), n \geq 3$
- $C_3 =$ 
- $C_4 =$ 
- délka = počet vrcholů = počet hran

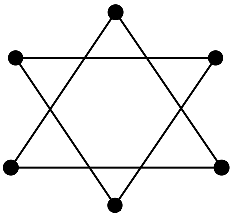
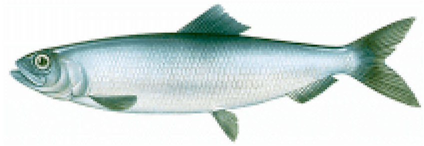
- *#6: 06/11/10*

- **Úvod do teorie grafů (pokračování)**
  - **Definice.** *Cesta*
    - $P_n = (\{v_0, \ldots, v_n\}, \{ \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_n, v_{n-1}\} \}); n \geq 0$
    - délka = počet hran = počet vrcholů - 1
  - **Definice.** *Úplný bipartitní graf* $K_{m,e}$
    - $V = \{v_1, \ldots v_m, w_1, \ldots w_e\}$
    - $E = \{ \{w_i, w_j\}; i=1\ldots m, j=1\ldots e \}$
    - $|E(K_{m,e})| = m \cdot e$
  - **Definice.** *Bipartitní graf*
    - $V = \{v_1, \ldots v_m, w_1, \ldots w_e\} = V_1 \dot\cup V_2$
    - $E \subseteq \{ \{v, v'\}; v \in V_1, v' \in V_2 \}$ (je podmožinou odpovídajícího úplného grafu)
  - **Definice.** *Isomorfismus*
    - Grafy s „přeznačením“ vrcholů jsou *isomorfní.*
    - Formálně: $G \cong G' \Leftrightarrow \exists$ bijekce f mezi V(G) a V(G') taková, že ($\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G')$)
    - Zápis: $G \cong G'$

      Př.:
    - 

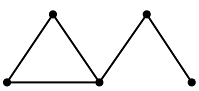
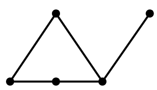
    - Pozn.: Isomorfismus je ekvivalence (RST).
  - **Definice.** G je *podgraf* grafu G': ($G \subseteq G'$)
    - $V(G) \subseteq V(G')$ & $E(G) \subseteq E(G') \cap (V(G')$ nad $2)$
  - **Definice.** G je *indukovaný podgraf* grafu G': ($G \subseteq G'$)
    - $V(G) \subseteq V(G')$ & $E(G) = E(G') \cap (V(G')$ nad $2)$
    - Příklad: 

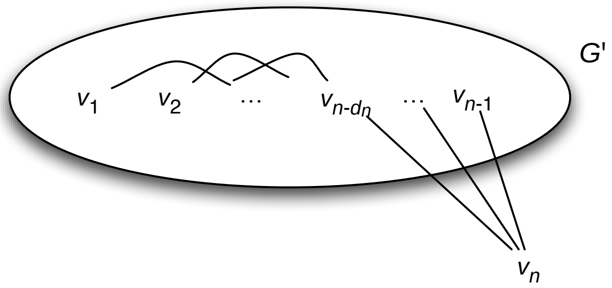
    - Pozorování: Graf na n vrcholech má 2^n indukovaných podgrafů (vybírám jen vrcholy, hrany se vyberou samy, neboli každá podmožina množiny V indukuje indukovaný podgraf).
  - **Definice.** G je *souvislý* graf
    - $\forall x,y \in V(G)\ \exists$ v G cesta z x do y

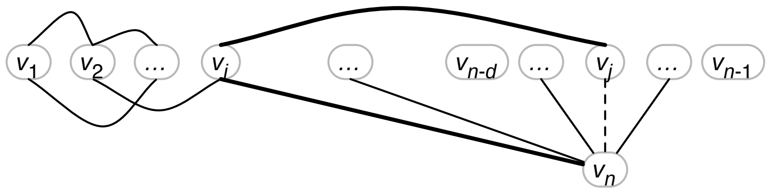
  - Příklad: (nesouvislý) 
- Značení: $x \sim_G y \Leftrightarrow$ v G existuje cesta z x do y
  - $x \sim_G y$ je ekvivalence na V(G)
  - **Definice.** *sled*: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1 \ldots m$
    - 

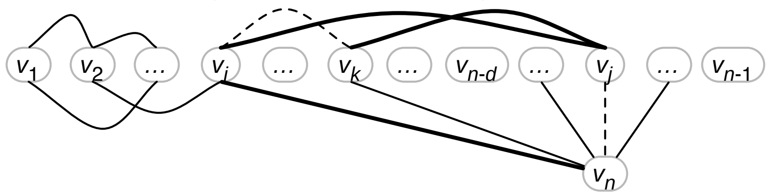
    Sleď pacifický, převzato z Encyklopedie Worldbook
  - Důkaz transitivity
    - $x \sim_G y$ & $y \sim_G z \Rightarrow \exists$ sled z x do z (v G)
    - nejkratší sled z x do z je cestou $\Rightarrow x \sim_G z$
- **Definice.** podgrafy indukované třídou ekvivalence $\sim_G$ se nazývají *komponenty* grafu *G*
  - Poznámka: Souvislý graf má tedy jednu komponentu (sebe sama).
  - Poznámka: *G* souvislý $\Leftrightarrow \forall x, y \in V(G)\ \exists$ sled z *x* do *y*.
- **Definice.** *vzdálenost* x,y v G: $d_G(x,y)$ = délka nejkratší cesty z x do y
  - Poznámka: $d_G(x,y)$ má vlastnosti metriky:
    - $d_G(x,y) \geq 0$
    - $d_G(x,y) = 0 \Leftrightarrow x, y$
    - $d_G(x,y) = d_G(y,x)$
    - $d_G(a,c) \leq d_G(a,b) + d_G(b,c)$
- **Definice.** y je *soused* x v G pokud $\{x,y\} \in E(G)$
- **Definice.** *matice sousednosti*
  - G = ({v1, …, vn}, E)
  - $A_G = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, kde a_{ij} = ({vi,vj} ∈ E) ? 1 : 0
  - (závisí na očíslování vrcholů)
- **Definice.** *stupeň vrcholu* x *v* G: $\deg_G(x)$ = počet hran obsahujících *x* = počet sousedů *x* = součet příslušného řádku (sloupce) A_G

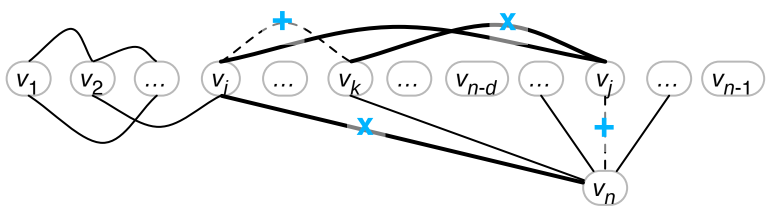
- *#7: 06/11/24*

- **Skóre grafu**
  - **Věta.** *Princip sudosti*:
    - $\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$
    - Důkaz: Vlevo každá hrana přispěje dvakrát.
    - Důsledek: $\forall G$: počet vrcholů lichého stupně je vždy sudý (jinak by $\sum_{v \in V} \deg_G(v)$ nemohlo být sudé).
  - **Definice.** $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$: *skóre grafu* $G = D(G) = (\deg_G(v_1), \ldots, \deg_G(v_n))$, kde skóre jsou stejná, pokud se liší jen pořadím prvků.
    - Příklad:
      - Grafy  a  mají skóre (1,2,2,2,3), ale nejsou isomorfní.
        - $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 10$, $|E(G)| = 5$
  - Věta o skóre: $D = (d_1, \ldots, d_n)$, $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$

- D je skóre nějakého grafu $\Leftrightarrow$ $D' = (d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1)$ je skóre nějakého gra
- Příklad použití: Je (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4) skóre grafu?
  - 123334**4** je skóre (nějakého grafu) ⇔
    ⇔ 12222**3** je skóre ⇔
    ⇔ 12111 je skóre ⇔ *(změna pořadí)*
    ⇔ 1111**2** je skóre ⇔ 1100 je skóre ⇔ 001**1** je skóre ⇔ 000 je skóre (tři nespojené vrcholy).
  - Ano, je to tedy skóre.
- Důkaz:
  - implikace ⇐:
    - G' má skóre D'
    - 

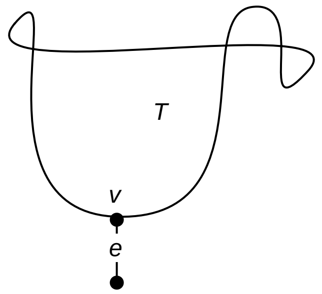
    - Přidáme nový vrchol v_n a spojíme ho hranou s vrcholy $v_{n-d_n}, \dots, v_{n-1}$, dostáváme graf se skóre D.
  - implikace ⇒:
    - Mějme $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ se skóre D, označme $d = d_n = \deg v_n$
    - 1. případ: z v_n vedou hrany právě do vrcholů $v_{n-d}, \dots v_{n-1}$ (tj. do předchozích d vrcholů:
      - Odstraněním těchto hran a vrcholu v_n dostaneme graf se skóre G' (jako v první implikaci, ale pozpátku).
    - 2. případ (neplatí první případ):
      - Potom $\exists\, i < n\text{-}d \leq j$: $\{v_i, v_j\} \in E$, $\{v_j, v_n\} \notin E$:
      - 

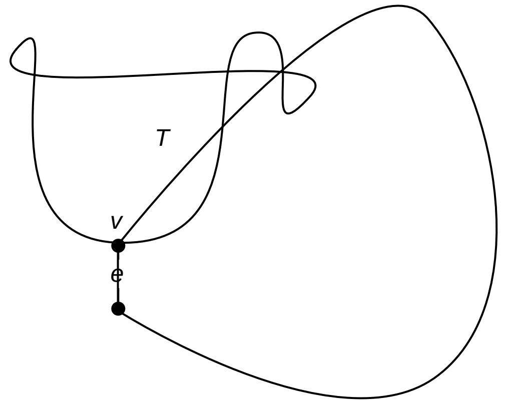
      - Protože $\deg v_i \leq \deg v_j$, existuje v_k takový, že $\{v_j, v_k\} \in E$, $\{v_i, v_k\} \notin E$:
      - 

      - Přidejme do E hrany $\{v_i, v_k\}$, $\{v_j, v_n\}$ a odeberme $\{v_i, v_n\}$, $\{v_j, v_k\}$, skóre zůstává D:
      - 

      - Opakováním postupu dostaneme první případ.

- **Grafy „jednotažky“**
  - Uzavřený tah začíná a končí ve stejném vrcholu.

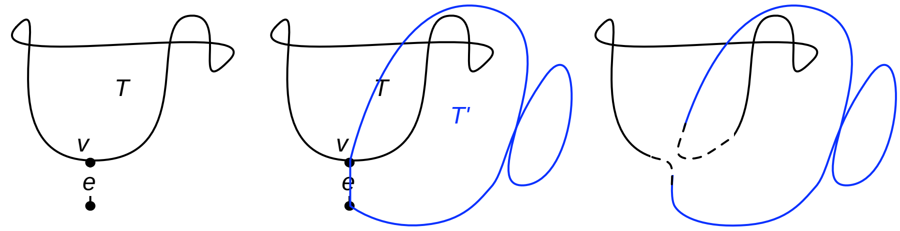
- Opakování: *sled*: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1\ldots m$
- **Definice.** *tah*: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1\ldots m$, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$)
- **Definice.** *uzavřený tah*: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1\ldots m$, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$), $v_0 = v_m$
- Alternativně: *cesta*: $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1\ldots m$, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$), $v_i = v_j$ *(pro $i \neq j$)*
- **Definice.** Graf G je *eulerovský* (lze nakreslit jedním uzavřeným tahem), pokud existuje uzavřený tah, takový, že $\forall e \in E\ \exists! i: e = e_i\ \&\ \forall v \in V\ \exists i: v = v_i$
- **Věta.** G je eulerovský $\Leftrightarrow$ G je souvislý a všechny stupně v G jsou sudé
  - Důkaz:
    - implikace $\Rightarrow$:
      - Uzavřený eulerovský graf dává *souvislost* (mezi každými dvěma vrcholy existuje tah) i *sudé stupně* (při procházení sledu, projdu vrchol k-krát, připadá na něj tedy $2k$ hran – k dovnitř a k ven, platí i pro „počáteční“ = „koncový“ vrchol)
    - implikace $\Leftarrow$:
      - Pozorování: Všechny stupně sudé (ne nutně souvislý graf)$\Rightarrow$ každou hranou vede nějaký uzavřený tah
        - Důkaz: nejdelší tah danou hranou je uzavřený
          - Předpokládejme, že není uzavřený:
            - Chodíme v grafu, když se dostaneme do nějaké hrany, můžeme ho vždycky prodloužit (vede z ní „neprojitá“ hrana).
      - $G = (V, E)$ souvislý graf, všechny stupně sudé
        - Ukážeme sporem, že nejdelší uzavřený tah T v G je eulerovský:
          - Nechť není eulerovský (nenakreslí celý graf), potom (ze souvislosti) existuje
            - $e \notin E(T)$
            - $v \in V(T)$
            - 

            - 

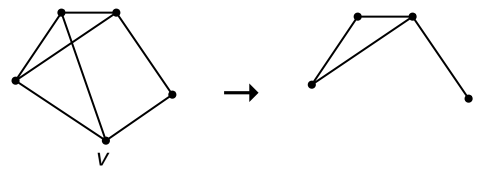
          - (pokračování příště)

- *#8: 06/12/01*

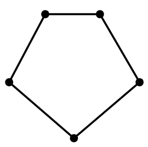
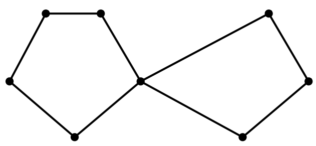
- **Grafy „jednotažky“ (pokračování)**
  - (**Věta.** G je eulerovský $\Leftrightarrow$ G je souvislý a všechny stupně v G jsou sudé)
    - (Důkaz:)

- implikace $\Leftarrow$ (pokračování):
  - V grafu G' = (V, E-E(T)) jsou všechny stupně sudé, tedy hranou e vede uzavřený tah T' v G' (podle Pozorování).
  - Ve vrcholu v propojíme T, T' do jednoho uzavřeného tahu:
  - 

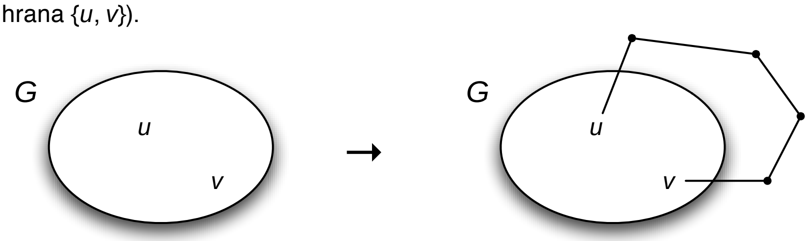
  - Delší než T: Spor.
  - Tedy T musel být eulerovský.

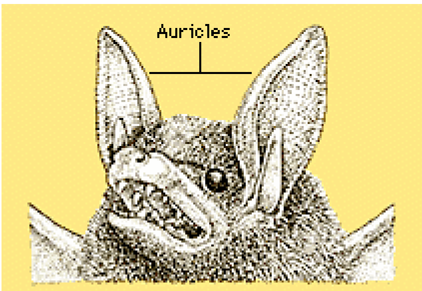
- **Některé operace na grafech**
  - **Definice.**
    - *G* = (*V*, *E*) graf
    - *odebrání hrany* e ∈ E
      - *G* → *G* - *e* = (*V*, *E*-{*e*})
    - *přidání hrany* e ∈ (V nad 2)-E
      - G → G + e = (V, E ∪ {e})
    - *odebrání vrcholu* v ∈ V
      - G → G - v = (V, {e ∈ E: v∉e})
      - 

    - *dělení hrany* e = {x, y} ∈ E
      - G → G % v = (V ∪ {z}, z∉V; (E-{e})∪ {{x, z}, {y, z}})
      - **Definice.** *G'* je *dělení* grafu *G*, pokud ho dostaneme z G postupným opakováním operace dělení hrany.
        - Ekvivaletně: G' dostaneme z G nahrazením hran cestami délek ≥ 1.

- **2-souvislost grafu**
  Čte se „dvousouvislost".
  - **Definice.** Graf *G* = (*V*, *E*) je (vrcholově) *2-souvislý*, pokud |*V*| ≥ 3 a ∀*v* ∈ *V*: *G*-*v* je souvislý.
    - Moje poznámka (dle skript): Obdobně *k-souvislý*, pokud odebráním libovolných nejvýše k-1 vrcholů získáme souvislý graf.
  - Příklady:
    -  je 2-souvislý.
    -  není 2-souvislý.
  - **Definice.** Graf *G* = (*V*, *E*) je *hranově 2-souvislý*, pokud *G* je souvislý a ∀*e* ∈ *E: G-e*.
  - Pozorování. *G* 2-souvislý, pak:
    - a) *G* + *e* je 2-souvislý pro ∀*e* ∈ (*V* nad 2)-*E*
      - Dá se snadno vymyslet proč.

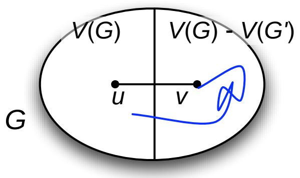
- b) $G - e$ je souvislý pro $\forall e \in E$
  - Důkaz:
    - $e = \{x, y\} \in E$
    - G-x je (z definice) souvislý $\Rightarrow$ y je v G-e v jedné komponentě s vrcholem $v \neq x$.
    - G-y je souvislý $\Rightarrow$ y je v G-e v jedné komponentě s vrcholem $v \neq y$.
    - Z předchozích dvou plyne, že všechny vrcholy jsou v jedné komponentě. Tedy G-e má jednu komponentu.
  - TODO: Takže vrcholově ⇒ hranově 2-souvislý
- c) $G \% e$ je 2-souvislý pro $\forall e \in E$
  - Důkaz:
    - $G' = G\%e$ (s přidaným vrcholem z)
    - G'-v je souvislý pro $\forall v \neq z$
  - G'-z = G-e je souvislý podle b)

- **Definice.** *Přidání ucha* ke grafu
  - Přidání cesty mezi u, v, vnitřní vrcholy cesty jsou nové vrcholy (pokud $\{u, v\} \notin E(G)$, může být uchem hrana $\{u, v\}$).
  - 

    $u \neq v$
  - 

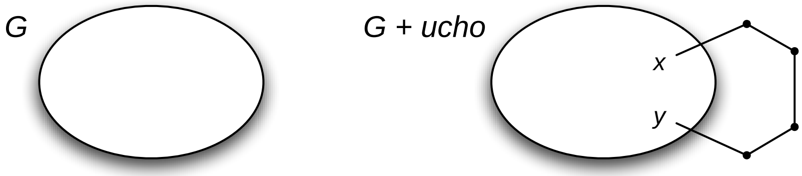
    Alternativní ilustrace, převzato z encyklopedie World Book 2004.
- Lemma o uších

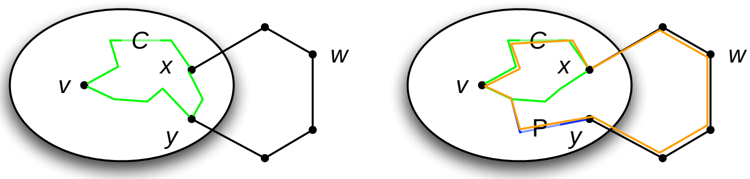
  …nebo „o uchách"?
  - G je 2-souvislý ⇔ G lze dostat z kružnice postupným přidáváním uší.
  - Důkaz:
    - implikace ⇐:
      - Přidání ucha lze složit z přidávání a dělená hran: nejdříve rozdělím hranu a pak přidám k původním koncovým vrcholům ucho (v tomhle pořadí to vždycky funguje).
    - implikace ⇒:
      - V G ∃ kružnice: $\{x, y\} = e \in E$ libovolná hrana
      - G-e souvislý ⇒ v G-e existuje cesta z x do y, a ta spolu s e tvoří kružnici. (Našli jsme tedy kružnici ve 2-souvislém grafu.)
      - Nechť G' je podgraf G, který vznikne z kružnice přidáváním uší. Stačí ukázat G'≠G ⇒ ke G' můžeme přidat další ucho s hranami z E(G).
      - Pokud V(G') = V(G): můžeme přidat libovolnou hranu $e \in E(G) - E(G')$
      - Pokud $V(G') \subset V(G)$: souvislost G ⇒ existuje hrana $\{v, w\} \in E(G)$ mezi V(G') a V(G)-V(G')

- 

- Nechť P je nejkratší cesta z w do V(G') v G-v, potom P+hrana {v,w} je ucho, které můžeme přidat ke G'.

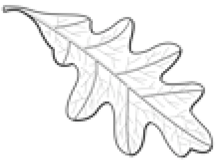
- *#9: 06/12/08*

- **2-souvislost grafu**
  - Důsledek lemmatu o uších: *G* 2-souvislý ⇔ *G* vznikne z K_3 postupným přidáváním a dělením hran.
    - Takhle je to ve skriptech.
    - Důkaz: z lemmatu o uších.
  - **Věta.** Ve 2-souvislém grafu leží každé dva vrcholy na společné kružnici.
    - Důkaz:
      - Podle lemmatu o uších stačí dokázat, že věta platí pro $G \Rightarrow$ věta platí pro G + ucho (skrytá indukce?)
      - 

      - v, w – dva vrcholy v G + ucho (x, y koncové body ucha).
      - Nechť $v \in V(G)$, $w \notin V(G)$ (ostatní případy zřejmé).
      - Nechť C = společná kružnice pro v, x.
      - 2 případy:
        - 

        - Nechť P = Nejkratší cesta z y do $V(C)$ v G-x.
        - Okomentovat TODO
      - Poznámka: V 2-souvislém grafu leží také libovolné dvě hrany na společné kružnici.

- **Stromy**

- 
- **Definice.** *Strom* je souvislý graf bez kružnice mající alespoň jeden vrchol.
  - Poznámka: Podle skript má každý graf aspoň jeden vrchol, pak je taková podmínka pro strom zbytečná.
- **Definice.** *List* je vrchol stupně 1.
  - 

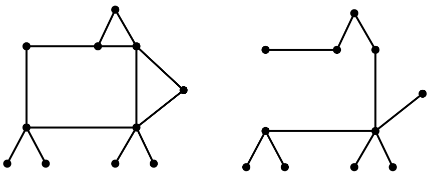
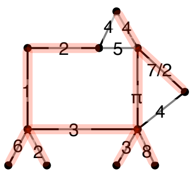
    List (převzato z New Oxford American Dictionary)
- Tvrzení: Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy.
  - Důkaz: Koncové vrcholy nejdelší cesty jsou listy.

    To (říkají to i ve skriptech) neplatí pro nekonečné stromy.
- Pozorování: G graf, $v \in V(G)$ list, potom G je strom $\Leftrightarrow$ G-v je strom
  - Důkaz: G obsahuje kružnici $\Leftrightarrow$ G-v obsahuje kružnici & G souvislý $\Leftrightarrow$ G-v souvislý. (Je třeba si uvědomit význam definice listu.)
- Důsledek: G strom $\Leftrightarrow$ z G dostaneme graf K_1 postupným odebíráním listů.
- **Věta.** Nechť $G(V, E)$ je graf a $|V| \geq 1$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní („NTJE"):
  - (1) G je strom (souvislý graf bez kružnice mající alespoň jeden vrchol)
  - (2) $\forall x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y
  - (3) G je souvislý, ale G-e není souvislý pro $\forall e \in E$
  - (4) G nemá kružnici, ale G+e má kružnici pro $\forall e$, které nejsou v G.
  - (5) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$

    Podle srkipt se tomu říká Eulerův vzorec.
- Důkazy předchozích vět (stačí dokázat implikace 1-2-3-4-5-1, ale uděláme i nějaké navíc):
  - Důkaz $1 \Rightarrow 2$
    - Souvislý $\Rightarrow$ existuje cesta z x do y.
    - Bez kružnic $\Rightarrow$ neexistují 2 cesty z x do y.
      - Nechť P, R jsou různé cesty z x do y
        - P = $x\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots y$
        - R = $x\ e_1'\ v_1'\ e_2'\ v_2' \ldots y$
        - Dejme tomu, že cesty se od sebe v určité chvíli rozejdou a pak zase sejdou (to se může stát i vícekrát). Tím se ale vytvoří kružnice. Spor.
          - (Rozepsáno formálně: *kdo to má opisovat furt…*)
  - Důkaz $2 \Rightarrow 3$
    - Vede cesta mezi každými dvěma vrcholy $\Rightarrow$ souvislost
    - $e = \{x, y\}$,
    - G-e není souvislý, jinak by existovaly 2 cesty z x do y.
  - Důkaz $3 \Rightarrow 4$

- - Předpoklad 3, nechť má kružnici, spor s 3 (vynecháním libovolné hrany kružnice se neporuší souvislost), tedy nemá kružnici.
  - Důkaz, že $G+e$ má kružnici:
    - Souvislý, přidáme hranu $e = \{x, y\}$. Mezi $\{x, y\}$ je cesta (která neobsahuje e). Hrana e a tato cesta tvoří dohromady kružnici.
- Důkaz 4⇒1
  - Bez kružnic – Ok.
  - Chceme dokázat 4⇒souvislý:
    - mějme dva vrcholy $\{x, y\} \in V(G)$
      - a) $\{x, y\}$ hrana – Ok.
      - b) $\{x, y\}$ ne hrana
        - $G+e$ má kružnici (která nebyla v G) pro $e = \{x, y\}$, tedy nutně prochází hranou e, když ji umažeme, zbude z ní cesta mezi x a y.
- Důkaz 1⇒5
  - Máme strom (tedy souvislý). Z důsledku výše (G strom ⇔ z G dostaneme graf K_1 postupným odebíráním listů.) plyne, že $|V| = |E| + 1$. (Odebrání listu ⇒ odebrání hrany.)
- Důkaz 5⇒1
  - Souvislý a $|V|=|E|+1$.
  - G nemá kružnici:
    - Pokud by měl kružnici, odebereme jednu její hranu a neporušíme souvislost, má-li stále ještě nějaké kružnice, opět mu odebereme hranu atd.
    - Dostaneme graf $G' = (V,E')$ souvislý bez kružnice (tedy strom) tedy $|V|=|E'| +1$ ve sporu s tvrzením $|V|=|E|+q$

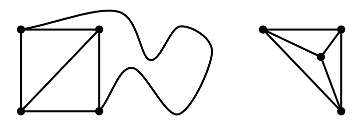
- *#10: 06/12/15*

- **Minimální kostra grafu**
  - **Definice.** Kostra souvislého grafu $G = (V, E)$ je libovolný strom $T = (V, E')$, kde $E' \subseteq E$.
    - Poznámka: Kostra vždy existuje: dokud v G existuje kružnice, odebíráme z G (jednu libovolnou) hranu kružnice, dostaneme tak kostru grafu.
      Příklad:
      - 
    - **Definice.** Graf s ohodnocenými hranami: $G = (V, E)$ graf, $w: E \to \mathbf{R}^+$,
    - Problém *minimální kostry*: Pro daný souvislý graf $G = (V, E)$ graf, $w: E \to \mathbf{R}^+$, nalézt minimální kostru, tj. kostru $K = (V, E')$ takovou, že její váha $w(K) = w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální.
    - 

    - Kruskalův (hladový) algoritmus:
      - $G = (V, E)$ souvislý, $w: E \to \mathbf{R}^+$
      - Předpokládejme, že $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, přičemž $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$
      - 1. $E_0 = \emptyset$
      - 2. pro $i = 1, 2, \ldots, m$ pokládáme $E_i =$
        - $= E_{i-1} \cup \{e_i\}$, pokud $(V, E_{i-1} \cup \{e_i\})$ neobsahuje kružnice
        - $= E_{i-1}$ jinak
      - 3. $(V, E_m) \to$ výstup (min. kostra)
      - Výsledek je určitě strom, je ale minimální?
      - **Věta.** Kostra nalezená hladovým algoritmem je minimální.
        - Důkaz:

- Nechť (V, K) výsledná kostra, (V, L) jiná kostra.
- Chceme $w(L) \geq w(K)$.
- Indukcí podle $d = |K \Delta L|$, symetrická diference $K \Delta L = (K-L) \cup (L-K)$
  - 1. $d = 0 \Rightarrow K=L$, zjevně platí
  - 2. $d > 0$ a platí to pro $d' < d$
    - $K \neq L$ (i když $|K|=|L|$) $\Rightarrow \exists\, e \in L-K$
    - Vezmeme hranu z L a přidáme do K:
    - $(V, L - \{e\})$ má 2 komponenty (vzali jsme hranu ze stromu): V_1 a V_2.
    - $(V, K \cup \{e\})$ má (jedinou) kružnici C, přičemž $e \in E(C)$.
      - $\exists e' \in E(C)$:
        - $e' \cap V_1 \neq \emptyset$
        - $e' \cap V_2 \neq \emptyset$
      - $e' \in K$, $e' \notin L$ (není v L, protože jinak by v L byla kružnice, je tam přece také e), tedy $e' = K - L$
    - (V, L') je kostra (zachovává se nám, že je to strom, přidáváme hrany a rušíme kružnice)
    - $' = (L-\{e\}) \cup \{e'\}$ je podobnější K než byla L, takže se nám víc hodí pro zbytek důkazu:
      - $|L' \Delta K| < |L \Delta K|$
      - $w(L') \geq w(K)$ (indukční předpoklad)
      - $w(L) \geq w(L')$
        - odpovídá $w(e) \geq w(e')$
        - Hladový algoritmus přece nezval hranu e, protože by vznikla kružnice C, tedy už byla vybrána hrana e', tedy $w(e') \leq w(e)$
      - Z předchozích dvou nerovností plyne $w(L) \geq w(K)$
- Jarníkův algoritmus na minimální kostru
  - 1. $V_0 = \{v\}$, kde v je libovolný vrchol z V
  - 2. pro $i = 1, \ldots, n-1$ nechť e_i hrana minimální váhy vedoucí z V_{i-1} do $V-V_{i-1}$
    - $V_i = V_{i-1} \cup e_i$ (neboli přidáme koncový vrchol hrany, ten, který tam ještě není)
  - 3. strom $(V, \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}) \rightarrow$ výstup

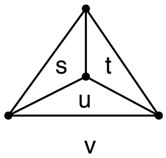
Rovinné grafy

- **Definice.** *Oblouk* je množina bodů $\{\gamma(x), x \in [0, 1]\}$, přičemž $\gamma:[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ je prosté a spojité zobrazení.
- **Definice.** Graf $G = (V, E)$ je rovinný, má li rovinné nakreslení: vrcholy odpovídají různým bodům v $\mathbf{R}^2$ a hrany obloukům spojujícím příslušné dvojice bodů tak, že mají-li dva oblouky společný bod, potom je tento bod pro oba oblouky koncový.
- Příklady:
  - K_4 je rovinný:
  - 
  - C_n je rovinný.
  - Libovolný strom je rovinný.
- Je známo, že rovinný graf lze nakreslit, tak, že hrany odpovídají úsečkám
  - Důkaz je těžký, nebudeme ho dělat. (Búú!:-(Já se tak těšil…)

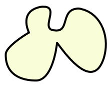
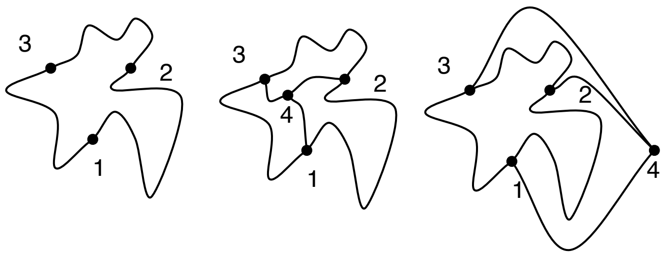
- *#11: 06/12/22*

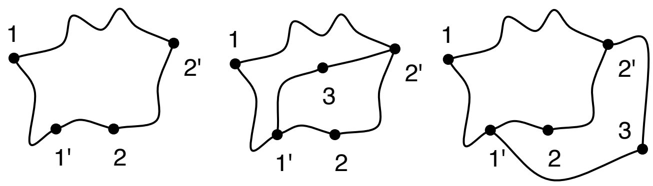
Rovinné grafy (pokračování)

- **Definice.** Stěna rovinného nakreslení: libovolná maximální souvislá oblast množiny $\mathbf{R}^2 - X$, kde X je množina bodů ležících na obloucích nakreslení (souvislost bereme intuitivně).
  - Příklad:

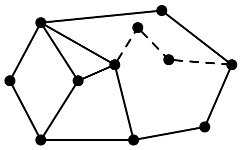
- 

má 4 stěny (vnitřní oblasti označené písmeny)

- **Definice.** Vždy jedna stěna je neomezená, a to *vnější stěna*. Ostatní jsou *vnitřní stěny*.
- **Definice.** *Topologická kružnice* je uzavřený „oblouk“ (tj. $\gamma(0) = \gamma(1)$)
  Příklad:
  - 
- **Jordanova věta o kružnici.** Topologické kružnice rozděluje rovinu na právě 2 souvislé oblasti (vnitřek a vnějšek dané kružnice)
  - Důkaz je fakt těžký, nebudeme ho dělat:(.
- **Věta.** K_5 není rovinný.
  - Důkaz sporem:
    - V = {1, 2, 3, 4, 5}
    - 

    - Oblouky 1, 2, 3 tvoří topologickou kružnici K, 4 leží uvnitř nebo vně. Kam potom s 5 (žádná stěna nemá na hranici všechny 4 vrcholy 1, 2, 3, 4).
- **Věta.** $K_{3,3}$ není rovinný.
  - Důkaz sporem:
    - Vrcholy 1, 2, 3, 1', 2', 3'
    - 

    - Kam s 3'?
- Pozorování: Graf *G* rovinný ⇔ každé dělení grafu *G* je rovinný graf.
  - Nové vrcholy nakreslím na oblouky.
  - Naopak taky platí: Dělení grafu je i ten graf samotný.
- **Věta (Kuratowski).** G je rovinný ⇔ G neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$.
  - ⇒ je jasné, ale zpátky *bez důkazu*:(.
- Tvrzení (Eulerův vzorec): Graf G je <u>souvislý</u>, rovinný graf, |V| ≥ 1.
  - Nechť s = počet stěn nějakého rovinného nakreslení *G*. Potom |V| - |E| + s = 2.
  - Tudíž počet stěn nezávisí na volbě nakreslení.
  - Důkaz: Indukcí podle |*E*|:
    - Nejdříve |*E*| = 0, graf má nutně jeden vrchol, aby splňoval podmínky: |*V*| = 1, s= 1, 1+0+1=2
    - |*E*| ≥ 1
      - G neobsahuje kružnici:
        - Je to tedy strom: |V| = |E| + 1; |s| = 1 – takže to vychází.
      - G obsahuje kružnici C:
        - e je libovolná hrana na C
        - nakreslení *G-e* splňuje Eulerův vzorec (z indukčního předpokladu)
          - Má o hranu a stěnu méně (odebráním *e* se 2 stěny spojí do jedné – vně a uvnitř kružnice).

            - Tedy i *G* splňuje Eulerův vzorec.
- Tvrzení: Graf *G* je rovinný, 2-souvislý. Potom hranice libovolné stěny v libovolném nakreslení *G* odpovídá kružnici v *G*.
  - Důkaz: z lemmatu o uších:
    - platí pro kružnici
    - přidání ucha se platnost neporuší
      - Nechť *G* (rovinný, 2-souvislý) = „*G'* + ucho“ a nechť tvrzení platí pro *G'*
      - Vezměme libovolné nakreslení *G* a ucho vyhoďme:
      - 
      - Tvrzení platí G', opětovným dokreslením se jedna stěna ohraničená kružnicí rozdělí na dvě trakové stěny, ostatní stěny se nezmění.
- Tvrzení: G = (V, E) rovinný, $|V| \geq 3$. Potom
  - (i) $|E| \leq 3|V| - 6$
    - Důkaz: Přidáváme hrany, dokud nedostaneme maximální rovinný graf, určitě dostaneme 2-souvislý graf (to *intuitivně* jde).
      - Každá stěna ohraničená kružnicí, dokonce trojúhelníkem (jinak lze přidat nějakou „diagonálu“)
  - (ii) G neobsahuje $K_3 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$

- *#12: 07/01/05*

- **Rovinné grafy (pokračování)**
  - Tvrzení: G = (V, E) rovinný, $|V| \geq 3$. Potom *(dokončení z minula)*
    - (i) $|E| \leq 3|V| - 6$
      - Důkaz: Přidáváme hrany, dokud nedostaneme maximální rovinný graf, určitě dostaneme 2-souvislý graf (to *intuitivně* jde).
        - Každá stěna ohraničená kružnicí, dokonce trojúhelníkem (jinak lze přidat nějakou „diagonálu“)
        - Počet incidentních dvojic hrana-stěna = $3s$ (haždá stěna má tři hrany) = $2|E|$ (každá stěna je hranicí dvou stěn)
          - $3s = 2|E|$
        - Eulerův vztah (krát 3): $3|E| = 3|V| + 3s - 6$
        - Tedy: $|E| = 3|V| - 6$ pro každý maximální rovinný graf (tzv. rovinná triangulace).
    - (ii) G neobsahuje $K_3 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$
      - Důkaz: Obdobně přidáváme hrany, dokud nedostaneme maximální rovinný graf bez trojúhelníků.
        - (a) výsledný graf *není* 2-souvislý, potom je hvězdou (jeden bod spojený se všemi ostatními)
          - $|E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$ (protože $|V| \geq 3$ a $2|V| \geq |V| + 3$)
        - (b) výsledný graf *je* 2-souvislý, proto je každá stěna ohraničená kružnicí délky alespoň 4 (a nanejvýš 5, šestiúhelník mohu rozdělit na dva čtyřúhelníky)
          - Počet incidentních dvojic hrana-stěna = $2|E| \geq 4s$, tedy $2s \leq |E|$
          - Eulerův vztah (dvakrát): $2|E| = 2|V| + 2s - 4$
          - Tedy obecně $|E| \leq 2|V| - 4$.
  - Důsledky:
    - 1. každý rovinný graf má vrchol stupně ≤ 5 (všechny vrcholy $\geq 6 \Rightarrow |E| \geq 3|V|$ – spor)
    - 2. K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.
      - z (i): 10 (není) $\leq 3 \cdot 5 - 6$
      - z (ii): 9 (není) $\leq 2 \cdot 6 - 4$

- **Barvení map a grafů**
  - Modelový problém: Chceme, aby na politické mapě měly sousední státy různé barvy.
  - Předpoklady:
    - 1. Pro to být sousedem nestačí jeden bod.
    - 2. Každý stát je souvislý.
  - Problém čtyř barev: Stačí vždycky 4 barvy?

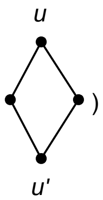
- 5 barev se dá jednoduše dokázat, 4 už těžko:(, několik známých matematiků se prý ztrapnilo špatným důkazem. Teď je to dokázáno pomocí počítače.
- **Definice.** Graf $G = (V, E)$ lze *(řádně) obarvit* k *barvami*, pokud existuje zobrazení $b: V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $\{x, y\} \in E \Rightarrow b(x) \neq b(y)$
- **Definice.** *Barevnost grafu G* = $\chi(G)$ (chí) = min {k : G lze obarvit k barvami}
- Příklady:
  - 1. $\chi(K_n)$ = n
  - 2. $\chi(K_{m,n})$ = 2, m, n ≥ 1
  - 3. $\chi(C_{2k})$ = 2
  - 4. $\chi(C_{2k+1})$ = 3
  - 5. $\chi(T)$ = 2; T je strom
- Vztah mezi barvením map a rovinných grafů (náznak)
  - Udělám si silnice mezi hlavními městy sousedních států (tak, aby se nekřížily). A mám z toho barvení rovinného grafu. A tohle funguje i zpátky.
- Problém čtyř barev (jinak): $\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G?
- **Věta** o pěti barvách: $\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf $G = (V, E)$
  - Důkaz: indukcí podle $|V|$
    - Pro $|V| \leq 5$ platí.
    - $|V| \geq 6$ a věta platí pro grafy s menším počtem vrcholů
      - G má vrchol stupně ≤ 5 (viz dříve tuto hodinu)
        - (a) deg x ≤ 4: obarvíme G-x 5 barvami (to jde z předpokladu), poté dobarvíme x barvou vrcholu, se kterým x nemá hranu
        - (b) deg x = 5: sousedi $u_1, \ldots u_5$
          - G rovinný ⇒ G neobsahuje K_5 ⇒ BÚNO $\{u_4, u_5\} \notin E$

            Bez Újmy Na Obecnosti
          - V G-x ztotožníme u_4, u_5 (násobnost hran odstraníme), vyjde nám (intuitivně) rovinný graf
          - Podle indukčního předpokladu existuje obarvení tohoto menšího grafu b_0 pěti barvami, z toho vyrobíme obarvení G-x:
            - b(v) := b_0(v) pro v≠ u4, u5
            - b(u4 = b(u5) := b(v)
          - Dobarvíme vrchol *x* barvou různou od b(u1), b(u2), b(u3), b(u4) = b(u5)

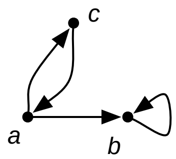
- *#13: 07/01/12*

- **Grafy, počet koster**
  - Cauchy-Schwarzova nerovnost:

    Viz poslední přednáška z lineární algebry.
    - $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ pro libovolná $x_i, y_i \in \mathbf{R}$
    - Důkaz:
      - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$
      - $2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \geq 0$
  - **Věta.** Nechť G=(V,E) je graf na n vrcholech obsahující K2,2 (= C4). Potom |E| ≤ (n√n+2)/2.
    - Důkaz:
      - (n nad 2) ≥ (# cest délky 2 v G) = $\sum_{v \in V}$(deg v nad 2) = $\sum_{v \in V}$ (deg v)(deg v - 1)/2 ⇒
      - ⇒ ∀u, u' ∈V, u≠u': ∃ nejvýše jedna cesta délky 2 z u do u'

- (Jinak dostaneme C_4: 

)

- $1/2\ \sum_{v \in V} (\deg v - 1)^2 \quad \leq \quad \sum \deg v (\deg v - 1) \leq (n \text{ nad } 2)$
- $\sum_{v \in V} (\deg v - 1) \cdot 1 \quad \leq \quad \sqrt{(\sum_{v \in V} (\deg v - 1)^2)} \cdot \sqrt{(\sum_{v \in V} 1^2)}$
- $2|E|-n \quad \leq \quad \sqrt{(\leq n^2)} \cdot \sqrt{(=n)}$
- $2|E|-n \quad \leq \quad n \sqrt{n}$
- $2|E| \leq (n \sqrt{n}+n)/2$
- **Věta.** (Cayleyho formule): $\forall n \geq 2$: Počet koster grafu K_n je n^{n-2} (stromů na $V = \{1, 2, \ldots, n\}$)
  - Příklady:
    - $n = 2$: $2^0 = 1$ kostra
    - $n = 3$: $3^1 = 3$ kostry (vyhození jedné hrany z trojúhelníku)
  - Důkaz ($n \geq 2$):
    - **Definice.** *Orientovaný graf* (se smyčkami): $G^{\rightarrow} = (V, E^{\rightarrow})$, kde V je libovolná konečná množina a $E^{\rightarrow} \subseteq V \times V$
      - Příklad:
        - $G^{\rightarrow} = (\{a, b, c\}, \{(a,b), (b, b), (a, c), (c, a)\})$
        - 

    - **Definice.** *Květina* je strom, v němž všechny hrany jsou zorientovány směrem od jediného vrcholu (kořene květiny).
    - Pozorování 1: (# květin na $\{1, \ldots, n\}$) = $n \cdot$(# stromů na $\{1, \ldots, n\}$)
      - Důkaz: Každý strom lze zorientovat *n* různými způsoby na květinu (odpovídajícími *n* různým volbám kořene).
    - **Definice.** *Záhon* je graf, jehož všechny komponenty jsou květiny.
    - Pozorování 2: Květina se vyhozením k hran změní na záhon k+1 květin.
      - Důkaz: Vyhození 1 hrany se květina rozpadne na 2 květiny atd. (Vyhodím druhou, jedna ze dvou kytek se taky rozpadne na dvě, mám tři, atd.)
    - Pozorování 3: Přidáním orientované hrany do záhony dostaneme opět záhon právě, když přidaná hrana vede z libovolného vrcholu do kořene jiné komponenty.
      - Důkaz: (TODO obrázek). Kdyby byly komponenty stejné, vznikne kružnice. Kdyby nevedla do kořene, vznikly by dva „kořeny“ a srazily by se dvě šipky na jednom vrcholu, takže ne květina.
    - Vlastní důkaz formule:
      - Z grafu 1–2–3–…–n dostaneme květinu na $\{1, 2, \ldots, n\}$ postupným přidáváním orientovaných hran právě, když přidávaná hrana vždy vede z nějaké komponenty do kořene jiné komponenty (květiny).
      - Na začátku mám jednovrcholové květiny: mám $n(n-1)$ možností volby první hrany.
      - Máme n-1 komponent, vrcholů je stále stejně.
      - Následně máme $n(n-2)$ možností (lze snadno rozmyslet, TODO obrázek).
      - Máme n-2 komponent, vrcholů je stále stejně.
      - …
      - Až nakonec máme $n \cdot 1$ možností, jak zvolit (n-1). (n-minus-první) hranu.
      - Tedy máme $n^{n-1} (n-1)!$ možností, jak zvolit první až (n-1). hranu. Stejná květina vyjde $(n-1)!$-krát, tedy květin je $n^{n-1}(n-1)!/(n-1)! = n^{n-1}$. Proto stromů je $n^{n-1}/n = n^{n-2}$.