

Úkol 1

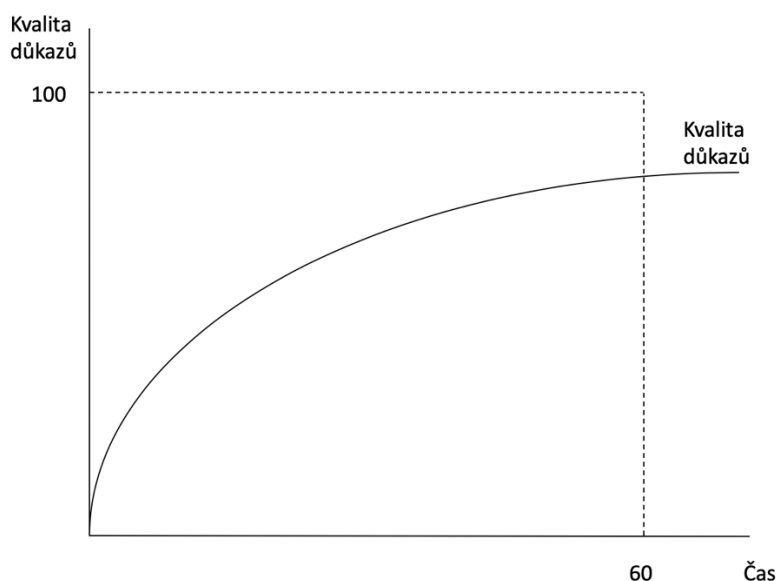
Jste novým členem pražské mordparty a rada Vacátko vám dal za úkol vyšetřit vaše první dvě vraždy. Jedna se stala ve zlatnictví na Starém městě a druhá ve Zlaté uličce. Případy spolu nijak nesouvisí a jsou stejně důležité a stejně složité (v obou je stejně obtížné získat důkazy). Máte tři měsíce (60 pracovních dní) na získání/zajištění důkazů. Poté byste měli obvinít podezřelého a budete přiděleni k dalšímu případu.

V jednom dni můžete pracovat pouze na jednom případě. Každý den strávený na případě přinese nějaký nový důkaz, avšak s klesajícím výnosem (intuitivně, nejdříve zajistíte ty nejdůležitější důkazy, potom ty o něco méně důležité, a tak dále). Síla důkazů je zachycena pravděpodobností, že podezřelá osoba bude soudem uznána vinnou a je vyjádřena v procentech, od 0 do 100. Je nemožné v rámci času, který vám byl dán, vyřešit zcela oba případy, a dosáhnout tak stoprocentní pravděpodobnosti usvědčení v obou případech.

Váš kariérní postup – dlouhodobě – závisí na kvalitě vaší práce, která je měřena počtem usvědčení u soudu. Nyní tedy hledáte optimální rozložení vašeho času mezi dva případy.

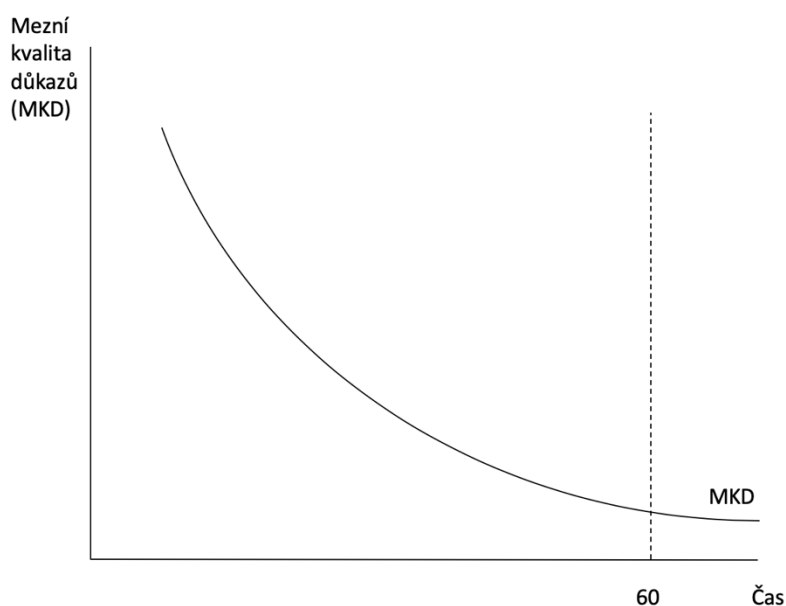
- a) Nakreslete graf znázorňující vztah mezi časem stráveným vyšetřováním případu (na horizontální ose) a silou důkazů (na vertikální ose).

Kvalita důkazů (síla důkazů) roste s časem stráveným vyšetřováním případu. Ovšem první dny strávené vyšetřováním jsou více produktivnější než ty poslední. Proto tvar křivky kvality důkazů je vypouklý, jak ukazuje graf níže.



- b) Nakreslete graf znázorňující vztah mezi časem stráveným vyšetřováním případu (na horizontální ose) a mezní silou důkazu (na vertikální ose).

Mezní kvalita důkazů (MKD), resp. mezní síla důkazů klesá s časem stráveným vyšetřováním případu. S každým dalším dodatečným dnem práce mezní kvalita klesá. Tento jev nazýváme klesající mezní produkt. Na počátku, kdy trávíme případem první dny nacházíme důkazy k případu jednodušeji a s přibývajícím dny strávenými na případu se nalézají nové důkazy hůře a hůře. S tím, jak přidáváme více a více dní strávenými na případu, každý další den na případu přispívá ke kvalitě důkazů méně a méně. Právě z tohoto důvodu u grafu kvality důkazů, otázka a), klesá s růstem dnů strávených na případu sklon produkční funkce.



- c) Definujte náklady a výnosy v tomto optimalizačním úkolu.

Jde o trade-off mezi množstvím (kvalitou) důkazů získaných v jednom případě a množstvím (kvalitou) důkazů získaných ve druhém případě. Benefitem je tedy kvalita důkazů získaných v jednom případě a nákladem jsou obětované důkazy ve druhém případě. To, který případ bude na straně benefitů a který na straně nákladů je arbitrární.

Proto výnosy můžeme zapsat jako $B(L_1) = D_1(L_1)$, kde $B(L_1)$ jsou výnosy z práce na případě 1 a $D_1(L_1)$ představují důkazy získané v případě 1 a závisí na množství práce alokované na jeho vyšetření.

Náklady jsou složitější. Jsou to důkazy v případě 2, které nezískáme v důsledku vyšetřování případu 1. Je to tedy rozdíl mezi množstvím důkazů, které bychom v případě 2 mohli získat maximálně, tj. pokud bychom na jeho vyšetření alokovali 60 dní a množstvím důkazů, které získáme při menším množství vyšetřovacích dní na tomto případě. Náklady jde tedy zapsat jako

$$C(L_2) = D_2(60) - D_2(L_2)$$

Protože platí $L_1 + L_2 = 60$, můžeme napsat

$$C(L_2) = D_2(60) - D_2(60 - L_1)$$

Všimněte si, že náklady jsou nulové, pokud na případ 1 alokujeme 0 práce a jsou rostoucí s L_1 .

MŠ: Tohle, se obávám, může být trochu matoucí. První věc, na kterou bych upozornil, že ta poslední rovnice dává větší smysl napsaná následovně:

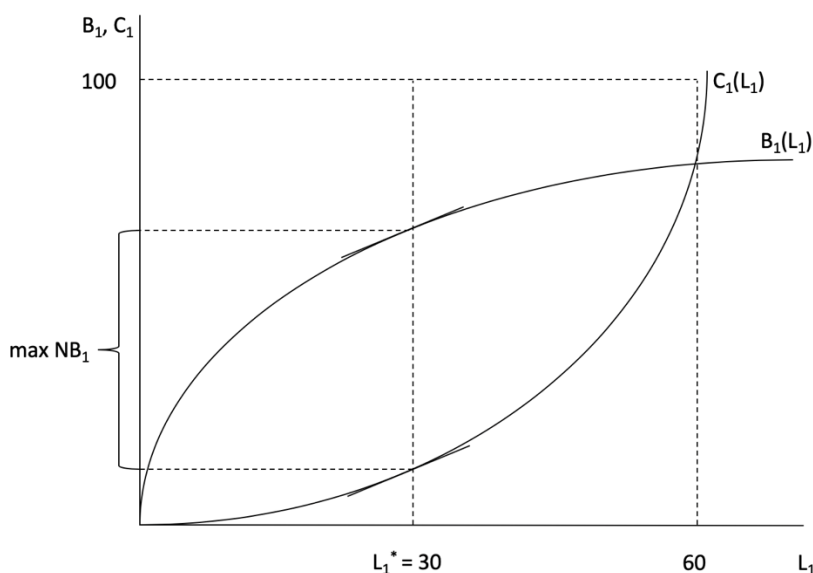
$$C(L_1) = D_2(60) - D_2(60 - L_1)$$

tj. levá strana je funkcí L_1 . Jsou k tomu dva důvody. První je, že pravá strana je rovněž psaná jako funkce L_1 a pak že celý ten optimalizační problém je a bude problém hledání optimálního L_1 .

Druhá možnost, jak o tom přemýšlet je trochu jiná, než co bylo v přednášce, ale třeba to někomu pomůže. Snažíme se maximalizovat součet důkazů z obou případů a k tomu si vybíráme kolik hodin jednotlivému případu budeme věnovat. A k tomu všemu máme pouze 60 hodin. Tedy $\max D_1(L_1) + D_2(L_2)$ a víme, že $L_1 + L_2 = 60$. Pak lze rovnici přepsat na $D_1(L_1) + D_2(60 - L_1)$. A jelikož D_1 a D_2 jsou stejné funkce D , máme $D(L_1) + D(60 - L_1)$. A maximalizace je derivace podle L_1 , která se rovná nule. Díky specifikaci případů, bude platit pouze pokud $2L_1 = 60$, tedy L_1 se rovná 30.¹

- d) Zakreslete funkce nákladů a výnosů.

Funkce nákladů vykazují rostoucí mezní náklady, neboť přesouváním úsilí z případu 2 na případ 1 se vzdáváte více a více hodnotných důkazů, resp. první důkazy co obětujete jsou ty nejméně hodnotné.

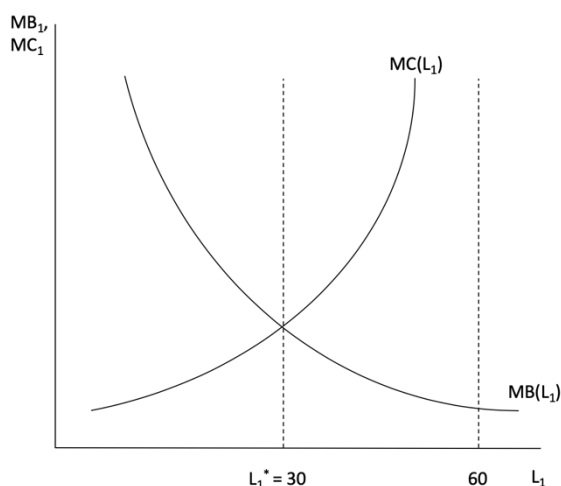


- e) Zakreslete funkce mezních nákladů a mezních výnosů.

¹ Tohle asi nemusí být srozumitelné pro každého, ale třeba to někomu pomůže.

Mezní náklady jsou, jak již bylo výše zmíněno, rostoucí při alokaci dodatečného dne práce. Kdežto mezní výnosy jsou klesající při alokaci dodatečného dne práce na případu, jelikož mezní výnos = mezní kvalita důkazů.

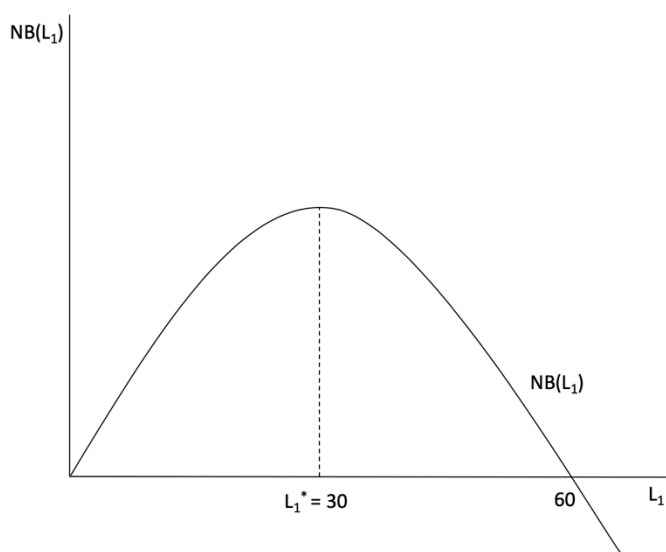
Pokud chci zvýšit svůj čas věnovaný případu 1 z 1 dne na 2 dny, tak se vzdávám 1 dne na případě 2, který ale nebyl moc užitečný, protože ten případ už je skoro vyřešený. Pokud chci zvýšit čas věnovaný případu 1 z 50 dní na 51 dní, tak se vzdávám 1 dne na případě 2, ale ten den na případě 2 je velmi důležitý. A proto mě to bolí víc.



- f) Zakreslete funkci čistého benefitu z případu 1.

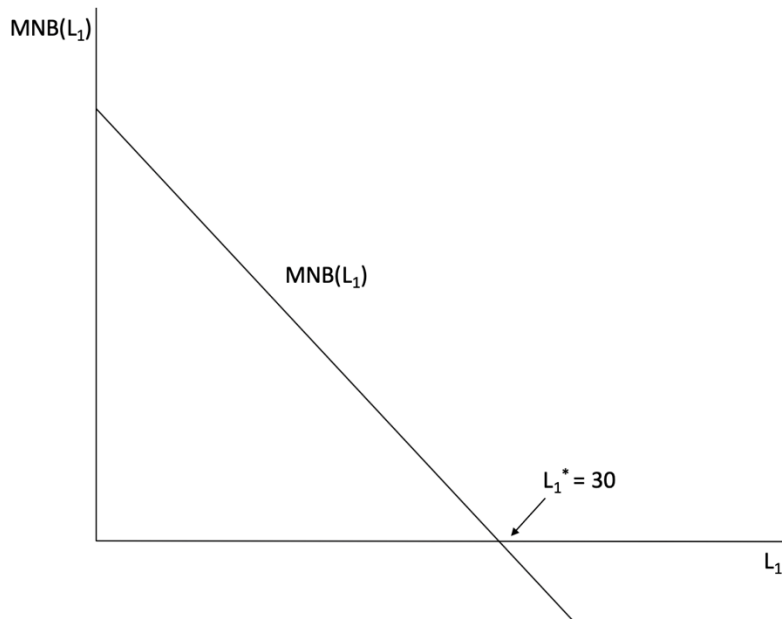
Čistý benefit je rozdíl mezi benefity a náklady na obrázku výše. Začíná u 0 při $L_1 = 0$, maximum má při $L_1 = 30$ (viz níže) a při $L_1 = 60$ je roven 0, tj. protíná horizontální osu.

Kumulativně sčítá plochu mezi křivkami na obrázku výše (skoro).



- g) Zakreslete funkci mezního čistého užitku.

Čistý mezní benefit je sklon křivky čistého benefitu, tj. při $L_I = 0$ je kladný a při $L_I = 30$ (viz níže) je roven 0, tj. protíná horizontální osu.



- h) Najděte optimální volbu a znázorněte ji do každého z vašich zakreslení/grafů.

Viz body označené L_I^* na obrázcích výše. Optimum je tam, kde se protínají křivky mezního benefitu a mezních nákladů, tj. tam kde je mezní čistý benefit roven 0.

Pozn. pro ambiciózní: Tím, že jsou oba případy stejně obtížné a významné, optimum se musí nacházet v bodě, kdy je množství práce alokované na jejich vyšetření shodné, tedy $L_I = L_2 = 30$. Pokud by případy byly odlišné ať co do složitosti či významu, optimum by bylo jinde (více práce by šlo na významnější nebo jednodušší případ.)

- i) Proč pro vás není optimální věnovat všechny zdroje k vyřešení pouze jedné z vražd a tím pádem maximalizovat pravděpodobnost usvědčení v tomto případě?

V takovém případě by pravděpodobnost odsouzení u jednoho případu byla maximální, ale u druhého nulová. Přesunem práce z prvního případu by se pravděpodobnost odsouzení snížila a u druhého by se zvýšila. Protože by tím byly obětovány jen nevýznamné důkazy u prvního případu a získány cenné důkazy u druhého. Pokles pravděpodobnosti odsouzení u prvního by byl menší než přírůstek u druhého, součet obou pravděpodobností by tedy vzrostl a s tím vaše šance na povýšení. Alokace veškerého úsilí do jednoho případu tedy nemůže být optimum.

- j) Je vaše chování odlišné od toho, co by bylo optimální ze společenského hlediska?

Ne, z hlediska společnosti je v našem příkladu, s danými zdroji, bezesporu vhodné maximalizovat pravděpodobnost odsouzení obou pachatelů, a ta je maximalizována, pokud je maximalizován součet (viz argument u bodu i.)

- k) Pokuste se zformulovat rozhodovací proces, dle kterého racionální příslušník policie alokuje čas mezi případy, aniž by byl obeznámen s naším formálním modelem optimálního chování.

Pravidelně, např. každý den se racionální příslušník policie ptá: „Dostanu dnes cennější důkazy při práci na druhý případ?“ Pokud je odpověď ano, měl by pracovat na druhém případě, pokud ne, pak by měl pokračovat v práci na tom současném.

Nejde o jediný proces. Taky si to mohl rozpočítat předem a první měsíc pracovat na jednom případě a druhý měsíc na druhém.

- l) Pokuste se zformulovat podmínky pro optimální alokaci času, pokud jde o mezní důkazy každý den.

V den 60 by důkazy získané odpracováním jednoho dne navíc v případě 1 měly stejnou hodnotu jako důkazy získané odpracováním jednoho dne navíc v případě 2.

- m) Zakreslete rozhodnutí použitím PPF a znázorněte tam optimální volbu. Na začátku semestru jsme si řekli, že není jasné, jaká volba to má být. Avšak teď je to jasné. Co je klíčovou informací ovlivňující optimální volbu (kterou jsme během semestru dříve neměli při kreslení našich PPF)? Jak by se volba lišila, kdyby tato informace byla odlišná?

Zde víte jakou „hodnotu“ já vstup (čas) investovaný do určité činnosti. Dřív jsme se bavili o výrobě talárů a něčeho dalšího ale bez ceny. Nevěděli jsme tedy, co čeho je lepší investovat náš čas, protože nebylo jasné jak trh naši práci/ čas ocení. Nyní víme, že ocenění našeho času je stejné pro obě činnosti první den na případě 1 je společensky stejně hodnotná jako první den na případě 2.

