ZMIENNE LOSOWE - TEORIA

Def. 1. *Zmienna losowa* o wartościach rzeczywistych, określona na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, to odwzorowanie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, które jest mierzalne, a więc dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ (a więc $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$).

Def. 2. *Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X o wartościach w $[0, 1]$ nazywamy miarę probabilistyczną p_X, określoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zależnością

$$p_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Def. 3. *Dystrybuantą* rozkładu zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, określoną zależnością

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Tw. 1. Dystrybuanta F rozkładu zmiennej losowej X posiada następujące własności:
a) jest niemalejąca,
b) jest prawostronnie ciągła,
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Tw. 2. Jeżeli F jest dystrybuantą zmiennej losowej X, to
a) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,
b) $\mathbb{P}(X = a) = F(a) - F(a-)$,
c) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$,
d) $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b-) - F(a)$,
gdzie $F(a-) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$.

Def. 4. Zmienna losowa X ma *rozkład dyskretny*, jeżeli zbiór jej wartości $S \subset \mathbb{R}$ jest skończony lub przeliczalny. Dokładniej, $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ dla pewnego zbioru $S = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
Dystrybuanta ma wówczas postać

$$F(a) = \sum_{x \in S:\ x \leq a} \mathbb{P}(X = x).$$

Def. 5. Zmienna losowa X ma *rozkład absolutnie ciągły*, jeżeli istnieje nieujemna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, zwana *gęstością prawdopodobieństwa*, taka, że dla dowolnych $a < b$ mamy

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Wówczas w punktach, w których gęstość jest ciągła, mamy

$$f(x) = [F(x)]'.$$

Dystrybuanta a gęstość:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Def. 6. *Wartość oczekiwana* zmiennej losowej X to liczba dana wzorem (o ile istnieje)
a) w przypadku rozkładu dyskretnego:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i),$$

b) w przypadku rozkładu absolutnie ciągłego:

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Własność: $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$ dla dowolnych zmiennych losowych X, Y oraz liczb a, b.

Tw. 3. Jeżeli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją borelowską, to
a) w przypadku rozkładu dyskretnego:

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i),$$

w szczególności:

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 \mathbb{P}(X = x_i),$$

b) w przypadku rozkładu absolutnie ciągłego:

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx,$$

w szczególności:

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx.$$

Def. 7. *Wariancją zmiennej* losowej jest liczba określona wzorem

$$\mathbf{Var}X = D^2X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

Własności:
a) $\mathbf{Var}(a + bX) = b^2 \mathbf{Var}X$, dla dowolnych liczb a, b,
b) $\mathbf{Var}X \geq 0$. $\mathbf{Var}X = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = const$.

Def. 8. *Odchyleniem standardowym* zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$DX = \sqrt{\mathbf{Var}X}.$$