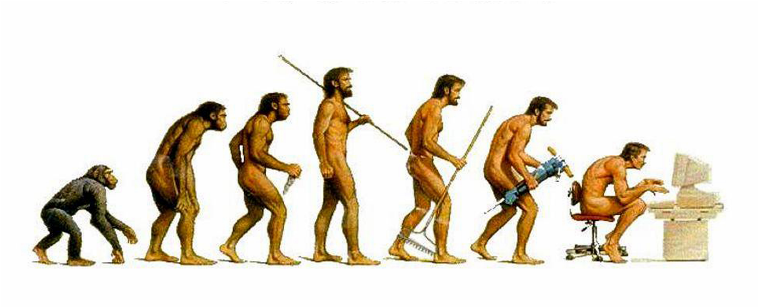


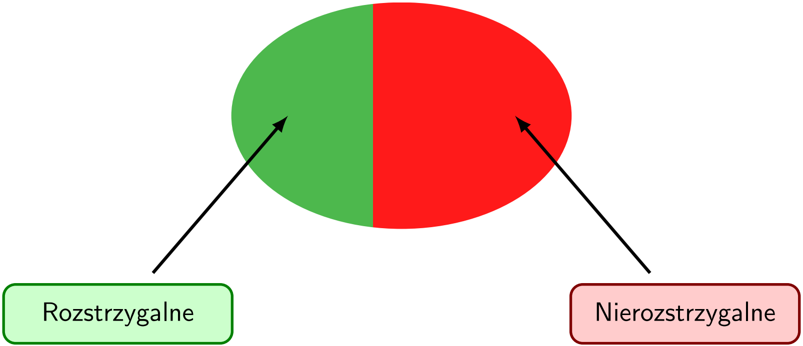
Teoria Obliczalności

Marcin Piątkowski

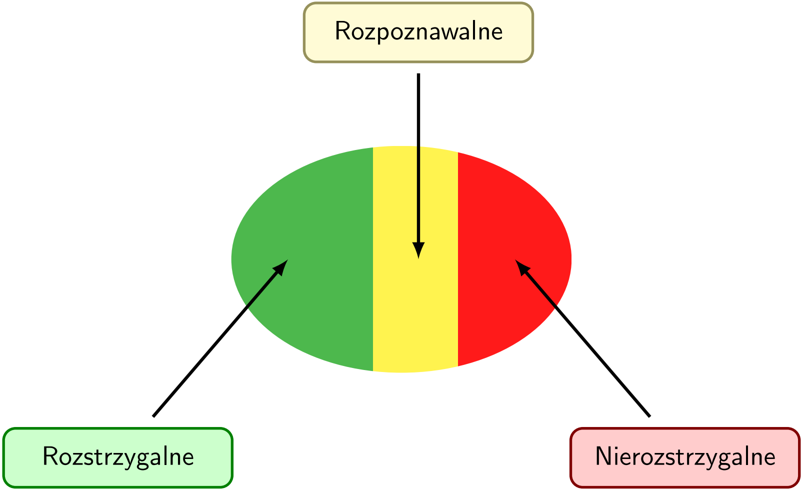
Wykład 8

Częściowa rozstrzygalność

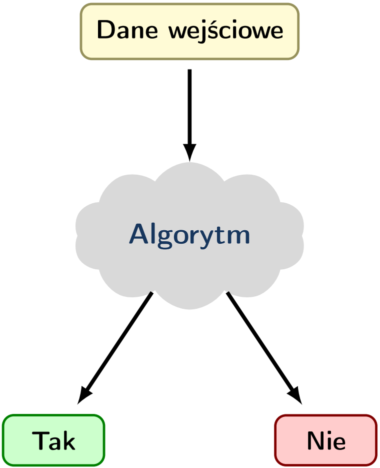
Częściowa rozstrzygalność



Częściowa rozstrzygalność



Częściowa rozstrzygalność



Częściowa rozstrzygalność

Język (problem) $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy **rozpoznawalnym** (**częściowo rozstrzygalnym**) jeśli istnieje maszyna Turinga, która go rozpoznaje (t.j. zatrzymuje się w stanie akceptującym dla wszystkich $x \in L$ i tylko dla nich).

Częściowa rozstrzygalność

Język (problem) $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy **rozpoznawalnym** (**częściowo rozstrzygalnym**) jeśli istnieje maszyna Turinga, która go rozpoznaje (t.j. zatrzymuje się w stanie akceptującym dla wszystkich $x \in L$ i tylko dla nich).

$$\mathcal{P}_{STOP} = \Big\{(M, w) : \text{ maszyna Turinga } M \text{ zatrzymuje się na } w\Big\}$$

Maszyna rozpoznająca $\mathcal{P}_{STOP}$

- ☞ Symuluj działanie maszyny M na wejściu w
- ☞ Jeśli M zatrzyma się $\Longrightarrow$ **akceptuj**

Częściowa rozstrzygalność

Język (problem) $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy **rozpoznawalnym** (**częściowo rozstrzygalnym**) jeśli istnieje maszyna Turinga, która go rozpoznaje (t.j. zatrzymuje się w stanie akceptującym dla wszystkich $x \in L$ i tylko dla nich).

$$L_{STOP} = \Big\{(\langle M \rangle, w) : \text{ maszyna Turinga } M \text{ zatrzymuje się na } w\Big\}$$

Maszyna rozpoznająca L_{STOP}

- ☞ Symuluj działanie maszyny M na wejściu w
- ☞ Jeśli M zatrzyma się $\Longrightarrow$ **akceptuj**

Częściowa rozstrzygalność

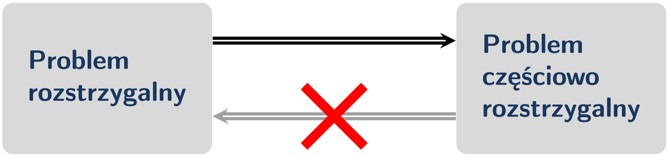
Język (problem) $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy **rozpoznawalnym** (**częściowo rozstrzygalnym**) jeśli istnieje maszyna Turinga, która go rozpoznaje (t.j. zatrzymuje się w stanie akceptującym dla wszystkich $x \in L$ i tylko dla nich).

$$\mathcal{P}_{ACC} = \Big\{ (M, w) : \text{ maszyna Turinga } M \text{ akceptuje } w \Big\}$$

Maszyna rozpoznająca $\mathcal{P}_{ACC}$

- ☞ Symuluj działanie maszyny M na wejściu w
- ☞ Jeśli M akceptuje $x \implies$ **akceptuj**
- ☞ Jeśli M odrzuca $x \implies$ pętla nieskończona

Rozstrzygalność vs częściowa rozstrzygalność



Zbiór $A \subseteq \boldsymbol{N}^n$ nazywamy **rekurencyjnie przeliczalnym** jeśli jego częściowa funkcja charakterystyczna $cc_a : \boldsymbol{N}^n \longrightarrow \boldsymbol{N}$ określona:

$$cc_A(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \overline{x} \in A \\ \infty & \overline{x} \notin A \end{cases}$$

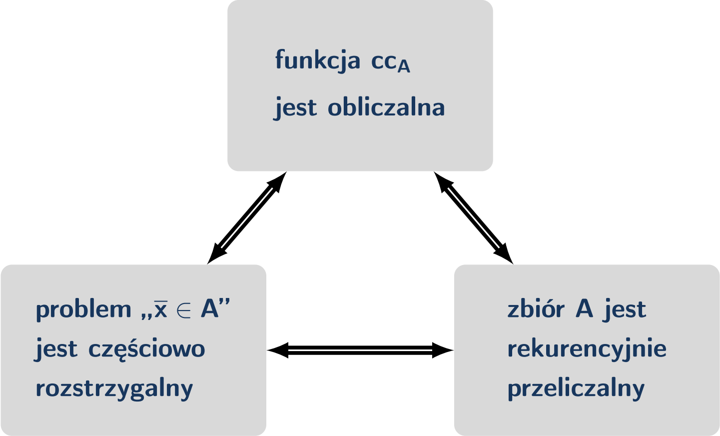
jest obliczalna

✓ Każdy zbiór rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny

✓ $L_1 = \{(M, x) : \text{ maszyna } M \text{ akceptuje słowo } x\}$ jest rek. przeliczalny

✗ $L_2 = \{(M, x) : \text{ maszyna } M \text{ nie akceptuje słowa } x\}$ nie jest rek. przeliczalny
Dopełnienie L_2 jest językiem rekurencyjnie przeliczalnym

✗ $L_3 = \{x \in \boldsymbol{N} : \ \phi_x \text{ jest totalna}\}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny
Jego dopełnienie również nie jest językiem rekurencyjnie przeliczalnym


funkcja cc_A jest obliczalna
problem „$\bar{x} \in A$” jest częściowo rozstrzygalny
zbiór A jest rekurencyjnie przeliczalny

Twierdzenie

Język L jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje maszyna Turinga M taka, że $L = L(M)$

Twierdzenie

Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^n$ jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest dziedziną pewnej funkcji obliczalnej

Twierdzenie

Dla ustalonego $n \geq 1$ zbiór wszystkich podzbiorów rekurencyjnie przeliczalnych $A \subseteq \boldsymbol{N}^n$ jest zamknięty ze względu na **sumę** oraz **przekrój** zbiorów

Własności zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych

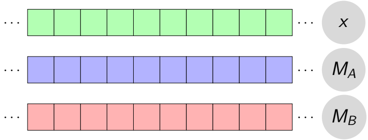
Twierdzenie

Dla ustalonego $n \geq 1$ zbiór wszystkich podzbiorów rekurencyjnie przeliczalnych $A \subseteq \boldsymbol{N}^n$ jest zamknięty ze względu na **sumę** oraz **przekrój** zbiorów

$A, B \subseteq \boldsymbol{N}^n$ – rek. przeliczalne

M_A – maszyna rozpoznająca A

M_B – maszyna rozpoznająca B



Maszyna rozpoznająca $M_{A \cup B}(x)$

- ☞ Uruchom „współbieżnie” M_A oraz M_B na x
- ☞ Jeśli M_A **lub** M_B akceptuje x $\Longrightarrow$ **akceptuj**

Własności zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych

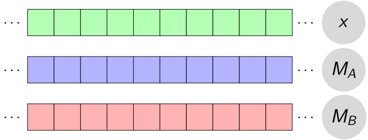
Twierdzenie

Dla ustalonego $n \geq 1$ zbiór wszystkich podzbiorów rekurencyjnie przeliczalnych $A \subseteq \boldsymbol{N}^n$ jest zamknięty ze względu na **sumę** oraz **przekrój** zbiorów

A, $B \subseteq \boldsymbol{N}^n$ – rek. przeliczalne

M_A – maszyna rozpoznająca A

M_B – maszyna rozpoznająca B



Maszyna rozpoznająca $M_{A \cap B}(x)$

- ☞ Uruchom „współbieżnie” M_A oraz M_B na x
- ☞ Jeśli M_A **oraz** M_B akceptują x $\Longrightarrow$ **akceptuj**

Uwaga

Zbiory rekurencyjnie przeliczalne **nie są domknięte** ze względu na operację **dopełnienia**

$$L = \Big\{(M, x) : \text{ maszyna Turinga } M \text{ zatrzymuje się na słowie } x\Big\}$$

$$\overline{L} = \Big\{(M, x) : \text{ maszyna Turinga } M \text{ nie zatrzymuje się na słowie } x\Big\}$$

Twierdzenie

Język L jest **rekurencyjny** wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno język L jak i jego dopełnienie $\overline{L}$ są **rekurencyjnie przeliczalne**

Twierdzenie

Język L jest **rekurencyjny** wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno język L jak i jego dopełnienie $\overline{L}$ są **rekurencyjnie przeliczalne**

$\Longrightarrow$:

$$\begin{array}{ccc}
L - \text{rekurencyjny} & \Longrightarrow & \text{rekurencyjnie przeliczalny} \\
\Downarrow & & \\
\overline{L} - \text{rekurencyjny} & \Longrightarrow & \text{rekurencyjnie przeliczalny}
\end{array}$$

Rekurencyjność vs rekurencyjna przeliczalność

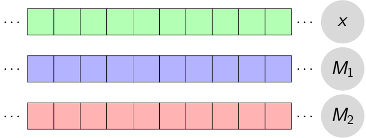
Twierdzenie

Język L jest **rekurencyjny** wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno język L jak i jego dopełnienie $\overline{L}$ są **rekurencyjnie przeliczalne**

$\Longleftarrow$:

M_1 – maszyna rozpoznająca L

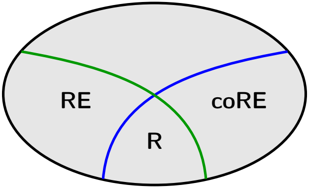
M_2 – maszyna rozpoznająca $\overline{L}$



Maszyna rozstrzygająca $M_L(x)$

- ☞ Uruchom „współbieżnie" M_1 oraz M_2 na x
- ☞ Jeśli M_1 akceptuje x $\Longrightarrow$ **akceptuj**
- ☞ Jeśli M_2 akceptuje x $\Longrightarrow$ **odrzuć**

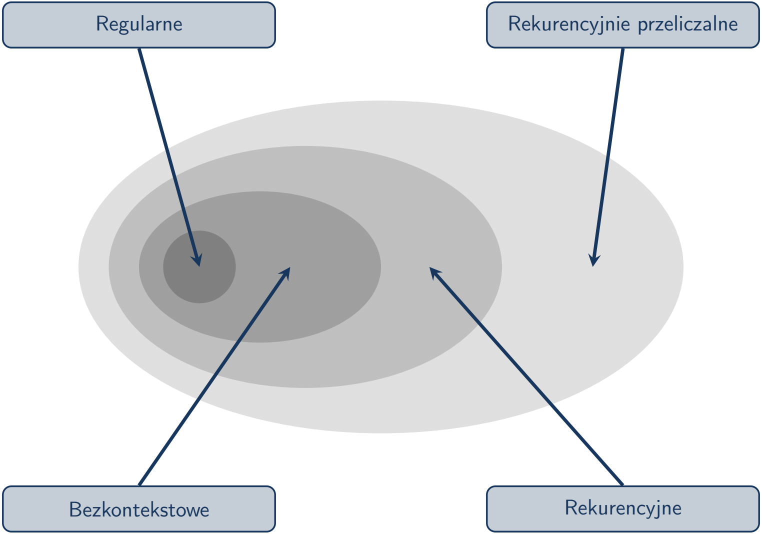
Rekurencyjność vs rekurencyjna przeliczalność



L oraz $\overline{L}$ – para wzajemnie dopełniających się języków

1. Oba języki L oraz $\overline{L}$ są rekurencyjne
2. L jest rekurencyjnie przeliczalny (ale nie rekurencyjny)
   $\overline{L}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny
3. $\overline{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny (ale nie rekurencyjny)
   L nie jest rekurencyjnie przeliczalny
4. Żaden z języków L oraz $\overline{L}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny

Hierarchia języków



Obcięcie funkcji

Funkcja g jest obcięciem funkcji f (ozn. $g \subseteq f$) jeżeli:

$$\forall_{\overline{x} \in \boldsymbol{N}^n} \ \ \overline{x} \in D_g \implies \overline{x} \in D_f \ \wedge \ g(\overline{x}) = f(\overline{x})$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor &\implies D_f = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ g(x) = \frac{x}{2} \quad &\implies D_g = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} &D_g \subseteq D_f \\ &\forall_{x \in D_g}\, g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Twierdzenie (Rice & Shapiro)

Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem funkcji obliczalnych takim, że zbiór ich indeksów $A = \{x \in \boldsymbol{N} : \phi_x \in \mathcal{A}\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Wówczas $f \in \mathcal{A}$ **wtedy i tylko wtedy**, gdy istnieje skończona funkcja $\Theta \in \mathcal{A}$ taka, że $\Theta \subseteq f$.

$$\mathcal{A} = \{\phi \in C_n : \ \phi \text{ jest totalna}\}$$

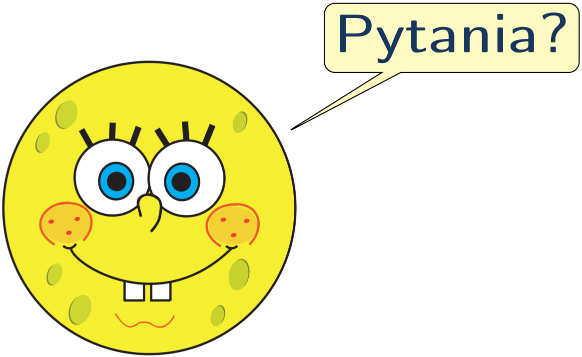
- ☞ $\mathcal{A}$ nie zawiera żadnej funkcji skończonej
- ☞ $\mathcal{A}$ zawiera funkcję $f(x) = x$, ale nie zawiera żadnego jej skończonego obcięcia

Zatem na mocy twierdzenia Rice'a-Shapiro zbiór $\mathcal{A}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny (problem „ϕ_x jest totalna" nie jest częściowo rozstrzygalny).

$$\overline{\mathcal{A}} = \{\phi \in C_n : \ \phi \text{ nie jest totalna}\}$$

- $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie funkcje skończone (również $f_\varnothing$)
- $\mathcal{A}$ nie zawiera żadnej funkcji o nieskończonej dziedzinie

Zatem na mocy twierdzenia Rice'a-Shapiro zbiór $\overline{\mathcal{A}}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny (problem „ϕ_x nie jest totalna'' nie jest częściowo rozstrzygalny).


Pytania?