Zad. 4.7. Niech X będzie zmienną losową o gęstości
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2,2] \\ a(4-x^2), & x \in [-2,2]. \end{cases}$$

a) Wyznacz parametr a i narysuj wykres f.

b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i narysuj jej wykres.

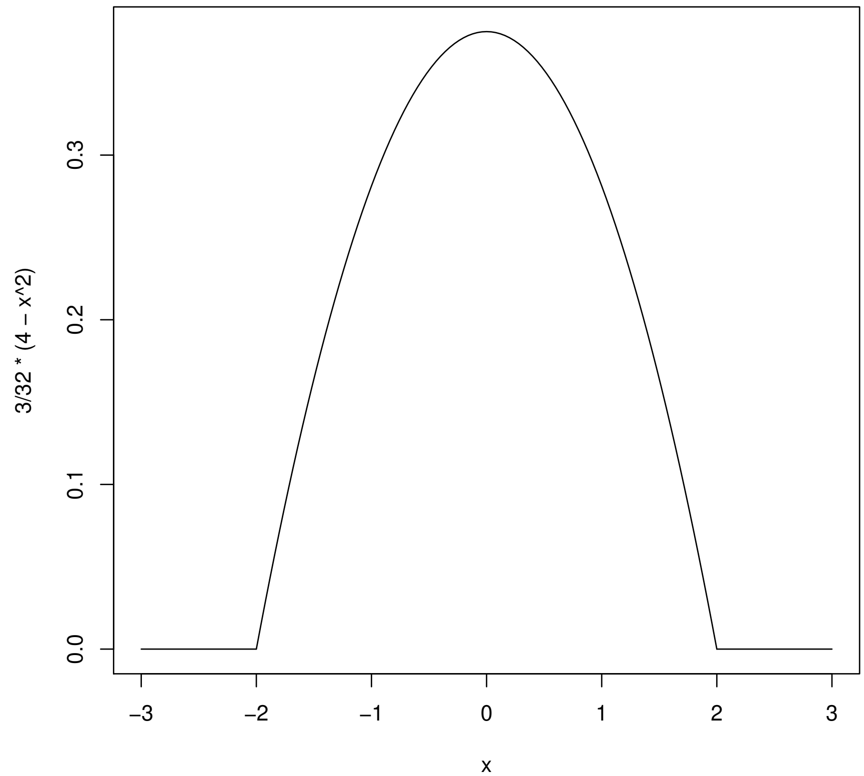
c) Oblicz $\mathbb{E}(X), \mathbf{Var}(X)$.

d) Oblicz $\mathbb{E}(3X+2)^2, \mathbb{P}(|X|>1)$.

e) Zinterpretuj $\mathbb{P}(X<-1)$ na wykresie gęstości i dystrybuanty.

Rozwiązanie. (a) Przypomnijmy podstawowe własności gęstości: gęstość f jest funkcją nieujemną i całkowalną, przy czym $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Z warunku nieujemności wynika, że musi być spełniona nierówność $a(4-x^2) \geqslant 0, x \in [-2,2] \implies a > 0$. Skorzystamy teraz z warunku całkowalności tej funkcji do jedności:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = 1$$
$$\iff a\cdot(4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = 1 \iff a\cdot(8-\frac{8}{3}-(-8+\frac{8}{3})) = 1$$
$$\iff a\cdot(16-\frac{16}{3}) = 1 \iff a\cdot\frac{32}{3} = 1 \iff a = \frac{3}{32}.$$

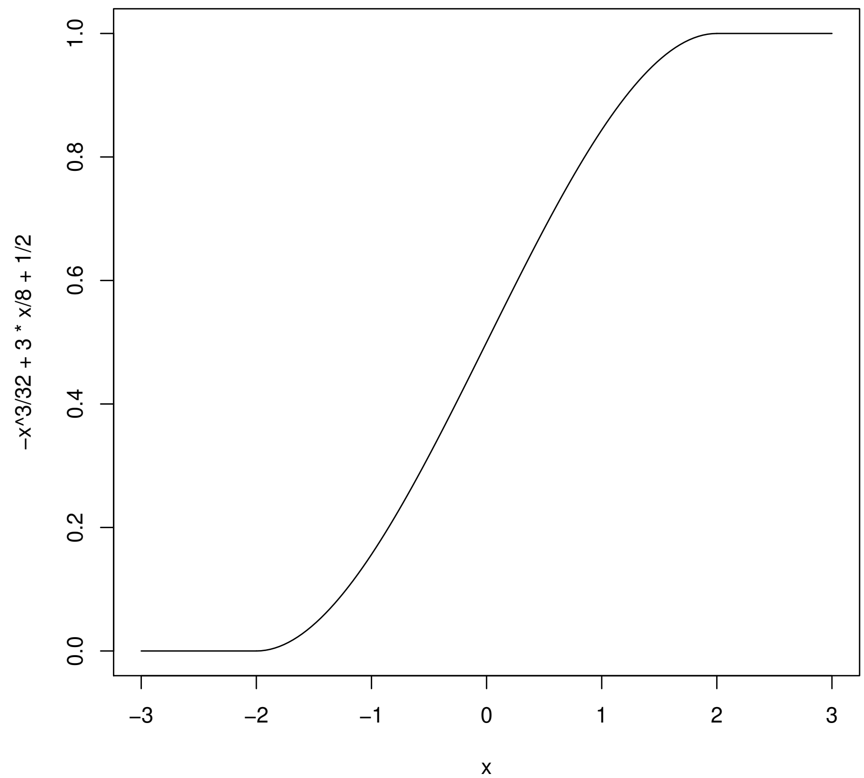
Zatem $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2,2] \\ 3(4-x^2)/32, & x \in [-2,2]. \end{cases}$



b) Jak mając gęstość wyznaczyć dystrybuantę? Skorzystamy ze wzoru $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Zatem dla $x \leqslant -2$ mamy $F(x) = 0$, a dla $x \geqslant 2$ mamy $F(x) = 1$. Pozostaje rozważyć $x \in (-2,2)$:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{3}{32}\int_{-2}^{x}(4-t^2)dt \\
&= \frac{3}{32}(4t - \frac{t^3}{3})\Big|_{-2}^{x} = \frac{3}{32}(4x - \frac{x^3}{3} - (-8 + \frac{8}{3})) \\
&= -\frac{x^3}{32} + \frac{3x}{8} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Zatem $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ -\frac{x^3}{32} + \frac{3x}{8} + \frac{1}{2}, & -2 < x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$



c) Zgodnie z definicją

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} (4x - x^3) dx$$

$$= \frac{3}{32}(2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_{-2}^{2} = \frac{3}{32}(8 - \frac{2^4}{4} - (8 - \frac{2^4}{4})) = 0;$$

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4) dx = \frac{3}{32}(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5})\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{3}{32}(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - (-\frac{32}{3} + \frac{32}{5})) = 1 - \frac{3}{5} + 1 - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

d) Zgodnie z ogólnym wzorem na wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}(3X+2)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (3x+2)^2 f(x) dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} (3x+2)^2 (4-x^2) dx$$

$$= \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} (9x^2 + 12x + 4)(4 - x^2) dx$$

$$= \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} (16 + 48x + 32x^2 - 12x^3 - 9x^4) dx$$

$$= \frac{3}{32} (16x + 24x^2 + \frac{32x^3}{3} - 3x^4 - \frac{9x^5}{5}) \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{3}{32}(32+96+\frac{256}{3}-48-\frac{288}{5}-(-32+96-\frac{256}{3}-48+\frac{288}{5}))$$

$$= \frac{3}{32}(32 + \frac{256}{3} - \frac{288}{5} + 32 + \frac{256}{3} - \frac{288}{5})$$

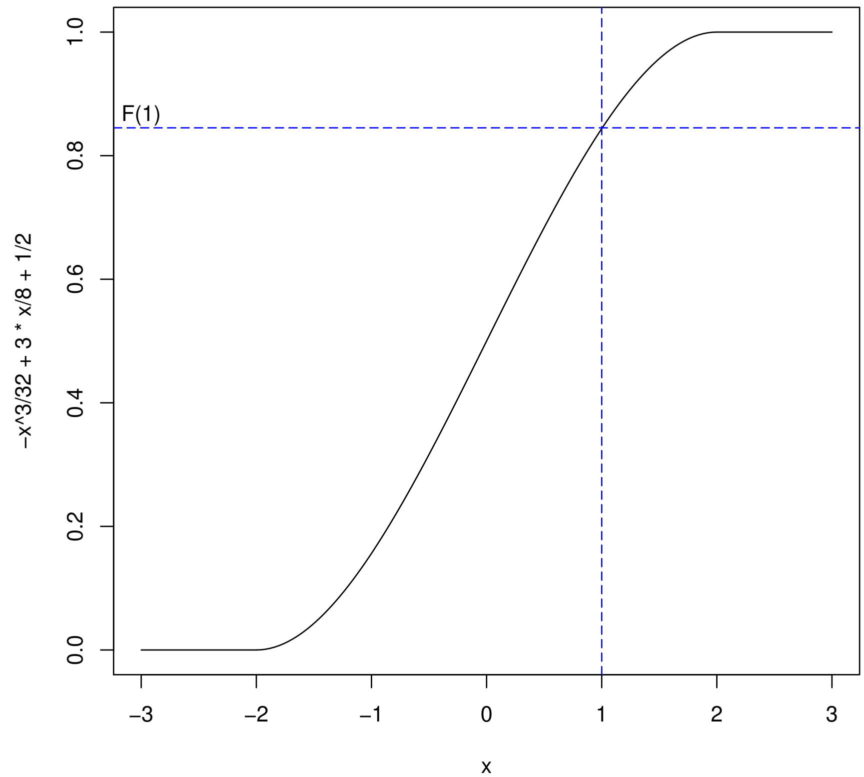
$$= 3 + 8 - \frac{27}{5} + 3 + 8 - \frac{27}{5} = 22 - \frac{54}{5} = \frac{56}{5}.$$

Korzystając z dystrybuanty otrzymujemy:

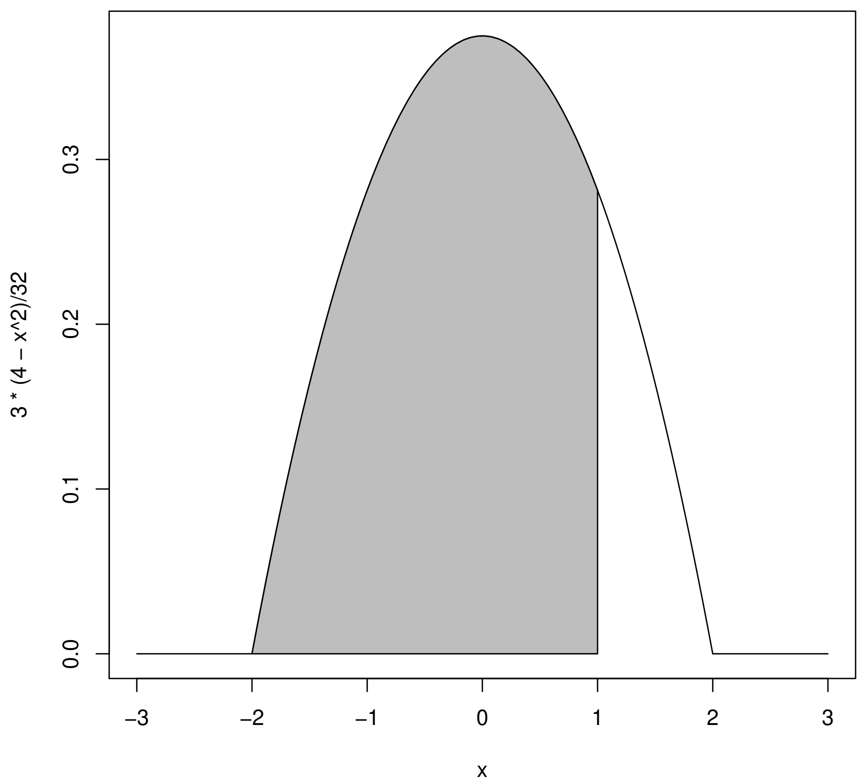
$$\mathbb{P}(|X| > 1) = 1 - \mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - (F(1) - F(-1))$$

$$= 1 - (-\frac{1}{32} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{32} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{11}{32} - \frac{11}{32} = \frac{5}{16}.$$

e) Skoro $\mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 1) = F(1)$, interpretacja na wykresie dystrybuanty jest oczywista: jest to punkt na osi OY odpowiadający $x = 1$ przy odwzorowaniu F :



Interpretacja $\mathbb{P}(X < 1)$ na wykresie gęstości bierze się z równości $\mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 1) = F(1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx$. Zatem $\mathbb{P}(X < 1)$ na wykresie gęstości jest równe polu znajdującemu się pod krzywej funkcji $y = f(x)$ z lewej strony od prostej $x = 1$, czyli w naszym przypadku nad przedziałem $(-2, 1)$:



3 * (4 − x^2)/32
0.0
0.1
0.2
0.3
−3
−2
−1
0
1
2
3
x

Zad. 4.8. Wiedząc, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $\mathbb{P}(X < 2) = \frac{3}{4}$, znajdź

a) parametr λ,

b) dystrybuantę zmiennej losowej X,

c) $\mathbb{E}(e^{-X})$, $\mathbf{Var}(e^{-X})$.

Rozwiązanie. Gęstość zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$ zapisuje się w postaci $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$

a) Parametr λ znajdziemy z warunku $\mathbb{P}(X < 2) = \frac{3}{4}$. Czyli

$$\mathbb{P}(X < 2) = F(2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{3}{4}$$

$$\iff -e^{-\lambda x}\Big|_0^2 = \frac{3}{4} \iff -e^{-2\lambda}+1 = \frac{3}{4} \iff e^{-2\lambda} = \frac{1}{4}$$

$$\iff -2\lambda = \ln\frac{1}{4} = -2\ln 2 \iff \lambda = \ln 2.$$

Zatem gęstość zmiennej losowej X można zapisać w postaci $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \ln 2 \cdot e^{-x\ln 2}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{\ln 2}{2^x}, & x > 0. \end{cases}$

b) Dystrybuantę zmiennej losowej X znajdziemy ze wzoru $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Czyli $F(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$, a dla $x > 0$ zachodzi

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln 2}{2^t} dt = \ln 2 \int_0^x 2^{-t} dt = -\ln 2 \cdot \frac{2^{-t}}{\ln 2}\Bigg|_0^x = 1 - 2^{-x}.$$

Ostatecznie,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2^x}, & x > 0. \end{cases}$$

c) Zgodnie z ogólnym wzorem na wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}(e^{-X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \ln 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot 2^{-x} dx$$

$$= -\ln 2 \cdot \frac{(2e)^{-x}}{\ln(2e)}\Bigg|_0^{\infty} = -\ln 2 \cdot \frac{0-1}{\ln(2e)} = \frac{\ln 2}{\ln(2e)} = \frac{\ln 2}{\ln 2 + 1}.$$

Z definicji $\mathbf{Var}(e^{-X}) = \mathbb{E}(e^{-2X}) - (\mathbb{E}(e^{-X}))^2$. Mamy:

$$\mathbb{E}(e^{-2X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} f(x) dx = \ln 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot 2^{-x} dx$$

$$= -\ln 2 \cdot \frac{(2e^2)^{-x}}{\ln(2e^2)}\Bigg|_0^{\infty} = -\ln 2 \cdot \frac{0-1}{\ln(2e^2)} = \frac{\ln 2}{\ln(2e^2)} = \frac{\ln 2}{\ln 2 + 2}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{Var}(e^{-X}) = \frac{\ln 2}{\ln 2 + 2} - \left(\frac{\ln 2}{\ln 2 + 1}\right)^2 = \frac{\ln 2}{(\ln 2 + 2)(\ln 2 + 1)^2}.$$

Zad. 4.9. Niech $X \sim N(1,2^2)$. Oblicz $\mathbb{P}(X<0)$, $\mathbb{P}(X<1)$, $\mathbb{P}(X>-1)$, $\mathbb{P}(|X|>1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $\frac{X-1}{2}$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od znalezienia rozkładu zmiennej losowej $Y=\frac{X-1}{2}$. W tym celu znajdziemy dystrubuantę F_Y tej zmiennej losowej:

$$F_Y(x)=\mathbb{P}(\frac{X-1}{2}\leqslant x)=\mathbb{P}(X\leqslant 2x+1)=F_X(2x+1),$$

gdzie F_X to dystrybanta zmiennej losowej X.
Gęstość zmiennej losowej X zapisuje się wzorem:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Zatem

$$F_Y(x)=F_X(2x+1)=\int_{-\infty}^{2x+1}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-1)^2}{8}}dt,\ x\in\mathbb{R}.$$

Zrobimy zamianę zmiennej pod znakiem całki: $u=\frac{t-1}{2}\implies t=2u+1, dt=2du\implies$

$$F_Y(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\ x\in\mathbb{R}.$$

Widzimy pod znakiem całki gęstość zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$, czyli prawa strona to wartość dystrybuanty odpowiadającej rozkładowi $N(0,1)$ w punkcie x. To oznacza, że $Y\sim N(0,1)$. Zatem udowodniliśmy własność *standaryzacji* zmiennej losowej o rozkładzie normalnym: jeśli $X \sim N(1, 2^2)$, to $Y = \frac{X-1}{2} \sim N(0, 1)$.

Teraz przejdziemy do obliczenia prawdopodobieństw:

$$\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} < \frac{0-1}{2}) = \mathbb{P}(Y < -\frac{1}{2}) = \Phi(-\frac{1}{2}),$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ oznacza dystrybuantę odpowiadającą rozkładowi $N(0, 1)$.

Udowodnijmy ważną własność funkcji Φ. Rozważmy

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Po zamianę zmiennej pod znakiem całki: $t = -u$ otrzymujemy

$$\Phi(-x) = -\int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \Phi(x).$$

Zatem $\mathbb{P}(X < 0) = \Phi(-\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2})$.

Wartość $\Phi(\frac{1}{2})$ znajdujemy z tablicy *Wartości dystrybuanty rozkładu normalnego*: $\Phi(\frac{1}{2}) = 0{,}6915$. Ostatecznie, $\mathbb{P}(X < 0) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$.

W podobny sposób znajdujemy pozostałe prawdopodobieństwa:

$$\mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} < \frac{1-1}{2}) = \mathbb{P}(Y < 0) = \Phi(0) = 0{,}5;$$

$$\mathbb{P}(X > -1) = \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} > \frac{-1-1}{2}) = \mathbb{P}(Y > -1)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0{,}8413;$$

$$\mathbb{P}(|X| > 1) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\frac{-1-1}{2} \leqslant \frac{X-1}{2} \leqslant \frac{1-1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(-1 \leqslant Y \leqslant 0)$$
$$= 1 - (\Phi(0) - \Phi(-1)) = 1 - \Phi(0) + \Phi(-1)$$
$$= 1 - \Phi(0) + 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}5 + 1 - 0{,}8413 = 0{,}6587.$$

Zad. 4.10. Dany jest sześcian, którego krawędź X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[1, 2]$. Wyznacz:

a) wartość oczekiwaną objętości tego sześcianu,

b) rozkład objętości tego sześcianu.

Rozwiązanie. Objętość sześcianu V wyraża się wzorem $V = X^3$ i jest zmienną losową. Przypomnijmy, że zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym na $[1, 2]$ ma gęstość $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,2] \\ 1, & x \in [1,2]. \end{cases}$

a) Z ogólnego wzoru na wartość oczekiwaną otrzymujemy

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X^3) = \int_1^2 x^3 \cdot 1 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

b) Znaleźć rozkład zmiennej losowej ciągłej oznacza znaleźć jej gęstość bądź dystrybuantę. Znajdziemy np. dystrybuantę zmiennej losowej $V = X^3$. W tym celu najpierw wypiszmy dystrybuantę zmiennej losowej X. Jak wiemy, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Zatem $F_X(x) = 0$ dla $x \leqslant 1$ oraz $F_X(x) = 1$ dla $x \geqslant 2$. Natomiast gdy $1 < x < 2$ mamy $F_X(x) = \int_1^x 1dt = t\Big|_1^x = x - 1$.

Czyli

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ x - 1, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Zatem dystrybuanta zmiennej losowej $V = X^3$ wynosi

$$F_V(x) = \mathbb{P}(X^3 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt[3]{x}) = F_X(\sqrt[3]{x})$$

$$= \begin{cases} 0, & \sqrt[3]{x} \leqslant 1 \\ \sqrt[3]{x} - 1, & 1 < \sqrt[3]{x} < 2 \\ 1, & \sqrt[3]{x} \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \sqrt[3]{x} - 1, & 1 < x < 8 \\ 1, & x \geqslant 8. \end{cases}$$