Wprowadzenie teoretyczne:
Przypomnij pojęcie funkcji pierwotnie rekurencyjnej oraz definicję funkcji Ackermanna.

Odpowiedź:
Funkcja pierwotnie rekurencyjna, to funkcja którą da się zbudować z funkcji prostych za pomocą ich składania oraz operacji podstawiania i rekursji.

Funkcja Ackermanna A: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jest następująco:

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{dla } x = 0 \\ A(x-1,1) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y = 0 \\ A(x-1,A(x,y-1)) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y > 0 \end{cases}$$

Zadanie 1

Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- **a.** $f(x,y) = x\cdot y$,
- **b.** $f(x,y) = x^y$ (*przyjmujemy, że* $0^0=1$),
- **c.** $f(x) = x!$
- **d.** $sg(x)= \begin{cases} 1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **e.** $x \dot{-} 1 = \begin{cases} x-1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **f.** $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & dla\ x \geq y \\ 0 & dla\ x < y \end{cases}$
- **g.** $|x - y|$

Rozwiązanie:

a. $f(x,y) = x\cdot y$,

funkcja ta może uzyskana z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą operacji rekursji:

$$f(x,0) = 0,$$
$$f(x,y+1) = f(x,y) + x.$$

b. $f(x,y) = x^y$ (*przyjmujemy, że* $0^0=1$),

funkcja ta może uzyskana z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą operacji rekursji:

$$f(x,0) = 1,$$
$$f(x,y+1) = f(x,y) \cdot x.$$

c. $f(x) = x!$

funkcja ta może uzyskana z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą operacji rekursji:

$$f(0) = 1,$$
$$f(x+1) = f(x) \cdot S(x).$$

d. $sg(x)=\begin{cases}1 & dla\ x>0\\ 0 & dla\ x=0\end{cases}$

funkcja ta może uzyskana z funkcji prostych za pomocą operacji rekursji:

$f(0) = Z(0)$,
$f(x+1) = S(Z(x))$.

e. $x \dot{-} 1 = \begin{cases}x-1 & dla\ x>0\\ 0 & dla\ x=0\end{cases}$

funkcja ta może uzyskana z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą operacji rekursji:

$f(0) = 0$,
$f(x+1) = sg(x)\cdot S(f(x))$,

f. $x \dot{-} y = \begin{cases}x-y & dla\ x\geq y\\ 0 & dla\ x<0\end{cases}$

funkcja ta może uzyskana z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą operacji rekursji:

$f(x,0) = x$,
$f(x,y+1) = f(x,y) \dot{-} 1$,

g. $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

Zadanie 2

Jakie funkcje otrzymamy za pomocą schematu rekursji podstawiając za g oraz h:

a. $f(x)=x,\ g(x,y,z)=z^x$,
b. $f(x)=x,\ g(x,y,z)=x^z$,

Rozwiązanie:

a. $f(x)=x,\ g(x,y,z)=z^x$,

$h(x,0) = x$ oraz $h(x,y+1) = h(x,y)^x$, czyli
$h(x,1) = x^x$
$h(x,2) = (x^x)^x = x^{x2}$
indukcyjnie można pokazać, że $h(x,y+1) = (x^{xy})^x = x^{x(y+1)}$

b. $f(x)=x,\ g(x,y,z)=x^z$,

$h(x,0) = x$ oraz $h(x,y+1) = x^{h(x,y)}$, czyli
$h(x,1) = x^x$
$h(x,2) = x^{x^x}$
indukcyjnie można pokazać, że $h(x,y+1) = x^{\underbrace{x^{\cdots^{x}}}_{y+1\ razy}}$.

Zadanie 3

Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że:

a. $A(x+1,y) > y+1$,
b. $A(x,y+1) > A(x,y)$,
c. $A(x+1,y) > A(x,y)$,
d. dla ustalonej wartości $x \in \mathbb{N}$ funkcja $A_x(y)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Rozwiązanie:

a.
Dla x=0 oraz y=0 mamy A(x+1,y) = 2 > 1 = y+1.

Załóżmy, że x=0 oraz (*) A(x+1,y) > y+1 dla wszystkich y=0…k.
Wówczas $\underline{A(x+1, k+1)} = A(1, k+1) = A(0, A(1,k)) = A(1, k) +1 >^{(*)} \underline{k+2}$.

Załóżmy, że x>0, y=0 oraz (*) A(x+1,y) > y+1 dla wszystkich x=0…k oraz dowolnego y.
Wówczas $\underline{A(k+1+1,0)} = A(k+1,1) >^{(*)} 2 > \underline{1}$.

Załóżmy, że x>0, y>0 oraz (*) A(x+1,y) > y+1 dla wszystkich x=0…k i dowolnego y oraz dla x=k+1 i y=0…n.
Wówczas $\underline{A(k+1+1, n+1)} = A(k+1, A(k+2,n)) >^{(*)} A(k+2, n)+1 >^{(*)} \underline{n+2}$.

b.
Dla x=0 oraz y=0 mamy A(x,y+1) = 2 > 1 = A(x,y).

Załóżmy, że x=0.
Wówczas A(x, k+1) = A(0, k+1) = k+2 > k+1 = A(0, k).

Załóżmy, że x>0, y=0.
Wówczas A(k+1,y+1) = A(k+1,1) = A(k,A(k,1)) >*(z a.)* A(k,1) = A(k+1,0).

Załóżmy, że x>0, y>0.
Wówczas A(k+1, n+1) = A(k, A(k+1,n)) >*(z a.)* A(k+1, n) + 1 > A(k+1, n).

c.
Dla x=0 oraz y=0 mamy A(x+1,y) = 2 > 1 = A(x,y).

Załóżmy, że x=0 oraz (*) A(x+1,y) > A(x,y) dla wszystkich y=0…k.
Wówczas $A(x+1, k+1)=\underline{A(1, k+1)} = A(0, A(1,k)) = A(1,k)+1 >^{(*)} A(0,k)+1 = k+2 = \underline{A(0,k+1)}$.

Załóżmy, że x>0, y=0.
Wówczas A(k+1,0) = A(k,1) >*(z b.)* A(k,0).

Załóżmy, że x>0, y>0.
Wówczas A(k+1, n+1) = A(k, A(k+1,n)) > *(z a. oraz b.)* A(k, n+1).

d.
Dowiedziemy tego indukcyjnie.

Dla $x=0$ mamy $A_0(y)=A(0,y)=y+1$ jest funkcją pierwotnie rekurencyjną.
Załóżmy, że język A_x jest rekurencyjny. Wówczas język A_{x+1} można wyrazić za pomocą rekursji korzystając z funkcji A_x, o której wiemy, że jest pierwotnie rekurencyjna:

$$h(0) = A_x(1)$$
$$h(y+1) = A_x(h(y)),$$

czyli przyjmując za f funkcję stałą równą $A_x(1)$ zaś za g funkcję przyporządkowującą parze $(y,h(y))$ wartość $A_x(h(y))=A_x(A_{x+1}(y))=A(x,A(x+1,y))=A(x+1,y+1)=A_{x+1}(y+1)$.

Zadania domowe:

A. Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

a. $\overline{sg}(x)= \begin{cases} 0 & dla\ x > 0 \\ 1 & dla\ x = 0 \end{cases}$

b. $max(x,y)$

c. $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$

d. $lh(x)$ – *liczba dzielników x, które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy* $lh(0)=0$*)*

B. Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że dla ustalonej wartości $y\in \mathbb{N}$ funkcja $A_y(x)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.