Zad. 3.1. Siła kiełkowania nasion pewnego gatunku kwiatów wynosi 98%. Posiano 10 nasion tego gatunku. Z jakim prawdopodobieństwem można liczyć na to, że

a) wykiełkuje co najmniej 1 nasiono?

b) wykiełkuje dokładnie 2 nasion?

Schemat Bernoulliego. Nazywamy tak serię n niezależnych doświadczeń losowych takich, że: w każdym doświadczeniu mamy tylko dwa możliwe wyniki - „sukces" (oznaczany jako 1) i „porażka" (oznaczana jako 0), przy czym prawdopodobieństwo sukcesu $p \in (0, 1)$ oraz porażki $1-p$ nie zmieniają się od doświadczenia do doświadczenia.

Jeśli S_n oznacza liczbę sukcesów w n doświadczeniach, to

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n, \quad (1)$$

Rozwiązanie. Wykiełkowanie nasiona nazwiemy sukcesem. Mamy $p = 0{,}98, \ n = 10$.

(a) Należy policzyć $P(S_{10} \geqslant 1)$. Ze wzoru (1)

$$P(S_{10} \geqslant 1) = 1 - P(S_{10} = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}98^0 \cdot 0{,}02^{10}$$

$$= 1 - 0{,}02^{10} = 1 - 1{,}024 \cdot 10^{-17}.$$

(b) Należy policzyć $P(S_{10} = 2)$. Znowu ze wzoru (1)

$$P(S_{10} = 2) = \binom{10}{2} 0{,}98^2 \cdot 0{,}02^8 \approx 1{,}106 \cdot 10^{-12}.$$

Zad. 3.2. Prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu po przeprowadzeniu trzech doświadczeń wg schematu Bernoulliego jest równe 0,657. Oblicz prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu.

Rozwiązanie. Mamy $n = 3$, a prawdopodobieństwo sukcesu p należy znaleźć. Wiemy natomiast, że $P(S_3 \geqslant 1) = 0{,}657$. Stosując wzór (1) możemy zapisać równanie

$$1-P(S_3=0)=0{,}657 \iff 1-\binom{3}{0}p^0(1-p)^3=0{,}657$$

$$\iff (1-p)^3=1-0{,}657=0{,}343 \iff 1-p=\sqrt[3]{0{,}343}=0{,}7$$

$$\iff p=0{,}3.$$

Zad. 3.3. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać w tenisa z równorzędnym przeciwnikiem 2 sety z 4 czy 3 sety z 6?

Rozwiązanie. Ponieważ przeciwnik jest równorzędny, to prawdopodobieństwo wygranej (sukcesu) wynosi $p = \frac{1}{2}$. Dalej stosujemy dwa razy wzór (1):

$$P(S_4 = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16},$$

$$P(S_6 = 3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}.$$

Zatem bardziej prawdopodobne jest wygrać z równorzędnym przeciwnikiem 2 sety z 4 niż 3 sety z 6.

Zad. 3.4. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki w n rzutach kostką jest większe od $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Wyrzucenie szóstki nazwijmy sukcesem, $p = \frac{1}{6}$. Zgodnie ze wzorem (1) prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki w n rzutach kostką wynosi

$$P(S_n \geqslant 1) = 1 - P(S_n = 0)$$
$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Zatem należy znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której zachodzi nierówność

$$P(S_n \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $(\frac{5}{6})^n$ monotonicznie maleje do zera wraz ze wzrostem n, lewa strona powyższej nierówności rośnie monotonicznie od $\frac{1}{6}$ (dla $n = 1$) do 1 wraz ze wzrostem n. A więc istnieje taka liczba naturalna n, przy której lewa strona tej nierówności przekroczy poziom $\frac{1}{2}$. Ostatecznie,

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2} \iff$$

$$n > \log_{\frac{5}{6}}\left(\frac{1}{2}\right) \iff n > \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{5}{6})} \approx 3{,}80.$$

Zatem prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki w n rzutach kostką przekracza $\frac{1}{2}$ już dla $n = 4$.

Zad. 3.5. Automat produkuje w ciągu jednego cyklu produkcyjnego 10 detali. Prawdopodobieństwo, że dowolnie wybrany detal okaże się wybrakowany, wynosi 0,01. Po ilu cyklach prawdopodobieństwo wyprodukowania co najmniej jednego wybrakowanego detalu będzie nie mniejsze niż 0,8?

Rozwiązanie. Zadanie jest podobne od poprzedniego z tą różnicą, że liczba przeprowadzonych doświadczeń tu jest krotna liczbie cykli i wynosi $10n$, gdzie n to liczba cykli. Przyjmijmy, że sukcesem jest produkcja detalu wybrakowanego(!), a zatem pawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0{,}01$. Zgodnie ze wzorem (1) prawdopodobieństwo wyprodukowania co najmniej jednego wybrakowanego detalu po n cyklach wynosi

$$P(S_{10n} \geqslant 1) = 1 - P(S_{10n} = 0)$$
$$= 1 - \binom{10n}{0} 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{10n} = 1 - 0{,}99^{10n}.$$

Podobne rozumowania jak w poprzednim zadaniu dają podstawę twierdzić, że prawdopodobieństwo to monotonicznie rośnie do 1 wraz ze wzrostem n, a zatem na pewno przekroczy poziom 0,8. Ostatecznie,

$$1 - 0{,}99^{10n} \geqslant 0{,}8 \iff 0{,}99^{10n} \leqslant 0{,}2 \iff$$
$$10n \geqslant \log_{0{,}99}(0{,}2) \iff 10n \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}99)} \approx 160{,}1.$$

Czyli prawdopodobieństwo wyprodukowania co najmniej jednego wybrakowanego detalu będzie nie mniejsze niż 0,8 dopiero po 17 cykli.

Zad. 3.6. W wyniku wieloletnich obserwacji ustalono, że w pewnej miejscowości prawdopodobieństwo deszczu w dniu 1 lipca wynosi $\frac{4}{17}$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba deszczowych dni 1 lipca w najbliższych 50 latach?

Czasami w zadaniach należy znaleźć największą liczbę w ciągu liczb

$$P(S_n = 0),\ P(S_n = 1),\ \ldots,\ P(S_n = n)$$

lub równoważnie *znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów.* Wynik jest następujący: jeśli $(n+1)p \notin \mathbb{N}$, to

$$\max_{0 \leq k \leq n} P(S_n = k) = P(S_n = [(n+1)p]),$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą (podłogę) liczby x, tzn. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leqslant x\}$, natomiast jeśli $(n+1)p \in \mathbb{N}$, to

$$\max_{0 \leq k \leq n} P(S_n = k) = P(S_n = (n+1)p) = P(S_n = (n+1)p - 1).$$

Rozwiązanie. Mamy $n = 50, p = \frac{4}{17}$, zatem $(n+1)p = (50+1) \cdot \frac{4}{17} = 12$. Skoro uzyskaliśmy liczbę naturalną, to najbardziej prawdopodobne liczby deszczowych dni w dniu 1 lipca w najbliższych 50 latach to 12 lub 11.

Zad. 3.7. Ile razy należy rzucić rzetelną kość, by najbardziej prawdopodobną liczbą otrzymanych szóstek była liczba 10?

Rozwiązanie. Wyrzucenie szóstki nazwijmy sukcesem, wówczas prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \frac{1}{6}$. Prosta analiza wyniku przedstawionego na poprzedniej stronie prowadzi do wniosku, że skoro najbardziej prawdopodobną liczbą otrzymanych szóstek jest 10, to liczba $(n+1)p = \frac{n+1}{6}$ musi znajdować się w następującym przedziale: $10 \leqslant \frac{n+1}{6} \leqslant 11$.
Istotnie, jeśli $\frac{n+1}{6} \notin \mathbb{N}$, to musi zachodzić $[\frac{n+1}{6}] = 10$, czyli $\frac{n+1}{6}$ leży powyżej 10 i poniżej 11. Jeśli natomiast $\frac{n+1}{6} \in \mathbb{N}$, to musi zachodzić $\frac{n+1}{6} = 10$ (w tym przypadku najbardziej prawdopodobne liczby otrzymanych szóstek to 10 i 9) lub $\frac{n+1}{6} = 11$ (tu najbardziej prawdopodobne liczby otrzymanych szóstek to 11 i 10).

A zatem wszystkie naturalne liczby n, spełniające podwójną nierówność $10 \leqslant \frac{n+1}{6} \leqslant 11$, są rozwiązaniami w tym zadaniu. Czyli ostatecznie, $59 \leqslant n \leqslant 65$.