Zad 4.5

Niech X oznacza liczbę zdobytych punktów.

Zmienna losowa X przyjmuje wartości ze zbioru $\{0,1,2,3\}$, czyli ma rozkład dyskretny.

$\#\Omega = 3\cdot2\cdot1 = 6$ – na tyle sposobów można rozłożyć 3 żetony na 3 losowania (numerowane żetony i losowania)

$P(X=0) = \frac{2\cdot1\cdot1}{6} = \frac{2}{6}$ – prawdopodobieństwo że: każdy żeton jest w wylosowany w losowaniu o innym numerze niż on

$P(X=1) = \frac{3\cdot1\cdot1\cdot1}{6} = \frac{3}{6}$ prawdopodobieństwo sytuacji że numer jednego żetonu pokrywa się z nr. losowania (3 przypadki)

$P(X=2) = 0$ – nie ma możliwości aby 2 żetony były w odpowiednich losowaniach gdy trzeci żeton nie jest!

$P(X=3) = \frac{1\cdot1\cdot1}{6} = \frac{1}{6}$ – prawdopodobieństwo wylosowania 1 żetonu w 1 losowaniu, 2 żetonu w 2, a 3 żetonu w 3 losowaniu.

a) Zatem rozkład zmiennej X ma postać

x_k	0	1	2	3
$P(X=x_k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

b) Aby obliczyć $E(X)$ skorzystam z wzoru $E(X) = \sum_k x_k P(X=x_k)$, dla naszego przypadku:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} x_k P(X=x_k) = 0\cdot\frac{2}{6} + 1\cdot\frac{3}{6} + 2\cdot0 + 3\cdot\frac{1}{6} = 1$$

Do obliczenia $Var(X)$ skorzystamy z wzoru $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (wprost z definicji $Var(X)$)

Musimy policzyć $E(X^2)$, wykorzystam zależność $E(X^2) = \sum_k x_k^2 P(X=x_k)$ która (z def.)

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 P(X=x_k) = 0\cdot\frac{2}{6} + 1^2\cdot\frac{3}{6} + 2^2\cdot0 + 3^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

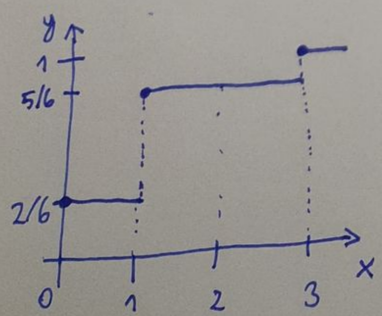
Mamy już wszystko potrzebne do obliczenia $Var(X)$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$$

c) Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać $F(X) = \sum_{x_k : x_k < x} P(X=x_k)$

Dla naszego przypadku.

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0 \\ 2/6, & \text{gdy } 0 \le x < 1 \\ 5/6, & \text{gdy } 1 \le x < 2 \\ 5/6, & \text{gdy } 2 \le x < 3 \\ 1, & \text{gdy } x \ge 3 \end{cases}$$



Zad 4.1.

Niech X oznacza liczbę braków w wylosowanej próbce, przyjmie wartości 0,1,2,3,4,5 czyli podobny rozkład dyskretny

$\#\Omega = \binom{100}{5} =$

$P(X=0) = \binom{90}{5} / \binom{100}{5}$

$P(X=1) = \left(\binom{10}{1}\binom{90}{4}\right) / \binom{100}{5}$

$P(X=2) = \left(\binom{10}{2}\binom{90}{3}\right) / \binom{100}{5}$

$P(X=3) = \left(\binom{10}{3}\binom{90}{2}\right) / \binom{100}{5}$

$P(X=4) = \left(\binom{10}{4}\binom{90}{1}\right) \binom{100}{5}$

$P(X=5) = \binom{10}{5} / \binom{100}{5}$

Otrzymuję prosty wzór $P(X=k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}$

Rozkład zmiennej losowej X.

x_k	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_k)$	$\binom{90}{5}/\binom{100}{5}$	$\frac{10\binom{90}{4}}{\binom{100}{5}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}$	$\frac{\binom{10}{4}\binom{90}{1}}{\binom{100}{5}}$	$\binom{10}{5}/\binom{100}{5}$

Zad 4.2.

a)

x_k	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$
$P(X=x_k)$	0,3	0,6	0,4

b)

x_k	-2	$\frac{3}{2}$	5
$P(X=x_k)$	0,2	0,5	0,3

Zad 4.3.

Niech X oznacza liczbę reszek w rzucie 4 monetami. X przyjmuje wartości ze zbioru 0,1,2,3,4. A więc mamy do czynienia z rozkładem dyskretnym. Skorzystam z schematu Bernoulliego, ponieważ p jest stałe i równe $\frac{1}{2}$ a $n=4$ „liczba losowań”

$P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{16}\right)$

$P(X=0) = \frac{1}{16}$

$P(X=1) = \frac{4}{16}$

$P(X=2) = \frac{6}{16}$

$P(X=3) = \frac{4}{16}$

$P(X=4) = \frac{1}{16}$

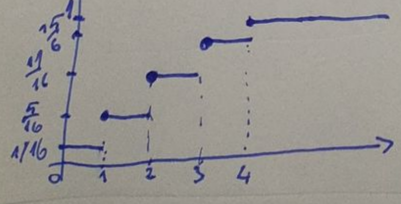
x_k	0	1	2	3	4
$P(X=x_k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = \sum_{k=0}^{4} x_k P(X=x_k) = 2$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{4} x_k P(X=x_k) = 5$

$\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$



Zad 4.6

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad$ X i Y - zdarzenia niezależne.

$P(X+Y=2) = P(X=1) \cdot P(Y=1) + P(X=2) \cdot P(Y=0) + P(X=0) \cdot P(Y=2)$

$P(X+Y=2) = \left(\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}\right)^2 + 2 \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n =$

$= n^2 p^2 (1-p)^{2n-2} + 2\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{2n-2} = \left(n^2 + 2\binom{n}{2}\right) \cdot p^2 (1-p)^{2n-2}$

Zad 4.4

$P(X=0) = \frac{2}{6}$ $\quad$ X - posiada rozkład dyskretny

$P(X=1) = \frac{3}{6}$

$P(X=2) = 0$

$P(X=3) = \frac{1}{6}$

Zatem rozkład zmiennej X ma postać:

x_k	0	1	2	3
$P(X=x_k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Pozostała część zadania identyczna jak w zadaniu 4.5.