TEORIA OBLICZALNOŚCI – PRZYGOTOWANIE DO KOLOKWIUM

Zadanie 1

- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil$ jest obliczalna.
- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + \boldsymbol{y}$ jest obliczalna.
- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{x+y}}{\boldsymbol{2}} \right\rfloor$ jest obliczalna.

Zadanie 2

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dla danego wejścia nad alfabetem **{0,1}** generuje bit parzystości po lewej stronie liczby (w przypadku, gdy sumaryczna liczba jedynek jest parzysta).

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dodaje trzy do nieujemnej binarnej liczby parzystej zapisanej na taśmie lub mnoży przez dwa w przypadku liczby nieparzystej.

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dla danego wejścia nad alfabetem $\boldsymbol{\{a,b\}}$ generuje symetryczny ciąg symboli $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zapisanych na taśmie po prawej stronie słowa wejściowego.

Zadanie 3

- Jaką funkcję liczy program o numerze **110**?
- Jaką funkcję liczy program o numerze **111**?
- Zweryfikuj, czy programy o numerach **21001** i **22175** obliczają tę samą funkcję jednoargumentową. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4

- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = x! \div y!}$ jest pierwotnie rekurencyjna.
- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = \max(x,2y)}$ jest pierwotnie rekurencyjna.
- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = |2x-y|}$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Zadanie 5

Rozstrzygnij, czy poniższe zbiory są rekurencyjny oracz czy są rekurencyjnie przeliczalne:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x \in (D_x \setminus \mathbb{N})\}$.

b) $\{x \in \mathbb{N} : |D_x| > |Im_x|\}$,

c) $\{x \in \mathbb{N} : |D_x| < |Im_x|\}$.

d) $\{x \in \mathbb{N} : 2019 \notin D_x\}$,

e) $\{x \in \mathbb{N} : 2019 \in (D_x \setminus \mathbb{N})\}$.

TEORIA OBLICZALNOŚCI – PRZYGOTOWANIE DO KOLOKWIUM

Zadanie 1

- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil$ jest obliczalna.
- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + \boldsymbol{y}$ jest obliczalna.
- Udowodnij, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y)} = \left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor$ jest obliczalna.

Zadanie 2

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dla danego wejścia nad alfabetem **{0,1}** generuje bit parzystości po lewej stronie liczby (w przypadku, gdy sumaryczna liczba jedynek jest parzysta).

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dodaje trzy do nieujemnej binarnej liczby parzystej zapisanej na taśmie lub mnoży przez dwa w przypadku liczby nieparzystej.

- Zaprojektuj maszynę Turinga, która dla danego wejścia nad alfabetem $\boldsymbol{\{a,b\}}$ generuje symetryczny ciąg symboli $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zapisanych na taśmie po prawej stronie słowa wejściowego.

Zadanie 3

- Jaką funkcję liczy program o numerze **110**?
- Jaką funkcję liczy program o numerze **111**?
- Zweryfikuj, czy programy o numerach **21001** i **22175** obliczają tę samą funkcję jednoargumentową. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4

- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = x! \div y!}$ jest pierwotnie rekurencyjna.
- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = \max(x,2y)}$ jest pierwotnie rekurencyjna.
- Wykaż, że funkcja $\boldsymbol{f(x,y) = |2x\text{-}y|}$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Zadanie 5

Rozstrzygnij, czy poniższe zbiory są rekurencyjny lub rekurencyjnie przeliczalne:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x \in (D_x \setminus \mathbb{N})\}$.

b) $\{x \in \mathbb{N} : |D_x| > |Im_x|\}$,

c) $\{x \in \mathbb{N} : |D_x| < |Im_x|\}$.

d) $\{x \in \mathbb{N} : 2019 \notin D_x\}$,

e) $\{x \in \mathbb{N} : 2019 \in (D_x \setminus \mathbb{N})\}$.