

Projekt pn. „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych”
 realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

TEORIA OBLICZALNOŚCI – ĆWICZENIA 1

Ćwiczenia 1

Wprowadzenie teoretyczne:

Co to jest maszyna licznikowa? Jakie ma instrukcje?

Odpowiedź:

Maszyna licznikowa – licznik rozkazów + pamięć (nieskończona tablica)

Lista instrukcji:

Kod instrukcji	Kod adresów	Oznaczenie	Semantyka	Uwagi
0	n	Z(n)	$r[n] := 0$	Licznik rozkazów zwiększ o 1
1	n	S(n)	$r[n] := r[n] + 1$	Licznik rozkazów zwiększ o 1
2	$\pi(m, n)$	T(m, n)	$r[n] := r[m]$	Licznik rozkazów zwiększ o 1
3	$\beta(m, n, q)$	I(m, n, q)	If $r[m] = r[n]$ then goto q	Licznik rozkazów zwiększ o 1, gdy $r[m] \neq r[n]$, w przec. przyp. umieść w nim q

$r[x]$ – zawartość komórki o numerze x

Przykładowy program:

0	I(1,2,5)	If $r[1] = r[2]$ then goto 5
1	S(2)	$r[2] := r[2] + 1$
2	S(3)	$r[3] := r[3] + 1$
3	I(1,2,5)	if $r[1] = r[2]$ then goto 5
4	I(1,1,1)	if $r[1] = r[1]$ then goto 1
5	T(3,0)	$r[0] := r[3]$

Pytanie: Jaką funkcję liczy ten program?

Projekt pn. „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych”
realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

TEORIA OBLICZALNOŚCI – ĆWICZENIA 1

Zadanie 1

Napisz program na maszynie licznikowej obliczający następujące funkcje:

1. $f(x) = x \bmod 2$

2. $g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & x > y \end{cases}$

Rozwiązanie:

Program obliczający funkcję f :

1.

0	I(1,2,7)
1	S(2)
2	I(1,2,5)
3	S(2)
4	I(1,1,0)
5	S(0)

W rejestrze 2-gim umieszczane są kolejne liczby naturalne.

Jeśli x jest parzyste (test w instrukcji 0), to program zwraca 0, jeśli nieparzyste (test w instrukcji 2), program zwraca 1.

2. Program wyznaczy mniejszą z liczb x i y i ustali, czy to jest x czy y .

0	I(3,1,4)
1	I(3,2,5)
2	S(3)
3	I(1,1,0)
4	S(0)

Zadanie 2

Wykaż, że następujące funkcje są ML-obliczalne:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x - \text{parzyste} \\ \infty & x - \text{nieparzyste} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} x-y & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$

6. $f(n) = n \div 2$

Projekt pn. „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych”
realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

TEORIA OBLICZALNOŚCI – ĆWICZENIA 1

Rozwiązanie:

1. Ten program się nie zatrzymuje dla liczb nieparzystych!

0	I(1,2,5)
1	S(2)
2	S(2)
3	S(3)
4	I(1,1,0)
5	T(3,0)

- 2.

0	I(1,0,3)
1	S(0)

- 3.

1	I(1,2,3)
2	S(0)

- 4.

1	I(1,2,8)
2	S(2)
3	I(1,2,8)
4	S(2)
5	S(0)
6	I(1,1,2)

- 5.

1	I(2,3,5)
2	I(1,3,9)
3	S(3)
4	I(1,1,1)
5	I(1,3,9)
6	S(3)
7	S(0)
8	I(1,1,5)

$x \geq y$

$x < y$

w 3 rejestrze znajdzie się mniejsza z liczb
(a dokładnie y , bo dla $x < y$
skończyliśmy skokiem z instrukcji numer 2)

- 6.

1	I(1,0,8)
2	S(2)
3	I(1,2,8)
4	S(2)
5	S(0)
6	I(1,2,8)
7	I(1,1,2)

Zadanie 3

Skonstruuj maszynę licznikową dla poniższych funkcji:

Projekt pn. „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych”
realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

TEORIA OBLICZALNOŚCI – ĆWICZENIA 1

1. $|x - y|$
2. $\min : N^2 \rightarrow N$
3. $x \div 1 = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie:

1.

0	I(1,2,100)
1	I(1,3,10)
2	I(2,4,6)
3	S(3)
4	S(4)
5	I(1,1,1)
6	I(1,3,100)
7	S(0)
8	S(3)
9	I(1,1,6)
10	I(2,4,100)
11	S(0)
12	S(4)
13	I(1,1,10)

2.

0	I(1,0,4)
1	I(2,0,4)
2	S(0)
3	I(1,1,0)

3.

0	I(1,4,100)
1	S(3)
2	I(1,3,6)
3	S(2)
4	S(3)
5	I(1,1,2)
6	T(2,0)

Projekt pn. „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych”
realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

TEORIA OBLICZALNOŚCI – ĆWICZENIA 1

Zadania domowe:

A. Napisz programy obliczające następujące funkcje:

1. $f(n) = n^5$,
2. $f(n) = n^{10}$,
3. $f(a; b; c; d; e; f; x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$;
4. $f(n) = 2^n$.

B. Wykaż, że następujące funkcje są ML-obliczalne:

a) $+$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ - suma

b) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & x > y \\ 0 & x \leq y \end{cases}$