

---

# TEORIA OBLICZALNOŚCI

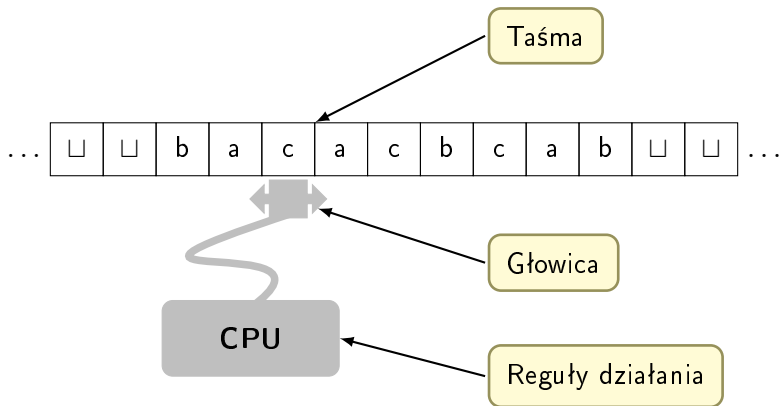
---

Marcin Piątkowski

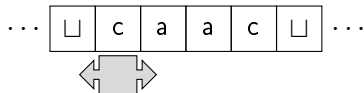
Wykład 4

# MASZYNA TURINGA

# Maszyna Turinga (1936)



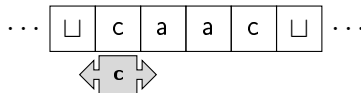
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów

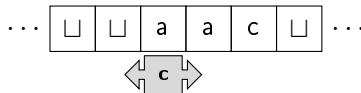


### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

## Przykład

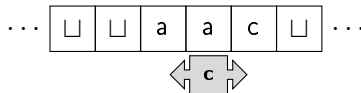
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów

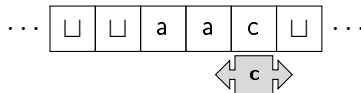


### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta ⇒ **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza ⇒ **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie ⇒ **akceptuj**

## Przykład

Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów

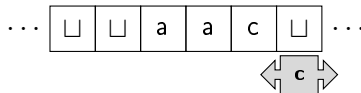


### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**



Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów

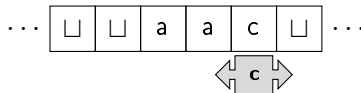


## Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

## Przykład

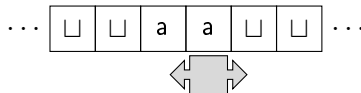
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

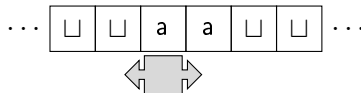
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta ⇒ **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza ⇒ **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie ⇒ **akceptuj**

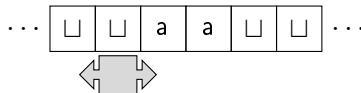
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

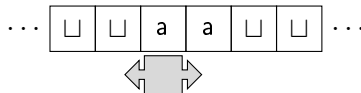
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

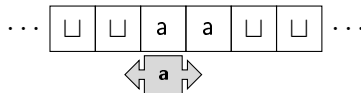
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

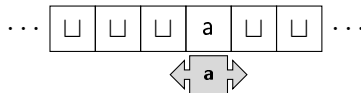
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów

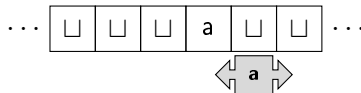


### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**



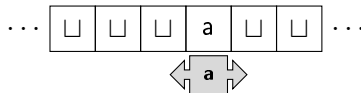
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

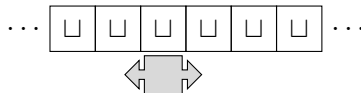
Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

Maszyna Turinga akceptująca  
język palindromów



### Opis działania

- ▶ Jeśli taśma jest pusta  $\Rightarrow$  **akceptuj**
- ▶ Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa
- ▶ Znajdź prawy koniec słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa
- ▶ Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza  $\Rightarrow$  **odrzuć**
- ▶ Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie  $\Rightarrow$  **akceptuj**

## Maszyna Turinga

Siódemka uporządkowana

$$MT = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ} \rangle,$$

gdzie:

- ❶  $Q$  – skończony zbiór stanów
- ❷  $\Sigma$  – skończony alfabet wejściowy ( $\sqcup \notin \Sigma$ )
- ❸  $\Gamma$  – skończonym alfabet taśmy ( $\sqcup \in \Gamma$  oraz  $\Sigma \subset \Gamma$ )
- ❹  $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  – funkcja przejścia
- ❺  $q_0 \in Q$  – wyróżniony stan początkowy
- ❻  $q_{ACC} \in Q$  – wyróżnionym stan akceptujący
- ❼  $q_{REJ} \in Q$  – wyróżniony stan odrzucający ( $q_{ACC} \neq q_{REJ}$ )

## Funkcja przejścia

$q_0 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup R$  // akceptuj puste wejście

$\left. \begin{array}{l} q_0 a \longrightarrow q_1 \sqcup R \\ q_0 b \longrightarrow q_2 \sqcup R \end{array} \right\}$  // zapamiętaj pierwszy znak

$\left. \begin{array}{l} q_1 a \longrightarrow q_1 a R \\ q_1 b \longrightarrow q_1 b R \\ q_2 a \longrightarrow q_2 a R \\ q_2 b \longrightarrow q_2 b R \end{array} \right\}$  // znajdź koniec słowa

$\left. \begin{array}{l} q_1 \sqcup \longrightarrow q_3 \sqcup L \\ q_2 \sqcup \longrightarrow q_4 \sqcup L \end{array} \right\}$  // sprawdź ostatni znak

$\left. \begin{array}{l} q_3 b \longrightarrow q_{REJ} b L \\ q_4 a \longrightarrow q_{REJ} a L \end{array} \right\}$  // odrzuć w przypadku niezgodności

$\left. \begin{array}{l} q_3 a \longrightarrow q_5 \sqcup L \\ q_4 b \longrightarrow q_5 \sqcup L \end{array} \right\}$  // usuń ostatni znak

$\left. \begin{array}{l} q_3 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L \\ q_4 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L \end{array} \right\}$  // akceptuj pojedynczy znak

$\left. \begin{array}{l} q_5 a \longrightarrow q_5 a L \\ q_5 b \longrightarrow q_5 b L \end{array} \right\}$  // wróć na początek słowa

$q_5 \sqcup \longrightarrow q_0 \sqcup R$  // rozpocznij kolejną iterację

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{ACC}, q_{REJ}\}$$

# Diagram stanów

$q_0 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup R$

$q_0 a \longrightarrow q_1 \sqcup R$

$q_0 b \longrightarrow q_2 \sqcup R$

$q_1 a \longrightarrow q_1 a R$

$q_1 b \longrightarrow q_1 b R$

$q_2 a \longrightarrow q_2 a R$

$q_2 b \longrightarrow q_2 b R$

$q_1 \sqcup \longrightarrow q_3 \sqcup L$

$q_2 \sqcup \longrightarrow q_4 \sqcup L$

$q_3 b \longrightarrow q_{REJ} b L$

$q_4 a \longrightarrow q_{REJ} a L$

$q_3 a \longrightarrow q_5 \sqcup L$

$q_4 b \longrightarrow q_5 \sqcup L$

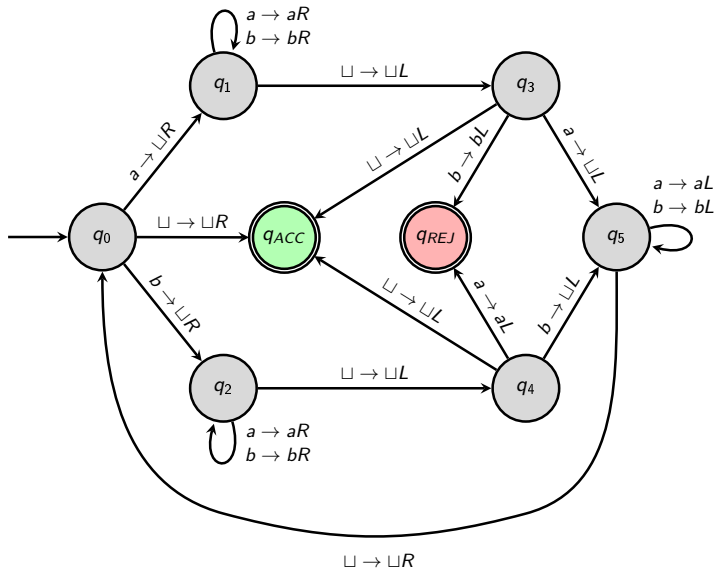
$q_3 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L$

$q_4 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L$

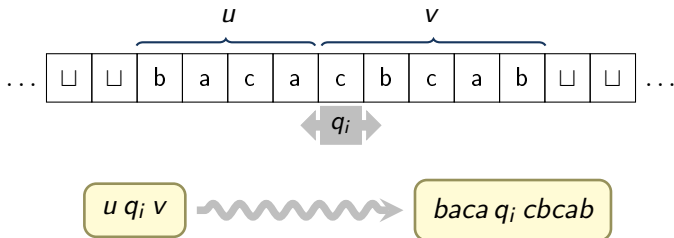
$q_5 a \longrightarrow q_5 a L$

$q_5 b \longrightarrow q_5 b L$

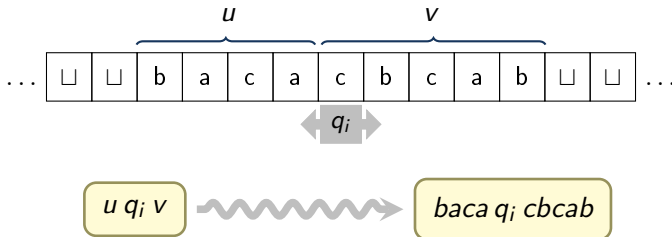
$q_5 \sqcup \longrightarrow q_0 \sqcup R$



# Konfiguracja maszyny Turinga



# Konfiguracja maszyny Turinga



## Rodzaje konfiguracji

**Początkowa** – konfiguracja postaci  $q_0 w$

**Akceptująca** – dowolna konfiguracja, dla której maszyna znajduje się w stanie akceptującym

**Odrzucająca** – dowolna konfiguracja, dla której maszyna znajduje się w stanie odrzucającym

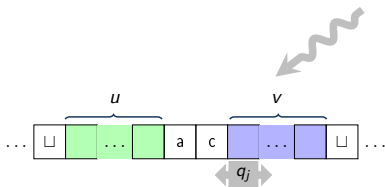
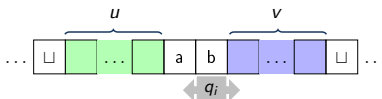
**Końcowa** – dowolna konfiguracja akceptująca lub odrzucająca



# Zmiana konfiguracji

Maszyna przechodzi z konfiguracji  $C_1$  do konfiguracji  $C_2$  ( $C_1 \rightarrow C_2$ ), jeżeli:

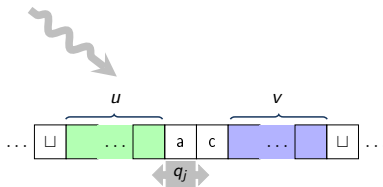
$$C_1 = ua q_i bv$$



1

$$C_2 = uac q_j v$$

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$$



2

$$C_2 = u q_j acv$$

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$$

Maszyna Turinga **akceptuje** (**odrzuca**) słowo  $w$ , jeśli istnieje taki ciąg jej konfiguracji  $\langle C_0, C_1, \dots, C_n \rangle$ , że:

- ❶  $C_0$  jest konfiguracją początkową dla słowa  $w$
- ❷  $\forall_{0 < i \leq n} C_{i-1} \rightarrow C_i$
- ❸  $C_n$  jest konfiguracją **akceptującą** (**odrzucającą**)

Ciąg konfiguracji  $\langle C_0, C_1, \dots, C_n \rangle$  nazywamy **akceptującą** (**odrzucającą**) historią obliczeń maszyny Turinga

Zbiór słów **akceptowanych** przez maszynę Turinga  $M$  nazywamy językiem **rozpoznawanym** przez  $M$  – oznaczenie:  $L(M)$

$M$  – maszyna akceptująca palindromy nad alfabetem  $\Sigma = \{a, b\}$

$L(M) = \{\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa, \dots\}$

Zbiór słów **akceptowanych** przez maszynę Turinga  $M$  nazywamy językiem **rozpoznawanym** przez  $M$  – oznaczenie:  $L(M)$

$M$  – maszyna akceptująca palindromy nad alfabetem  $\Sigma = \{a, b\}$

$L(M) = \{\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa, \dots\}$

Język  $L \subseteq \Sigma^*$  nazywamy **rozpoznawalnym** w sensie Turinga, jeżeli jest rozpoznawany przez pewną maszynę Turinga.

## Możliwy przebieg obliczeń maszyny Turinga

- 1 Maszyna kończy obliczenia w stanie **akceptującym**
- 2 Maszyna kończy obliczenia w stanie **odrzucającym**
- 3 Maszyna nigdy **nie kończy** obliczeń

Maszyna Turinga **rozstrzyga** język  $L \subseteq \Sigma^*$ , jeżeli dla każdego słowa  $w \in L$  zatrzymuje się w stanie **akceptującym**, natomiast dla każdego słowa  $w \notin L$  zatrzymuje się w stanie **odrzucającym**

Język  $L \subseteq \Sigma^*$  nazywamy **rozstrzygalnym** w sensie Turinga, jeżeli jest rozstrzygany przez pewną maszynę Turinga

## Możliwy przebieg obliczeń maszyny Turinga

- 1 Maszyna kończy obliczenia w stanie **akceptującym**
- 2 Maszyna kończy obliczenia w stanie **odrzucającym**
- 3 Maszyna nigdy **nie kończy** obliczeń

Maszyna Turinga **rozstrzyga** język  $L \subseteq \Sigma^*$ , jeżeli dla każdego słowa  $w \in L$  zatrzymuje się w stanie **akceptującym**, natomiast dla każdego słowa  $w \notin L$  zatrzymuje się w stanie **odrzucającym**

Język  $L \subseteq \Sigma^*$  nazywamy **rozstrzygalnym** w sensie Turinga, jeżeli jest rozstrzygany przez pewną maszynę Turinga

- 1 Maszyna kończy obliczenia w stanie **akceptującym**
- 2 Maszyna kończy obliczenia w stanie **odrzuci**
- 3 Maszyna nigdy **nie kończy** obliczeń

Maszyna Turinga

! **rozstrzygalny** nazywamy **rozstrzygalnym** w sensie Turinga, jeżeli jest rozstrzygany przez pewną maszynę Turinga

1 Maszyna kończy obliczenia w stanie **akceptującym**

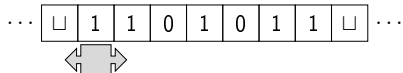
2 Maszyna kończy obliczenia w stanie **odrzucającym**

3 Maszyna nigdy **nie kończy** obliczeń

każdy język **rozstrzygalny** w sensie Turinga jest również **rozpoznawalny** w sensie Turinga. Implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa.

Nazywamy **rozstrzygalnym** w sensie Turinga, jeżeli dla każdego słowa  $w \in \Sigma^*$ , jeżeli dla każdego słowa  $w \in \Sigma^*$  symuluje się w stanie **odrzucającym**, natomiast dla każdego słowa  $w \in \Sigma^*$  symuluje się w stanie **akceptującym**, natomiasymuluje się w stanie **akceptującym**, natomiast dla każdego słowa  $w \in \Sigma^*$  symuluje się w stanie **odrzucającym**.

Maszyna licząca  $f(x) = x + 1$



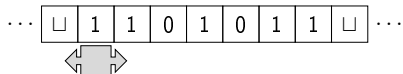
## Opis działania

- ▶ Znajdź prawy koniec zapisu binarnego liczby
- ▶ Przesuwaj głowicę w lewo jednocześnie zamieniając 1 na 0
- ▶ Pierwsze od prawej 0 zamień na 1 i **zaakceptuj**
- ▶ Po przekroczeniu lewego końca zapisu liczby dopisz 1 i **zaakceptuj**



# Wartość funkcji

Maszyna licząca  $f(x) = x + 1$



## Opis działania

- ▶ Znajdź prawy koniec zapisu binarnego liczby
- ▶ Przesuwaj głowicę w lewo jednocześnie zamieniając 1 na 0
- ▶ Pierwsze od prawej 0 zamień na 1 i **zaakceptuj**
- ▶ Po przekroczeniu lewego końca zapisu liczby dopisz 1 i **zaakceptuj**

$q_0 0 \rightarrow q_0 0 R$	}	// znajdź prawy koniec zapisu liczby
$q_0 1 \rightarrow q_0 1 R$		
$q_0 \square \rightarrow q_1 \square L$	// stan dodawania 1	
$q_1 1 \rightarrow q_1 0 L$	// zamiana kolejnych 0 na 1	
$q_1 0 \rightarrow q_{ACC} 1 L$	// pierwsze 0 od prawej	
$q_1 \square \rightarrow q_{ACC} 1 L$	// brak 0 w zapisie liczby	

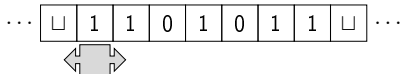
$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, \square\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_{ACC}\}$

# Wartość funkcji

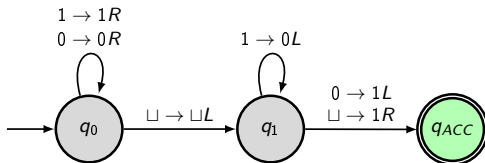
Maszyna licząca  $f(x) = x + 1$



## Opis działania

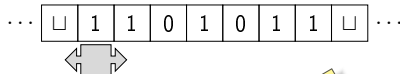
- ▶ Znajdź prawy koniec zapisu binarnego liczby
- ▶ Przesuwaj głowicę w lewo jednocześnie zamieniając 1 na 0
- ▶ Pierwsze od prawej 0 zamień na 1 i **zaakceptuj**
- ▶ Po przekroczeniu lewego końca zapisu liczby dopisz 1 i **zaakceptuj**

$q_0 0 \rightarrow q_0 0 R$   
 $q_0 1 \rightarrow q_0 1 R$   
 $q_0 \square \rightarrow q_1 \square L$   
 $q_1 1 \rightarrow q_1 0 L$   
 $q_1 0 \rightarrow q_{ACC} 1 L$   
 $q_1 \square \rightarrow q_{ACC} 1 L$



# Wartość funkcji

Maszyna licząca  $f(x) = x + 1$



## Opis działania

- ▶ Znajdź prawy koniec zapisu binarnego liczby
- ▶ Przesuwaj głowicę w lewo jednocześnie zamieniając 1 na 0
- ▶ Pierwsze od prawej 0 zamień na 1
- ▶ Po przekroczeniu lewego końca liczby dopisz 1 i **zaakceptuj**

$q_0 0 \rightarrow q_0 0 R$

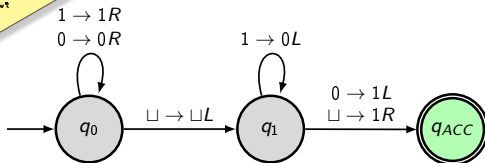
$q_0 1 \rightarrow q_0 1 R$

$q_0 \square \rightarrow q_1 \square L$

$q_1 0 \rightarrow q_{ACC} 1 L$

$q_1 1 \rightarrow q_{ACC} 1 L$

$q_1 \square \rightarrow q_{ACC} 1 L$



## Działanie maszyny Turinga

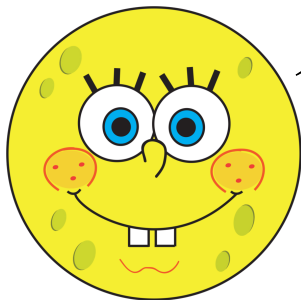
- ☞ akceptowanie/odrzucając języków (podobnie jak automaty)
- ☞ obliczanie wartości funkcji (podobnie jak maszyny licznikowe)

## Działanie maszyny Turinga

- ☞ akceptowanie/odrzucając języków (podobnie jak automaty)
- ☞ obliczanie wartości funkcji (podobnie jak maszyny licznikowe)

## Wymagania dodatkowe

- ☞ Po zatrzymaniu w stanie akceptującym taśma maszyny jest pusta
- ☞ Kończąc działanie maszyna drukuje na taśmie odpowiedź **TAK** lub **NIE**
- ☞ Po oblizeniu wartości funkcji głowica maszyny znajduje się nad pierwszym znakiem wyniku



Pytania?