Ćwiczenia 7

Wprowadzenie teoretyczne:
Co to jest wielotaśmowa Maszyna Turinga?

Odpowiedź:
Maszynę Turinga $MT = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ})$, z funkcją przejścia określoną jako $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, \_\}^k$, gdzie $k>0$ nazywamy k-taśmową maszyną Turinga.

Przykład
Ideę działania wielotaśmowej maszyny Turinga przedstawimy na podstawie maszyny Turinga rozpoznającej język $L=\{a^n b^{2n} c^{3n} : n>1\}$.

Wykorzystamy maszynę z czterema taśmami. Jakie jest działanie maszyny?
1. Na pierwszej taśmie znajduje się słowo wejściowe w. Sprawdzamy czy słowo w ma odpowiednią strukturę. Wystarczy sprawdzić, czy najpierw występują litery a, potem b, a na końcu c. Jeśli nie, odrzucamy.
2. Jeśli słowo jest właściwej postaci, sprawdzamy czy zgadza się liczba odpowiednich liter.
3. Na drugą taśmę przepisujemy tyle liter a ile posiada słowo wejściowe w.
4. Na trzecią taśmę wpisujemy słowo mające dwa razy tyle liter b co słowo na drugiej taśmie.
5. Na czwartą taśmę wpisujemy słowo mające trzy razy tyle liter c co słowo na drugiej taśmie.
6. Do słowa na taśmie 2 dopisujemy słowo z taśmy 3. Kasujemy słowo na taśmie 3.
7. Do tak powstałego słowa na taśmie 2 dopisujemy słowo z taśmy 4. Kasujemy słowo na taśmie 4.
8. Sprawdzamy czy słowa na taśmie pierwszej i drugiej są identyczne. Jeśli tak, akceptujemy, jeśli nie, odrzucamy.

Zadanie 1
Skonstruuj maszynę Turinga, która wykona mnożenie dwóch liczb zapisanych unarnie.

Rozwiązanie:
Niech $\Sigma=\{1\}$. Niech słowa $x=1^n$ i $y=1^m$ będą słowami wejściowymi (rozdzielonymi znakiem #). Chcemy otrzymać słowo $xy=1^{n\cdot m}$. Najprościej będzie (n-1) razy dopisać na koniec słowa y słowo y. Żeby pamiętać ile razy już dopisaliśmy słowo y, usuwamy jedynkę przy każdym cyklu dopisywań. Żeby rozróżnić, co jest wejściowym słowem y, a co dopisaliśmy, dopisujmy litery 0 (zamiast 1). W momencie gdy słowo x okaże się puste, zamieniamy zera na jedynki. Na koniec kasujemy znak # i ustawiamy się za nim.

Możemy także rozwiązać to zadanie za pomocą maszyny wielotaśmowej.

Na taśmie pierwszej mamy słowa $x=1^n$ i $y=1^m$. Na taśmę drugą przepisujemy słowo $x=1^n$ kasując je z taśmy pierwszej. Na taśmie pierwszej zostanie nam zatem jedynie słowo $y=1^m$. Kasujemy jedną literę ze słowa z taśmy drugiej. Mamy tam więc n-1 liter. Kopiujemy słowo $y=1^m$ z taśmy pierwszej na taśmę trzecią.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Mamy:

a) *m* jedynek na taśmie pierwszej
b) *n*-1 jedynek na taśmie drugiej
c) *m* jedynek na taśmie trzeciej.

Tyle razy ile mamy liter na taśmie drugiej, dopisujemy słowo z taśmy trzeciej do słowa z taśmy pierwszej. Na koniec czyścimy taśmę drugą i trzecią. Na taśmie pierwszej mamy wynik.

Zadanie 2

Przyjmijmy $\Sigma=\{0,1\}$. Skonstruuj maszyny Turinga rozpoznające następujące języki:

a. zbiór palindromów
b. $\{w\$w : w\in\Sigma^*\}$
c. $\{ww : w\in\Sigma^*\}$

Rozwiązanie:

a. Pracujemy na dwóch taśmach: na pierwszej taśmie mamy słowo *w*. Na drugą taśmę wpisujemy słowo w^R (odbicie lustrzane słowa *w*) – łatwo to zrobić wpisując słowo *w* poczynając od prawej strony, a kończąc na lewej. Sprawdzamy czy słowa na obu taśmach są identyczne. Jeśli tak, akceptujemy. Jeśli nie, odrzucamy.

b. Pracujemy na trzech taśmach: na pierwszej taśmie mamy słowo wejściowe. Na drugą taśmę wpisujemy słowo *x* (czyli wszystko aż do znaku $). Na trzecią taśmę wpisujemy słowo *y*, czyli wszystko, co występuje po znaku $. Sprawdzamy czy słowa na taśmie drugiej i trzeciej są identyczne. Jeśli tak, akceptujemy. Jeśli nie, odrzucamy.

c. Pracujemy na dwóch taśmach: na pierwszej taśmie mamy słowo wejściowe. Chcemy pierwszą połowę tego słowa wstawić na taśmę drugą, zaś druga połowę, na taśmę trzecią. Jak to zrobić? Pierwszą literę słowa wejściowego przepisujemy na taśmę drugą i kasujemy z taśmy pierwszej. Ostatnią literę słowa wejściowego przepisujemy na taśmę trzecią i kasujemy z taśmy pierwszej. I dalej, pierwszą literę słowa wejściowego dopisujemy do słowa na taśmie drugiej (pisząc od lewej do prawej) i kasujemy z taśmy pierwszej, zaś ostatnią literę słowa wejściowego dopisujemy do słowa na taśmie trzeciej (pisząc od prawej do lewej) i kasujemy z taśmy pierwszej. Sprawdzamy czy słowa na taśmie drugiej i trzeciej są identyczne. Jeśli tak, akceptujemy. Jeśli nie, odrzucamy.

Zadanie 3

Skonstruuj maszynę Turinga obliczającą funkcję $\lceil \log_2 n \rceil$ reprezentowaną unarnie.

Szkic rozwiązania:

Na pierwszej taśmie mamy liczbę w zapisie unarnym. Będziemy ją dzielić „na pół”. Na drugiej taśmie będziemy wpisywać jedynkę, za każdym razem, gdy dokonywaliśmy takiego dzielenia. Ta liczba jest szukanym logarytmem w zapisie unarny.

Jak dokonujemy wspomnianego dzielenia? Pierwszą literę liczby wejściowej zamieniamy na 0, zaś ostatnią jedynkę usuwamy. Wracamy na początek. Działamy w ten sposób tak długo jak się da. Gdy na taśmie mamy same zera, oznacza to, że dostaliśmy zaokrąglenie w górę połowy pierwotnej liczby. Zamieniamy zera na jedynki. Kontynuujemy tak długo aż na taśmie pierwszej zostanie pojedyncza litera.

Zadanie 4

Skonstruuj maszynę Turinga obliczającą funkcję 2^n reprezentowaną unarnie.

Szkic rozwiązania:

Na taśmie pierwsze mamy liczbę *n* (wpisaną unarnie). Na drugą taśmę wpisujemy liczbę 2 (unarnie). Kasujemy jedną literę z taśmy pierwszej. Tyle razy ile mamy znaków na taśmie pierwszej (czyli n-1 razy) podwajamy zawartość taśmy drugiej. Na koniec na drugiej taśmie dostaniemy wynik.

Zadanie domowe

1. Zaprojektuj maszynę Turinga dodającą dwie liczby w zapisie binarnym.
2. Skonstruować maszynę Turinga rozpoznającą zbiór ciągów reprezentujących binarnie liczby pierwsze. (dla ochotników)
3. Zaprojektuj maszynę Turinga generującą $L=\{0^n1^n \mid n\geq 1\}$, czyli wypisującej słowo 0^n1^n dla wprowadzonej na taśmę liczby naturalnej $n\geq 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego