Zad. 4.1. Niech X oznacza liczbę orłów w trzech rzutach monetą.
a) Wyznacz rozkład, dystrybuantę (wzór i wykres) zmiennej losowej X.
b) Oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant 1), \mathbb{P}(X > 2), \mathbb{P}(X = 1{,}5), \mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 3), \mathbb{P}(X < 3)$.

Rozwiązanie. (a) Zmienna losowa X przyjmuje wartości ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, czyli ma rozkład dyskretny. Stosując wzór na prawdopodobieństwo liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego, otrzymujemy dla $k = 0, 1, 2, 3$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \cdot \frac{1}{8}.$$

Zatem rozkład zmiennej losowej X ma postać:

x_k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_k)$	1/8	3/8	3/8	1/8

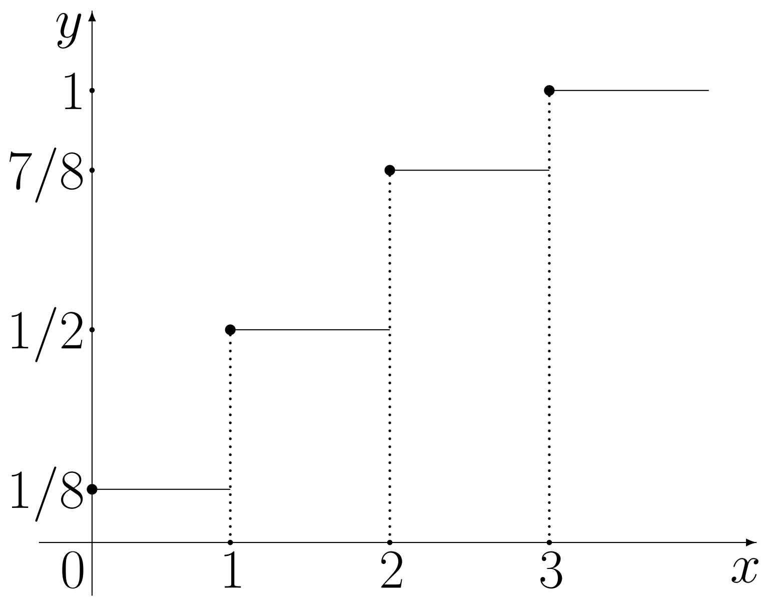
Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F(x) = \sum_{x_k:\ x_k \leqslant x} \mathbb{P}(X = x_k),$$

czyli w naszym przypadku

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0 \\ 1/8, & \text{gdy } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/2, & \text{gdy } 1 \leqslant x < 2 \\ 7/8, & \text{gdy } 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & \text{gdy } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Teraz sporządzamy wykres dystrybuanty:



Jest to funkcja skokowa: punkty skoków to $\{x_k\}$, wielkości skoków to $\{\mathbb{P}(X = x_k)\}$.

Uwaga. W punktach skoków dystrybuanta przymuje wartości "górne".

(b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$;
$\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$; $\mathbb{P}(X = 1{,}5) = 0$; $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}$;
$\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$;
$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{7}{8}$.

Zad. 4.2. Wyznacz rozkład zmiennej losowej, której dystrybuanta wyraża się dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0{,}2, & -1 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 0{,}4, & \frac{1}{2} \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. W poprzednim zadaniu określaliśmy rozkład zmiennej losowej, a po nim między innymi dystrybuantę. Teraz mając dystrybuantę mamy określić rozkład.

Widzimy, że dystrybuanta jest funkcją skokową, a zatem mamy do czynienia z rozkładem dyskretnym.

Jak nauczyliśmy się w poprzednim zadaniu, punkty skoków to $\{x_k\}$, a wielkości skoków są określone przez $\{\mathbb{P}(X = x_k)\}$. Funkcja ma skoki w punktach: $-1, \frac{1}{2}, 3$, a wielkości skoków to odpowiednio $0{,}2; 0{,}2; 0{,}6$. Zatem rozkład zmiennej losowej jest postaci

x_k	-1	$\frac{1}{2}$	3
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}6$

Uwaga. Oczywiście, liczby w dolnym wierszu tabeli zawsze są dodatnie, a ich suma wynosi 1.

Zad. 4.3. Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z parametrami (n, p). Oblicz $\mathbb{E}(X)$, $\mathbf{Var}(X)$.

Rozwiązanie. Jak wiemy z tematu *Schemat Bernoulliego*, zmienna losowa X określająca liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z parametrami (n, p) przyjmuje wartości $0, 1, \ldots, n$ z odpowiednimi prawdopodobieństwami

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1}$$

Jest to zmienna losowa o rozkładzie dyskretnym. Wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym określa się wzorem

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k). \tag{2}$$

Podstawiając (1) do (2), otrzymujemy

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k+1}.$$

Zamieniając indeks sumowania k na $j+1$, czyli kładąc $k = j + 1$, uzyskujemy

$$\mathbb{E}(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j}.$$

Ale

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} = 1,$$

bowiem lewą stronę zgodnie z dwumianem Newtona można zapisać w postaci: $(1-p+p)^{n-1}$, i jest to oczywiście jedynka. Zatem ostatecznie $\mathbb{E}(X) = np$.

Dwumian Newtona.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k.$$

Podobny trik zastosujemy też licząc $\mathbf{Var}(X)$. Z definicji $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, a

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k} x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k). \tag{3}$$

Podstawiając (1) do (3), mamy

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Drugą sumę już policzyliśmy wyżej licząc $\mathbb{E}(X)$, jest ona równa np. Pierwszą sumę liczymy dalej:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-k+2)!} p^{k-2} (1-p)^{n-2-k+2}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!(n-2-j)!} p^j (1-p)^{n-2-j}$$

$$= n(n-1)p^2 (1-p+p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

Ostatecznie,

$$\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

oraz

$$\mathbf{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p).$$

Zad. 4.4. Niech $X \sim Poiss(\lambda)$. Oblicz $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{E}(e^X)$.

Rozwiązanie. Zmienna losowa o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$ to dyskretna zmienna losowa, przyjmująca wartości całkowite nieujemne z prawdopodobieństwami

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

Zatem

$$P(X = 2) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2}.$$

Teraz skorzystamy z ogólnego wzoru na wartość oczekiwaną:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_k g(x_k)\mathbb{P}(X = x_k).$$

Podstawiając (4), otrzymujemy

$$\mathbb{E}(e^X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^k}{k!}.$$

Korzystając z szeregu Maclaurina dla funkcji e^x, czyli $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^k}{k!} = e^{e\lambda},$$

skąd $\mathbb{E}(e^X) = e^{-\lambda} \cdot e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)}$.

Zad. 4.5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem p, $0 < p < 1$. Znajdź $\mathbb{P}(X - Y = -1)$.

Rozwiązanie. Zmienna losowa o rozkładzie geometrycznym z parametrem p to dyskretna zmienna losowa, o wartościach w zbiorze liczb naturalnych, z prawdopodobieństwami

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Jest oczywiste, że zmienna losowa $X - Y$ przyjmuje wartość -1 wtedy i tylko wtedy, gdy wartość zmiennej losowej Y będzie o 1 większa odpowiedniej wartości zmiennej losowej X. Czyli

$$\mathbb{P}(X - Y = -1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k+1).$$

Z powodu niezależności zmiennych losowych X i Y prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń jest równe iloczynu prawdopodobieństw tychże zdarzeń. Dlatego

$$\mathbb{P}(X - Y = -1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k+1).$$

Podstawiając (5), otrzymujemy

$$\mathbb{P}(X - Y = -1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{k}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-1}.$$

Liczymy sumę nieskończonego ciągu geometrycznego ($S = \frac{a_1}{1-q}$, q - iloraz ciągu):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{1-1+2p-p^2} = \frac{1-p}{p(2-p)}.$$

Ostatecznie,

$$\mathbb{P}(X - Y = -1) = p^2 \cdot \frac{1-p}{p(2-p)} = \frac{p(1-p)}{2-p}.$$

Zad. 4.6. Dobierz stałe A i B tak, by funkcja określona dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $F(x) = A + B \cdot \operatorname{arctg}(x)$, była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X.

Rozwiązanie. Funkcja F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest to funkcja niemalejąca, prawostronnie ciągła, oraz zachodzi $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Funkcja $\operatorname{arctg}(x)$ jest rosnąca, zatem aby taką też była funkcja $F(x)$ musi zachodzić warunek $B > 0$. Oprócz tego, funkcja $\operatorname{arctg}(x)$ jest ciągła, taką oczywiście też jest funkcja $F(x)$ dla dowolnych stałych A i B. A funkcja ciągła, w szczególności, jest zawsze funkcją prawostronnie ciągłą.
Pozostaje sprawdzić zachodzenie warunków granicznych. Ponieważ $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$, warunki graniczne dla funkcji $F(x)$ są spełnione, gdy

$$\begin{cases} A - B \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \\ A + B \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

skąd, odejmując stronami od drugiego równania pierwsze, $B \cdot \pi = 1 \iff B = \frac{1}{\pi}$. Podstawiając B do równania pierwszego, otrzymujemy $A = \frac{1}{2}$.
Podsumowując, dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X będzie funkcja $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(x)$. Funkcja

$\mathrm{arctg}(x)$ jest ciągła i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, zatem taką też jest funkcja $F(x)$. A więc, gęstość zmiennej losowej X można wyliczyć ze wzoru $f(x) = (F(x))'$, czyli

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{arctg}(x)\right)' = \frac{1}{\pi} \cdot (\mathrm{arctg}(x))'$$
$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$