Przykładowe pytania

1. zapisz używając kwantyfikatorów zdanie: *„dla dowolnej liczby naturalnej różnej od zera istnieje liczba naturalna, dla której ona jest następnikiem.”*
2. Przedstaw aksjomatykę Peano liczb naturalnych zwracając szczegolną uwagę na poprawne użycie kwantyfikatorów
3. Sformułuj zasadę indukcji zupełnej,
4. Podaj rekurencyjną definicje dodawania. Korzystając z tej definicji oblicz $1 + 3$
5. Niech A oznacza dowolny zbiór. Co oznacza symbol A^*? Wskaż trzy elementy zbioru $\{a, b\}^*$,
6. Podaj definicję złozenia słów. Podaj definicję języka nad alfabetem A,
7. Podaj definicję formuły rachunku zdań. Podaj trzy przykłady formuł, wśród których znajdą się dwie tautologie,
8. Opisz algebrę wartości logicznych (przedstaw tablice opisujące działanie operacji logicznych),
9. Podaj definicję tautologii i trzy przykłady tautologii
10. Niech $Z_1, \ldots, Z_n, T$ będą zdaniami. Co to znaczy, że zdanie T jest konsekwencją założeń $Z_1, \ldots, Z_n$? Załóżmy, że $Z_1, \ldots, Z_n$ są zdaniowymi a naszym zadaniem jest udowodnienie, że zdanie $T_1 \to T_2$ jest konsekwencją zbioru założeń $Z_1, \ldots, Z_k$. Korzystając z rachunku zdań Przekształć zadanie w ten sposób, by jego tezą było zdanie T_2
11. co to jest koniunktywna postać normalna formuły?
12. Podaj defincję pary uporządkowanej i iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Udowodnij, że iloczyn kartezjański $A \times \emptyset$ jest zbiorem pustym.
13. wypisz wszystkie elementy zbioru $\{x \in \mathbf{N}; x^2 \leqslant 30\}$
14. Niech A oznacza dowolny zbiór. Co oznacza symbol 2^A? Wypisz elementy zbioru $2^{\{1,2,3\}}$
15. Pokaż, że dla dowolnego zbioru A, $\emptyset \subseteq A$,
16. Pokaz, że dla dowolnych zbiorów A, B $A \cap B \subset A \cup B$
17. Podaj definicję sumy rodziny zbiorów $(A_i : i \in I)$. Oblicz $\bigcup([n, n+1] : n \in \mathbf{N})$
18. Podaj definicję relacji binarnej (dwuargumentowej) na zbiorze A.
    Podaj warunek, który wyróżnia funkcje jako podklasę relacji (*„relacja $r \subset A \times B$ jest funkcją o dziedzinie ... i kodziedzinie ... , jeżeli ....”* Dokończ!).

    Która z poniższych relacji jest funkcją?

    - $r_1 \subseteq \mathbf{N}^2 = \{(n, k); k \textit{ jest resztą z dzielenia liczby naturalnej } n \textit{ przez } 7\}$,
    - $r_2 \subseteq \mathbf{N}^2 = \{(n, k); k \textit{ jest liczbą pierwszą dzielącą } n\ \}$,
19. Niech A oznacza dowolny zbiór.
    Podaj definicję zbioru potęgowego 2^A. Wskaż wszystkie elementy zbioru $2^{\emptyset}$.
    Uzasadnij, że moc zbioru 2^A jest zawsze większa od mocy zbioru A.
    Pokaż - konstruując odpowiedni przykład- że nie jest prawdą, że równosć

    $$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$$

    nie jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B,

20. Podaj formalne definicje relacji symetrycznej i relacji słabo antysymetrycznej. Podaj odpowiednie przykłady

21. Podaj definicję relacji równoważności

22. czy relacja ρ określona na słowach nad alfabetem A i taka, że dla dowolnych słów w, v $w \, \rho \, v$ dokładnie wtedy gdy mają jednakową długość jest równoważnością na zbiorze A^*? Opisz klasę abstrakcji słowa pustego.

23. Opisz klasę abstrakcji liczby 3 wzgledem relacji $\mathbf{mod}\, 5$,

24. Co to jest rozbicie zbioru A? Jaki jest związek miedzy rozbiciami zbioru A a relacjami równoważności na zbiorzez A?

25. narysuj diagram Hasego zbioru cześciowo uporządkowanego który ma dwa elementy maksymalne i trzy minimalne

26. narysuj diagram Hasego posetu w którym istnieje podzbior posiadający ograniczenia górne ale nie posiadajacy kresu górnego

27. czy element najmniejszy jest minimalny czy odwrotnie? Odpowiedź zilustruj przykładem

28. kiedy poset nazywamy drzewem?

29. czy relacja podzielnosci liczb naturalnych jest porządkiem liniowym? Odpowiedź uzasadnij.

30. czy relacja „ bycia podsłowem" jest porzadkiem liniowym na zbiorze słów?

31. podaj definicję przeciwobrazu elementu. Oblicz przeciwobraz liczby 3 dla funkcji $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ opisanej wzorem $f(x) = x^2$ i obraz funkcji $g : R \to R$ opisanej tym samym wzorem,

32. opisz funkcję $+(succ \times succ)$ (podaj jej dziedzine i przeciwdziedzinę oraz wzór analityczny opisujacy jej dzialanie),

33. Jaki warunek musi spełniać funkcja $f : A \longrightarrow B$ by istniała funkcja odwrotna do f?

34. Opisz obraz funkcji $sin : R \to R$,

35. Podaj definicję funkcji odwrotnej do funkcji $f : A \longrightarrow B$.

    Czy funkcja $f : \mathbf{N} \longrightarrow 2\mathbf{N} = \{2k : k \in \mathbf{N}\}$ opisana wzorem

    $$f(n) = 2n$$

    posiada funkcję odwrotną?

    Czy funkcja $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ opisana wzorem

    $$g(n) = 2n$$

    posiada funkcję odwrotną? Jeśli odpowiesz "TAK" - wskaż funkcje odwrotną. Jeśli odpowiesz "NIE" - odpowiedź uzasadnij.

36. Co to znaczy, że dwa zbiory są równoliczne?

37. Uzasadnij, ze jeżeli zbiór A jest rownoliczny z B i B jest rownoliczny z C to A jest rownoliczny z C. Pokaż, że zbiór liczb naturalnych parzystych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3,

38. Podaj definicje i przykłady zbioru skończonego i nieskoczonego , przeliczalnego i nieprzeliczalnego.
    Podaj definicją sumy przeliczalnej rodziny zbiorów.
    Udowodnij, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów skończonych (przeliczalnych) jest przeliczalna

39. Udowodnij twierdzenie Cantora. Jako wniosek uzasadnij, że zbiór funkcji typu $\mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ jest nieprzeliczalny.
    Spróbuj uzasadnić, że ististnieją podzbiory liczb naturalnych, których nie da się zdefiniowac (opisać czyli podac kryterium przynależności liczby do zbioru) w języku polskim

40. Wskaż błąd w dowodzie następującego twierdzenia:

    TWIERDZENIE: Wszystkie elementy dowolnego skończonego zbioru A są identyczne.

    DOWÓD: Zastosujemy indukcję ze względu na liczbę elementów zbioru A.

    Jeżeli $n = 0$ to zbiór A jest pusty, czyli nasze twierdzenie jest dla tego zbioru prawdziwe.

    Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich skonczonych zbiorów, które mają k elementów. Korzystajac z tego założenia pokażemy, że jeżeli zbiór A ma $k + 1$ elementów, to wszytkie jego elementy są równe. Niech $A = \{a_1, \ldots a_k, a_{k+1}\}$.

    Rozważmy podzbiory k elementowe $A_1 = \{a_1, \ldots, a_k\}$ oraz $a_2 = \{a_2, \ldots a_k, a_{k+1}$ Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie elementy zbioru A_1są identyczne

    $$(1) \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_k$$

    Podobnie ponieważ zbiór A_2 ma k elementów, to

    $$(2) \qquad a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1}$$

    Ponieważ element a_k występuje w obu zbiorach, to

    $$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$$

    czyli wszystkie elementy A są identyczne. Stąd - na mocy indukcji - twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego zbioru skończonego.

    Gdzie jest błąd?