Zad. 5.1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \to \infty$, ciągu $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Prosta analiza twierdzeń granicznych podanych na kartce *Twierdzenia graniczne* świadczy, że granica prawie wszędzie występuje w tezie Mocnego Prawa Wielkich Liczb (MPWL), jego i będziemy stosować. Patrząc na ciąg, którego granicę prawie wszędzie należy wyznaczyć, wnioskujemy, że zastosujemy MPWL dla ciągu $X_1^2, X_2^2, \ldots$

Najpierw sprawdzimy, czy są spełnione warunki tego twierdzenia. Skoro $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, to takim będzie też ciąg $X_1^2, X_2^2, \ldots$ Ponieważ ciąg niezależnych zmiennych losowych w szczególności jest też ciągiem parami niezależnych zmiennych losowych, to pozostaje sprawdzić, czy $\mathbb{E}|X_1^2| = \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Skoro X_1 ma rozkład $N(0,1)$, to $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbf{Var}(X_1) = 1$. Ale z definicji, $\mathbf{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$, zatem $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbf{Var}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 = 1 + 0 = 1$.

Warunki MPWL są spełnione i otrzymujemy

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}(X_1^2) = 1, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Zad. 5.2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie geometrycznym z parametrem p, $0 < p < 1$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \to \infty$, ciągu $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{\pi}{2}X_k)$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Ponownie stwierdzamy, że skoro należy znaleźć granicę prawie wszędzie, to z podanych twierdzeń granicznych będziemy stosować MPWL. Przy czym, ze względu na ciąg, którego granicę prawie wszędzie należy wyznaczyć, będziemy próbować stosować MPWL dla ciągu $\cos(\frac{\pi}{2}X_1), \cos(\frac{\pi}{2}X_2), \ldots$

Znowu zaczniemy od sprawdzenia warunków tego twierdzenia. Skoro $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, to takim będzie też ciąg $\cos(\frac{\pi}{2}X_1)$, $\cos(\frac{\pi}{2}X_2), \ldots$ Ponieważ ciąg niezależnych zmiennych losowych w szczególności jest też ciągiem parami niezależnych zmiennych losowych, to pozostaje sprawdzić, czy $\mathbb{E}|\cos(\frac{\pi}{2}X_1)| < \infty$. Zmienna losowa X_1 ma rozkład geometryczny o parametrze p, więc (patrz *Lista podstawowych rozkładów*)

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathcal{N}.$$

Zatem zgodnie z ogólnym wzorem na wartość oczekiwaną otrzymujemy

$$\mathbb{E}|\cos(\frac{\pi}{2}X_1)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\cos(\frac{\pi}{2}k)|p(1-p)^{k-1}.$$

Zastanowimy się, jakie wartości przyjmuje $|\cos(\frac{\pi}{2}k)|$? Oczywiście, dla $k \in \mathcal{N}$ mamy

$$\cos(\frac{\pi}{2}k) = \begin{cases} 0, & k = 1, 5, \dots \\ -1, & k = 2, 6, \dots \\ 0, & k = 3, 7, \dots \\ 1, & k = 4, 8, \dots . \end{cases} \tag{1}$$

Więc,

$$|\cos(\frac{\pi}{2}k)| = \begin{cases} 0, & k \text{ nieparzyste} \\ 1, & k \text{ parzyste,} \end{cases}$$

skąd

$$\mathbb{E}|\cos(\frac{\pi}{2}X_1)| = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{2n-1}.$$

Przypomnienie. Wzór na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $a_1, a_1q, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{dla} \quad |q| < 1. \tag{2}$$

Stosując wzór (2) dla $a_1 = 1 - p,\ q = (1-p)^2$, otrzymujemy

$$\mathbb{E}|\cos(\frac{\pi}{2}X_1)| = p \cdot \frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p} < \infty.$$

Czyli warunki MPWL są spełnione. Więc, gdy $n \to \infty$,

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2}X_1) + \ldots + \cos(\frac{\pi}{2}X_n)}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}(\cos(\frac{\pi}{2}X_1)).$$

Wyrażenie $\mathbb{E}(\cos(\frac{\pi}{2}X_1))$ liczymy przy pomocy (1):

$$\mathbb{E}(\cos(\frac{\pi}{2}X_1)) = p\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{2n-1} = p \cdot \frac{-(1-p)}{1+(1-p)^2}$$

$$= -\frac{p(1-p)}{2-2p+p^2}.$$

Tutaj zastosowaliśmy też wzór (2) dla $a_1 = -(1-p)$, $q = -(1-p)^2$.

Zad. 5.3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots$ będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładach odpowiednio wykładniczym $E(2)$ i dyskretnym zadanym następująco: $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(Y_i = 0) = 1/3, \quad \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1/6, \quad i \geqslant 1$. Wiadomo, że dla każdego $i \geqslant 1$ zmienne losowe X_i, Y_i są niezależne. Wyznacz granicę prawie wszędzie, gdy $n \to \infty$, ciągu

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}, \quad n \geqslant 1.$$

Rozwiązanie. Stwierdzamy, że skoro należy znaleźć granicę prawie wszędzie, to z podanych twierdzeń granicznych będziemy stosować MPWL. Zauważmy, że ciąg, którego granicę prawie wszędzie należy wyznaczyć, można zapisać w postaci:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} \cdot \frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} \Big/ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}{n}, \ n \geqslant 1.$$

Z tego zapisu robimy wniosek, że MPWL trzeba będzie stosować dwa razy: dla ciągu $\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n}$ i dla ciągu $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}{n}$.

Sprawdzamy warunki MPWL dla obu ciągów. Skoro $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych loso-

wych o tym samym rozkładzie, oraz $Y_1, Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym (choć innym) rozkładzie, przy czym dla każdego $i \geqslant 1$ zmienne losowe X_i, Y_i są niezależne, wnioskujemy, że ciąg $X_1Y_1, X_2Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, oraz ciąg $X_1^2 + Y_1^2, X_2^2 + Y_2^2, \ldots$ też jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Pozostaje wykazać, że
$\mathbb{E}|X_1Y_1| < \infty$ oraz $\mathbb{E}|X_1^2 + Y_1^2| = \mathbb{E}(X_1^2 + Y_1^2) < \infty$.
Zacznijmy od pierwszego wyrażenia. Zmienna losowa X_1 o rozkładzie $E(2)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie, oprócz tego X_1 i Y_1 są niezależne. Stąd

$$\mathbb{E}|X_1Y_1| = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}|Y_1|.$$

Skorzystamy teraz z wiedzy (patrz *Lista podstawowych rozkładów*), że $\mathbb{E}(X_1) = 1/2$. Licząc drugi czynnik zauważmy, że zmienna losowa $|Y_1|$ przyjmuje tylko wartości 0 i 1, przy czym $\mathbb{P}(|Y_1| = 0) = 1/3$, $\mathbb{P}(|Y_1| = 1) = 1/2 + 1/6 = 2/3$. Zatem

$$\mathbb{E}|Y_1| = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

skąd

$$\mathbb{E}|X_1Y_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \infty.$$

Przejdźmy teraz do wyrażenia drugiego:

$$\mathbb{E}(X_1^2+Y_1^2)=\mathbb{E}(X_1^2)+\mathbb{E}(Y_1^2).$$

Teraz, jak w zadaniu 5.1, skorzystamy z tego, że

$$\mathbb{E}(X_1^2)=\mathbf{Var}(X_1)+(\mathbb{E}(X_1))^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Użyliśmy tutaj wiedzy (patrz *Lista podstawowych rozkładów*), że $\mathbf{Var}(X_1)=\frac{1}{4}$. Co do $\mathbb{E}(Y_1^2)$ zauważmy, że zmienna losowa Y_1^2 przyjmuje tylko wartości 0 i 1, przy czym $\mathbb{P}(Y_1^2=0)=1/3$, $\mathbb{P}(Y_1^2=1)=1/2+1/6=2/3$. Zatem

$$\mathbb{E}(Y_1^2)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3},$$

i ostatecznie

$$\mathbb{E}(X_1^2+Y_1^2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}<\infty. \qquad (3)$$

Więc, warunki MPWL są spełnione i, gdy $n\to\infty$,

$$\frac{X_1Y_1+\ldots+X_nY_n}{n}\xrightarrow{p.n.}\mathbb{E}(X_1Y_1),$$

$$\frac{(X_1^2+Y_1^2)+\ldots+(X_n^2+Y_n^2)}{n}\xrightarrow{p.n.}\mathbb{E}(X_1^2+Y_1^2).$$

Wynik dla drugiego ciągu już otrzymaliśmy (patrz (3)). Dla pierwszego ciągu z niezależności X_1 i Y_1 mamy $\mathbb{E}(X_1Y_1)=\mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(Y_1)=\frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}(Y_1)$, a $\mathbb{E}(Y_1)=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$. Czyli $\mathbb{E}(X_1Y_1)=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{6}$.

Zatem, gdy $n \to \infty$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2)} \xrightarrow{p.n.} \frac{\mathbb{E}(X_1 Y_1)}{\mathbb{E}(X_1^2 + Y_1^2)} = \frac{-1/6}{7/6} = -\frac{1}{7}.$$

Zad. 5.4. Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z poprzedniego zadania. Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \to \infty$, ciągu

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n + \frac{n}{3}}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Rozwiązanie. Stwierdzamy, że skoro należy znaleźć granicę według rozkładu, to z podanych twierdzeń granicznych będziemy stosować Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG). Najpierw sprawdzimy, czy są spełnione warunki tego twierdzenia. Ciąg $Y_1, Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych oraz, jak policzyliśmy w poprzednim zadaniu, $\mathbb{E}(Y_1) = -\frac{1}{3} < \infty$. Zatem pozostaje sprawdzić, czy wariancją jest dodatnia i skończona. Mamy: $\mathbf{Var}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1^2) - (\mathbb{E}(Y_1))^2$. W poprzednim zadaniu już policzyliśmy, że $\mathbb{E}(Y_1^2) = \frac{2}{3}$, więc $\mathbf{Var}(Y_1) = \frac{2}{3} - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9} \in (0, \infty)$. Ostatecznie, według CTG,

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n - n \cdot (-\frac{1}{3})}{\sqrt{n \cdot \frac{5}{9}}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1), \quad n \to \infty,$$

skąd

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n + \frac{n}{3}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{\frac{5}{9}} \cdot X \sim N(0, \frac{5}{9}), \quad n \to \infty$$

(jak łatwo sprawdzić, jeśli $X \sim N(0,1)$, to $cX \sim N(0, c^2)$ dla $c \neq 0$).

Zad. 5.5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \to \infty$, ciągu

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Rozwiązanie. Stwierdzamy, że skoro należy znaleźć granicę według rozkładu, to z podanych twierdzeń granicznych będziemy stosować CTG. Sprawdzimy, czy są spełnione warunki tego twierdzenia. Ciąg $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Korzystając z wiedzy na temat rozkładu jednostajnego na $[0,1]$ (patrz *Lista podstawowych rozkładów*), mamy: $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} < \infty, \mathbf{Var}(X_1) = \frac{1}{12} \in (0, \infty)$. Zatem na mocy CTG zachodzi

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{12}}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1), \quad n \to \infty,$$

skąd

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot X \sim N(0, \frac{1}{12}),\ n \to \infty.$$