

Wypełnij miejsca wykropkowane [.....]. 1 pytanie = 1 punkt; maksimum = 30 punktów (+ praca specjalna). Oceniane będą wyłącznie odpowiedzi wpisane w wykropkowane miejsca na tej kartce. Oznaczenia i rachunki. Wpisz odpowiedzi dopiero po ostatecznym ich sprawdzeniu; odpowiedzi pokreślone lub nieczytelne będą traktowane jako błędne! Możesz korzystać z kalkulatora, tablic statystycznych, notatek, książek. Nie wolno korzystać z komputerów, telefonów ani z tabletów. Nie wolno się porozumiewać. Powodzenia!

Imię i NAZWISKO:

1. Rzucamy dwie kostki do gry.

(a) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania tej samej liczby oczek na obu kościach.
Odpowiedź: $\frac{6}{36}$

(b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 3.
Odpowiedź: $\frac{1}{36}$

2. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Oblicz $E(X)$. Odpowiedź:

(b) Oblicz $\text{Var}(X)$. Odpowiedź:

(c) Oblicz $P(X \leq 0.5)$. Odpowiedź:

(d) Oblicz $P(X < 2)$. Odpowiedź:

3. Wykonujemy 10 rzutów monetą.

(a) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie 6 orłów.

Odpowiedź:

(b) Oblicz prawdopodobieństwo nie otrzymania orła ani razu.

Odpowiedź: $\frac{1}{1024}$

(c) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba orłów nie przekracza liczby reszek.

Odpowiedź:.....

(d) Oblicz wartość oczekiwaną (średnią) liczby orłów.

Odpowiedź:.....

(e) Oblicz wariancję liczby orłów.

Odpowiedź:.....

4. Zakładamy, że dzienny utarg w pewnym markecie jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(10, 3^2)$ (w tysiącach PLN). Zakładamy ponadto, że zmienne X_1, \dots, X_{30} opisujące utarg w kolejnych dniach miesiąca są niezależne i mają taki sam rozkład $N(10, 3^2)$. Niech $S = X_1 + \dots + X_{30}$ będzie sumarycznym utargiem w ciągu miesiąca, a $\bar{X} = S/30$ – średnim utargiem.

(a) Oblicz $E(\bar{X})$. Odpowiedź:.....

(b) Oblicz $\text{Var}(\bar{X})$. Odpowiedź:.....

(c) Znajdź liczbę a taką, że $P(S \leq a) = 0.8$. Odpowiedź:.....

(d) Oblicz $P(S \leq 10)$. Odpowiedź:.....

5. Wysokości cen 9 mieszkań sprzedanych przez pewnego pośrednika były następujące:

270, 150, 250, 230, 200, 300, 180, 120, 300

Na podstawie tych danych należy obliczyć następujące wielkości.

(a) Oblicz wartość średnią ceny mieszkania. Odpowiedź:..... 222,22 ≈ 222

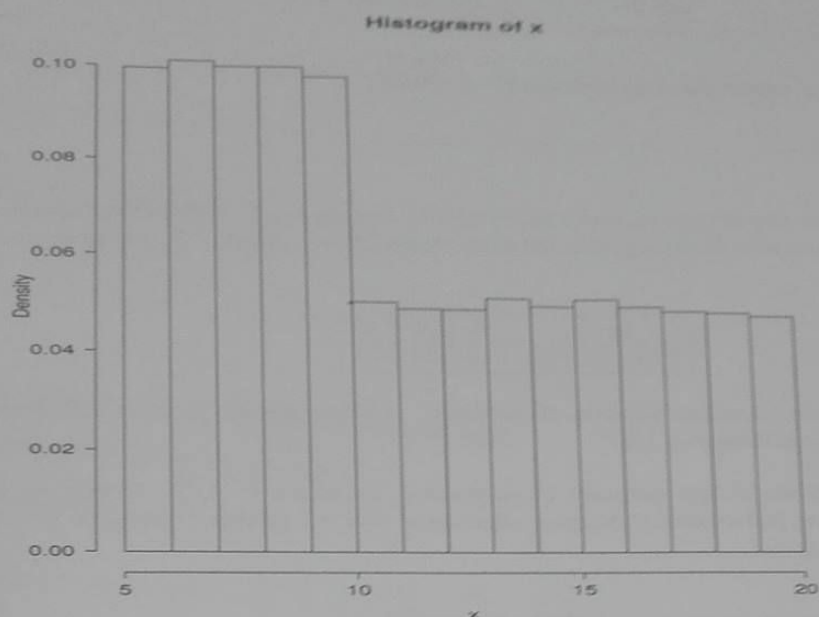
(b) Oblicz medianę ceny mieszkania. Odpowiedź:..... 230

(c) Oblicz wariancję ceny mieszkania. Odpowiedź:..... ~~260~~ 36 $s^2 = 36$

(d) Oblicz odchylenie standardowe ceny mieszkania. Odpowiedź:..... $\sqrt{36} \approx 6$

Imię i NAZWISKO: ...

6. Na podstawie 200000 pomiarów cechy x sporządzono następujący histogram.



Odczytaj z rysunku przybliżone wartości pewnych charakterystyk liczbowych cechy x .

(a) Podaj medianę $\text{med}(x_1, x_2, \dots, x_{200000})$. Odpowiedź: 0,05

(b) Podaj kwartyle Q_1 i Q_3 (kwantyle rzędu $1/4$ i $3/4$). Odpowiedź:

(c) Podaj rozstęp międzykwartylowy. Odpowiedź: 0,05

(d) Spróbuj podać w przybliżeniu średnią. Odpowiedź:

Wskazówka: Dokładne wartości wymienionych w pytaniach charakterystyk są niemożliwe do obliczenia bez znajomości danych. Niemniej, na podstawie rysunku można podać bardzo rozsądne przybliżenia. Pamiętaj, że histogram dla dużej liczby danych jest przybliżeniem gęstości (pola pod histogramem są bliskie odpowiednim prawdopodobieństwom).

Odpowiedź na ostatnie pytanie będzie specjalnie premiowana.

7. Zakładamy, że X_1, \dots, X_{16} jest próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i nieznaną wariancją σ^2 . Obliczono średnią z próbki i nieobciążony estymator wariancji: $\bar{X} = 15$, $S^2 = 5^2$.

(a) Przeprowadź test hipotezy $H_0: \mu = 10$ przeciw alternatywie $H_1: \mu > 10$ na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Oblicz wartość statystyki T (t-Studenta), odczytaj odpowiedni kwantyl z tablic i podejmij decyzję: odrzucamy H_0 czy nie?

Odpowiedź:

- (b) Przeprowadź test hipotezy $H_0: \mu = 10$ przeciw alternatywie $H_1: \mu \neq 10$ na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Oblicz wartość statystyki T (t-Studenta), odczytaj odpowiedni kwantyl z tablic i podejmij decyzję: odrzucamy H_0 czy nie?

Odpowiedź:.....

- (c) Oblicz przedział ufności dla μ na poziomie $1 - \alpha = 0,95$.

Odpowiedź:.....

8. W celu zbadania, czy trzy obecne na rynku marki golarek elektrycznych: A, B i C są jednakowo popularne, zanotowano jaką markę wybrało 180 klientów kupujących golarki. Wyniki przedstawia następująca tabelka:

marka	A	B	C
liczba klientów	50	60	70

Czy mamy podstawę do odrzucenia hipotezy H_0 mówiącej, że klienci wybierają każdą z 3 marek z jednakowym prawdopodobieństwem $1/3$?

- (a) Przeprowadź odpowiedni test zgodności χ^2 na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Oblicz wartość statystyki testowej (chi-kwadrat), odczytaj odpowiedni kwantyl z tablic i podejmij decyzję: odrzucamy H_0 czy nie?

Odpowiedź:.....

- (b) Podaj p-wartość testu. Wskazówka: Wiadomo, że rozkład statystyki testowej $Y = \chi^2$ ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy o dystrybuancie $F(y) = 1 - e^{-y/2}$ dla $y > 0$, jeśli H_0 jest prawdziwa.

Odpowiedź:.....

9. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Podaj wzór na dystrybuantę $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Odpowiedź:..... $F_X(x) = \int_0^x 3t^2 dt = x^3$ $0 \leq x \leq 1$

- (b) Oblicz medianę rozkładu zmiennej losowej X .

Odpowiedź:..... $\frac{1}{2}$