ROZKŁADY DYSKRETNE

Rozkład jednopunktowy
$\mathbb{P}(X = m) = 1$ dla pewnego $m \in \mathbb{R}$
$\mathbb{E}X = m$, $\mathbf{Var}(X) = 0$
$\varphi(t) = e^{itm}$

Rozkład dwupunktowy
$\mathbb{P}(X = a) = p$ i $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p = q$, $p \in (0, 1)$
$\mathbb{E}X = ap + bq$, $\mathbf{Var}(X) = pq(a - b)^2$.
$\varphi(t) = pe^{ita} + (1 - p)e^{itb}$

Rozkład dwumianowy $b(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$\mathbb{E}X = np$, $\mathbf{Var}(X) = np(1 - p)$
$\varphi(t) = (1 - p + pe^{it})^n$

Rozkład Poissona $Poiss(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\mathbb{E}X = \lambda$, $\mathbf{Var}(X) = \lambda$
$\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Rozkład geometryczny $G(p)$, $p \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, \quad p \in (0, 1)$$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$, $\mathbf{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

ROZKŁADY ABSOLUTNIE CIĄGŁE

Rozkład jednostajny $U(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\mathbf{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

Przygotowała: Agnieszka Goroncy

Rozkład normalny $N(a,\sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mathbb{E}X = a$, $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$
$\varphi(t) = e^{iat - t^2\sigma^2/2}$

Rozkład Cauchy'ego $C(\alpha,\lambda)$, $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}$$

$\mathbb{E}X$, $\mathbf{Var}(X)$ nie istnieją
$\varphi(t) = \exp(i\alpha t - \lambda|t|)$

Rozkład gamma $G(\alpha,\lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \lambda^\alpha x^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\quad Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
$\varphi(t) = \frac{1}{(1-it/\lambda)^\alpha}$

Funkcja gamma dana jest wzorem $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$.
Gdy $n \in \mathbb{N}$, to $\Gamma(n) = (n-1)!$

Rozkład beta $B(\alpha,\beta)$, $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Funkcja beta $B(x,y)$, $x, y > 0$, dana jest wzorem $B(x,y) = \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du$.
Gdy $x, y \in \mathbb{N}$, to $B(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$.

Związek między funkcjami gamma i beta:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Rozkład wykładniczy $E(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbf{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
$\varphi(t) = \frac{1}{1-it/\lambda}$

Jest to rozkład gamma $G(1,\lambda)$.

Rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody χ^2_n, $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$\mathbb{E}X = n, \quad \mathbf{Var}(X) = 2n$
$\varphi(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}$
Jest to rozkład gamma $G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

Rozkład potęgowy $Po(\lambda,\alpha)$, $\lambda, \alpha > 0$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,\lambda]}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{\alpha\lambda}{\alpha+1}, \quad Var(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$

Rozkład Pareto $Pa(x_0,\alpha)$, $x_0 > 0, \alpha > 0$

$$f(x) = \alpha x_0^\alpha \cdot x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{(x_0,+\infty)}(x)$$

$\mathbb{E}X = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1, \qquad \mathbf{Var}(X) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2),} \quad \alpha > 2$

Rozkład Weibulla $We(\alpha,\beta)$, $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$\mathbb{E}X = \beta\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}), \quad \mathbf{Var}(X) = \beta^2\left(\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})\right)$

Rozkład t-Studenta z n stopniami swobody $T(n), n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}}(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}$$

$\mathbb{E}X = 0, n \geq 2, \quad \mathbf{Var}(X) = \frac{n}{n-2}, n \geq 3$

Rozkład Laplace'a $La(\mu,\beta), \mu \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp(-\frac{|x-\mu|}{\beta})$$

$\mathbb{E}X = \mu, \quad \mathbf{Var}(X) = 2\beta^2$

Przygotowała: Agnieszka Goroncy