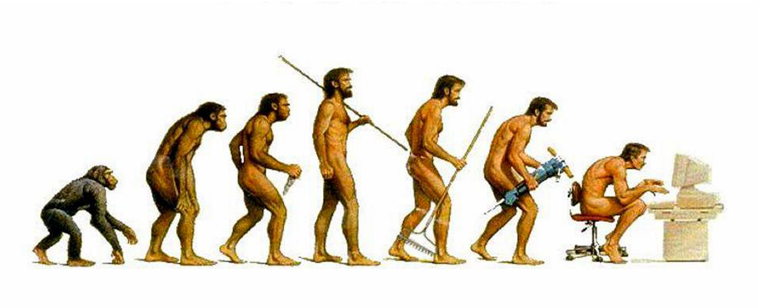


Teoria Obliczalności

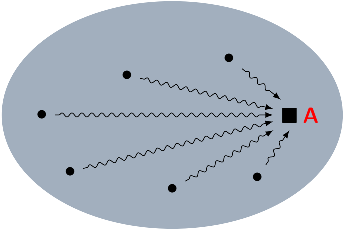
Marcin Piątkowski

Wykład 12 i 13

P oraz NP

! **P** Klasa problemów rozstrzyganych przez **deterministyczne** maszyny Turinga w czasie wielomianowym

! **NP** Klasa problemów rozstrzyganych przez **niedeterministyczne** maszyny Turinga w czasie wielomianowym

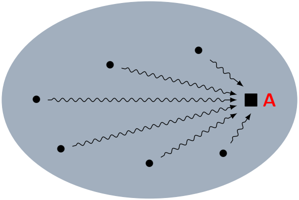


Problem A nazywamy **NP-zupełnym** jeśli:

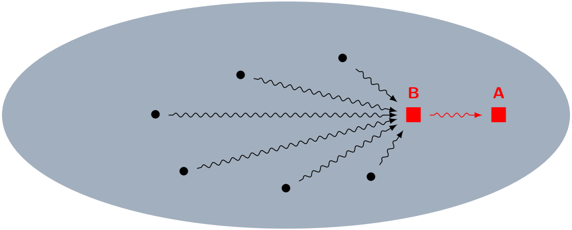
1. $A \in \mathrm{NP}$
2. Dla dowolnego problemu $B \in \mathrm{NP}$ istnieje **efektywna** redukcja do problemu A

Dowodzenie NP-zupełności

1. **Z definicji**



2. **Redukcja znanego problemu NP-zupełnego**



Spełnialność formuł logicznych

Wyrażenie składające się ze zmiennych oraz operacji $\neg$, $\vee$, $\wedge$

$$SAT = \{\phi : \phi - \text{spełnialna formuła logiczna}\}$$

✓ $\phi_1 = (\neg x \vee y) \wedge (z \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg z)$

✓ $\phi_2 = (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg z)$

✗ $\phi_3 = (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$$SAT = \{\phi : \phi - \text{spełnialna formuła logiczna}\}$$

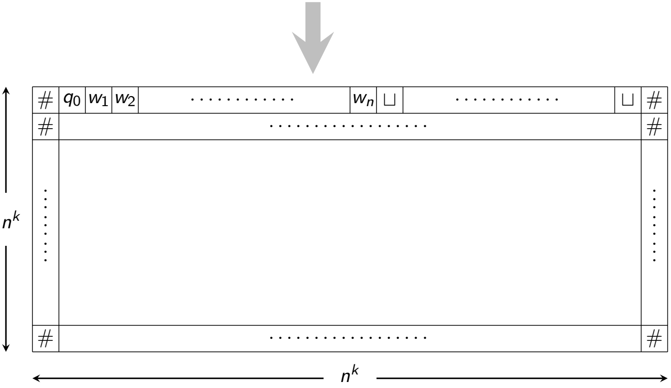
$$A \in NP \longrightarrow SAT$$

M_A – niedeterministyczna maszyna Turinga rozstrzygająca A w czasie n^k

Tableau

M_A – niedeterministyczna maszyna Turinga rozstrzygająca A w czasie n^k

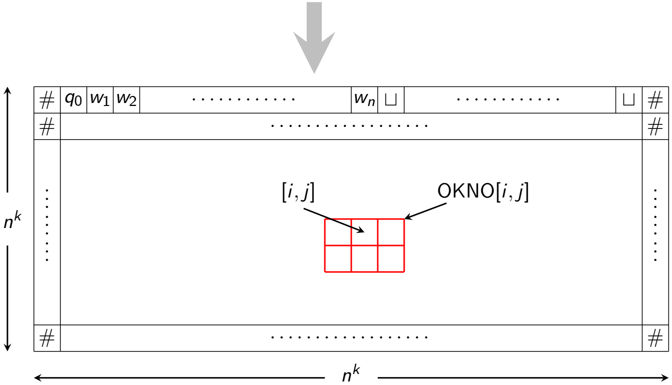
T:



Tableau

M_A – niedeterministyczna maszyna Turinga rozstrzygająca A w czasie n^k

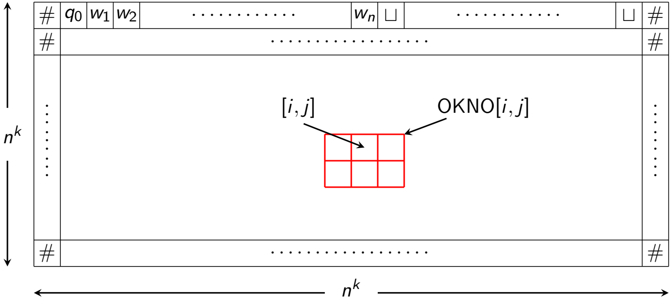
T:



Tableau

M_A – niedeterministyczna maszyna Turinga rozstrzygająca A w czasie n^k

T:



$$\forall_{1 \le i,j \le n^k}\ \forall_{s \in \Gamma}\ x_{x,j,s} = \textbf{true} \iff T[i,j] = s$$

$$\phi_{M_A}(w) \quad = \quad \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

Redukcja

$$\phi_{M_A}(w) \quad = \quad \phi_{cell}(w) \quad \wedge \quad \phi_{start}(w) \quad \wedge \quad \phi_{acc}(w) \quad \wedge \quad \phi_{move}(w)$$

$$\phi_{cell}(w) \;=\; \bigwedge_{1\leq i,j\leq n^k} \left[\left(\bigvee_{s\in\Gamma} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t\in\Gamma, s\neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$

Redukcja

$$\phi_{M_A}(w) \quad = \quad \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) \;=\; \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in \Gamma} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t \in \Gamma, s \neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$
- $$\phi_{start}(w) \;=\; x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$

Redukcja

$$\phi_{M_A}(w) \;=\; \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in \Gamma} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t \in \Gamma, s \neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$

- $$\phi_{start}(w) = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$

- $$\phi_{acc}(w) = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{ACC}}$$

Redukcja

$$\phi_{M_A}(w) = \phi_{cell}(w) \wedge \phi_{start}(w) \wedge \phi_{acc}(w) \wedge \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in \Gamma} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t \in \Gamma, s \neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$
- $$\phi_{start}(w) = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$
- $$\phi_{acc}(w) = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{ACC}}$$
- $$\phi_{move}(w) = \bigwedge_{1 \le i < n^k,\ 1 < j < n^k} OKNO[i,j] \text{ jest poprawne}$$

Okno

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

$OKNO(i, j)$ jest poprawne

$$\phi_O = x_{i,j-1,a_{\mathbf{1}}} \wedge x_{i,j,a_{\mathbf{2}}} \wedge x_{i,j+1,a_{\mathbf{3}}} \wedge x_{i+1,j-1,a_{\mathbf{4}}} \wedge x_{i+1,j,a_{\mathbf{5}}} \wedge x_{i+1,j+1,a_{\mathbf{6}}}$$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$

$OKNO(i,j)$ jest poprawne

$$\phi_O \;=\; x_{i,j-1,a_1} \,\wedge\, x_{i,j,a_2} \,\wedge\, x_{i,j+1,a_3} \,\wedge\, x_{i+1,j-1,a_4} \,\wedge\, x_{i+1,j,a_5} \,\wedge\, x_{i+1,j+1,a_6}$$

✓

a	q_1	b
q_2	a	c

✓

a	q_1	b
a	a	q_2

✓

#	b	a
#	b	a

✓

a	a	q_1
a	a	b

✓

a	b	a
a	b	q_2

✓

b	b	b
c	b	b

✗

a	b	a
a	a	a

✗

a	q_1	b
q_1	b	a

✗

b	q_1	b
q_2	b	q_2

Koniunktywna postać normalna (CNF)

1. **Formuła w postaci CNF** (koniunktywna postać normalna)

$$\underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{\textbf{Klauzula}} \wedge (\neg x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_5)$$

Literał

1. **Formuła w postaci CNF** (koniunktywna postać normalna)

$$(\, x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3 \lor x_4 \,) \land (\, \neg x_1 \lor x_4 \,) \land (\, \neg x_2 \lor x_3 \lor \neg x_5 \,)$$

2. **Formuła w postaci 3CNF**

$$(\, x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3 \,) \land (\, \neg x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4 \,) \land (\, x_2 \lor \neg x_4 \lor x_5 \,)$$

Problem 3SAT

$$3SAT \;=\; \left\{ \phi : \ \phi \text{ jest spełnialną formułą logiczną w postaci 3CNF} \right\}$$

✓ $\phi_1 = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

✗ $\phi_2 = (x \vee x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x \vee \neg x)$

✗ $\phi_3 = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

$$3SAT = \left\{ \phi : \ \phi \text{ jest spełnialną formułą logiczną w postaci 3CNF} \right\}$$

$$\phi_{M_A}(w) = \phi_{cell}(w) \wedge \phi_{start}(w) \wedge \phi_{acc}(w) \wedge \phi_{move}(w)$$

Formuła logiczna w postaci **CNF**

Formuła logiczna w postaci **3CNF**

Problem 3SAT

$$\phi_{M_A}(w) \quad = \quad \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) = \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t \in C, s \neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$

- $$\phi_{start}(w) = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$

- $$\phi_{acc}(w) = \bigvee_{1 \leq i,j \leq n^k} x_{i,j,q_{ACC}}$$

- $$\phi_{move}(w) = \bigwedge_{1 \leq i < n^k,\; 1 < j < n^k} OKNO[i,j] \text{ jest poprawne}$$

$$\phi_{M_A}(w) \;=\; \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) = \bigwedge_{1\le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{s\in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t\in C, s\neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$
- $$\phi_{start}(w) = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$
- $$\phi_{acc}(w) = \bigvee_{1\le i,j\le n^k} x_{i,j,q_{ACC}}$$
- $$\phi_{move}(w) = \bigwedge_{1\le i< n^k,\ 1<j<n^k} OKNO[i,j] \text{ jest poprawne}$$

Formuła w postaci CNF

Problem 3SAT

$$\phi_{M_A}(w) \;=\; \phi_{cell}(w) \;\wedge\; \phi_{start}(w) \;\wedge\; \phi_{acc}(w) \;\wedge\; \phi_{move}(w)$$

- $$\phi_{cell}(w) = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{s,t \in C, s \neq t} \left(\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t} \right) \right) \right]$$
- $$\phi_{start}(w) = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots$$
- $$\phi_{acc}(w) = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{ACC}}$$

Prawa de Morgana

- $$\phi_{move}(w) = \bigwedge_{1 \le i < n^k,\; 1 < j < n^k} OKNO[i,j] \text{ jest poprawne}$$

$x_1 \Rightarrow (x_1 \vee z_1 \vee z_2)$

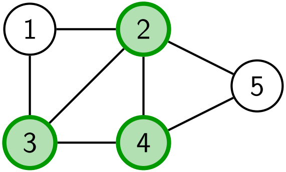
$(x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee z_1)$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee x_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee x_4 \vee z_3) \wedge (\neg z_3 \vee x_5 \vee x_6)$$

Pokrycie wierzchołkowe grafu G – podzbiór S wierzchołków G taki, że każda krawędź G ma co najmniej jeden koniec w zbiorze S.

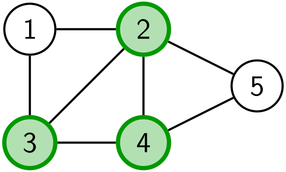


?

Wejście: Graf nieskierowany G oraz liczba $k > 0$.

Pytanie: Czy G ma pokrycie wierzchołkowe rozmiaru k?

G:



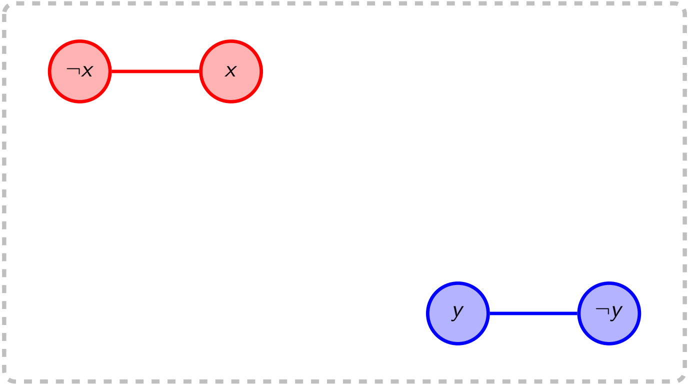
k: 3

Redukcja

Spełnialna dla $x = \textbf{true}$, $y = \textbf{false}$

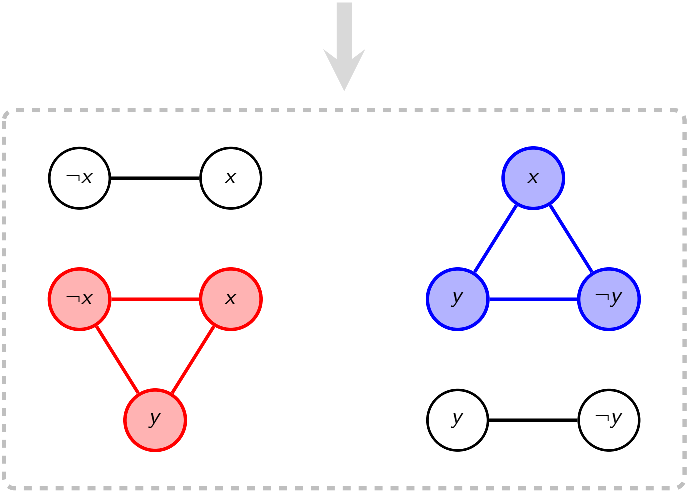
$$\phi = (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)$$

$$\phi = (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)$$



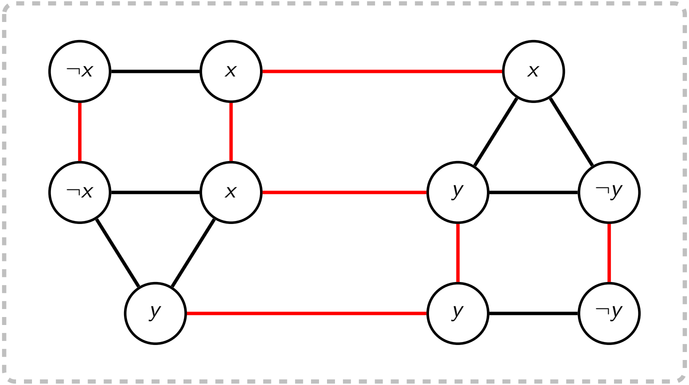
Redukcja

$$\phi = (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)$$



Redukcja

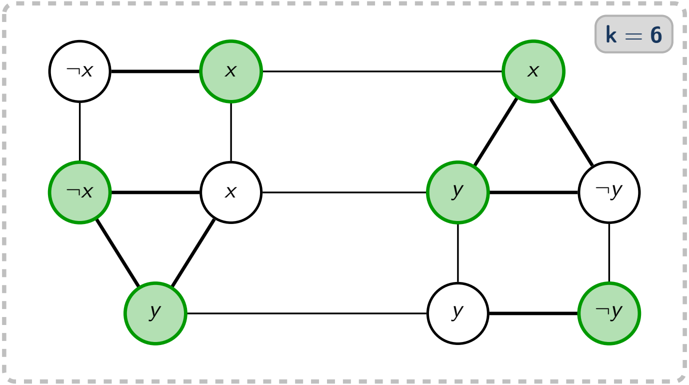
$$\phi = (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)$$



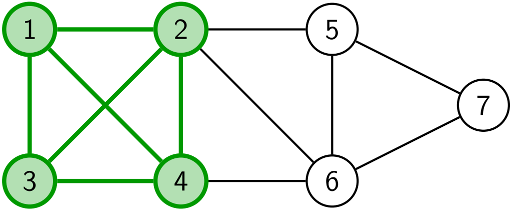
Redukcja

Spełnialna dla $x = \textbf{true}$, $y = \textbf{false}$

$$\phi = (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)$$



Klika w grafie nieskierowanym – podgraf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią.

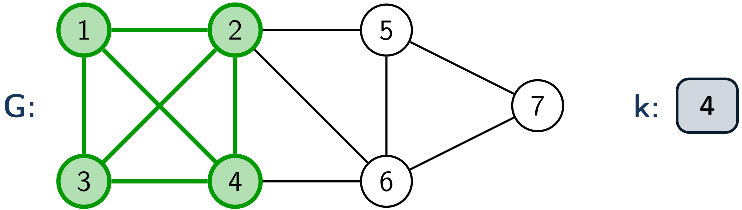


Problem kliki

?

Wejście: Graf nieskierowany G oraz liczba $k > 0$.

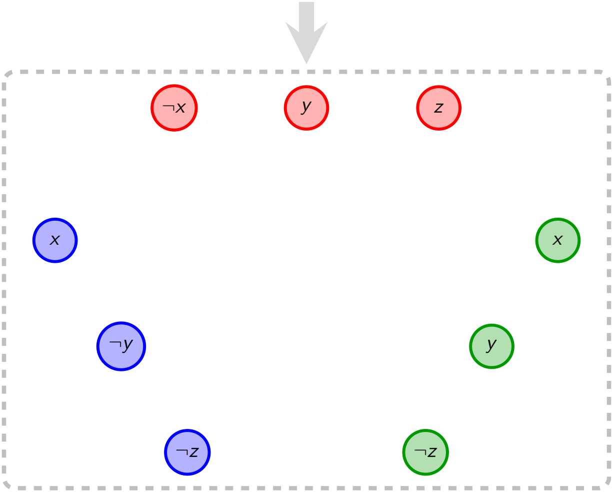
Pytanie: Czy G zawiera klikę rozmiaru k?



Spełnialna dla $x = \textbf{true}$, $y = \textbf{false}$, $z = \textbf{true}$

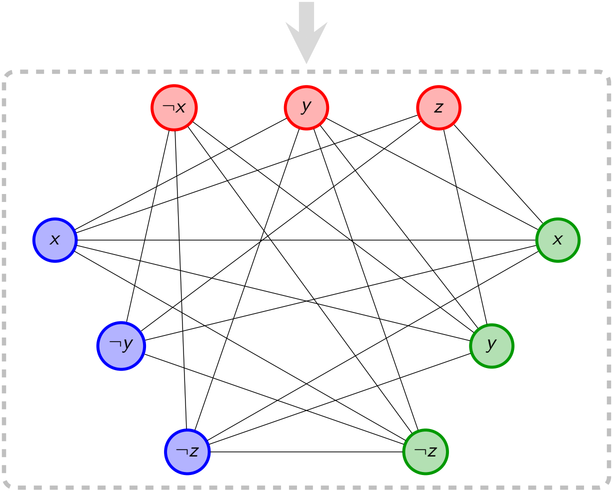
$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$$

$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$$



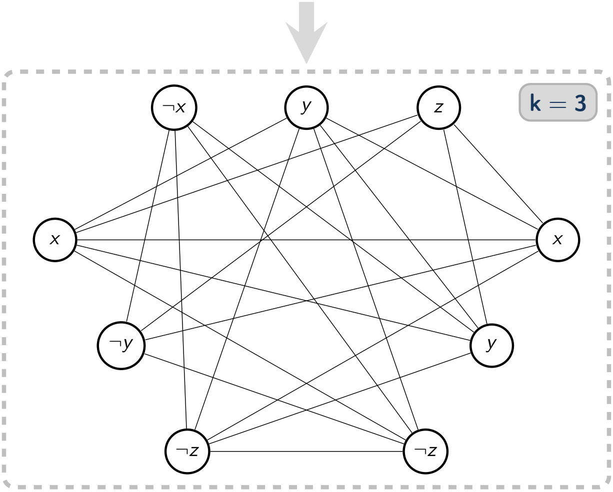
Redukcja

$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$$



Redukcja

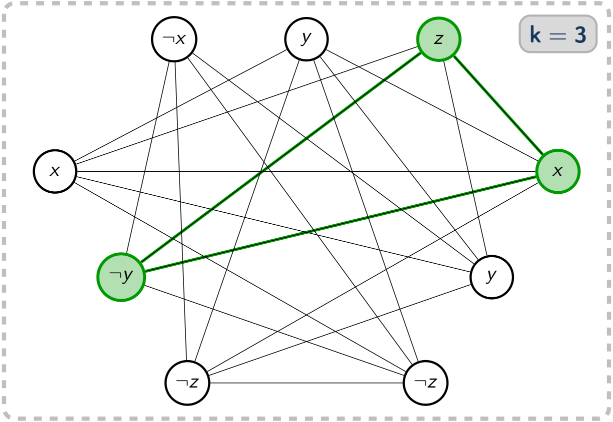
$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$$



Redukcja

Spełnialna dla $x = \textbf{true}$, $y = \textbf{false}$, $z = \textbf{true}$

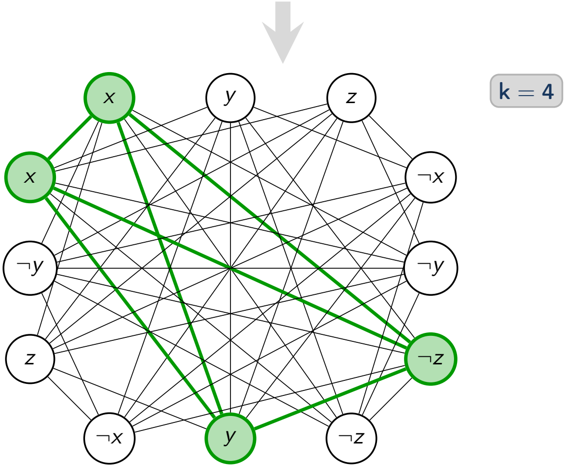
$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$$



Redukcja

Spełnialna dla $x = \textbf{true}$, $y = \textbf{true}$, $z = \textbf{false}$

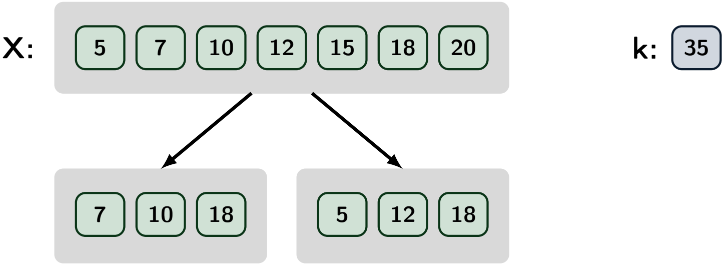
$$\phi = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$



Problem sumy podzbioru

Wejście: Zbiór (wielozbiór) liczb $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz liczba $k > 0$.

Pytanie: Czy istnieje podzbiór $Y \subseteq X$, którego suma elementów wynosi k?



Redukcja

Spełnialna dla $x_1 = \textbf{false}$, $x_2 = \textbf{true}$

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$$

Redukcja

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$$

X:

1	1
10	10
100	100
1110	1011
10111	10101

k: 11333

Redukcja

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$$

X:

1	1
10	10
100	100
1110	1011
10111	10101

k: 11333

	x_1	x_2	c_1	c_2	c_3
y_1	1	0	1	1	1
z_1	1	0	1	0	1
y_2		1	1	1	0
z_2		1	0	1	1
g_1			1	0	0
h_1			1	0	0
g_2				1	0
h_2				1	0
g_3					1
h_3					1
k	1	1	3	3	3

Redukcja

Spełnialna dla $x_1 = \textbf{false}$, $x_2 = \textbf{true}$

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$$

X:

1	1
10	10
100	100
1110	1011
10111	10101

k: 11333

	x_1	x_2	c_1	c_2	c_3
y_1	1	0	1	1	1
z_1	1	0	1	0	1
y_2		1	1	1	0
z_2		1	0	1	1
g_1			1	0	0
h_1			1	0	0
g_2				1	0
h_2				1	0
g_3					1
h_3					1
k	1	1	3	3	3

Redukcja

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$$

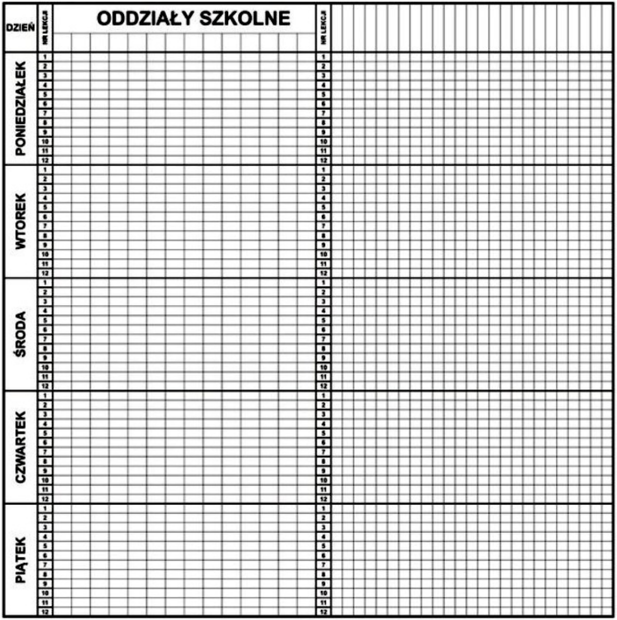
X:

1	1
10	10
100	100
1110	1011
10111	10101

k: 11333

	x_1	x_2	c_1	c_2	c_3
y_1	1	0	1	1	1
z_1	1	0	1	0	1
y_2		1	1	1	0
z_2		1	0	1	1
g_1			1	0	0
h_1			1	0	0
g_2				1	0
h_2				1	0
g_3					1
h_3					1
k	1	1	3	3	3

Problem układania planu



Sudoku

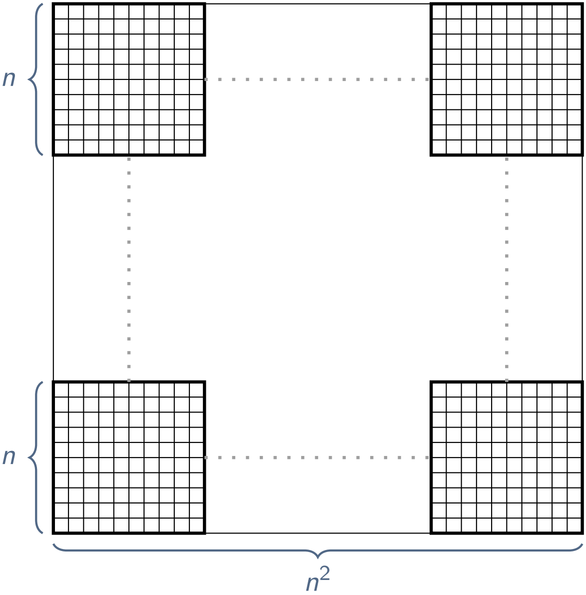
	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

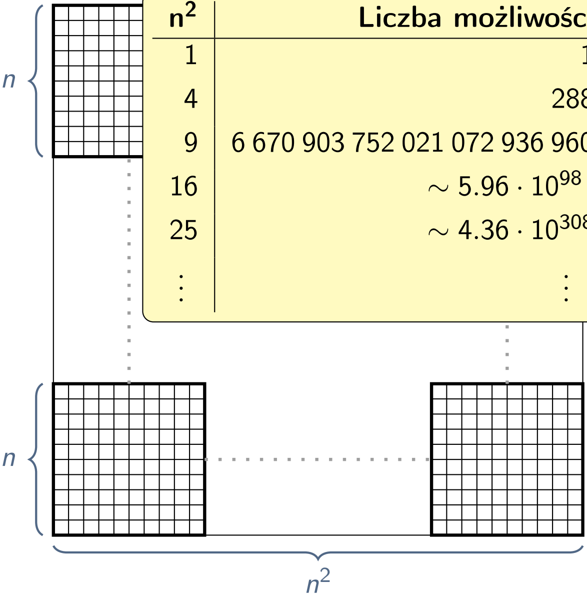
4	2	*6*	5	*7*	1	*3*	9	*8*
8	*5*	*7*	2	*9*	3	*1*	*4*	6
1	3	*9*	*4*	6	*8*	*2*	7	*5*
9	*7*	1	*3*	*8*	*5*	6	*2*	*4*
5	4	*3*	*7*	*2*	*6*	*8*	1	9
6	*8*	2	*1*	*4*	*9*	7	*5*	*3*
7	9	*4*	*6*	3	*2*	*5*	8	*1*
2	*6*	*5*	8	*1*	4	*9*	*3*	7
3	1	*8*	9	*5*	7	*4*	6	*2*

Sudoku

	12		1	9	8		19		20			22	16		11		17		25					
24	7			5	25			17	16	8				6			9	12		19		14		3
		14	19					1					23		18	13	22	4				17		10
20	18		4	15			21	9	13	10				19						7	6	11		
25								4				11		13	19	20	6							
14				16	23			20	6			15		18	17				21		4	8	5	
11			13	6	18			21			7	16	12				4		23					
		5	3	4						1			21	22		24	2				18		20	7
	1			19			11	8						14					13	6		2		
	15	7		8					24					9	5	12		16	20					25
21			10				8	12	18	6	16				25				7	17	22	19		2
		13	11	24	2	20			5					10	15	8	14							9
		17							23		21								11		13		10	
		23		25	6		15	13		7	2	14							5					
5						7	10	22	19	3				23				2		11			21	
8		10	17		12	11	4	24			22							15			1		18	5
23		6	15					25	22	13	1	20	18						10	4	21		17	11
	22		16	13		9	18	3		23			14	17		25				12	15		6	
19				12			7				24		10			14			22		23	3		
					20	15	13		10			12		5		3							9	
		25			16		3	5		20	12		11				19	8	6	1				23
	8		7		4	2		15		18		24				21		20				13		
		18	20	3						9	23			21	13		12	7	17		5			
10		24	21		17				12	25				1	3	15					7	9	14	
	6	15		2			9				10		5	8	4	16					19			

Sudoku

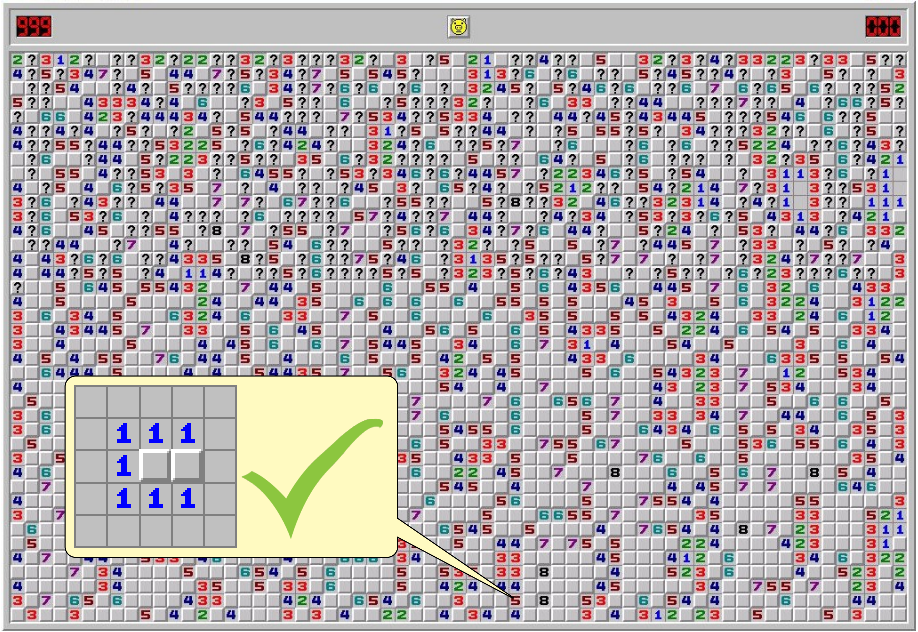




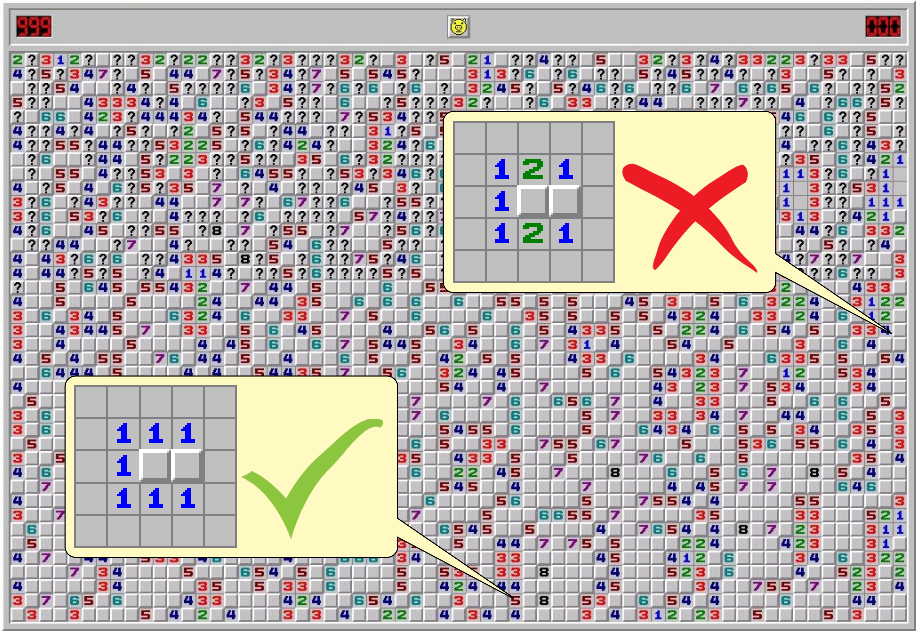
n^2	Liczba możliwości
1	1
4	288
9	6 670 903 752 021 072 936 960
16	$\sim 5.96 \cdot 10^{98}$
25	$\sim 4.36 \cdot 10^{308}$
$\vdots$	$\vdots$

Saper – Minesweeper Consistency Problem

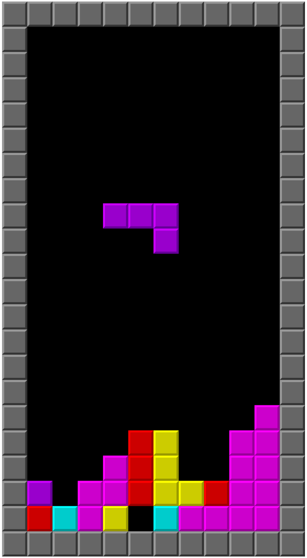
Saper – Minesweeper Consistency Problem

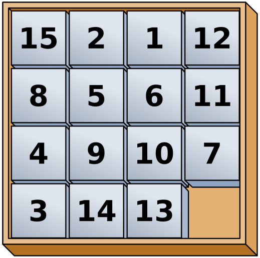


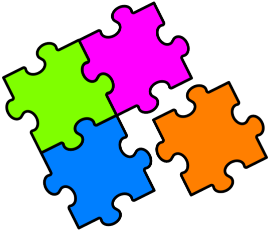
Saper – Minesweeper Consistency Problem

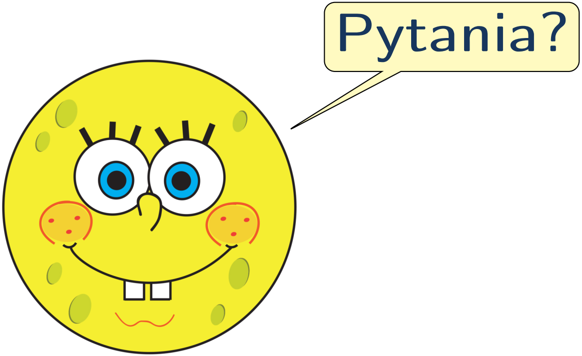


Inne przykłady gier








Pytania?