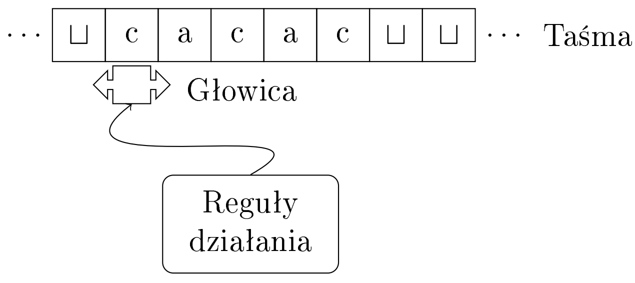
4 Maszyna Turinga

Poznaliśmy do tej pory dwa uniwersalne modele obliczeń: maszyny licznikowe oraz funkcje częściowo rekurencyjne. Wykazaliśmy również ich równoważność w sensie obliczeniowym. Bieżący wykład poświęcony będzie kolejnemu modelowi – maszynie Turinga. Szkic dowodu równoważności maszyn licznikowych oraz maszyn Turinga zostanie zaprezentowany podczas kolejnego wykładu.

Maszyna Turinga

Maszyna Turinga jest modelem obliczeń zaproponowanym przez Alana Turinga w 1936 roku. Model ten podobny jest do automatu skończonego, jednak w odróżnieniu od niego dysponuje nieograniczoną pamięcią o swobodnym dostępie. Może być więc modelem komputera służącego do ogólnych zastosowań. Co ciekawe, na mocy tezy Churcha-Turinga, maszyna ta może obliczyć wszystko, co jest w stanie obliczyć prawdziwy komputer.



Rysunek 4.1: Schemat maszyny Turinga

Maszyna Turinga składa się taśmy stanowiącej pamięć, głowicy czytająco/piszącej oraz zbioru reguł określających jej działanie. Taśma jest nieskończona (nieograniczona w lewo oraz w prawo) i składa się z komórek. Każda komórka taśmy może przechowywać pojedynczą literę. Wszystkie komórki, poza skończoną liczbą, są puste i zawierają symbol pusty $\sqcup$. Głowica czytająco/pisząca może poruszać się nad taśmą w obu kierunkach, czytać z niej oraz zapisywać na niej. W ustalonym momencie głowica jest w stanie przeczytać lub zapisać wyłącznie pojedynczą komórkę taśmy. Przed rozpoczęciem działania maszyny taśma zawiera wyłącznie dane wejściowe, zaś głowica czytająco/pisząca znajduje się nad pierwszą literą wejścia. Przejście maszyny w stan końcowy (zarówno akceptujący jak i odrzucający) powoduje natychmiastowe zakończenie jej działania.

Przykład 4.1

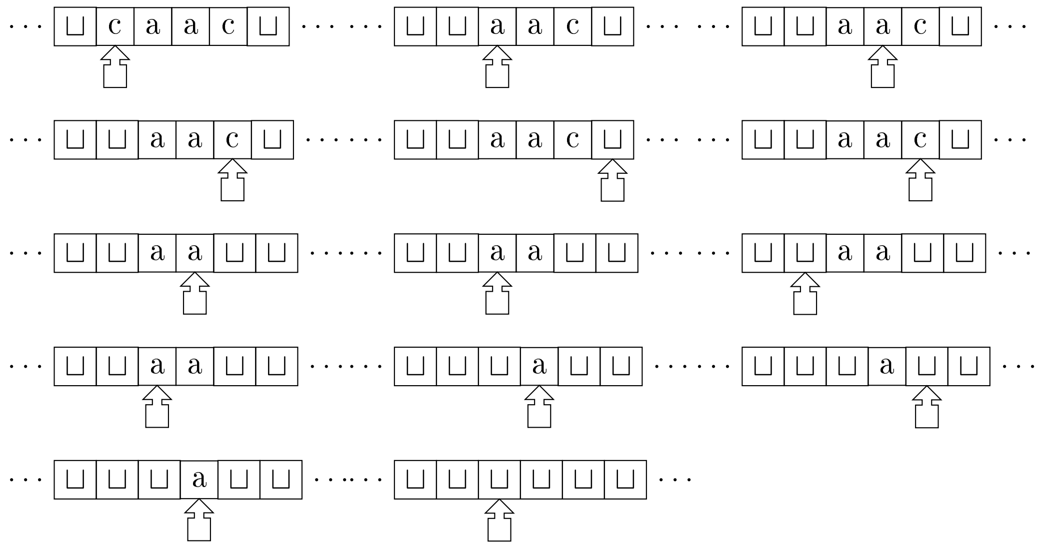
Maszyna Turinga akceptująca język palindromów.

Maszyna czyta słowo wejściowe zapisane na taśmie. Akceptuje je, jeśli jest ono palindromem, oraz odrzuca w przeciwnym przypadku.

Opis działania:

- Jeśli taśma jest pusta zakończ w stanie akceptującym.
- Usuń i zapamiętaj literę z lewego końca słowa (usuniętej literze odpowiada stan maszyny).
- Znajdź prawy koniec słowa.
- Jeśli ostatnia litera słowa jest taka sama jak pierwsza, usuń ją i wróć na początek słowa.
- Jeśli ostatnia litera słowa jest inna niż pierwsza, zakończ w stanie odrzucającym.
- Jeśli pierwsza litera była jedyną literą na taśmie, zakończ w stanie akceptującym.

Przykład działania:



Powyższy opis maszyny jest wyłącznie zarysem sposobu jej działania. Aby uzyskać dokładny opis trzeba przedstawić jej formalną definicję.

Definicja 4.1

Maszyną Turinga nazywamy siódemkę uporządkowaną

$$MT \;=\; (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ}),$$

gdzie:

- Q jest skończonym zbiorem stanów
- Σ jest skończonym alfabetem wejściowym ($\sqcup \notin Q$)
- Γ jest skończonym alfabetem taśmy ($\sqcup \in \Gamma$ oraz $\Sigma \subset \Gamma$)
- $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ jest funkcją przejścia
- $q_0 \in Q$ jest wyróżnionym stanem początkowym
- $q_{ACC} \in Q$ jest wyróżnionym stanem akceptującym
- $q_{REJ} \in Q$ jest wyróżnionym stanem odrzucającym ($q_{ACC} \neq q_{REJ}$)

Przykład 4.2

Opis formalny maszyny Turinga M akceptującej język palindromów.

- alfabet wejściowy: $\Sigma = \{a,\ b\}$

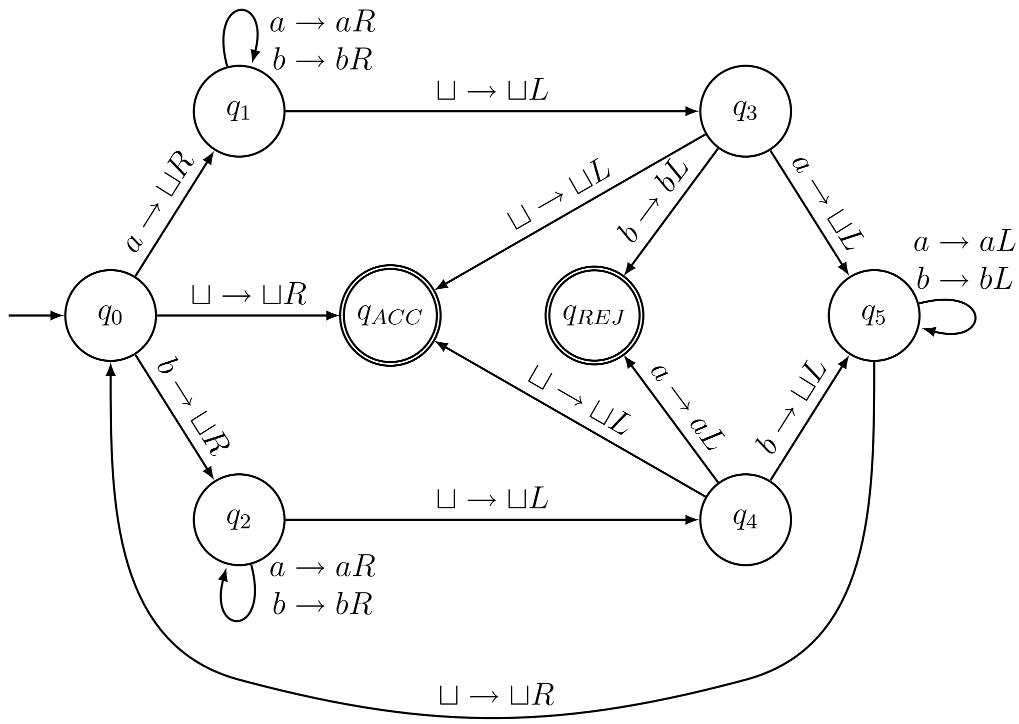
- alfabet taśmy: $\Gamma = \{a,\ b,\ \sqcup\}$
- zbiór stanów: $Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_{ACC},\ q_{REJ}\}$
- definicja funkcji przejścia δ:

$q_0\sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup R$ // akceptujemy słowo puste
$q_0 a \longrightarrow q_1 \sqcup R$ // zapamiętanie pierwszej litery
$q_0 b \longrightarrow q_2 \sqcup R$
$q_1 a \longrightarrow q_1 aR$ // przejście na koniec słowa
$q_1 b \longrightarrow q_1 bR$
$q_2 a \longrightarrow q_2 aR$
$q_2 b \longrightarrow q_2 bR$
$q_1\sqcup \longrightarrow q_3 \sqcup L$ // sprawdzenie ostatniej litery
$q_2\sqcup \longrightarrow q_4 \sqcup L$
$q_3 b \longrightarrow q_{REJ} bL$ // odrzucenie w przypadku niezgodności
$q_4 a \longrightarrow q_{REJ} aL$
$q_3 a \longrightarrow q_5 \sqcup L$ // powrót na początek słowa
$q_4 b \longrightarrow q_5 \sqcup L$
$q_3\sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L$ // zaakceptowanie pojedynczej litery
$q_4\sqcup \longrightarrow q_{ACC} \sqcup L$
$q_5 a \longrightarrow q_5 aL$ // powrót na początek słowa
$q_5 b \longrightarrow q_5 bL$
$q_5\sqcup \longrightarrow q_0 \sqcup R$ // rozpoczęcie kolejnej iteracji

Zbiór stanów maszyny Turinga oraz definicja funkcji przejścia mogą być również przedstawione za pomocą *diagramu stanów* opisującego jej działanie w sposób graficzny.

Konfiguracja maszyny Turinga

Niech $a, b, c \in \Gamma$ oraz $u, v \in \Gamma^*$. Konfiguracją maszyny Turinga MT nazywamy trójkę (stan, pozycja głowicy, zawartość taśmy). Zapis uq_iv oznacza, że maszyna jest w stanie q_i, na taśmie znajduje się słowo uv, zaś głowica czytająco/pisząca znajduje się nad pierwszą literą słowa v. Konfiguracją *początkową* maszyny MT dla wejścia w nazywamy konfigurację postaci q_0w. Konfiguracją *akceptującą* (odpowiednio *odrzucającą*) maszyny MT nazywamy dowolną konfigurację, dla której maszyna MT znajduje się w stanie akceptującym



Rysunek 4.2: Diagram stanów maszyny Turinga z Przykładu 2.

(odpowiednio odrzucającym). Konfiguracją *końcową* maszyny MT nazywamy dowolną konfigurację akceptującą lub odrzucającą.

Powiemy, że maszyna Turinga przechodzi z konfiguracji C_1 do konfiguracji C_2 (ozn. $C_1 \longrightarrow C_2$), jeśli prawdziwy jest jeden z warunków:

- $C_1 = uaq_ibv$, $C_2 = uq_jacv$ oraz $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$.
- $C_1 = uaq_ibv$, $C_2 = uacq_jv$ oraz $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$.

Definicja 4.2

Powiemy, że maszyna Turinga MT akceptuje (odrzuca) słowo w, jeśli istnieje taki ciąg jej konfiguracji $C_0,\ C_1, \ldots, C_n$, że:

- C_0 jest konfiguracją początkową MT dla słowa w
- $\forall_{0<i<n}$ z konfiguracji C_{i-1} maszyna MT przechodzi do konfiguracji C_i
- C_n jest konfiguracją akceptującą (odrzucającą)

Ciąg konfiguracji $C_0,\ C_1, \ldots, C_n$ nazywamy akceptującą (odrzucającą) historią obliczeń maszyny MT.

Definicja 4.3

Zbiór słów akceptowanych przez maszynę Turinga MT nazywamy językiem rozpoznawanym przez MT.

Język $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy rozpoznawalnym w sensie Turinga, jeżeli jest rozpoznawany przez pewną maszynę Turinga.

Zauważmy, że dla ustalonego słowa wejściowego $w \in \Sigma^*$ obliczenia maszyny Turinga MT mogą przebiegać na trzy wykluczające się sposoby:

1. MT kończy obliczenia w stanie akceptującym.
2. MT kończy obliczenia w stanie odrzucającym.
3. MT nigdy nie kończy obliczeń.

Chcielibyśmy wyróżnić maszyny zatrzymujące się dla każdego wejścia.

Definicja 4.4

Powiemy, że maszyna Turinga MT rozstrzyga język $L \subseteq \Sigma^*$, jeżeli dla każdego słowa $w \in L$ zatrzymuje się w stanie akceptującym, natomiast dla każdego słowa $w \notin L$ zatrzymuje się w stanie odrzucającym.

Język $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy rozstrzygalnym w sensie Turinga, jeżeli jest rozstrzygany przez pewną maszynę Turinga.

Uwaga

Zauważmy, że każdy język rozstrzygalny w sensie Turinga jest również rozpoznawalny w sensie Turinga. Implikacja w druga stronę nie jest prawdziwa.

Opisana w Przykładzie 2 maszyna Turinga rozstrzyga język palindromów. Może ona zostać zamieniona na maszynę (tylko) rozpoznającą, jeśli po stwierdzeniu niezgodności pierwszej i ostatniej litery słowa znajdującego się na taśmie wpadnie w nieskończoną pętlę zamiast kończyć działanie w stanie odrzucającym.

Działanie maszyny Turinga możemy rozumieć na dwa sposoby:

- akceptowanie/odrzucanie języków (podobnie jak automaty)
- obliczanie wartości funkcji (podobnie jak maszyny licznikowe)

Dla maszyny obliczającej wartość funkcji znalezienie się w stanie akceptującym oznacza zakończenie obliczeń i zwrócenie wyniku. Zatrzymanie w stanie odrzucającym oznacza natomiast odrzucenie niepoprawnych danych wejściowych.

Przykład 4.3

Maszyna Turinga licząca funkcję następnika: $f(x) = x + 1$.

Na taśmie maszyny M znajduje się zapis binarny liczby naturalnej n. Po zakończeniu działania maszyny M na taśmie powinien znajdować się zapis binarny liczby $n + 1$.

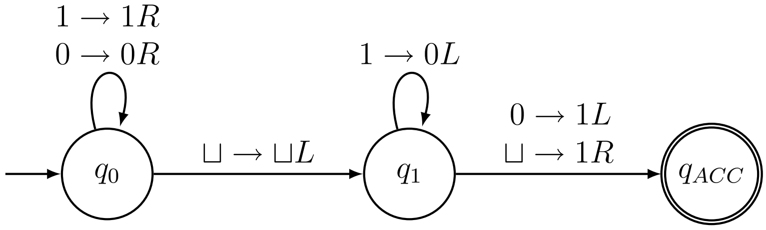
Opis działania:

- Znajdź prawy koniec zapisu binarnego liczby.
- Przesuwaj głowicę w lewo jednocześnie zamieniając napotkane 1 na 0.
- Pierwsze od prawej 0 zamień na 1 i zakończ działanie w stanie akceptującym.
- Po osiągnięciu lewego końca słowa (w zapisie binarnym liczby nie występowały 0) dodaj 1 na jego początek.

Definicja funkcji przejścia:

$$
\begin{array}{ll}
q_0 0 \longrightarrow q_0 0R & // \text{ szukaj prawego końca} \\
q_0 1 \longrightarrow q_0 1R & \\
q_0 \sqcup \longrightarrow q_1 \sqcup L & // \text{ stan dodawania 1} \\
q_1 1 \longrightarrow q_1 0L & // \text{ zamiana zer na 1} \\
q_1 0 \longrightarrow q_{ACC} 1L & // \text{ pierwsze od prawej 0} \\
q_1 \sqcup \longrightarrow q_{ACC} 1L & // \text{ same 1}
\end{array}
$$

Diagram stanów:



Uwagi do przykładu

Zauważmy, że opisana powyżej maszyna akceptuje zapis liczby binarnej z dowolną liczbą wiodących zer. Ponadto, słowo puste jest traktowane jak prawidłowa reprezentacja liczby 0. Zapewnienie, aby w takich przypadkach maszyna zatrzymywała się w stanie odrzucającym, wymaga niewielkiej modyfikacji jej konstrukcji.

Ćwiczenie 4.1

Popraw opisaną powyżej maszynę Turinga tak, aby odrzucała nieprawidłowo sformatowane dane wejściowe.

Uwagi dotyczące stanów końcowych

W niektórych wypadkach, wygodne jest dodatkowe założenie jednego z poniższych wymagań, dotyczących sposobu działania maszyny Turinga:

- Taśma maszyny jest pusta, kiedy zatrzyma się ona w stanie akceptującym – wymaga to rozszerzenia definicji maszyny o instrukcje czyszczenia taśmy po zakończeniu obliczeń.
- Maszyna kończąc działanie drukuje na taśmie odpowiedź TAK lub NIE – wymaga to rozszerzenia definicji maszyny o instrukcje drukujące odpowiedź.

- Po zakończeniu działania przez maszynę obliczającą wartość funkcji jej głowica znajduje się nad pierwszym znakiem wyniku – wymaga to rozszerzenia definicji maszyny o instrukcje powrotu na początek wyniku.

Żadne z opisywanych powyżej rozszerzeń nie ma wpływu na moc obliczeniową wyjściowej maszyny, ułatwia jednak opisanie konfiguracji końcowej (zarówno akceptującej jak i odrzucającej).