5

Obliczalność w sensie Turinga

W czasie wykładu zaprezentowanych zostanie kilka wariantów maszyny Turinga równoważnych podstawowej definicji przedstawionej w czasie poprzedniego wykładu. Udowodniona również zostanie niezależność mocy obliczeniowej maszyny Turinga od wariantu jej definicji. Własność powyższa nosi nazwę odporności modelu. Aby pokazać, że dwa modele obliczeń są równoważne, należy udowodnić, że potrafimy symulować jeden model za pomocą drugiego.

Maszyna z ruchem „stój w miejscu”

Najprostszą modyfikacją podstawowej definicji maszyny Turinga jest dodanie instrukcji umożliwiających zmianę stanu i zawartości taśmy przy jednoczesnym braku ruchu głowicy czytająco/piszącej.

Niech $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ})$ będzie maszyną Turinga z funkcją przejścia określoną jako

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\},$$

gdzie L, R, S oznaczają ruch głowicy odpowiednio w lewo, w prawo lub pozostanie w tej samej pozycji.

Zauważmy, że maszyna dopuszczająca ruch „stój w miejscu” może symulować działanie maszyny nie dopuszczającej tego ruchu. Pozostaje więc udowodnić, że możliwa jest symulacja w drugą stronę.

Twierdzenie 5.1

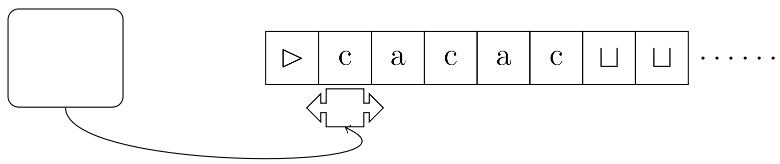
Dla dowolnej maszyny Turinga M dopuszczającej ruch S (stój w miejscu) głowicy czytająco/piszącej istnieje równoważna jej maszyna Turinga M' nie dopuszczająca ruchu S.

Dowód

Symulacja ruchu S przez maszynę M' polega na wykonaniu dwóch następujących bezpośrednio po sobie ruchów L+R lub R+L. Pozostałe zasady działania maszyny M nie ulegają zmianie. ■

Maszyna z taśmą jednostronnie ograniczoną

Bardzo często spotykanym wariantem maszyny Turinga jest maszyna z taśmą ograniczoną z jednej strony. Na lewym końcu taśmy znajduje się specjalny symbol $\triangleright$ oznaczający jej koniec. Każda instrukcja wymagająca ruchu w lewo poza symbol $\triangleright$ jest ignorowana.



Zauważmy, że obliczenie każdej maszyny Turinga z taśmą jednostronnie ograniczoną może być wykonane na maszynie z taśmą dwustronnie nieograniczoną (część taśmy znajdująca się na lewo od symbolu $\triangleright$ nie jest używana). Wystarczy zatem udowodnić, że obliczenia maszyny z taśmą dwustronnie nieograniczoną mogą być symulowane na maszynie z taśmą jednostronnie ograniczoną.

Twierdzenie 5.2

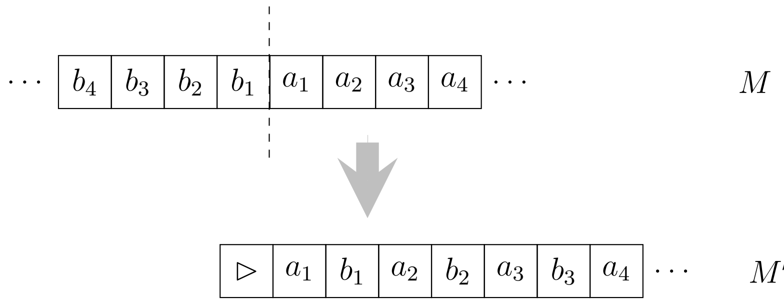
Dla dowolnej maszyny Turinga M z taśmą dwustronnie nieograniczoną istnieje równoważna jej maszyna Turinga M' z taśmą jednostronnie ograniczoną.

Dowód

Symulacja obliczeń maszyny M przez maszynę M' przebiega następująco:

- Ustalamy dowolny punkt cięcia nieskończonej taśmy maszyny M.

- Zawartość taśmy maszyny M po prawej stronie punktu cięcia zapisywana jest w „nieparzystych” komórkach taśmy maszyny M', natomiast rewers zawartości po jego lewej stronie zapisywany jest w komórkach „parzystych”.



- Każdy ruch L, R maszyny M odpowiada dwóm ruchom maszyny M' (ruch w komórkach parzystych odbywa się w przeciwnym kierunku).
- Każdy ruch poza symbol końca taśmy $\triangleright$ powoduje zmianę „parzystości” czytanych/zapisywanych komórek.
- Pozostałe reguły działania maszyny M nie ulegają zmianie.

■

Maszyna z wieloma taśmami

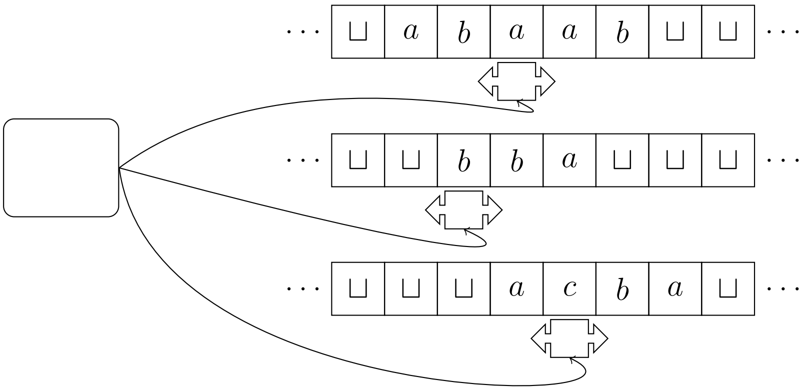
Kolejnym rozszerzeniem maszyny Turinga jest wykorzystanie więcej niż jednej taśmy. Każda taśma ma oddzielną głowicę czytająco/piszącą, która porusza się niezależnie od innych. W konfiguracji początkowej dane wejściowe znajdują się na pierwszej taśmie, pozostałe taśmy są puste. Funkcja przejścia musi zostać zmodyfikowana tak, aby umożliwić jednoczesne przesuwanie wielu głowic oraz czytanie i pisanie na wielu taśmach.

Definicja 5.1

Maszynę Turinga $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ})$ z funkcją przejścia określoną jako:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k,$$

gdzie $k > 0$, nazywamy k-taśmową maszyną Turinga.



Rysunek 5.1: Schemat trzytaśmowej maszyny Turinga

Wyrażenie

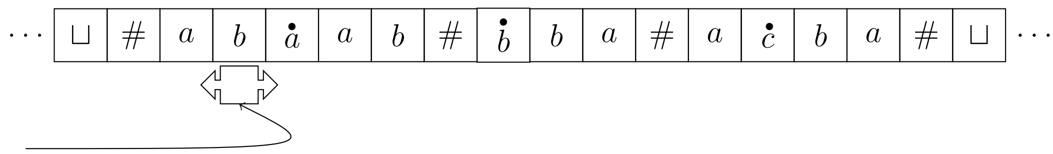
$$\delta(q_i, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (q_j, b_1, b_2, \ldots, b_k, L, R, \ldots, R)$$

oznacza, że maszyna Turinga M będąc w stanie q_i i widząc na kolejnych taśmach symbole a_1,…,a_k przechodzi w stan q_j, zapisuje na kolejnych taśmach symbole b_1,…,b_k oraz przesuwa każdą z głowic w odpowiednim kierunku.

Każda jednotaśmowa maszyna Turinga jest szczególnym przypadkiem maszyny wielotaśmowej. Pozostaje więc udowodnić, że każdą wielotaśmową maszynę Turinga można symulować na maszynie jednotaśmowej.

Twierdzenie 5.3

Dla dowolnej wielotaśmowej maszyny Turinga M istnieje równoważna jej jednotaśmowa maszyna Turinga M'.



Rysunek 5.2: Konfiguracja jednotaśmowej maszyny Turinga symulującej działanie maszyny trzytaśmowej przedstawionej na Rysunku 5.1

Dowód

Działanie maszyny M będziemy symulować na maszynie M' za pomocą wirtualnych taśm i głowic. Zawartość k taśm maszyny M zapisujemy sekwencyjnie na taśmie maszyny M' rozdzielając zawartość poszczególnych taśm specjalnym symbolem # (nie należącym do alfabetu taśmy maszyny M). Ponadto, dla każdej litery $a \in \Gamma$ dodajemy do alfabetu taśmy symbol $\dot{a}$ oznaczający pozycję głowicy na taśmie.

Dla słowa wejściowego $w = w_1 w_2 \dots w_n$ działanie maszyny M' przebiega według następującego schematu:

- Przekształcenie zawartości taśmy w zapis reprezentujący zawartość k taśm maszyny M:

$$\sqcup \# \dot{w}_1 \; w_2 \; \dots \; w_n \# \dot{\sqcup} \# \; \dots \; \# \dot{\sqcup} \# \sqcup$$

- Przeczytanie zawartości taśmy między skrajnymi znakami # w celu odczytania pozycji głowic wirtualnych.

- Zmiana zawartości taśm wirtualnych zgodnie z funkcją przejścia maszyny M.

- Zapisanie znaku w miejscu symbolu specjalnego # (rozszerzenie długości taśmy wirtualnej) jest realizowane przez kopiowanie „w prawo” całej zawartości taśmy maszyny M' znajdującej się za symbolem # .

■

Niedeterministyczna maszyna Turinga

Niedeterministyczna maszyna Turinga jest rozszerzeniem modelu podstawowego o możliwość wyboru więcej niż jednej instrukcji dla ustalonej konfiguracji maszyny (stan+litera). Obliczenie maszyny niedeterministycznej jest więc drzewem zawierającym wszystkie możliwe ścieżki jej obliczeń. Chociaż model ten wydaje się daleki od rzeczywistości, w teorii obliczalności odgrywa bardzo ważną rolę.

Definicja 5.2

Maszynę Turinga $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ})$ z relacją przejścia określoną:

$$\delta \subset \Big(Q \times \Gamma\Big) \times \Big(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\Big),$$

nazywamy niedeterministyczną maszyną Turinga.

Dla tak zdefiniowanej maszyny Turinga również pojęcia rozpoznawania i rozstrzygania języków muszą zostać zmodyfikowane.

Definicja 5.3

Powiemy, że niedeterministyczna maszyna Turinga M rozpoznaje język L, jeśli dla dowolnego słowa $w \in L$ istnieje skończona ścieżka jej obliczeń kończąca się w stanie akceptującym.

Definicja 5.4

Powiemy, że niedeterministyczna maszyna Turinga M rozstrzyga język L, jeśli dla dowolnego słowa $w \in \Sigma^*$ każda ścieżka jej obliczeń jest skończona, oraz $w \in L$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka obliczeń kończąca się w stanie akceptującym.

Uwaga

Zauważmy, że w przypadku maszyn niedeterministycznych do zaakceptowania słowa wystarczy istnienie jednej ścieżki obliczeń kończącej się w stanie akceptującym. Natomiast aby słowo było odrzucane, żadna ścieżka jej obliczeń nie może prowadzić do stanu akceptującego.

Mogłoby się wydawać, że takie rozszerzenie modelu obliczeń powinno znacząco wpłynąć na jego moc obliczeniową. Okazuje się jednak, że maszyny deterministyczne i niedeterministyczne rozstrzygają dokładnie tę samą klasę języków. Zauważmy, że każda deterministyczna maszyna Turinga jest szczególnym przypadkiem maszyny niedeterministycznej. Wystarczy zatem pokazać, że obliczenia dowolnej maszyny niedeterministycznej mogą być symulowane za pomocą maszyny deterministycznej.

Twierdzenie 5.4

Dla dowolnej jednotaśmowej **niedeterministycznej**maszyny Turinga M istnieje równoważna jej trzytaśmowa **deterministyczna** maszyna Turinga M'.

Dowód

Obliczenie maszyny M dla słowa w ma postać drzewa. Każde jego rozgałęzienie reprezentuje niedeterministyczne rozgałęzienie ścieżki obliczeń. Każdy węzeł drzewa odpowiada pewnej konfiguracji maszyny M (korzeń odpowiada konfiguracji początkowej M). Symulacja obliczeń maszyny M na maszynie M' polega na przejrzeniu drzewa obliczeń maszyny M (metodą BFS) i zakończeniu działania po osiągnięciu stanu końcowego na dowolnej ścieżce.

Taśma pierwsza zawiera słowo wejściowe (tylko do odczytu). Taśma druga zawiera kopię zawartości taśmy maszyny M będącej na ustalonej ścieżce obliczeń. Taśma trzecia zawiera informacje o pozycji maszyny M' w drzewie niedeterministycznych obliczeń maszyny M. Niech s będzie rozmiarem maksymalnego zbioru możliwych wyborów kolejnego kroku obliczeń maszyny M wynikającego określenia jej relacji przejścia. Każdy węzeł drzewa obliczeń M jest adresowany za pomocą słowa nad alfabetem $\Sigma_s = \{1, 2, \ldots, s\}$. Zbiór adresów będziemy przeglądać w porządku (będącym modyfikacją standardowego porządku leksykograficznego), w którym słowa krótsze poprzedzają dłuższe, zaś słowa równej długości przeglądamy alfabetycznie:

$$\{\varepsilon,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 1s,\ 21,\ 22,\ \ldots,\ ss,\ 111,\ 112,\ \ldots\}$$

Symulacja obliczeń maszyny M przez maszynę M' przebiega następująco:

1. Pierwsza taśma zawiera słowo wejściowe w, pozostałe taśmy są puste.

2. Kopiowanie słowa w z taśmy pierwszej na drugą.

3. Symulacja pojedynczej ścieżki obliczeń maszyny M na drugiej taśmie.

   - Wybór kroku spośród wielu możliwych dokonywany jest na podstawie kolejnego symbolu odczytanego z taśmy trzeciej.
   - Po osiągnięciu stanu końcowego przez maszynę M zakończenie działania w stanie akceptującym/odrzucającym.
   - Po osiągnięciu końca słowa znajdującego się na taśmie trzeciej lub napotkaniu niedozwolonego ruchu porzucenie aktualnej ścieżki obliczeń i powrót do punktu (2).

4. Zastąpienie słowa na taśmie trzeciej jego następnikiem w porządku ustalonym powyżej.

5. Powrót do punktu (2) i symulacja kolejnej ścieżki obliczeń.

Zauważmy, że istotne jest założenie o przeglądaniu drzewa obliczeń symulowanej maszyny niedeterministycznej metodą BFS. Daje to gwarancję zbadania wszystkich ścieżek ustalonej długości przed rozpatrzeniem ścieżek dłuższych. Zatem jeśli w rozważanym drzewie obliczeń istnieje ścieżka skończona, na pewno zostanie znaleziona. ■

Obliczalność w sensie Turinga a ML-obliczalność

Jako podsumowanie bieżącego wykładu udowodnimy równoważność poznanych wcześniej uniwersalnych modeli obliczeń z maszynami Turinga. Rozpoczniemy od pokazania, że działanie maszyny Turinga może być symulowane przez program na maszynę licznikową.

Twierdzenie 5.5

Dla dowolnej maszyny Turinga MT z taśmą jednostronnie ograniczoną istnieje program P na maszynę licznikową symulujący jej działanie.

Dowód

Symulacja działania maszyny Turinga MT przez program P na maszynę licznikową przebiega następująco:

- Ustalone jest kodowanie zbioru stanów Q oraz alfabetu taśmy Γ maszyny MT.
- Konfiguracja maszyny Turinga MT postaci uqv kodowana jest jako piątka $(|u|, |v|, q, kod(u), kod(v))$, gdzie kod jest dowolnym różnowartościowym kodowaniem.
- Dla każdej instrukcji maszyny MT tworzona jest procedura na maszynę licznikową ML realizującą jej wykonanie.
- Program P ma postać pętli zawierającej wszystkie procedury symulujące instrukcje maszyny MT.
- Każda iteracja pętli polega na wykonaniu instrukcja zgodnej z funkcją przejścia maszyny MT.

■

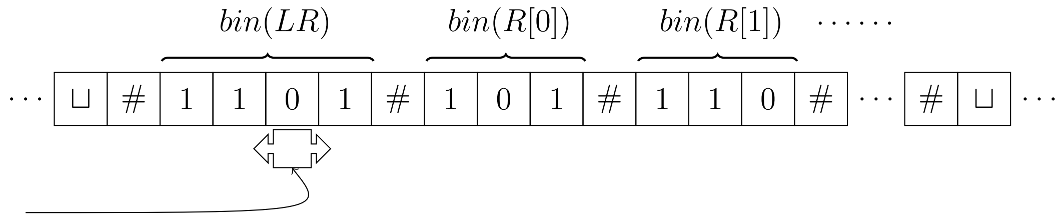
Zauważmy, że na mocy faktów prezentowanych wcześniej, oraz Twierdzenia 5.5, działanie dowolnej maszyny Turinga może być symulowane za pomocą programu na maszynę licznikową. Pozostało tylko udowodnić, że działanie dowolnego programu na maszynę licznikową może być symulowane za pomocą maszyny Turinga.

Twierdzenie 5.6

Dla dowolnego programu P na maszynę licznikową istnieje maszyna Turinga MT symulująca jego działanie.

Dowód

Pierwsza taśma maszyny MT zawiera binarne reprezentacje zawartości rejestrów maszyny ML oraz licznika rozkazów. Druga taśma wykorzystywana jest do obliczeń pomocniczych.



Rysunek 5.3: Zawartość pierwszej taśmy maszyny Turinga symulującej wykonanie programu na maszynie licznikowej.

Wykonanie instrukcji programu P przez maszynę MT przebiega następująco:

- $Z(m)$ – Odnalezienie na pierwszej taśmie kodu zawartości rejestru o adresie m i zapisanie w jego miejsce wartości 0.
- $S(m)$ – Odnalezienie na pierwszej taśmie kodu zawartości rejestru o adresie m i zwiększenie go o 1.
- $T(m, n)$ – Odnalezienie na pierwszej taśmie kodu zawartości rejestru m i skopiowanie go na drugą taśmę. Następnie odnalezienie na pierwszej taśmie kodu zawartości rejestru n i zastąpienie go kodem zapamiętanym na drugiej taśmie.
- $I(m, n, q)$ – Porównanie kodów zawartości rejestrów o adresach m oraz n (np. przy pomocy drugiej taśmy). W przypadku pozytywnego wyniku porównania, odnalezienie na pierwszej taśmie kodu licznika rozkazów i zamiana jego wartości na kod q.
- Po wykonaniu każdej instrukcji (poza skokiem) zwiększenie o 1 kodu licznika rozkazów.

Zauważmy, że adresy rejestrów używanych przez maszynę licznikową mogą być dowolnie duże. Nie ma więc możliwości zapamiętania ich w stanach maszyny Turinga MT. Maszyna MT może jednak zapamiętywać adresy (np. ich reprezentacje binarne) na drugiej taśmie.

■

W czasie jednego z poprzednich wykładów udowodniliśmy równość zbioru funkcji obliczalnych przez maszyny licznikowe ze zbiorem funkcji częściowo rekurencyjnych. Powyższe twierdzenie umożliwia nam sformułowanie następującego wniosku:

Wniosek

Funkcje częściowo rekurencyjne są obliczalne w sensie Turinga.