

## 4. Zmienne losowe

**Zad. 4.1** Niech  $X$  oznacza liczbę orłów w trzech rzutach monetą.

- Wyznacz rozkład, dystrybucję (wzór i wykres) zmiennej losowej  $X$ .
- Oblicz  $\mathbb{P}(X \leq 1)$ ,  $\mathbb{P}(X > 2)$ ,  $\mathbb{P}(X = 1,5)$ ,  $\mathbb{P}(X = 1)$ ,  $P(2 \leq X \leq 3)$ ,  $\mathbb{P}(X < 3)$ .

**Zad. 4.2** Wyznacz rozkład zmiennej losowej, której dystrybucja wyraża się dla  $x \in \mathbb{R}$  wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0,2, & -1 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0,4, & \frac{1}{2} \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

**Zad. 4.3** Niech  $X$  będzie zmienną losową określającą liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z parametrami  $(n, p)$ . Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbf{Var}(X)$ .

**Zad. 4.4** Niech  $X \sim Poiss(\lambda)$ . Oblicz  $\mathbb{P}(X = 2)$ ,  $\mathbb{E}(e^X)$ .

**Zad. 4.5** Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem  $p$ ,  $0 < p < 1$ . Znajdź  $\mathbb{P}(X - Y = -1)$ .

**Zad. 4.6** Dobierz stałe  $A$  i  $B$  tak, by funkcja określona dla  $x \in \mathbb{R}$  wzorem  $F(x) = A + B \cdot \arctg(x)$ , była dystrybucją pewnej zmiennej losowej  $X$ . Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $X$ .

**Zad. 4.7** Niech  $X$  będzie zmienną losową o gęstości  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2, 2] \\ a(4 - x^2), & x \in [-2, 2]. \end{cases}$

- Wyznacz parametr  $a$  i narysuj wykres  $f$ .
- Wyznacz dystrybucję zmiennej losowej  $X$  i narysuj jej wykres.
- Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbf{Var}(X)$ .
- Oblicz  $\mathbb{E}(3X + 2)^2$ ,  $\mathbb{P}(|X| > 1)$ .
- Zinterpretuj  $\mathbb{P}(X < -1)$  na wykresie gęstości i dystrybucji.

**Zad. 4.8** Wiedząc, że  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  i  $\mathbb{P}(X < 2) = \frac{3}{4}$ , znajdź

- parametr  $\lambda$ ,
- dystrybucję zmiennej losowej  $X$ ,
- $\mathbb{E}(e^{-X})$ ,  $\mathbf{Var}(e^{-X})$ .

**Zad. 4.9** Niech  $X \sim N(1, 2^2)$ . Oblicz  $\mathbb{P}(X < 0)$ ,  $\mathbb{P}(X < 1)$ ,  $\mathbb{P}(X > -1)$ ,  $\mathbb{P}(|X| > 1)$ . Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $\frac{X-1}{2}$ .

**Zad. 4.10** Dany jest sześcian, którego krawędź  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na  $[1, 2]$ . Wyznacz:

- wartość oczekiwaną objętości tego sześcianu,
- rozkład objętości tego sześcianu.

#### 4. Zmienne losowe - zadania do samodzielnego rozwiązania.

**Zad. 4.1** Z partii zawierającej 100 wyrobów, z których 10 jest wybrakowanych, losujemy 5 wyrobów do sprawdzenia (bez zwracania). Znajdź rozkład zmiennej losowej określającej liczbę braków w wylosowanej próbce.

**Zad. 4.2** Wyznacz rozkład zmiennej losowej, której dystrybuanta wyraża się dla  $x \in \mathbb{R}$  wzorem:

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2}, \\ 0,3, & -\frac{1}{2} \leq x < 3, \\ 0,6, & 3 \leq x < \frac{7}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{7}{2}. \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0,2, & -2 \leq x < \frac{3}{2}, \\ 0,7, & \frac{3}{2} \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

**Zad. 4.3** Niech  $X$  oznacza liczbę reszek w rzutach czterema monetami. Wyznacz:

- a) rozkład zmiennej losowej  $X$ ,
- b)  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbf{Var}(X)$ ,
- c) dystrybuantę (wzór i wykres) tej zmiennej losowej.

**Zad. 4.4** Do 3 kolorowych pudełek (czerwone, niebieskie, zielone) wkładamy 3 kolorowe piłki (czerwoną, niebieską, zieloną), przy czym do każdego pudełka trafia dokładnie jedna piłka. Kolor pudełek, do których wkładamy piłki, nie jest znany w trakcie doświadczenia. Niech  $X$  będzie zmienną losową określającą liczbę prawidłowych przyporządkowań kul do pudełek pod względem kolorów. Wyznacz:

- a) rozkład zmiennej losowej  $X$ ,
- b)  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbf{Var}(X)$ ,
- c) dystrybuantę (wzór i wykres) tej zmiennej losowej.

**Zad. 4.5** W pudełku znajdują się trzy ponumerowane od 1 do 3 żetony. Gracz losuje trzykrotnie żeton bez zwracania. Zdobywa tyle punktów, w ilu przypadkach numer żetonu zgadza się z numerem losowania. Wyznacz:

- a) rozkład zmiennej losowej  $X$ , określającej liczbę zdobytych punktów,
- b)  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbf{Var}(X)$ ,
- c) dystrybuantę (wzór i wykres) tej zmiennej losowej.

**Zad. 4.6** Zmienne losowe  $X$ ,  $Y$  są niezależne i mają ten sam rozkład dwumianowy  $b(n, p)$ ,  $n \geq 2$ ,  $0 < p < 1$ . Znajdź  $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ .

**Zad. 4.7** Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $f(x) = \alpha(x^2 - 1)1_{(-1,1)}(x)$ .

- a) Wyznacz parametr  $\alpha$ .
- b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ .
- c) Oblicz  $\mathbb{E}(1 - X)^2$ ,  $\mathbb{P}(X > 0)$ .

**Zad. 4.8** Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $f(x) = ax(x - 3)1_{(0,3)}(x)$ .

- (a) Wyznacz parametr  $a$  i narysuj wykres gęstości.
- (b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $X$  i narysuj jej wykres.
- (c) Oblicz  $\mathbb{E}(4X - 1)$ ,  $\mathbb{P}(X > 1)$ .

**Zad. 4.9** Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $f(x) = \alpha(-x^2 + x + 2)1_{(-1,2)}(x)$ .

- a) Wyznacz parametr  $\alpha$ .
- b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ .
- c) Oblicz  $\mathbb{E}(2X - 1)$ ,  $\mathbb{P}(X > 1)$ .

**Zad. 4.10** Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$

- a) Wyznacz parametr  $\alpha$ .
- b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ .
- c) Oblicz  $\mathbf{Var}(X)$ ,  $\mathbb{E}(1 - X)^2$ ,  $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$ .

**Zad. 4.11** Niech  $X \sim N(1, 4^2)$ . Oblicz:  $\mathbb{P}(X > -1)$ ,  $\mathbb{P}(|X| < 6)$ .

**Zad. 4.12** Niech  $X \sim N(3, 3^2)$ . Oblicz:  $\mathbb{P}(X > -2)$ ,  $\mathbb{P}(|X| < 5)$ .

**Zad. 4.13** Niech  $X \sim N(m, \sigma^2)$ . Znajdź rozkłady zmiennych losowych

- a)  $aX + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi i  $a \neq 0$ ;
- b)  $X^2$ .

**Zad. 4.14** Znajdź wartość oczekiwaną pola prostokąta, którego obwód jest równy 20, a jeden bok jest zmienną losową  $X$  o rozkładzie jednostajnym na  $[1, 10]$ .

**Zad. 4.15** Znajdź wartość oczekiwaną pola trójkąta, którego wysokość jest dwa razy krótsza niż podstawa będąca zmienną losową  $X$  o rozkładzie jednostajnym na  $[1, 4]$ .