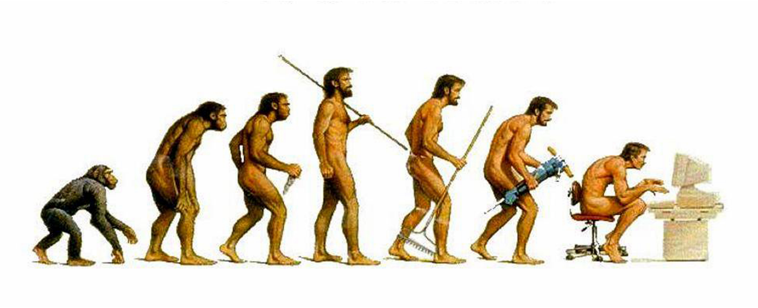


Teoria Obliczalności

Marcin Piątkowski

Wykład 5

Maszyna z ruchem „stój w miejscu”

Maszyna $M =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ} >$, gdzie

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathtt{L}, \mathtt{R}, \mathtt{S}\}$$

Twierdzenie

Dla dowolnej maszyny Turinga $\mathbf{M_1}$ dopuszczającej ruch $\mathtt{S}$ (stój w miejscu) istnieje **równoważna jej** maszyna Turinga $\mathbf{M_2}$ nie dopuszczająca ruchu $\mathtt{S}$

Maszyna z ruchem „stój w miejscu”

Maszyna $M =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ} >$, gdzie

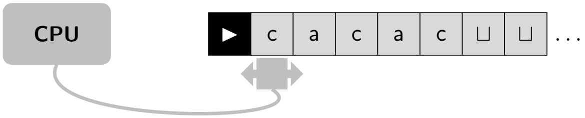
$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathtt{L}, \mathtt{R}, \mathtt{S}\}$$

Twierdzenie

Dla dowolnej maszyny Turinga $\mathbf{M_1}$ dopuszczającej ruch $\mathtt{S}$ (stój w miejscu) istnieje **równoważna jej** maszyna Turinga $\mathbf{M_2}$ nie dopuszczająca ruchu $\mathtt{S}$

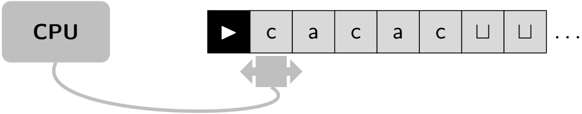
$\mathtt{S} \rightsquigarrow \mathtt{LR}$ lub $\mathtt{S} \rightsquigarrow \mathtt{RL}$

Maszyna z taśmą jednostronnie ograniczoną



- ▶ oznacza koniec taśmy
- Instrukcje wymagające ruchu w lewo poza ▶ są ignorowane

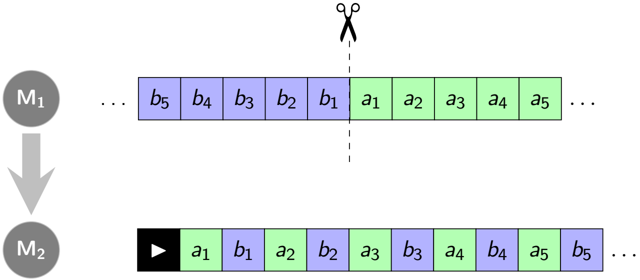
Maszyna z taśmą jednostronnie ograniczoną



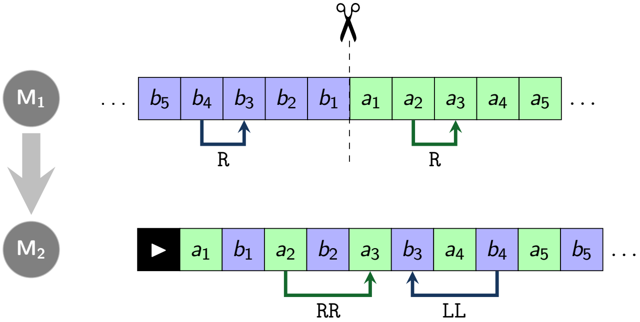
Twierdzenie

Dla dowolnej maszyny Turinga $\mathbf{M_1}$ z taśmą dwustronnie nieograniczoną istnieje **równoważna jej** maszyna Turinga $\mathbf{M_2}$ z taśmą jednostronnie ograniczoną

Maszyna z taśmą jednostronnie ograniczoną

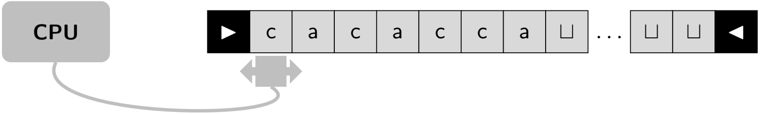


Maszyna z taśmą jednostronnie ograniczoną



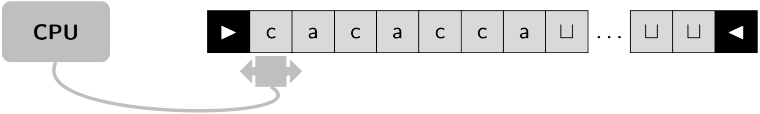
- ☞ Każdemu ruchowi maszyny $\mathbf{M_1}$ odpowiadają „dwa" ruchy maszyny $\mathbf{M_2}$ (możliwa zmiana kierunku)
- ☞ Każdy ruch poza ▶ powoduje zmianę *parzystości* czytanych komórek

Maszyna z taśmą dwustronnie ograniczoną



? Równoważność z maszyną z taśmą dwustronnie nieograniczoną?

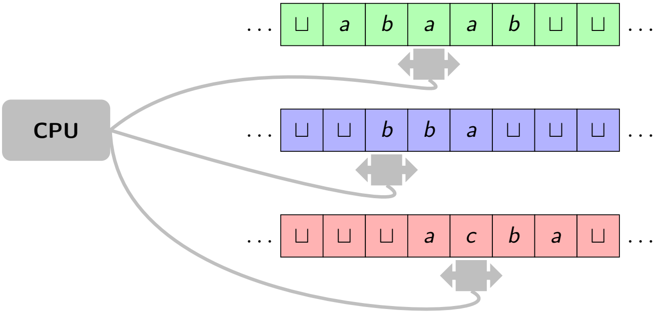
Maszyna z taśmą dwustronnie ograniczoną



? ~~Równoważność z maszyną z taśmą dwustronnie nieograniczoną?~~

Maszyna $M = < Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ACC}, q_{REJ} >$, gdzie

$$\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\mathtt{L}, \mathtt{R}, \mathtt{S}\}^k \qquad (k > 0)$$



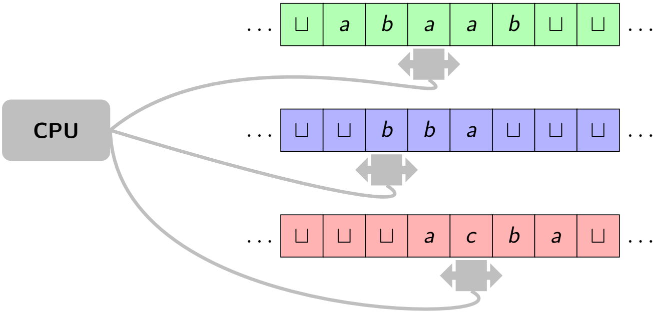
$$\delta(q_i, a, b, c) \; = \; (q_j, b, a, c, \mathtt{R}, \mathtt{S}, \mathtt{L})$$

$\mathtt{q_i\ a\ b\ c \ \rightarrow\ q_j\ b\ a\ c\ R\ S\ L}$

Maszyna z wieloma taśmami

Twierdzenie

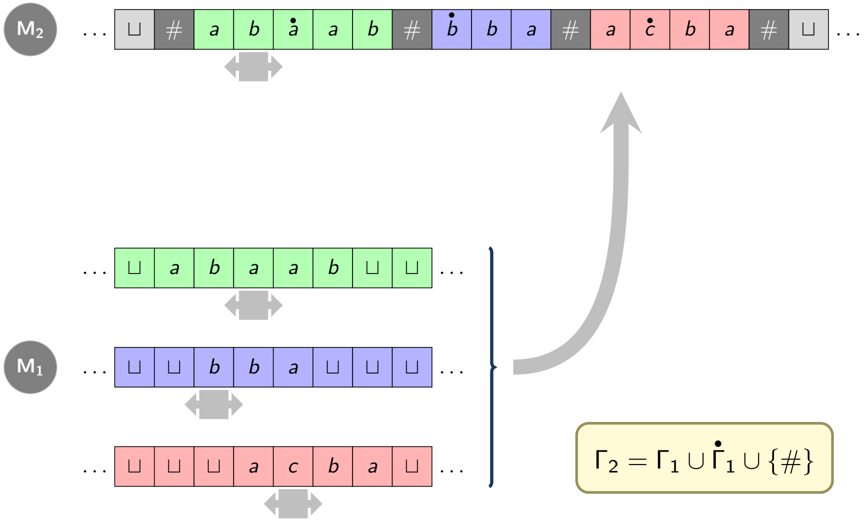
Dla dowolnej wielotaśmowej maszyny Turinga $\mathbf{M_1}$ istnieje **równoważna jej** jednotaśmowa maszyna Turinga $\mathbf{M_2}$.



$$\delta(q_i, a, b, c) = (q_j, b, a, c, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{L})$$

$$\mathtt{q_i\ a\ b\ c} \to \mathtt{q_j\ b\ a\ c\ R\ S\ L}$$

Maszyna z wieloma taśmami



$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \dot{\Gamma}_1 \cup \{\#\}$$

Niedeterministyczna maszyna Turinga

Maszyna $M =< Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, q_0,\, q_{ACC} >$, gdzie

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{\mathtt{L}, \mathtt{R}, \mathtt{S}\}}$$

$$\Sigma \;=\; \{a,\; b\}$$

$$\Gamma \;=\; \{a,\; b,\; \sqcup\}$$

$$Q \;=\; \{q_0,\; q_1,\; q_2,\; q_3,\; q_{ACC}\}$$

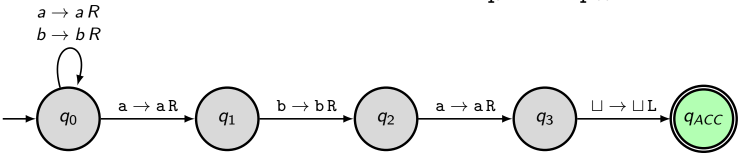
$$\mathtt{q_0\, a} \longrightarrow \{\mathtt{q_0\, a\, R}\,,\; \mathtt{q_1\, a\, R}\}$$

$$\mathtt{q_0\, b} \longrightarrow \mathtt{q_0\, b\, R}$$

$$\mathtt{q_1\, b} \longrightarrow \mathtt{q_2\, b\, R}$$

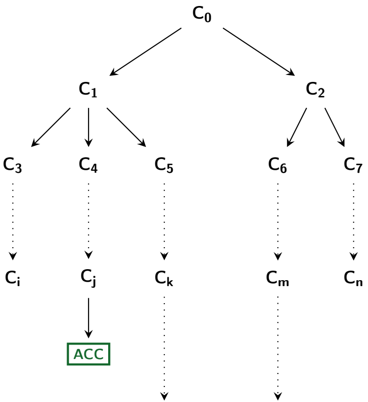
$$\mathtt{q_2\, a} \longrightarrow \mathtt{q_3\, a\, R}$$

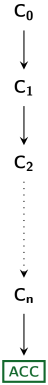
$$\mathtt{q_3} \sqcup \longrightarrow \mathtt{q_{ACC}} \sqcup \mathtt{L}$$



Niedeterministyczna maszyna Turinga

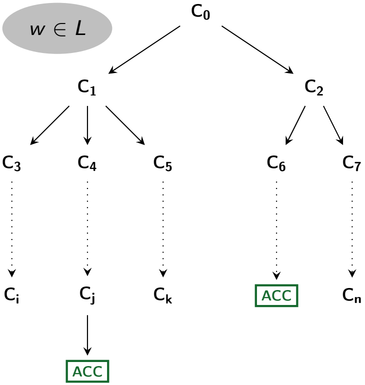
Niedeterministyczna maszyna Turinga **rozpoznaje** język L, jeśli dla dowolnego słowa $w \in L$ **istnieje** skończona ścieżka jej obliczeń kończąca się w stanie akceptującym

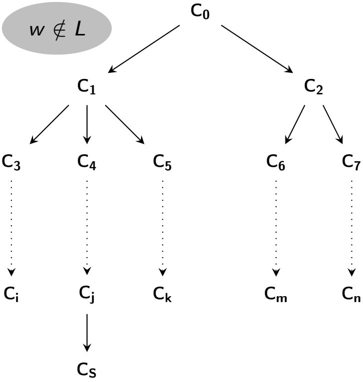




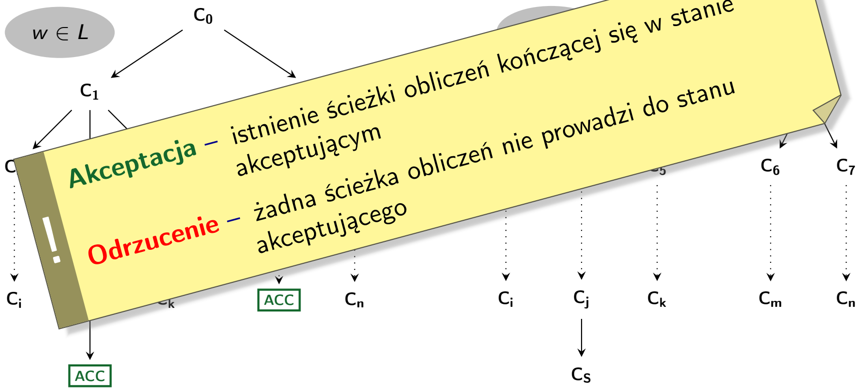
Niedeterministyczna maszyna Turinga

Niedeterministyczna maszyna Turinga **rozstrzyga** język L, jeśli dla dowolnego słowa $w \in \Sigma^*$ **każda** ścieżka jej obliczeń jest **skończona**, oraz $w \in L$ wtedy i tylko wtedy, gdy **istnieje** ścieżka obliczeń kończąca się w stanie akceptującym





Niedeterministyczna maszyna Turinga **rozstrzyga** język L, jeśli dla dowolnego słowa $w \in \Sigma^*$ **każda** ścieżka jej obliczeń jest **skończona**, oraz $w \in L$ wtedy i tylko wtedy, gdy **istnieje** ścieżka obliczeń kończąca się w stanie akceptującym



!

Akceptacja – istnienie ścieżki obliczeń kończącej się w stanie akceptującym

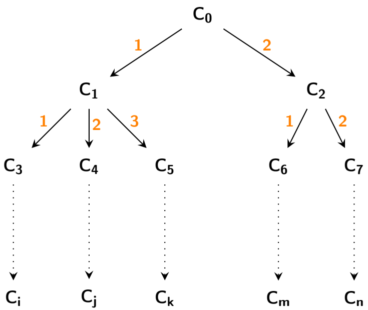
Odrzucenie – żadna ścieżka obliczeń nie prowadzi do stanu akceptującego

Twierdzenie

Dla dowolnej jednotaśmowej niedeterministycznej maszyny Turinga M istnieje **równoważna jej** trzytaśmowa deterministyczna maszyna Turinga M'.

Kodowanie ścieżki obliczeń

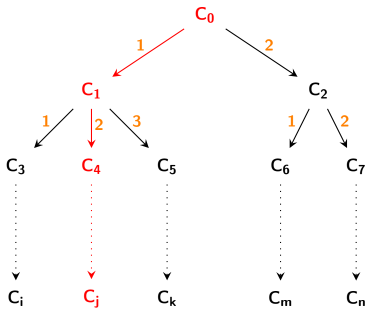
- b – maksymalna liczba rozgałęzień
- kod – słowo nad alfabetem $\{1, \ldots, b\}$



1
2
3
11
12
13
21
22
23
31
32
33
111
112
113
121
122
123
131
131
133
211
$\vdots$

Kodowanie ścieżki obliczeń

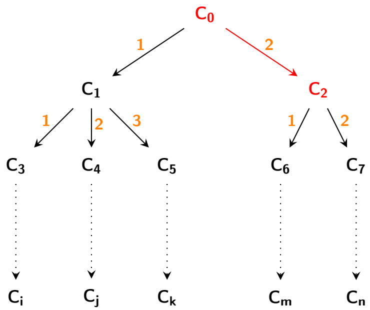
- ☞ b – maksymalna liczba rozgałęzień
- ☞ kod – słowo nad alfabetem $\{1, \ldots, b\}$



1
2
3
11
12
13
21
22
23
31
32
33
111
112
113
121
122
123
131
131
133
211
⋮

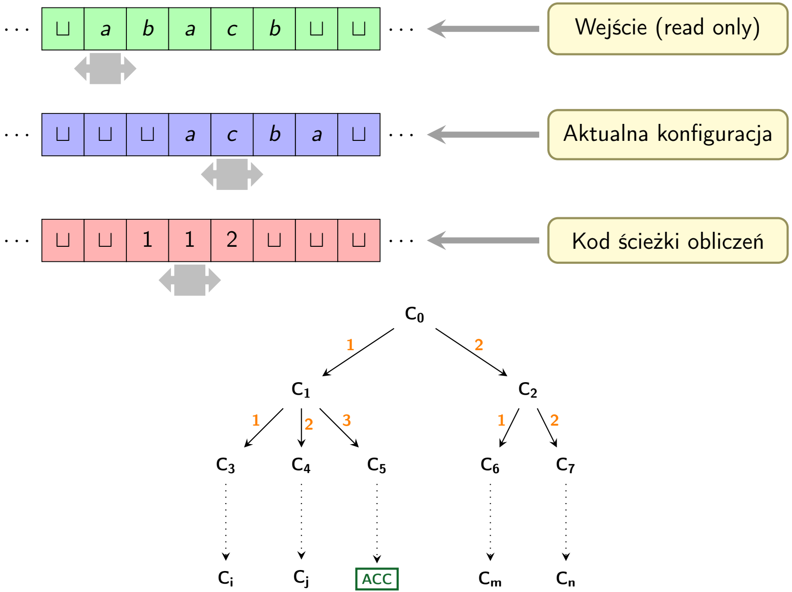
Kodowanie ścieżki obliczeń

- b – maksymalna liczba rozgałęzień
- kod – słowo nad alfabetem $\{1, \ldots, b\}$

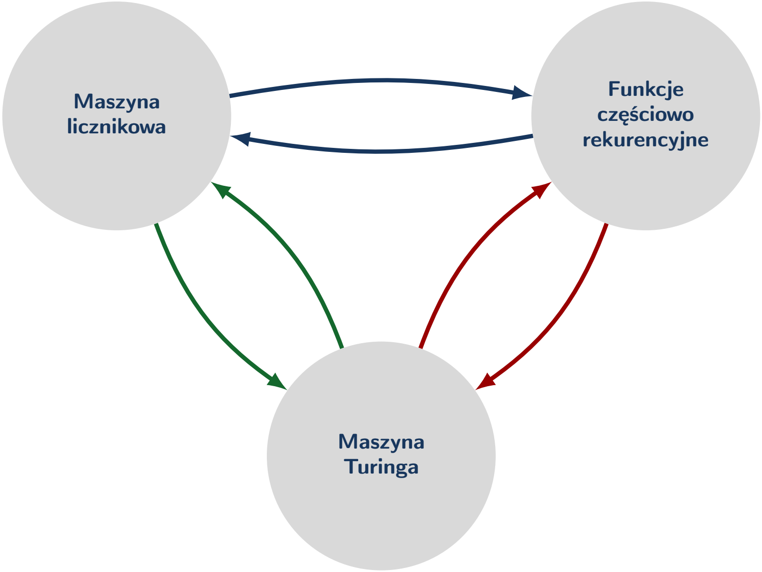


1
2
~~3~~
11
12
13
21
22
~~23~~
~~31~~
~~32~~
~~33~~
111
112
113
121
122
123
131
131
133
211
⋮

Symulacja obliczeń



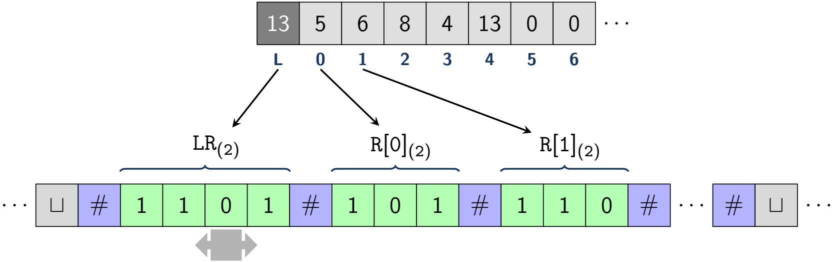
Równoważność modeli obliczeniowych



Twierdzenie

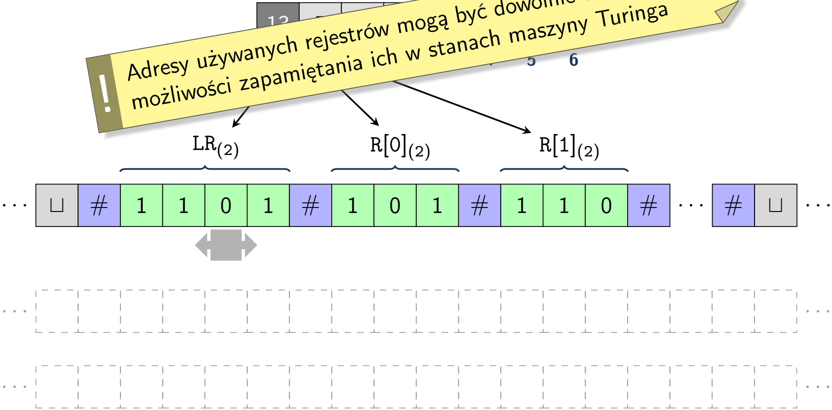
Dla dowolnego programu na maszynę licznikową istnieje maszyna Turinga symulująca jego działanie

Maszyna licznikowa ⇒ maszyna Turinga

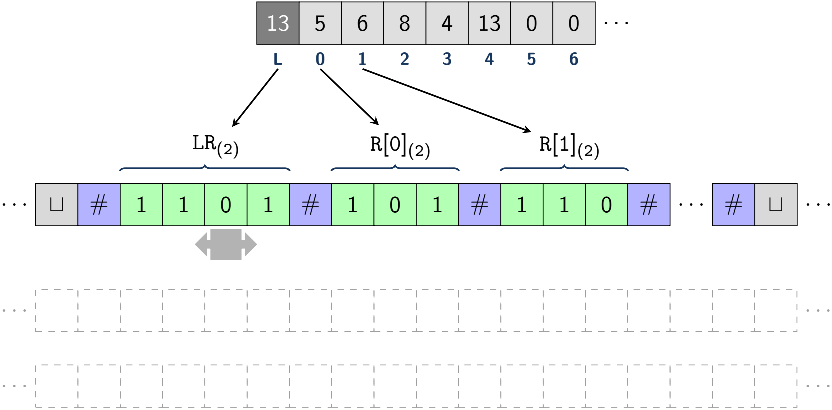


Maszyna licznikowa ⇒ maszyna Turinga

> **!** Adresy używanych rejestrów mogą być dowolnie duże – nie ma możliwości zapamiętania ich w stanach maszyny Turinga

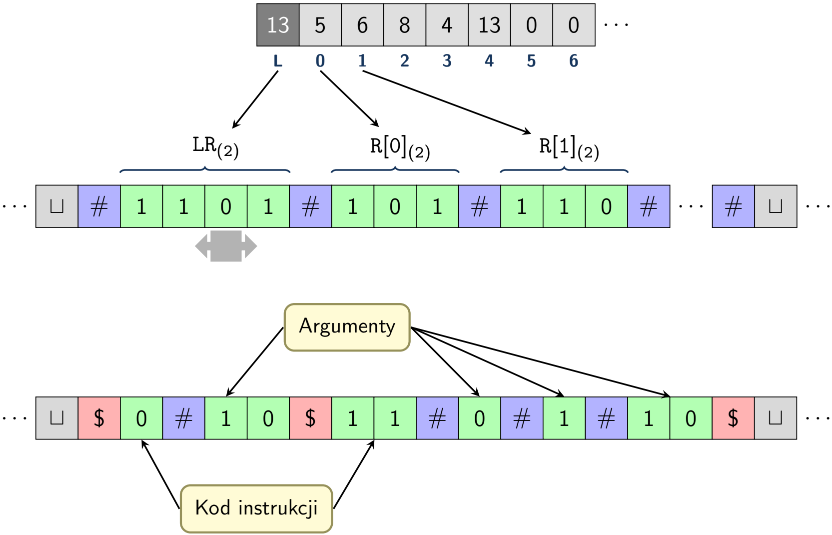


Maszyna licznikowa ⇒ maszyna Turinga



`Z(n)` `S(n)` `T(m,n)` `I(m,n,q)`

Maszyna licznikowa ⇒ maszyna Turinga



Maszyna Turinga $\Rightarrow$ maszyna licznikowa

Twierdzenie

Dla dowolnej jednotaśmowej maszyny Turinga istnieje program na maszynę licznikową symulujący jej działanie

Stos

$$\overbrace{2^{a_0} \; + \; 2^{a_0+a_1+1} \; + \; \ldots \; + \; 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n}}^{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

Stos

$$2^{x+1} \cdot \overbrace{\left(2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n} \right)}^{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

$$\|$$

$$2^{x+a_0+1} + 2^{x+a_0+a_1+2} + \ldots + 2^{x+a_0+a_1+\ldots+a_n+n+1}$$

$$\overbrace{\left(2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n} \right)}^{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

$$2^{x+1} \cdot \left(2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n} \right) + 2^x$$

$$\|$$

$$2^x + 2^{x+a_0+1} + 2^{x+a_0+a_1+2} + \ldots + 2^{x+a_0+a_1+\ldots+a_n+n+1}$$

Stos

$$\overbrace{2^{x+1} \cdot \left(2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n} \right) + 2^{x}}^{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

$$\|$$

$$\underbrace{2^{x} + 2^{x+a_0+1} + 2^{x+a_0+a_1+2} + \ldots + 2^{x+a_0+a_1+\ldots+a_n+n+1}}_{\tau(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

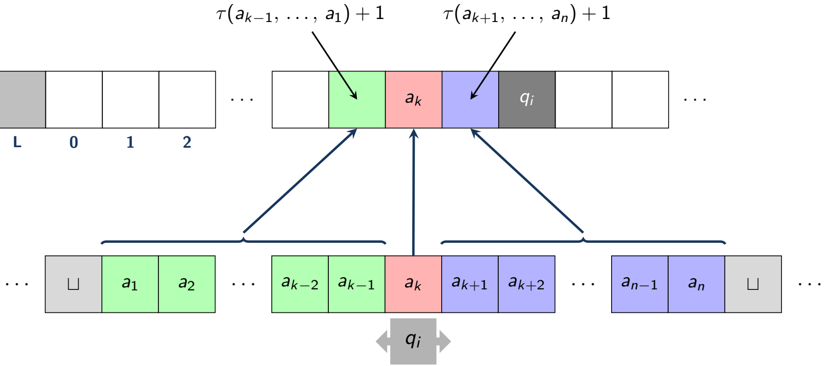
Stos

$$2^{x+1} \cdot \overbrace{\left(2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_n+n}\right)}^{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1} + 2^{x}$$

$$\|$$

$$\underbrace{2^{x} + 2^{x+a_0+1} + 2^{x+a_0+a_1+2} + \ldots + 2^{x+a_0+a_1+\ldots+a_n+n+1}}_{\tau(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)+1}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n)+1} \arrow[r, bend left, "\mathtt{push(x)}"] & \boxed{\tau(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)+1} \arrow[l, bend left, "\mathtt{pop()}"]
\end{tikzcd}$$



!

- ☞ Kodowanie zbioru stanów Q
- ☞ Kodowanie alfabetu taśmy Γ

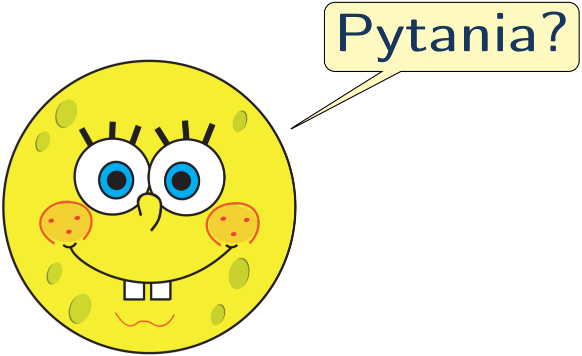
Maszyna Turinga $\Longleftrightarrow$ funkcje częściowo rekurencyjne

Twierdzenie

Każda funkcja częściowo rekurencyjna jest obliczalna na maszynie Turinga

Twierdzenie

Każda funkcja obliczalna na maszynie Turinga jest częściowo rekurencyjna


Pytania?