Zad 3.2

A - Zdarzenie polegające na wylosowaniu pika

$\#A = 13$

$\#\Omega = 52$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ - prawdopodobieństwo wylosowania pika. ($p = \frac{1}{4}$), niezmienne w każdym doświadczeniu.

Liczba doświadczeń $n = 8$, Nie mamy podstaw by sądzić że każde losowanie ma inne prawdopodobieństwo

b) $(n+1)p = (8+1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$ więc najbardziej prawdopodobne jest wylosowanie:

$\left[\frac{9}{4}\right] = 2$ gdzie $[x]$ to część całkowita liczby x

Najbardziej prawdopodobna liczba pików w 8 losowaniach to 2.

a) Wykorzystam wzór z Schematu Bernoulliego. Mamy tylko 2 możliwości: albo karta jest pikiem, albo nie jest pikiem. Będziemy rozpatrywać wylosowanie: karty pik jako sukces, innej karty jako porażka.

Prawdopodobieństwo że conajmniej 2 spośród wylosowanych kart to piki równe jest ~~prawo~~ 1-(prawdopodobieństwo wylosowania 0 pików + prawdopodobieństwo wylosowania 1 pika)

zdarzenia niezależne, nie może być jednocześnie 0 i 1 pików.

$$P(S_8 \geq 2) = 1 - P(S_8 \leq 1) = 1 - (P(S_8 = 0) + P(S_8 = 1))$$

$$P(S_8 = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$P(S_8 = 1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-1} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{8}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$P(S_8 \geq 2) = 1 - \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 + \frac{8}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7\right) = 1 - \frac{11}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{41479}{65536} \approx 0,633$$

Zad 3.1

$p = \frac{3}{4}$ – każde zdarzenie jest niezależne i ma identyczne prawdopodobieństwo

$n = 6$ – ilość doświadczeń

a) $P(S_6 = 6) = \binom{6}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(1-\frac{3}{4}\right)^{6-6} = \binom{6}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6\cdot 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096} \approx 0{,}178$

b) $P(S_6 = 1) = \binom{6}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^{6-1} = 6\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{9}{2048} \approx 0{,}00439$

Zad 3.3

najbardziej prawdopodobna liczba błędów dodatnich : $p = \frac{2}{3}$

$(n+1)p$

$(4+1)\frac{2}{3} = 5\cdot\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3} \notin N \Rightarrow k=3$

najbardziej prawdopodobna liczba błędów ujemnych : $p = \frac{1}{3}$

$(4+1)\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \notin N \Rightarrow k = \left[\frac{5}{3}\right] = 1$

$P(S_4 = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-3} = 4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3} = \frac{32}{81}$

$P(S_4 = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$

Zad 3.4

n – liczba rzutów

A – na 2 kostkach rzuconych jednocześnie wypadły parzyste liczby oczek

$\#A = 3 \cdot 3 = 9$

$\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36$

$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = p$ = prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu

$$P(S_n \geq 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1 - \frac{1}{4}\right)^n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}76$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{24}{100}$$

$$n > \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{6}{25}\right)$$

$n > 4{,}96 \Rightarrow$ najmniejsze n spełniające zadanie $n \in \mathbb{N}$ to 5

Zad 3.5

$p = \frac{1}{5}$ = prawdopodobieństwo sukcesu

$$P(S_n \geq 2) = 1 - \left(P(S_n = 0) + P(S_n = 1)\right)$$

$$P(S_n = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(1 - \frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$P(S_n = 1) = \binom{n}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$1 - \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{n}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) > \frac{1}{8}$$

$n=2 \quad \frac{4^2 + 2 \cdot 4}{5^2} = \frac{24}{25} = 0{,}96 > \frac{7}{8}$

$n=3 \quad \frac{4^3 + 3 \cdot 4^2}{5^3} = \frac{112}{125} = 0{,}896 > \frac{7}{8}$

$n=4 \quad \frac{4^4 + 4 \cdot 4^3}{5^4} = \frac{2 \cdot 4^4}{5^4} = \frac{512}{625} \approx 0{,}8192 < \frac{7}{8}$

Odp. najmniejsze n spełniające zadanie to 4.

Zad 3.7

$(n+1)\cdot p$

$p=\frac{1}{3}$

$5\leq(n+1)\frac{1}{3}\leq 6$

$5\leq(n+1)\frac{1}{3}\leq 6$

$5=(n+1)\cdot\frac{1}{3}$ $\quad (n+1)\frac{1}{3}=6$

$n+1=15$ $\quad n+1=18$

$n=14$ $\quad n=17$

$n\in\langle 14,17\rangle;\ n\in\mathbb{N}$

Zad 3.6

$n=3$

$p_1=0{,}6$

$p_2=0{,}7$

Strzały strzelają niezależnie od siebie

Prawdopodobieństwo trafienia 0, 1, 2, 3 razy strzelec nr 1.

$P(S_3=0)=\binom{3}{0}(0{,}6)^0(0{,}4)^3=(0{,}4)^3=0{,}064$

$P(S_3=1)=\binom{3}{1}(0{,}6)^1(0{,}4)^2=3(0{,}6)(0{,}4)^2=0{,}288$

$P(S_3=2)=\binom{3}{2}(0{,}6)^2(0{,}4)^1=3(0{,}6)^2(0{,}4)=0{,}432$

$P(S_3=3)=\binom{3}{3}(0{,}6)^3(0{,}4)^0=(0{,}6)^3=0{,}216$

Prawdopodobieństwo trafienia 0, 1, 2, 3 razy strzelec nr 2.

$P(T_3=0)=\binom{3}{0}(0{,}7)^0(0{,}3)^3=(0{,}3)^3=0{,}027$

$P(T_3=1)=\binom{3}{1}(0{,}7)^1(0{,}3)^2=3(0{,}7)(0{,}3)^2=0{,}189$

$P(T_3=2)=\binom{3}{2}(0{,}7)^2(0{,}3)^1=3(0{,}7)^2(0{,}3)=0{,}441$

$P(T_3=3)=\binom{3}{3}(0{,}7)^3(0{,}3)^0=(0{,}7)^3=0{,}343$

Prawdopodobieństwo że pierwsza trafi więcej niż 2 osoba.

$P(S_3>T_3)=P(S_3=1)\cdot P(T_3=0)+P(S_3=2)\cdot(P(T_3=1)+P(T_3=0))+P(S_3=3)\cdot(P(T_3=0)+P(T_3=1)+P(T_3=2))$

$P(S_3>T_3)=0{,}288\cdot 0{,}027+0{,}432\cdot(0{,}027+0{,}189)+0{,}216\cdot(0{,}027+0{,}189+0{,}441)=$

$=0{,}007776+0{,}093312+0{,}141912=\underline{0{,}243}$ a)

$P(S_3<T_3)=0{,}189\cdot 0{,}064+0{,}441\cdot(0{,}064+0{,}288)+0{,}343(0{,}064+0{,}288+0{,}432)$

$=0{,}012096+0{,}155232+0{,}268912=0{,}43624\approx\underline{0{,}436}$ b)

$P(S_3=T_3)=0{,}064\cdot 0{,}027+0{,}288\cdot 0{,}189+0{,}432\cdot 0{,}441+0{,}216\cdot 0{,}343$

$=0{,}001728+0{,}054432+0{,}190512+0{,}074088=0{,}036+0{,}2646=\boxed{0{,}3006}$ c)

Zad 3.8

Liczba prób $2n-k$ ponieważ mamy $2n$ zapałek a zostało nam k zapałek.

Oznaczmy że sukces wybór 1 pudełka $p=\frac{1}{2}$, aby opróżnić 1 pudełko potrzeba n sukcesów.

$$P(S_n = n) = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-n} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2n-k-n} =$$

$$= \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$