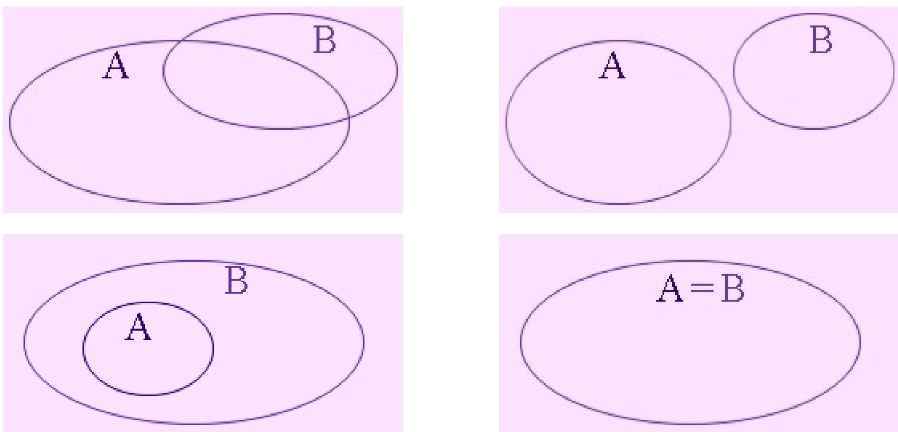
Zad. 1.1. Wiadomo, że: $P(A^c) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Ile wynosi: (a) $P(B^c)$, (b) $P(A \cap B^c)$, (c) $P(B \setminus A)$? $\quad (A^c := \Omega \setminus A)$

Relacja między 2 zbiorami:



Kilka pożytecznych własności działań na zbiorach:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c, \quad B = (B \setminus A) \cup (B \cap A),$$

$$B \cap A^c = B \setminus A = B \setminus (B \cap A).$$

Kilka pożytecznych własności prawdopodobieństwa: $P(A^c) = 1 - P(A)$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Longrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \text{ dla } \ A, B : \ A \cap B = \emptyset,$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A) \quad \Longrightarrow$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \ \text{ dla } \ A, B : \ A \subset B,$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A).$$

Rozwiązanie. $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$$\implies P(B \setminus A) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

Zatem wnioskujemy, że $B \subset A$. Dalej

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

skąd $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Wreszcie,

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Zad. 1.2. Załóżmy, że po 10-letniej pracy 40% komputerów ma problemy z płytą główną, 30% ma problemy z dyskiem, zaś 15% ma problemy zarówno z płytą jak i z dyskiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany 10-letni komputer
a) ma tylko jeden z tych problemów,
b) nie ma żadnego z tych problemów.

Rozwiązanie. Tutaj mamy do czynienia z następującym doświadczeniem losowym: ze zbioru komputerów 10-letnich losujemy jeden komputer. Zatem Ω - zbiór wszystkich komputerów 10-letnich.
Wprowadzamy następujące zdarzenia:
A - wylosowany komputer ma problemy z płytą główną,
B - wylosowany komputer ma problemy z dyskiem.
Wówczas $P(A) = 0{,}4; P(B) = 0{,}3; P(A \cap B) = 0{,}15$.
(a) Wylosowany komputer ma tylko jeden z powyższych problemów - jest to zdarzenie $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Zatem $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$, natomiast $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}55$. Ostatecznie,
$P(A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0{,}55 - 0{,}15 = 0{,}4$.
(b) Wylosowany komputer nie ma żadnego z powyższych problemów - jest to zdarzenie $(A \cup B)^c$.
Mamy: $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

Zad. 1.3. W sklepie znajduje się 20 komputerów. Wśród nich jest 15 nowych oraz 5 odnowionych, przy czym na pierwszy rzut oka są one nierozróżnialne. Sześć komputerów zostaje zakupionych do laboratorium studenckiego, wybrane są one w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród zakupionych komputerów dwa komputery są odnowione.

Prawdopodobieństwo klasyczne: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω jest skończony, a prawdopodobieństwo P jest zadane w taki sposób, że wszystkie zdarzena elementarne są równoprawdopodobne.
Wówczas dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{liczba elementów zbioru } A}{\text{liczba elementów zbioru } \Omega}.$$

Rozwiązanie. Mamy do czynienia z następującym doświadczeniem losowym: losujemy 6 komputerów z 20. Niech Ω składa się ze wszystkich różnych zestawów 6 komputerów z 20. Stwierdzamy, że zbiór Ω jest skończony, i z treści zadania wynika, że nie mamy powodów podważać tezę, iż wylosowanie każdego zestawu jest równoprawdopodobne. Zatem mamy do czynienia z prawdopodobieństwem klasycznym.

Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy zestaw zawierający 4 komputery nowe i 2 odnowione. Mamy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

czyli pozostaje policzyć liczby elementów zbiorów Ω oraz A. Ze wzorów kombinatorycznych

$$\#\Omega = \binom{20}{6}, \qquad \#A = \binom{15}{4}\binom{5}{2}.$$

Ostatecznie,

$$P(A) = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2}}{\binom{20}{6}} = \frac{15! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 14!}{4! \cdot 11! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 20!}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 5}{19 \cdot 17 \cdot 4}$$

$$= \frac{455}{1292} \approx 0{,}352.$$

Zad. 1.4. Rozdajemy talię 52 kart na czterech graczy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
a) rozdający otrzyma cały kolor?
b) rozdający będzie miał co najmniej jednego asa?

Rozwiązanie. Mamy następujące doświadczenie losowe: losujemy 52 karty równo pomiędzy 4 graczami. Każde rozdanie talii kart to zdarzenie elementarne. Niech Ω składa się ze wszystkich różnych zdarzeń elementarnych, zbiór Ω jest skończony. Oprócz tego nie mamy powodów podważać tezę, iż wszystkie zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne. Zatem ponownie mamy do czynienia z prawdopodobieństwem klasycznym.
(a) Oznaczmy A - zdarzenie polegające na tym, że rozdający otrzyma cały kolor. Mamy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Ze wzorów kombinatorycznych

$$\#\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}, \ \#A = 4\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}.$$

W ostatnim wzorze 4 bierze się z tego, że mamy 4 kolory w talii. Zatem

$$P(A) = \frac{4\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{4}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot 13! \cdot 39!}{52!} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-12}.$$

(b) Oznaczmy B - zdarzenie polegające na tym, że rozdający będzie miał co najmniej jednego asa. Łatwiej nam będzie liczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego B^c - rozdający nie będzie miał żadnego asa. Analogicznie jak wyżej,

$$\#\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}, \#B^c = \binom{48}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13},$$

czyli

$$P(B^c) = \frac{\binom{48}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Ostatecznie,

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = 1 - \frac{48! \cdot 13! \cdot 39!}{13! \cdot 35! \cdot 52!} = 1 - \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$$

$$= 1 - \frac{9 \cdot 37 \cdot 19}{17 \cdot 25 \cdot 49} = 1 - \frac{6327}{20825} \approx 0{,}696.$$

Zad. 1.5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród pięciu losowo wybranych osób nie ma dwóch spod tego samego znaku zodiaku?

Rozwiązanie. Wypisanie znaków zodiaku 5 losowo wybranych osób jest równoważne do losowania 5 znaków zodiaku z 12 i przypisywania ich do poszczególnych osób, przy czym znaki te mogą powtarzać się. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich takich zestawów 5 znaków zodiaku, Ω jest zbiorem skończonym. Nie mamy powodów podważać tezę, iż wylosowanie każdego zestawu jest równoprawdopodobne.
Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że w wylosowanym zestawie nie ma znaków powtarzających się. Stosując prawdopodobieństwo klasyczne, mamy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Ale

$$\#\Omega = 12^5, \qquad \#A = \frac{12!}{(12-5)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8,$$

skąd

$$P(A) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{55}{144} \approx 0{,}382.$$

Zad. 1.6. Dziesięciu podróżnych, w tym czterech mężczyzn, wsiada losowo do ośmiu wagonów (z numerami 1-8). Jakie jest prawdopodobieństwo, że mężczyźni wsiądą do różnych wagonów o numerach parzystych, zaś kobiety do wagonów o numerach nieparzystych (niekoniecznie różnych)?

Rozwiązanie. Mamy do czynienia z następującym doświadczeniem losowym: 10 razy losujemy jeden z ośmiu wagonów (numery mogą powtarzać się), przypisując je do ustalonych osób. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich takich zestawów 8 numerów wagonów, Ω jest zbiorem skończonym. Nie mamy powodów podważać tezę, iż wylosowanie każdego zestawu jest równoprawdopodobne.
Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że mężczyźni wsiądą do różnych wagonów o parzystych numerach, zaś kobiety do wagonów o numerach nieparzystych (niekoniecznie różnych). Stosując prawdopodobieństwo klasyczne, mamy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Dalej

$$\#\Omega = 8^{10}, \qquad \#A = 4! \cdot 4^6.$$

Ostatni wzór bierze się z tego, że 4 mężczyzn możemy rozlokować w 4 różnych wagonach parzystych na 4! sposobów, lecz 6 kobiet możemy rozlokować w 4 wagonach nieparzystych, niekoniecznie różnych, na 4^6 sposobów. Ostatecznie,

$$P(A) = \frac{4! \cdot 4^6}{8^{10}} = \frac{3}{2^9 \cdot 4^3} = \frac{3}{32768} \approx 0{,}00009.$$

Zad. 1.7. Grupa $2n$ chłopców i $2n$ dziewcząt podzieliła się losowo na 2 równoliczne grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdej z tych grup jest tyle samo chłopców co dziewcząt?

Rozwiązanie. Mamy następujące doświadczenie losowe: dzielimy losowo $4n$ osób na 2 równoliczne grupy. Jest oczywiste, że wystarczy wylosować $2n$ osób z $4n$ osób, i przypisać je do jednej z grup, w ten sposób podział na grupy będzie zakończony. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich takich różnych podziałów, Ω jest zbiorem skończonym. Nie mamy powodów podważać tezę, iż każdy podział na grupy jest równoprawdopodobny.

Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że w każdej z 2 grup jest tyle samo chłopców co dziewcząt. Stosując prawdopodobieństwo klasyczne, mamy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Ale

$$\#\Omega = \binom{4n}{2n}, \qquad \#A = \binom{2n}{n}\binom{2n}{n}.$$

Ostatni wzór bierze się z tego, że z $2n$ chłopców mamy wybrać n, oraz z $2n$ dziewcząt też mamy wybrać n.

Ostatecznie,

$$P(A) = \frac{\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}}{\binom{4n}{2n}} = \frac{(2n)! \cdot (2n)! \cdot (2n)! \cdot (2n)!}{n! \cdot n! \cdot n! \cdot n! \cdot (4n)!} = \frac{((2n)!)^4}{(n!)^4 \cdot (4n)!}.$$

Zad. 1.8. Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Wiadomo, iż prawdopodobieństwo, że w delegacji znajdą się tylko kobiety, wynosi 0,1. Ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie?

Rozwiązanie. Załóżmy, że kobiet w grupie jest n, mężczyzn - $2n$. Mamy następujące doświadczenie losowe: losujemy 2 osoby z grupy $3n$ osób. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich różnych par osób, Ω jest zbiorem skończonym. Nie mamy powodów podważać tezę, iż każdy wybór pary osób jest równoprawdopodobny.
Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że w delegacji znajdą się tylko kobiety. Wiemy, że $P(A) = 0{,}1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne, otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Niech mamy w grupie n kobiet oraz $2n$ mężczyzn. Wówczas

$$\#\Omega = \binom{3n}{2}, \qquad \#A = \binom{n}{2},$$

skąd

$$P(A) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}} = \frac{n(n-1)\cdot 2}{2\cdot 3n(3n-1)} = \frac{n-1}{9n-3}.$$

Przyrównując $P(A)$ do 0,1, otrzymujemy

$$\frac{n-1}{9n-3} = 0{,}1 \iff 0{,}1n = 0{,}7 \iff n = 7.$$

Zatem w grupie mamy 7 kobiet oraz 14 mężczyzn.