Wprowadzenie teoretyczne:
Przypomnij pojęcie funkcji pierwotnie rekurencyjnej oraz definicję funkcji Ackermanna.

Odpowiedź:
Funkcja pierwotnie rekurencyjna, to funkcja którą da się zbudować z funkcji prostych za pomocą ich składania oraz operacji podstawiania i rekursji.

Funkcja Ackermanna A: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jest następująco:

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{dla } x = 0 \\ A(x-1,1) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y = 0 \\ A(x-1, A(x,y-1)) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y > 0 \end{cases}$$

Zadanie 1

Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- **a.** $f(x,y) = x \cdot y$,
- **b.** $f(x,y) = x^y$ (*przyjmujemy, że* $0^0=1$),
- **c.** $f(x) = x!$
- **d.** $sg(x) = \begin{cases} 1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **e.** $x \dot{-} 1 = \begin{cases} x-1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **f.** $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & dla\ x \geq y \\ 0 & dla\ x < y \end{cases}$
- **g.** $|x - y|$
- **h.** $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x > 0 \\ 1 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **i.** max(x,y)

Zadanie 2

Jakie funkcje otrzymamy za pomocą schematu rekursji podstawiając za *g* oraz *h*:

- **a.** $f(x)=x,\ g(x,y,z)=z^x$,
- **b.** $f(x)=x,\ g(x,y,z)=x^z$,

Zadanie 3

Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że:

- **a.** $A(x+1,y) > y+1$,
- **b.** $A(x,y+1) > A(x,y)$,
- **c.** $A(x+1,y) > A(x,y)$,
- **d.** dla ustalonej wartości $x\in\mathbb{N}$ funkcja $A_x(y)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Zadania domowe:

A. Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

a. $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{x_{n+1}} g(x_1,\ldots,x_n,i)$

b. *lh(x) – liczba dzielników x, które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy lh(0)=0)*

B. Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że dla ustalonej wartości $y\in\mathbb{N}$ funkcja $A_y(x)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Wprowadzenie teoretyczne:
Przypomnij pojęcie funkcji pierwotnie rekurencyjnej oraz definicję funkcji Ackermanna.

Odpowiedź:
Funkcja pierwotnie rekurencyjna, to funkcja którą da się zbudować z funkcji prostych za pomocą ich składania oraz operacji podstawiania i rekursji.

Funkcja Ackermanna A: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jest następująco:

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{dla } x = 0 \\ A(x-1,1) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y = 0 \\ A(x-1, A(x,y-1)) & \text{dla } x > 0 \text{ oraz } y > 0 \end{cases}$$

Zadanie 1

Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- **a.** $f(x,y) = x \cdot y$,
- **b.** $f(x,y) = x^y$ *(przyjmujemy, że* $0^0=1$*),*
- **c.** $f(x) = x!$
- **d.** $sg(x)= \begin{cases} 1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **e.** $x \dot{-} 1 = \begin{cases} x-1 & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- **f.** $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & dla\ x \geq y \\ 0 & dla\ x < y \end{cases}$
- **g.** $|x - y|$

Zadanie 2

Jakie funkcje otrzymamy za pomocą schematu rekursji podstawiając za *g* oraz *h*:

- **a.** $f(x)=x,\ g(x,y,z)=z^x$,
- **b.** $f(x)=x,\ g(x,y,z)=x^z$,

Zadanie 3

Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że:

- **a.** $A(x+1,y) > y+1$,
- **b.** $A(x,y+1) > A(x,y)$,
- **c.** $A(x+1,y) > A(x,y)$,
- **d.** dla ustalonej wartości $x\in \mathbb{N}$ funkcja $A_x(y)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.

Zadania domowe:

A. Wykaż, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- a. $\overline{sg}(x)= \begin{cases} 0 & dla\ x > 0 \\ 1 & dla\ x = 0 \end{cases}$
- *b.* $max(x,y)$
- *c.* $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{x_{n+1}} g(x_1,\ldots,x_n,i)$
- *d.* *lh(x) – liczba dzielników x, które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy lh(0)=0)*

B. Niech $A(x,y)$ oznacza funkcję Ackermana. Uzasadnij, że dla ustalonej wartości $y\in \mathbb{N}$ funkcja $A_y(x)=A(x,y)$ jest pierwotnie rekurencyjna.