Zadania probabilistyczne z egzaminu: Wstęp do Statystycznej Analizy Danych, styczeń 2019

Odpowiedzi.

1a) 0.3
1b) 0.6
1c) 0.1
1d) 0.6
1e) NIE

2a) 5/12
2b) 1/6
2c) 1/18

3a) 0.037
3b) 25/37
3c) 475/963

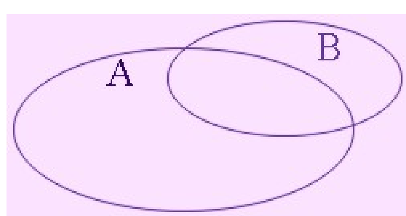
4a) 4/5
4b) 2/75
4c) 0.0625
4d) $\sqrt[4]{0.5}$

5a) 5/16
5b) 1/64
5c) 11/32
5d) 3
5e) 1.5

6a) 2560
6b) 25600
6c) 10
6d) 25/64
6e) 0.6462
6f) 2873.6

10a) $F_Y(y) = 1 - y^{-3/2}$ dla $y \geqslant 1$ oraz $F_Y(y) = 0$ dla $y < 1$
10b) $f_Y(y) = \frac{3}{2}y^{-5/2}$ dla $y \geqslant 1$ oraz $f_Y(y) = 0$ dla $y < 1$
10c) 3

Rozwiązania.



1a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \setminus B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$;
1b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$;
1c) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) = 0.6 - 0.5 = 0.1$;
1d) $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$;
1e) Sprawdzamy, czy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Mamy z lewej strony 0.3, a z prawej $0.5 \cdot 0.4 = 0.2$. Więc zdarzenia A i B nie są niezależne.

2. Niech $\Omega = \{(i,j),\ 1 \leqslant i,j \leqslant 6\}$. Wówczas moc zbioru Ω wynosi 36. Niech A - zdarzenie, polegające na tym, że liczba oczek na czarnej kości będzie większa niż na białej, B - zdarzenie, polegające na tym, że na obu kościach mamy tyle samo oczek, C - zdarzenie polegające na tym, że suma oczek na obu kościach wynosi 11.

2b) Zdarzenie B składa się z 6 zdarzeń elementarnych: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$, więc $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2a) Zdarzenie: liczba oczek na kościach nie jest równa - jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia B i jest sumą dwóch rozłącznych równoprawdopodobnych zdarzeń: liczba oczek na czarnej kości będzie większa niż na białej (A) oraz liczba oczek na białej kości będzie większa niż na czarnej. Zatem $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}(1-\mathbb{P}(B)) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{6}) = \frac{5}{12}$.

2c) Ponieważ 11 oczek możemy otrzymać na dwa sposoby: $(5,6)$ lub $(6,5)$, to $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

3. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
H_1 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce A,
H_2 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce B,
H_3 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce C,
D - wylosowana żarówka jest brakiem, D^c - wylosowana żarówka nie jest brakiem.
Mamy $P(H_1) = 0.5; P(H_2) = 0.3; P(H_3) = 0.2$. Oprócz tego wiadomo, że $P(D|H_1) = 0.05;\ P(D|H_2) = 0.02;\ P(D|H_3) = 0.03$. Zbiory H_1, H_2, H_3 spełniają warunki do stosowania wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i wzoru Bayesa.
(a) $P(D) = P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3) = 0.05\cdot 0.5+0.02\cdot 0.3+0.03\cdot 0.2 = 0.037$.
(b) $P(H_1|D) = \frac{P(D|H_1)P(H_1)}{P(D)} = \frac{0.05\cdot 0.5}{0.037} = \frac{25}{37}$.
(c) $P(H_1|D^c) = \frac{P(D^c|H_1)P(H_1)}{P(D^c)} = \frac{(1-0.05)\cdot 0.5}{1-0.037} = \frac{475}{963}$.

4a) $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = \frac{4}{5}x^5|_0^1 = \frac{4}{5}$.

4b) $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{6}x^6|_0^1 - \frac{16}{25} = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}$.

4c) $\mathbb{P}(X \leqslant 0.5) = \int_0^{0.5} 4x^3 dx = x^4|_0^{0.5} = 0.5^4 = 0.0625$.

4d) Dla rozkładu ciągłego medianę Me można określić za pomocą wzoru: $\mathbb{P}(X \leqslant Me) = 0.5$. Więc $0.5 = \int_0^{Me} 4x^3 dx = x^4|_0^{Me} = Me^4 \implies Me = \sqrt[4]{0.5}$.

5a) Ze schematu Bernoulliego (wyrzucenie orła - sukces, $p = \frac{1}{2}$) otrzymujemy $\mathbb{P}(S_6 = 3) = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^{6-3} = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$.

5b) Przy 6 rzutach symetryczną monetą zbiór Ω składa się z $2^6 = 64$ zdarzeń elementarnych, wynik ‘OOORRR‘ to jeden z nich. Więc, $\mathbb{P}(‘OOORRR‘) = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

5c) Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że w 6 rzutach symetryczną monetą liczba orłów jest mniejsza od liczby reszek. Rozwiązanie jest podobne do 2a). Prawdopodobieństwo zdarzenia A to połowa prawdopodobieństwa zdarzenia, że w 6 rzutach otrzymamy różne liczby orłów i rzeszek, z kolei to ostatnie zdarzenie jest przeciwne do zdarzenia $\{S_6 = 3\}$ (otrzymanie 3 orłów). Zatem $\mathbb{P}(A) = \frac{1-\mathbb{P}(S_6=3)}{2} = \frac{1-5/16}{2} = \frac{11}{32}$.

5d) Niech X będzie liczbą orłów w 6 rzutach symetryczną monetą. Rozkład liczby orłów opisuje się następującą tabelą:

X	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=x)$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Zatem $\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{6}{64} + 2 \cdot \frac{15}{64} + 3 \cdot \frac{20}{64} + 4 \cdot \frac{15}{64} + 5 \cdot \frac{6}{64} + 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{192}{64} = 3.$

5e) $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{64} + 1^2 \cdot \frac{6}{64} + 2^2 \cdot \frac{15}{64} + 3^2 \cdot \frac{20}{64} + 4^2 \cdot \frac{15}{64} + 5^2 \cdot \frac{6}{64} + 6^2 \cdot \frac{1}{64} - 3^2 = \frac{672}{64} - 9 = 1.5.$

6a) $\mathbb{E}S = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_{256}) = 256 \cdot \mathbb{E}X_1 = 256 \cdot 10 = 2560.$

6b) $\mathrm{Var}S = \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{256}) = 256 \cdot \mathrm{Var}X_1 = 256 \cdot 100 = 25600$

(skorzystaliśmy tu z niezależności zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_{256}$).

6c) $\mathbb{E}\bar{X} = \frac{1}{256}\mathbb{E}S = \frac{1}{256} \cdot 256 \cdot \mathbb{E}X_1 = 10.$

6d) $\mathrm{Var}\bar{X} = \frac{1}{256^2}\mathrm{Var}S = \frac{256 \cdot \mathrm{Var}X_1}{256^2} = \frac{100}{256} = \frac{25}{64}.$

6e) Korzystając z CTG, $\mathbb{P}(S > 2500) = \mathbb{P}\left(\frac{S-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}} > \frac{2500-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}} > -\frac{60}{160}\right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}} \leqslant -0.375\right) \approx 1 - \Phi(-0.375) = 1 - (1 - \Phi(0.375)) = \Phi(0.375),$

gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Z tablicy *Wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego* odczytujemy: $\Phi(0.375) = 0.6462$.

6f) Ponownie korzystając z CTG, $\mathbb{P}(S \leqslant a) = \mathbb{P}\left(\frac{S-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}} \leqslant \frac{a-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S-256\cdot 10}{\sqrt{256\cdot 100}} \leqslant \frac{a-2560}{160}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{a-2560}{160}\right) \approx 0.975.$

Używamy teraz tablicy *Wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego* w odwrotny sposób: mamy wartość dystrybuanty, tzn. 0.975, i odczytujemy, w którym punkcie ta wartość jest przyjmowana; ten punkt to 1.96. Czyli otrzymujemy równanie dla znalezienia wartości a:

$\frac{a-2560}{160} = 1.96 \iff a = 2560 + 1.96 \cdot 160 = 2873.6.$

10a) Rozważmy dystrybuantę zmiennej losowej Y: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(e^{2X} \leqslant y)$. Jak jest zaznaczone w Uwadze do tego zadania, $e^{2X} \geqslant 1$, dlatego dla $y < 1$ mamy $F_Y(y) = 0$. A dla $y \geqslant 1$ zachodzi

$F_Y(y) = \mathbb{P}(2X \leqslant \ln y) = \mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2}\ln y) = F_X(\frac{1}{2}\ln y) = 1 - e^{-\frac{3}{2}\ln y} = 1 - y^{-3/2}.$

10b) Obliczamy gęstość zmiennej losowej Y poprzez różniczkowanie dystrybuanty:

$f_Y(y) = (F_Y(y))' = \frac{3}{2}y^{-5/2}$ dla $y \geqslant 1$ oraz $f_Y(y) = 0$ dla $y < 1$.

10c) $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{3}{2}y^{-5/2} dy = \frac{3}{2}\int_1^{\infty} y^{-3/2} dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^{-1/2}|_1^{\infty}}{-1/2} = -3 \cdot (0 - 1) = 3.$