Zadanie 5.2

Ciąg $X_1, X_2 \dots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie geometrycznym.

Należy znaleźć granicę prawie wszędzie, więc będziemy korzystać z MPWL dla ciągu:

$e^{-X_1}, e^{-X_2}, \dots$

Sprawdźmy teraz warunki twierdzenia:

• Skoro $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnym o tym samym rozkładzie, to takim będzie też ciąg: $e^{-X_1}, e^{-X_2}, \dots$ Ponieważ ciąg niezależnych zmiennych losowych jest też ciągiem parami niezależnych zmiennych losowych.

• Sprawdźmy czy $E(|e^{-X_1}|) < \infty$

Zmienna losowa X_1 ma rozkład geometryczny o parametrze p więc. $\mathbb{P}(X_1=k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$

Zatem zgodnie z wzorem otrzymujemy wartość

$$E|e^{-X_1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |e^{-k}| p(1-p)^{k-1}$$

$$|e^{-k}| = |(\tfrac{1}{e})^k| = (\tfrac{1}{e})^k$$

Stąd $E|e^{-X_1}| = p\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e})^n (1-p)^{n-1} = p \cdot \frac{1}{e} \cdot \sum_{n} (\frac{1}{e})^{n-1}(1-p)^{n-1}$

Wykorzystamy wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{dla } |q|<1.$$

Stosując powyższy wzór dla $a=1$, $q=\left(\frac{1}{e}(1-p)\right)$ <1, <1 $\Rightarrow |q|<1$

$$E|e^{-X_1}| = \frac{p}{e} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{e})(1-p)} = \frac{p}{e-(1-p)} = \frac{p}{e+p-1} < \infty$$

$\Rightarrow$ Warunki MPWL są spełnione. Więc, gdy $n \to \infty$

$$\frac{e^{-X_1} + e^{-X_2} + \dots e^{-X_n}}{n} \xrightarrow{p.n} E(e^{-X_1})$$

Zauważmy też że $|e^{-X_1}| = e^{-X}$

Więc $E(e^{-X_1}) = E(|e^{-X_1}|) = \underline{\underline{\frac{p}{e+p-1}}}$

Zad 5.1

Musimy obliczyć granice prawie wszędzie więc wykorzystamy MPWL

$$\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

1. Warunek: jeśli zmienne losowe są niezależne to też są parami niezależne więc oraz ich kwadraty są niezależne.

2. $E(X_1) = \frac{1}{2} < \infty$

$E(X_i^2) = \operatorname{Var} X + (EX)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \infty$ ✓

Obliczmy teraz granicę.

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i} \xrightarrow{p.n} \frac{E(X_1^2)}{E(X_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Zad 5.3

Musimy obliczyć granicę prawie wszędzie więc wykorzystamy MPWL

$X_i \approx U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)^2}{\sum_{i=1}^{n}\cos(X_i)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(X_i)}$$

1. Warunek: zmienne losowe są niezależne, więc są też parami niezależne.

2. $E(X_i+1)^2 = = EX^2 + 2EX + 1 = \frac{\pi^2}{12} + 2\cdot 0 + 1 = \frac{\pi^2}{12}+1 < \infty$

$EX^2 = \operatorname{Var} X + (EX)^2 = \frac{(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$

$E(\cos X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\cdot g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2}{\pi} < \infty$

$g(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\pi}$

$$\frac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(X_i)} \xrightarrow{p.n} \frac{E(X_1+1)^2}{E\cos(X_1)} = \frac{\frac{\pi^2}{12}+1}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}$$

Zad 5.4.

Musimy znaleźć granicę wektory rozkładu wię wykorzystamy CTG.

Zmienne są niezależne i mają jednakowy rozkład

$EX = \lambda < \infty$

$VarX = \lambda < \infty \quad (\in (0, +\infty))$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$$

Zad 5.5 Skorzystam z wzoru z CTG, $E(X^4) = 3$

$X \sim N(0,1)$

$E(X^2) = VarX + (EX)^2$

$E(X^2) = 1^2 + 0 = 1 < \infty$

$$Var(X^2) = E(X^4) - (EX^2)^2 = 3 - 1 = 2 \in (0, \infty)$$

Możemy więc stosować wzór

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - n \cdot E(X_1^2)}{\sqrt{n \cdot Var(X_1^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot 1}{\sqrt{n \cdot 2}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$$

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2 - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot X \sim N(0, \tfrac{1}{2})$$