Zad. 5.6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{256}$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną 10 oraz wariancją 100.
(a) Oblicz w przybliżeniu $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} > 2500)$.
(b) Znajdź liczbę a taką, że $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} \leqslant a) \approx 0{,}975$.

Rozwiązanie. Gdy należy liczyć przybliżone prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia, w którym występują sumy niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, stosujemy Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG).

Z CTG w szczególności wynika, że dla dostatecznie dużych wartości n zachodzi

$$\mathbb{P}\Big(a \leqslant \frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n \cdot \mathbf{Var}(X_1)}} \leqslant b\Big) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $a < b$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n \cdot \mathbf{Var}(X_1)}} \leqslant b\Big) \approx \Phi(b) \quad \forall b,$$

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n \cdot \mathbf{Var}(X_1)}} \geqslant a\Big) \approx 1 - \Phi(a) \quad \forall a.$$

Mamy: $n = 256$, $\mathbb{E}(X_1) = 10$, $\mathbf{Var}(X_1) = 100$. Zatem warunki CTG są spełnione, więc

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} > 2500) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}} > \frac{2500 - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}} > -\frac{60}{160}\Big) \\ &\approx 1 - \Phi(-0{,}375) = 1 - (1 - \Phi(0{,}375)) = \Phi(0{,}375). \end{aligned}$$

Z tablicy *Wartości dystrybuanty rozkładu normalnego* odczytujemy: $\Phi(0{,}37) = 0{,}6443, \Phi(0{,}38) = 0{,}648$ (nie ma tam wartości $\Phi(0{,}375)$). Zatem jako odpowiedź w a) podajemy albo 0,648 (liczbę 0,375 zaokrągliliśmy do dwóch miejsc po przecinku), albo 0,6462 (liczba ta leży po środku między 0,6443 a 0,648). Bardziej precyzyjne obliczenie daje właśnie wynik 0,6462.

b) Ponownie na mocy CTG otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} \leqslant a) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}} \leqslant \frac{a - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{256} - 256 \cdot 10}{\sqrt{256 \cdot 100}} \leqslant \frac{a - 2560}{160}\Big) \\ &\approx \Phi\Big(\frac{a - 2560}{160}\Big) \approx 0{,}975. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz z tablicy *Wartości dystrybuanty rozkładu normalnego* w odwrotny sposób: mamy wartość dystrybuanty i odczytujemy, w którym punkcie ta wartość jest przyjmowana; ten punkt to 1,96. Czyli otrzymujemy równanie dla znalezienia wartości a:

$$\frac{a - 2560}{160} = 1{,}96 \iff a = 2560 + 1{,}96 \cdot 160 = 2873{,}6.$$

Zad. 5.7. Wydział Matematyki chciałby przyjąć na studia nie więcej niż 130 kandydatów. Zdających jest 400 osób, a prawdopodobieństwo zdania egzaminu wstępnego wynosi 0,3. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopoty z nadmiarem studentów?

Rozwiązanie. Przy rozwiązywaniu zadań często korzystamy ze szczególnego przypadku CTG, który ma nazwę *Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a.*

Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a jest niczym innym jak CTG dla przypadku, gdy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają ten sam rozkład zero-jedynkowy, czyli $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1-p, \mathbb{P}(X_i = 1) = p$ ($p \in (0,1)$ nazywamy prawdopodobieństwem "sukcesu"). Jak wiadomo, $\mathbb{E}(X_1) = p$, $\mathbf{Var}(X_1) = \sqrt{p(1-p)}$. Wówczas, jeśli oznaczymy $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, to S_n jest zmienna losową o rozkładzie dwumianowym $b(n, p)$. Zapisując CTG dla tej sytuacji mamy Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a:

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1), \quad n \to \infty,$$

skąd otrzymujemy często stosowane w zadaniach wzory: dla dużych wartości n

$$\mathbb{P}\Big(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\Big) \approx \Phi(b) - \Phi(a)\ \forall a < b, \quad (1)$$

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\Big) \approx \Phi(b) \quad \forall b, \qquad (2)$$

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geqslant a\Big) \approx 1 - \Phi(a) \quad \forall a. \qquad (3)$$

Wróćmy do zadania. Mamy 400 osób ($n = 400$), każda osoba albo zdaje egzamin z prawdopodobieństwem p ("sukces"), albo nie ("porażka"). Przez X_i oznaczmy zmienną losową mówiaca o tym, czy i-ta osoba zdała egzamin ($X_i = 1$), czy nie ($X_i = 0$). Wydział będzie miał kłopoty z nadmiarem studentów, gdy liczba osób, którzy zdali egzamin, przekroczy 130 ($S_{400} > 130$). Mamy policzyć (w przybliżeniu) prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. Otóż korzystając z (3)

$$\mathbb{P}(S_{400} > 130) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_{400} - 400 \cdot 0{,}3}{\sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3)}} > \frac{130 - 400 \cdot 0{,}3}{\sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3)}}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\frac{S_{400} - 400 \cdot 0{,}3}{\sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3)}} > \frac{130 - 120}{20\sqrt{0{,}21}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_{400} - 400 \cdot 0{,}3}{\sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3)}} > 1{,}09\Big)$$

$$\approx 1 - \Phi(1{,}09) = 1 - 0{,}8621 = 0{,}1389.$$

Zad. 5.8. Rzucamy 10000 razy symetryczną monetą. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że liczba uzyskanych orłów znajdzie się między 4900 a 5100?

Rozwiązanie. Stosujemy Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a. Mamy: $n = 10000$, wyrzucenie orła nazwiemy "sukcesem", $p = 0{,}5$; S_{10000} - liczba orłów w 10000 rzutach. Zatem korzystając z (1) uzyskujemy

$$\mathbb{P}(4900 \leqslant S_{10000} \leqslant 5100)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\frac{4900 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant \frac{S_{10000} - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant \frac{5100 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\frac{-100}{\sqrt{2500}} \leqslant \frac{S_{10000} - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant \frac{100}{\sqrt{2500}}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(-2 \leqslant \frac{S_{10000} - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant 2\Big) \approx \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1$$

$$= 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 1{,}9544 - 1 = 0{,}9544.$$

Zad. 5.9. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że przy n rzutach symetryczną monetą wartość bezwzględna różnicy między liczbą reszek i orłów przekroczy $0{,}1n$? Rozwiązać zadanie dla a) $n = 100$, b) $n = 1000$.

Rozwiązanie. Stosujemy Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a. Niech wyrzucenie reszki będzie "sukcesem", a orła "porażką", $p = 0{,}5$. Oznaczmy przez S_n liczbę reszek w n rzutach. Wówczas liczba orłów będzie wynosiła $n - S_n$. Zapiszmy zdarzenie, że wartość bezwzględna różnicy między liczbą reszek i orłów przekroczy $0{,}1n$: $|S_n - (n - S_n)| > 0{,}1n$. Należy znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo tego zdarzenia.
Korzystając z (1) uzyskujemy

$$\mathbb{P}\Big(|2S_n - n| > 0{,}1n\Big) = \mathbb{P}\Big(|S_n - \frac{n}{2}| > 0{,}05n\Big)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big(|S_n - \frac{n}{2}| \leqslant 0{,}05n\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(- 0{,}05n \leqslant S_n - \frac{n}{2} \leqslant 0{,}05n\Big)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big(-\frac{0{,}05n}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant \frac{0{,}05n}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}}\Big)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big(- 0{,}1\sqrt{n} \leqslant \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)}} \leqslant 0{,}1\sqrt{n}\Big)$$

$$\approx 1 - (\Phi(0{,}1\sqrt{n}) - \Phi(-0{,}1\sqrt{n})) = 2 - 2\Phi(0{,}1\sqrt{n}).$$

a) Dla $n = 100$ otrzymujemy:
$\Phi(0{,}1\sqrt{100}) = \Phi(1) = 0{,}8413$, więc
$\mathbb{P}\left(|2S_{100} - 100| > 10\right) \approx 2 - 2 \cdot 0{,}8413 = 2 - 1{,}6826$
$= 0{,}3174$.

b) Dla $n = 1000$ otrzymujemy:
$\Phi(0{,}1\sqrt{1000}) = \Phi(3{,}16) = 0{,}9992$, więc
$\mathbb{P}\left(|2S_{1000} - 1000| > 100\right) \approx 2 - 2 \cdot 0{,}9992 = 2 - 1{,}9984$
$= 0{,}0016$.