

5. Twierdzenia graniczne

Zad. 5.1 Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu $\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}$, $n \geq 1$.

Zad. 5.2 Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie geometrycznym z parametrem p , $0 < p < 1$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\frac{\pi}{2} X_k)$, $n \geq 1$.

Zad. 5.3 Niech X_1, X_2, \dots oraz Y_1, Y_2, \dots będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładach odpowiednio wykładniczym $E(2)$ i dyskretnym zadany następująco: $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1/3$, $\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1/6$, $i \geq 1$. Wiadomo, że dla każdego $i \geq 1$ zmienne losowe X_i, Y_i są niezależne. Wyznacz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}, \quad n \geq 1.$$

Zad. 5.4 Niech Y_1, Y_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z poprzedniego zadania. Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n + \frac{n}{3}}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

Zad. 5.5 Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

Zad. 5.6 Niech X_1, X_2, \dots, X_{256} to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną 10 oraz wariancją 100.

(a) Oblicz w przybliżeniu $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{256} > 2500)$.

(b) Znajdź liczbę a taką, że $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{256} \leq a) \approx 0,975$.

Zad. 5.7 Wydział Matematyki chciałby przyjąć na studia nie więcej niż 130 kandydatów. Zdających jest 400 osób, a prawdopodobieństwo zdania egzaminu wstępnego wynosi 0,3. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopoty z nadmiarem studentów?

Zad. 5.8 Rzucamy 10000 razy symetryczną monetą. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że liczba uzyskanych orłów znajdzie się między 4900 a 5100?

Zad. 5.9 Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że przy n rzutach symetryczną monetą wartość bezwzględna różnicy między liczbą reszek i orłów przekroczy $0,1n$? Rozwiązać zadanie dla a) $n = 100$, b) $n = 1000$.

5. Twierdzenia graniczne - zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zad. 5.1 Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie wykładniczym $E(2)$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu $\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{X_1 + \dots + X_n}$, $n \geq 1$.

Zad. 5.2 Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie geometrycznym z parametrem p , $0 < p < 1$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-X_k}$, $n \geq 1$.

Zad. 5.3 Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Oblicz granicę prawie wszędzie, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i + 1)^2}{\sum_{i=1}^n \cos(X_i)}, \quad n \geq 1.$$

Zad. 5.4 Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem λ . Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}, \quad n \geq 1.$$

Zad. 5.5 Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Znajdź granicę według rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$, ciągu

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2 - n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

Uwaga: $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

Zad. 5.6 Linie lotnicze odnotowały po latach doświadczeń, że 1/10 pasażerów, którzy mają rezerwację na dany lot, nie zgłasza się do odprawy. Linie te na pewien lot sprzedały 441 rezerwacji przy 408 miejscach w samolocie. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że dla co najmniej jednego pasażera zabraknie miejsca w samolocie?

Zad. 5.7 Na partię A głosowało 20% wyborców. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że w sondażu, przeprowadzonym na losowo wybranej próbce 100 osób, popularność partii A przekroczy 22%?

Zad. 5.8 Prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca wynosi 0,51. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

Zad. 5.9 Prawdopodobieństwo zapłacenia kary za jazdę bez biletu wynosi 0,02. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w trakcie 100 takich przejazdów zapłacimy karę co najmniej 5 razy?