Michał Wendt ①

Na ile sposobów jest możliwe rozłożenie n kul pomiędzy k pudełek? Odpowiedź na to pytanie wymaga wielu założeń pozwalających nam na wyciąganie późniejszych wniosków. Najważniejsze z nich to określenie czy kule oraz pudełka są rozróżnialne czy nie. W niektórych przypadkach trzeba także zwrócić uwagę na możliwość rozłożenia n kul w nie wszystkich (tzn. <k) pudełkach, więc niektóre z pudełek pozostaną puste.

Szczególnymi przypadkami będą takie sytuacje gdy liczba kul jest mniejsza niż liczba pudełek lub istnieje tylko jedno pudełko itp.

Na potrzeby tego zadania zakładamy, że kolejność w jakiej kule są umieszczane w pudełkach nie ma znaczenia

Michał Wendt (2)

W przypadku pierwszym zarówno kule jak i pudełka są rozróżnialne. Zbiór $A_{n,k}$ opisuje ten rozkład obejmując wszystkie możliwości takiego rozłożenia, więc wszystkie pozostałe zbiory (B, C, D) muszą być podzbiorami zbioru A.

Przypuśćmy, że dla pojedynczej kuli istnieje k pudełek do których można ową kulę włożyć. Takie umieszczenie kuli odbywa się, aż do wyczerpania ilości kul, czyli dokładnie n razy. Tę sytuację możemy przedstawić w postaci:

$$\underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{\substack{n \text{ razy} \\ (\text{ilość wybrań})}} \leftarrow \text{ilość pojemników do wyboru}$$

Ten iloczyn możemy przedstawić w bardziej przystępnej formie:

$$k^n$$

Stąd wnioskujemy, że zbiór A zawiera dokładnie k^n możliwych rozłożeń n kul do k pudełek

Michał Wendt (3)

Odwzorowanie $A_{n,k} \rightarrow B_{n,k}$

Możemy ten przypadek określić jako "zapomnienie" o numeracji kul pozostawiając jedynie numeracje pudełek. Oznacza to, że wszystkie ciągi ze zbioru A w, których rozłożenie kul w przypisanych pudełkach jest takie samo przechodzą w jeden ciąg zbioru B.

W odwzorowaniu $A_{n,k} \rightarrow B_{n,k}$ dla każdego elementu z przeciwdziedziny, liczba elementów w przeciwobrazie jest równa możliwej maksymalnej ilości permutacji kul pomiędzy pudełkami

Ilość elementów przeciwobrazu B jest równa ilości elementów zbioru A czyli k^n.

Michał Wendt (4)

Odwzorowanie $A_{n,k} \to C_{n,k}$

Jest to "zapomnienie" o numeracji pudełek pozostawiając jedynie numerację kul. Każdemu ciągowi ze zbioru A o identycznym ułożeniu kul, lecz w różnych pudełkach przypisujemy jeden ciąg zbioru C o tym samym ułożeniu rozróżnialnych kul.

W odwzorowaniu $A_{n,k} \to C_{n,k}$ dla każdego elementu z przeciwdziedziny, liczba elementów w przeciwobrazie jest równa możliwej maksymalnej ilości permutacji pudełek z jednakowym rozkładem rozróżnialnych kul. w ciągach zbioru A

Michał Wendt (5)

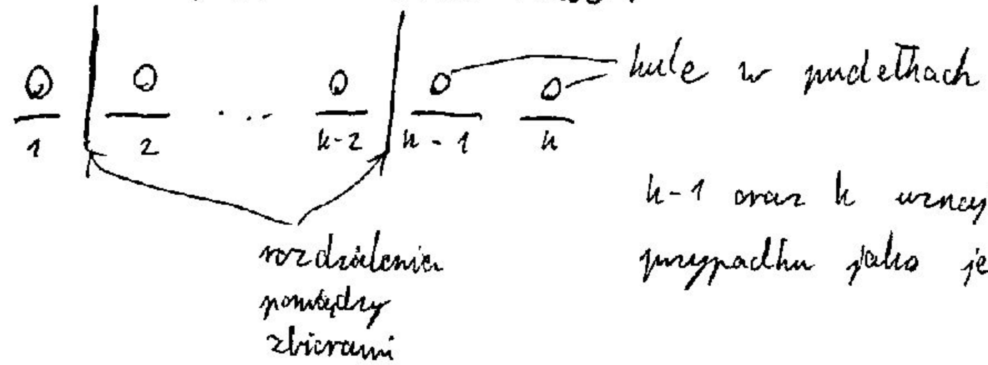
W przypadku zbioru B jedyną interesującą nas informacją będzie ilość kul w konkretnych pudełkach. Kule w tym przypadku są jednakowe, więc musimy jedynie umieścić ich wybraną ilość w kolejnych pudełkach rozważając takie same rozłożenia w różnych pudełkach.

Ilość możliwych rozłożeń takich kul możemy opisać za pomocą równania postaci:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$$

gdzie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^k$, k - ~~[illegible]~~ numer pudełka, n - łączna ilość kul, x - ilość kul w kolejnych pudełkach

Aby podzielić taki ciąg n identycznych kul na k mniejszych zbiorów potrzebujemy k-1 obiektów rozdzielających nasze kule.



k-1 oraz k uznajemy w tym przypadku jako jedno pudełko

Oczywiście nasze "rozdzielacze" mogą zostać umieszczone obok siebie tworząc tym samym puste pudełko.

Michał Wendt ⑥

Wnioskując otrzymujemy $n+k-1$ obiektów do rozłożenia oraz $k-1$ z nich to "rozdzielacze".

Stąd otrzymujemy

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

możliwych rozłożeń n identycznych kul w k różnych pudełkach.

Odwzorowanie $B_{n,k} \to D_{n,k}$

Możemy nazwać tę sytuację utratą informacji o numeracji pudełek uznając wszystkie elementy tego samego typu za identyczne. Oznacza to, że każdemu ciągowi ze zbioru D odpowiada conajmniej jeden z ciągów zbioru B.

W odwzorowaniu $B_{n,k} \to D_{n,k}$ dla każdego elementu z przeciwdziedziny, liczba elementów w przeciwobrazie jest równa:

1) możliwej maksymalnej ilości permutacji pudełek gdy ilość kul w pudełkach nie jest taka sama
2) jeden dla pudełek o tej samej ilości kul

Michał Wendt (7)

Zbiór C opisuje ilość rozłożeń ponumerowanych n kul do k identycznych pudełek. Będziemy w tym przypadku interesowali się jedynie informacją, które kule są jednocześnie w tym samym pudełku.

Ten przypadek wymaga od nas rozpatrzenia wszystkich możliwości podziału zbioru n elementowego na k mniejszych podzbiorów.

Najpierw rozpatrzmy początkowe sytuacje:

1. Wszystkie kule układamy ~~do~~ w jednym pudełku (dowolnym ponieważ wszystkie są takie same), więc określamy na ile sposobów możemy wybrać jedno pudełko: 1 sposób

2. Następnie do jednego pudełka układamy $n-1$ kul oraz jedną do dowolnego innego. Teraz musimy rozpatrzeć na ile sposobów możemy wybrać jedną kulę: $\binom{n}{1} = n$ sposobów

Michał Wendt ⑧

Z każdym kolejnym krokiem będziemy uzyskiwać kolejne możliwości. W tym miejscu należy zauważyć pewną zależność.

Przypuśćmy, że mamy r kul do podziału $(r < n)$. Mamy dokładnie $\binom{n}{r}$ możliwości wybrania tych r kul oraz $|C_r|$ (moc zbioru dla r kul) możliwości ustawienia tych kul w pudełkach. Stąd otrzymujemy:

$\binom{n}{r} \cdot |C_r|$ rozłożeń dla każdego kolejnego r.

Całkowitą liczbę rozłożeń określamy jako sumę takich przyporządkowań ~~dla~~ wszystkich dodatnich r.

$$|C_{n+1}| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} |C_r|$$

Ten przypadek oczywiście dopuszcza istnienie pustych pudełek. Kiedy interesują nas jedynie przypadki dla przynajmniej jednej kuli w każdym pudełku prawdziwe są następujące przypadki:

Michał Wendt (9)

Ilość rozłożeń

$k > n \implies 0$

$k = n \implies 1$

$k = n-1 \implies \binom{n}{2}$

$k = n-2 \implies \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$

$k = 1 \implies 1$

$k = 2 \implies 2^{n-1} - 1$

Zauważając, że jeżeli któraś z kul jest sama w dowolnym pudełku zostaje nam $n-1$ kul oraz $k-1$ pudełek więc $|C_{n-1,k-1}|$ rozłożeń. Natomiast gdy jedna z kul ma być w jednym pudełku wraz z inną zostaje nam $n-1$ kul oraz k pudełek czyli $|C_{n-1,k}|$ rozłożeń dla których istnieje k sposobów pogrupowania kul, więc:

$k \cdot |C_{n-1,k}|$ przypadków

Podsumowując otrzymujemy, że każdy przypadek da się opisać w postaci rekurencyjnej

$$|C_{n,k}| = |C_{n-1,k-1}| + k \cdot |C_{n-1,k}|$$

Michał Wendt (10)

Odwzorowanie $C_{n,k} \to D_{n,k}$

W ostatnim z odwzorowań ignorujemy numerację kul uznając wszystkie elementy tego samego typu za identyczne. Oznacza to, że wszystkie ciągi ze zbioru C o jednakowym rozkładzie kul przechodzą w jeden ciąg zbioru D.

W odwzorowaniu $C_{n,k} \to D_{n,k}$ dla każdego elementu z przeciwdziedziny, liczba elementów w przeciwobrazie jest równa możliwej ilości permutacji kul (w ciągach ze zbioru D) w pudełkach

Michał Wendt (11)

W ostatnim z rozważanych zbiorów tj. D zarówno numeracja kul oraz pudełek jest pominięta.

Rozpatrujemy ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \beta_{n,k}$ posortowane w sposób nierosnący gdzie k - kolejne pudełko, ~~x~~ - ilość kul w danym pudełku.

W tym przypadku interesuje nas jedynie ilość kul w kolejnych pudełkach. Moc tego zbioru będzie określona przez ilość możliwych podziałów ~~na i~~ liczby n na i części. $(1 \leq i \leq k)$,

Tę sytuację trzeba także podzielić na dwie możliwości (wszystkie pudełka są zapełnione lub niektóre z nich mogą zostać puste)

W pierwszym z tych przypadków znów otrzymujemy kilka konkretnych przypadków:

$n < k \Rightarrow 0$

$n = k \Rightarrow 1$

$n = k+1 \Rightarrow 1$

$k = 1 \Rightarrow 1$

$k = 2 \Rightarrow \frac{n-1}{2}$ dla n nieparzystych

$\frac{n}{2}$ dla n parzystych

Michał Wendt (12)

Jeżeli nasze i części jest posortowane nierosnąco, to wszystkie podziały $D_{n,k}$ zawsze zaczynają się od pudełka k elementowego. Pozostałe kule w podziale są podziałami zbioru n-k elementowego. Te części mogą być podzielone na części maksymalnie n-k elementowe. Stąd $|D_{n,k}|$ jest równa sumie takich podziałów z $|D_{n-k,i}|$, gdzie i należy do przedziału $\langle 1,k \rangle$.

Wnioskując otrzymujemy następujący wzór:

$$|D_{n,k}| = \sum_{i=1}^{k} |D_{n-k,i}|$$

Zależność rekurencyjna jest prawdziwa niezależnie od pozwalania na puste pudełka. Jedyne założenia początkowych przypadków są różne i to od nich zależą ostateczne wyniki.