Zad. 2.1. Dziewięćdziesiąt procent samolotów startuje o czasie. Osiemdziesiąt procent samolotów ląduje o czasie. Siedemdziesiąt pięć procent samolotów startuje i ląduje o czasie.

a) Czekasz na samolot, który wystartował o czasie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyląduje on punktualnie?

b) Samolot wylądował punktualnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wystartował on o czasie?

c) Czy zdarzenia startu o czasie i punktualnego lądowania są niezależne?

Niech $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $A, B \in \mathcal{F}$, przy czym $P(B) > 0$. *Prawdopodobieństwem warunkowym* zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Zdarzenia A i B nazywamy *niezależnymi*, wtedy i tylko wtedy gdy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Taką definicję można objaśnić faktem, że (1) $\iff P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Równość P(A|B)=P(A) oznacza, że zajście B nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia A.

Rozwiązanie. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
A - wybrany samolot startuje o czasie,
B - wybrany samolot ląduje o czasie.
Wówczas $P(A) = 0{,}9; P(B) = 0{,}8; P(A \cap B) = 0{,}75$.

$$(a) \qquad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}75}{0{,}9} = \frac{5}{6};$$

$$(b) \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}75}{0{,}8} = \frac{15}{16};$$

(c) sprawdzamy, czy zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; z lewej strony mamy 0,75, zaś z prawej $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72 \implies$ powyższa równość nie zachodzi, czyli zdarzenia A i B nie są niezależne.

Zad. 2.2. Kupując tubkę pasty do zębów, Marcin zawsze wybiera markę A lub markę B. Przy pierwszym zakupie dla niego jest równie prawdopodobne, wybrać A czy B, ale przy drugim prawdopodobieństwo, że wybierze on tą samą markę, co poprzednio, wynosi $\frac{1}{3}$, a prawdopodobieństwo, że zmieni on markę, wynosi $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zarówno jego pierwszy, jak i drugi zakup, to będzie marka A?

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:
A_1 - pierwszy zakup Marcina to marka A,
A_2 - drugi zakup Marcina to marka A.
Należy obliczyć prawdopodobieństwo $P(A_1 \cap A_2)$.
Wiemy, że $P(A_1) = \frac{1}{2}$, a $P(A_2|A_1) = \frac{1}{3}$.
Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe (1):

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Zad. 2.3. Trzej strzelcy jednocześnie i niezależnie od siebie strzelają do butelki. W butelkę trafił tylko jeden spośród strzelających. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to pierwszy ze strzelców, skoro trafiają oni z prawdopodobieństwami odpowiednio: $0{,}3; 0{,}8; 0{,}4$.

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:
A_1 - pierwszy strzelec trafił,
A_2 - drugi strzelec trafił,
A_3 - trzeci strzelec trafił.
Wiemy, że zaszło zdarzenie (tylko jeden strzelec trafił)
$A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$.
Należy policzyć prawdopodobieństwo

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c | A) = \frac{P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)}{P(A)}. \qquad (2)$$

Korzystając z niezależności zdarzeń A_i (strzelcy trafiają niezależnie od siebie!) policzmy najpierw prawdopodobieństwo w liczniku ułamku z (2):

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) = 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}4)$$
$$= 0{,}036.$$

Uwaga. Zdarzenia A_1, A_2, A_3 nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy gdy
(i) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,
(ii) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$.

Teraz liczymy prawdopodobieństwo w mianowniku ułamku z (2):

$P(A) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$

$= 0{,}036 + (1-0{,}3) \cdot 0{,}8 \cdot (1-0{,}4) + (1-0{,}3) \cdot (1-0{,}8) \cdot 0{,}4 = 0{,}428.$

Wreszcie na mocy (2) otrzymujemy

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c | A) = \frac{0{,}036}{0{,}428} \approx 0{,}084.$$

Zad. 2.4. Gra polega na tym, że spośród dwóch urn losujemy jedną, następnie wyciągamy z niej kulę. Gdy kula jest biała, wygrywamy. Przed rozpoczęciem gry dano nam 2 białe i 7 czarnych kul, które należy włożyć do pustych urn, co najmniej jedną kulę do każdej urny. Jak najkorzystniej rozłożyć kule w urnach przed grą?

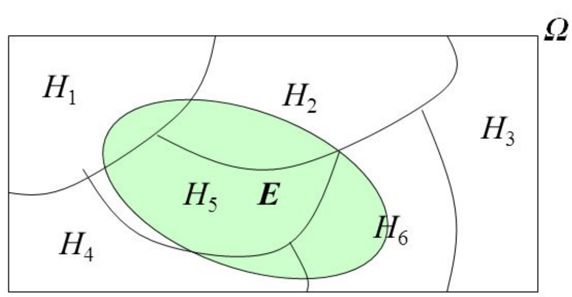
Wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

$H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{F}: \ \cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega; \ H_i \cap H_j = \emptyset, \ i \neq j;$

The law of total probability

Conditional probability can be used to determine the probability of "sophisticated" events. The idea is to divide all the events into several categories. These categories are also called hypotheses. The sample space is partitioned using hypotheses $H_0, H_1, \ldots, H_n$, that is,

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n, H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$



$P(H_i) > 0, \ i = 1, \ldots, n$. Wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i).$$

Rozwiązanie. Doświadczenie losowe polega na wyciąganiu kuli w sposób losowy z jednej z dwóch urn. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
H_1 - kula została wyciągnięta z urny pierwszej,
H_2 - kula została wyciągnięta z urny drugiej;
A - wyciągnięta kula okazała się białą.
Urnę wybieramy w sposób losowy, dlatego $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że zbiory H_1 i H_2 spełniają powyższe warunki.
Przyjrzyjmy się najpierw możliwościom rozłokowania 2 białych kul w urnach. Mamy 2 możliwości: albo 2 białe kule kładziemy do tej samej urny (oznaczamy to jako I), albo 2 białe kule kładziemy do różnych urn (II). Rozważmy I i II po kolei.

I. Niech w pierwszej urnie będą 2 białe kule i x czarnych kul, a w drugiej $7 - x$ tylko czarnych kul, $0 \le x \le 6$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) \\ &= \frac{2}{2+x} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2+x}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $P(A)$ przyjmuje największą wartość $\frac{1}{2}$ dla $x = 0$. Oczywiście, otrzymamy analogiczny wynik, jeśli ulokujemy 2 białe i x czarnych kul do drugiej urny.

II. Niech w pierwszej urnie będą 1 biała kula i x czarnych kul, a w drugiej 1 biała kula i $7-x$ czarnych kul, $0 \leq x \leq 7$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) \\ &= \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8-x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{8-x}\right) \\ &= \frac{9}{2(1+x)(8-x)}. \end{aligned}$$

Jest oczywiste, że $P(A)$ będzie największe gdy $(1+x)(8-x)$ będzie najmniejsze dla $0 \leq x \leq 7$. Analiza dwumianu kwadratowego prowadzi do wyniku: przyjmuje on najmniejszą wartość, równą 8, dla takich x w przypadku $x = 0$ lub $x = 7$. Zatem $P(A)$ przyjmuje największą wartość $\frac{9}{16}$ dla $x = 0$ lub $x = 7$.

Podsumowując, w przypadku I największa wartość $P(A)$ to $\frac{1}{2}$, a w przypadku II - $\frac{9}{16}$. Zatem przed grą najkorzystniej jest rozłożyć kule jak w przypadku II, czyli po jednej kuli białej do każdej urny, przy czym kule czarne lepiej wrzucić wszystkie do jednej z tych urn.

Wtedy prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej będzie największe i wyniesie $\frac{9}{16}$.

Zad. 2.5. Fabryki A, B, C produkują odpowiednio 50%, 20%, 30% ogólnej produkcji żarówek. Udział braków produkcji wynosi: 5%, 2%, 3% produkcji danej fabryki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
a) losowo wybrana żarówka jest sprawna,
b) jeżeli losowo wybrana żarówka jest sprawna, to pochodzi ona z fabryki A?

Wzór Bayesa. $H_1, \ldots, H_n$ jak we wzorze na prawdopodobieństwo całkowite. Dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$,

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

Rozwiązanie. Doświadczenie losowe polega na losowaniu żarówki. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
H_1 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce A,
H_2 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce B,
H_3 - wylosowana żarówka jest wyprodukowana w fabryce C,
D - wylosowana żarówka jest sprawna.
Mamy $P(H_1) = 0{,}5; P(H_2) = 0{,}2; P(H_3) = 0{,}3$. Zauważmy, że zbiory H_1, H_2, H_3 spełniają powyższe wa-

runki. Oprócz tego wiadomo, że
$P(D|H_1)=1-0{,}05 = 0{,}95$; $P(D|H_2)=1-0{,}02 = 0{,}98$;
$P(D|H_3)=1-0{,}03 = 0{,}97$.

(a) Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(D) = P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3)$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}5 + 0{,}98 \cdot 0{,}2 + 0{,}97 \cdot 0{,}3 = 0{,}962.$$

(b) Ze wzoru Bayesa

$$P(H_1|D) = \frac{P(D|H_1)P(H_1)}{P(D)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}5}{0{,}962} = \frac{0{,}475}{0{,}962} \approx 0{,}494.$$

Zad. 2.6. Na pewną chorobę choruje ok. 0,5% populacji ludzi. Test na tę chorobę daje wynik pozytywny u ok. 99% chorych, ale również u ok. 2% ludzi zdrowych (wiemy, iż każdy test nie jest 100% skuteczny). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba, dla której przeprowadzony test dał wynik pozytywny, jest rzeczywiście chora?

Rozwiązanie. Oznaczmy:
A - losowo wybrana osoba ma wynik testu pozytywny,
H_1 - losowo wybrana osoba jest chora ($P(H_1) = 0{,}005$),
H_2 - losowo wybrana osoba jest zdrowa ($P(H_2) = 0{,}995$).
Mamy $P(A|H_1) = 0{,}99$, $P(A|H_2) = 0{,}02$. W sumie H_1 i H_2 opisują wszystkie możliwości, które mogą się zdarzyć przy losowaniu osoby, oraz są rozłączne. Zatem możemy zastosować wzór Bayesa, na mocy którego otrzymujemy

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)}$$

$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}005}{0{,}99 \cdot 0{,}005 + 0{,}02 \cdot 0{,}995} \approx 0{,}199.$$

Wniosek. Mimo tego, że na początku mogło się wydawać, że test jest niezły, w rzeczywistości jest on bardzo niedoskonały!
Prosta analiza otrzymanego wyniku prowadzi do wniosku, że „zawdzięczamy" go głównie temu, że 2% błędu dla ludzi zdrowych w takiej sytuacji to niewzykle dużo. Gdyby np. test dawał wynik pozytywny u ok. 1% ludzi zdrowych, a nie u 2%, to, jak nietrudno policzyć, otrzymalibyśmy wynik lepszy, mianowicie $P(H_1|A) = 0{,}332$, choć nadal nie byłby to wynik zadowalający.

Zad. 2.7. W jednakowych zamkniętych pudełkach mamy 9 pełnych talii kart i jedną zdekompletowaną, zawierającą 20 kat czarnych i tylko 4 czerwone (po jednej talii w każdym pudełku). Z losowo wybranego pudełka wylosowano kartę, która okazała się czarną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z talii zdekompletowanej?

Rozwiązanie. Doświadczenie losowe polega na losowaniu karty z wcześniej wylosowanego pudełka. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
H_1 - karta jest wylosowana z pudełka z pełną talią,
H_2 - karta jest wylosowana z pudełka ze zdekompletowaną talią,
A - wylosowana karta jest czarna.
Mamy $P(H_1) = 0{,}9, P(H_2) = 0{,}1$, przy czym zbiory H_1 i H_2 spełniają powyższe warunki. Oprócz tego, jak łatwo policzyć, $P(A|H_1) = \frac{1}{2}, P(A|H_2) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$.
Ze wzoru Bayesa

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{5}{27+5} = \frac{5}{32}.$$

Zad. 2.8. Przesyłamy ciąg składający się z zer i jedynek, przy czym stosunek liczby wysłanych 1 do 0 wynosi 5 do 7. Załóżmy, że przy przesyłaniu 0 przekłamanie następuje z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$, a przy przesyłaniu 1 - w jednym przypadku na dziesięć. Wiedząc, że otrzymano 0, oblicz prawdopodobieństwo, że wysłano 0.

Rozwiązanie. Doświadczenie losowe polega na przesyłaniu losowo 1 bądź 0. Wprowadzamy następujące zdarzenia:
H_1 - wysłano 1, H_2 - wysłano 0,
A_1 - otrzymano 1, A_2 - otrzymano 0.
Należy policzyć $P(H_2|A_2)$.
Z warunków zadania wynika, że $P(H_1) = \frac{5}{12}, P(H_2) = \frac{7}{12}$.
Oprócz tego, $P(A_1|H_2) = \frac{2}{5}, P(A_2|H_1) = \frac{1}{10}$. Zbiory H_1 i H_2 spełniają powyższe warunki. Ze wzoru Bayesa

$$P(H_2|A_2) = \frac{P(A_2|H_2)P(H_2)}{P(A_2|H_1)P(H_1) + P(A_2|H_2)P(H_2)}.$$

Brakuje nam jeszcze $P(A_2|H_2)$. Jest oczywiste, że $P(A_1|H_2)+P(A_2|H_2)=1$, skąd $P(A_2|H_2) = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
Zatem

$$P(H_2|A_2) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12}} = \frac{42}{5+42} = \frac{42}{47}.$$