Ćwiczenia 2

Wprowadzenie teoretyczne:
Co to jest kodowanie? Jakie znasz kodowania?

Odpowiedź:
Kodowanie zbioru *X* – dowolna funkcja różnowartościowa $f : X \to \mathbb{N}$.

Przykłady kodowań:

1. $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określona wzorem $\pi(n,m) = 2^n(2m+1)-1$ jest bijektywnym kodowaniem par liczb naturalnych.
2. $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określona $\beta(n,m,p) = \pi(\pi(n,m),p)$ jest bijektywnym kodowaniem trójek liczb naturalnych.
3. Rozważmy funkcję $\tau : \bigcup_{k>0} \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ taką, że
   $\tau(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}) = 2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_{k-1}+k-1} - 1$.
   Jest to bijektywne kodowanie wszystkich skończonych ciągów liczb naturalnych.

Aby zakodować *ML*-program jako liczbę naturalną potrzebujemy efektywnej metody zakodowania pojedynczych instrukcji *KI* oraz efektywnej metody zakodowania ciągu kodów instrukcji *KP* .
Rozważmy *ML*-program $P = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$składający się z k instrukcji.
Każdą instrukcje P zakodujemy za pomocą wzoru

$KI(Ij)$ = 4 · [kod argumentów] + [nr instrukcji]

W przypadku instrukcji $Z(n)$ oraz $S(n)$ kodem argumentów jest adres rejestru,w przypadku instrukcji $T(m, n)$ używamy bijektywnego kodowania par π, natomiast w przypadku instrukcji $I(m, n, q)$ używamy bijektywnegokodowania trójek β. Ponieważ instrukcje maszyny licznikowej są numerowaneza pomocą liczb {0, 1, 2, 3} zdefiniowane powyżej kodowanie instrukcji jestbijekcją.
Ciąg kodów poszczególnych instrukcji zakodujemy za pomocą bijektywnegokodowania skończonych ciągów liczb naturalnych τ: $\boldsymbol{K_P(P) = \tau(K_I(I_1), K_I(I_2), \ldots, K_I(I_k))}$.

Zadanie 1

Obliczyć:

a) $\pi^{-1}(3)$
b) $\pi^{-1}(4)$
c) $\pi^{-1}(5)$
d) $\beta^{-1}(3)$
e) $\beta^{-1}(4)$
f) $\beta^{-1}(5)$
g) $\beta^{-1}(13)$
h) $\beta^{-1}(14)$.

Rozwiązanie:

a) (2,0)
b) (0,2)
c) (1,1)
d) (0,1,0)
e) (0,0,2)
f) (1,0,1)
g) (1,0,3)
h) (0,0,7)

Zadanie 2

Odkodować/zakodować instrukcje:

a) $S(5)$
b) $T(3,5)$
c) $I(2,1,0)$
d) $KI^{-1}(15)$
e) $KI^{-1}(63)$
f) $KI^{-1}(64)$
g) $KI^{-1}(67)$

Rozwiązanie:

a) $=(1,5)=4\cdot5+1=21$
b) $=(2,87)=4\cdot87+2=350$
c) $=(3,2^{11}-1)=4\cdot(2^{11}-1)+3=8191$
d) $=(3,3)=I(0,1,0)$
e) $=(3,15)=I(0,2,0)$
f) $=(0,16)=Z(16)$
g) $=(3,16)=I(0,0,8)$

Zadanie 3

Wyznacz program o numerze 641.

Rozwiązanie:

Poszukujemy programu P takiego, że $K_P^{-1}(641)=P$.

$P = \langle i_0,\dots,i_{k-1}\rangle$, $i_j = \langle k_j, a_j\rangle$

Rozkład liczby 641 do postaci $x+1=2^{b_0}+2^{b_1}+\dots+2^{b_{k-1}}$: $642=2^1+2^7+2^9$.

Przypomnijmy kodowanie:

$\tau(a_0,a_1,\dots,a_{k-1}) = 2^{a_0}+2^{a_0+a_1+1}+\dots+2^{a_0+a_1+\dots+a_{k-1}+k-1}-1$.

$a_0 = 1$; $a_1 = 5$; $a_2 = 1$.

Jeśli wziąć pod uwagę, że $\pi(n,m) = 2^n(2m+1)-1$ jest bijektywnym kodowaniem par liczb naturalnych, mamy:

$i_0 = \langle 1,0\rangle$ S(0)

$i_1 = \langle 1,1\rangle$ S(1)

$i_2 = \langle 1,0\rangle$ S(0) $\phi_{641}^{(1)}(x) = 2$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4

Wyznacz program o numerze 1253.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy kodowanie: $\tau(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}) = 2^{a_0} + 2^{a_0+a_1+1} + \ldots + 2^{a_0+a_1+\ldots+a_{k-1}+k-1} - 1$. Wiemy, że każda liczba naturalna większa od zera jest sumą rosnących potęg dwójki, czyli dla $x \in \mathbb{N}$, mamy: $x+1 = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \ldots + 2^{b_m}$, gdzie $b_i < b_{i+1}$. Wtedy wzory $a_0=b_0$ i $a_{i+1}=b_{i+1}-b_i-1$ dla $i<m$ opisują ciąg, którego kodem (poprzez τ) jest liczba x.

Ponieważ $1253+1 = 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2$, program o numerze 1253 składa się z sześciu instrukcji o kolejnych numerach: 1,0,2,0,0,2. Ponieważ liczbie 0 odpowiada instrukcja Z(0), 1 odpowiada instrukcja S(0), a 2 instrukcja T(0,0), podany program oblicza funkcję $f(x)=0$.

Zadanie 5

Wyznacz jakikolwiek numer funkcji $x \div 1$.

Rozwiązanie:

0	I(1,0,6)	$\langle 3,5 \rangle$
1	S(2)	$\langle 1,2 \rangle$
2	I(1,2,6)	$\langle 3,6655 \rangle$
3	S(2)	$\langle 1,2 \rangle$
4	S(0)	$\langle 1,0 \rangle$
5	I(0,0,2)	$\langle 3,4 \rangle$

$\beta(1,0,6) = \pi(\pi(1,0),6) = 25$
$\beta(1,2,6) = \pi(\pi(1,2),6) = 6655$

$P = (103, 9, 26623, 9, 1, 19)$
$\tau(103, 9, 26623, 9, 1, 19) =$
$= 2^{103} + 2^{103+9+1} + 2^{103+9+26623+2} + 2^{103+9+26623+9+3} + 2^{103+9+26623+9+1+4} + 2^{103+9+26623+9+1+10+5} - 1$

Zadanie domowe:

Wyznacz jakikolwiek numer funkcji $x \div y$.