Funkcje zerojedynkowe:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Gdzie: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne zerojedynkowe, n - liczba zmiennych

Tabelki opisujące takie funkcje – tabelki zerojedynkowe

Np. n = 2

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

0
1

$n = 1$

0	0
0	1
1	0
1	1

$n = 2$

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$n = 3$

$n = 4$

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Liczba zmiennych n	Liczba wierszy tabelki 2^n	Liczba funkcji 2^{2^n}
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	65 536
5	32	4 294 967 296

Funkcje zerojedynkowe 2 zmiennych:

x_1	x_2	Funkcja $f(x_1, x_2)$															
		f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{12}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Prawa De'Morgana:

n = 2:

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Uogólnione:

$$\overline{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$$

$$\overline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} \cdot \ldots \cdot \overline{a_n}$$

$$\overline{\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$\overline{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} \cdot \ldots \cdot \overline{a_n}} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Dowolna funkcja zerojedynkowa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Wtedy:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$ 1

Sprawdzamy:

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = 1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + 0 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + 1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_2} \cdot f(0,0, x_3, \ldots, x_n) + x_2 \cdot f(0,1, x_3, \ldots, x_n)$$

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_2} \cdot f(1,0, x_3, \ldots, x_n) + x_2 \cdot f(1,1, x_3, \ldots, x_n)$$

Podstawiamy do równości 1

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f(0,0, x_3, \ldots, x_n) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f(0,1, x_3, \ldots, x_n) + \quad 2$$

$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f(1,0, x_3, \ldots, x_n) + x_1 \cdot x_2 \cdot f(1,1, x_3, \ldots, x_n)$$

Dla dowolnej tożsamości (w algebrze Boole'a) można otrzymać nową, zastępując symbole:

+ · 0 1 *odpowiednio:* · + 1 0

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\overline{x_1} + f(1, x_2, \ldots, x_n)\right) \cdot \left(x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

3

Postępujemy podobnie jak poprzednio i otrzymujemy:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + f(1,1, x_3, \ldots, x_n)\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + f(1,0, x_3, \ldots, x_n)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + f(0,1, x_3, \ldots, x_n)\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + f(0,0, x_3, \ldots, x_n)\right)$$

4

Zastosujemy otrzymane wzory do przedstawienia niektórych funkcji dwóch zmiennych :

Dla n=2 mamy:

$$f(x_1, x_2) =$$
$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f(0,0) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f(0,1) +$$
$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f(1,0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f(1,1)$$

5

$$f(x_1, x_2) =$$
$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + f(1,1)\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + f(1,0)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + f(0,1)\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + f(0,0)\right)$$

6

Np.. Funkcja f_{14}, nazywana „dyzjunkcją Sheffera":

Korzystamy z : 5

$$f_{14}(x_1, x_2) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f_{14}(0,0) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f_{14}(0,1) +$$

$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f_{14}(1,0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f_{14}(1,1) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 \cdot 0 =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

A może lepiej z : 6

$$f_{14}(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + f_{14}(1,1)\right)\cdot\left(\overline{x_1} + x_2 + f_{14}(1,0)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x_1 + \overline{x_2} + f_{14}(0,1)\right)\cdot\left(x_1 + x_2 + f_{14}(0,0)\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + 0\right)\cdot\left(\overline{x_1} + x_2 + 1\right)\cdot\left(x_1 + \overline{x_2} + 1\right)\cdot\left(x_1 + x_2 + 1\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

Ostatecznie dyzjunkcję Sheffera możemy wyrazić:

$$f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

Co ciekawe:

$$\overline{x} = \overline{x \cdot x}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot \overline{(x_1 \cdot x_2)}}$$

Kolejna funkcja z tabelki zwana „jednoczesnym zaprzeczeniem”:

Od razu korzystamy z: 5

$$f_8(x_1, x_2) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f_8(0,0) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f_8(0,1) +$$

$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f_8(1,0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f_8(1,1) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot 0 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot 0 + x_1 \cdot x_2 \cdot 0 =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

I otrzymujemy:

$$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 + x_2}$$

Inne ciekawe funkcje: „różnica symetryczna”:

$$f_6(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + f_6(1,1)\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + f_6(1,0)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + f_6(0,1)\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + f_6(0,0)\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + 0\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + 1\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + 1\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + 0\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot \left(x_1 + x_2\right)$$

$$f_6(x_1, x_2) = \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot \left(x_1 + x_2\right)$$

Lub:

$$f_6(x_1, x_2) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f_6(0{,}0) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f_6(0{,}1) +$$

$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f_6(1{,}0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f_6(1{,}1) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot 0 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 \cdot 0 =$$

$$= \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

$$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

Następna funkcja: „równoważność”:

$$f_9(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + f_9(1,1)\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + f_9(1,0)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + f_9(0,1)\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + f_9(0,0)\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + 1\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2 + 0\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + 0\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + 1\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + x_2\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2}\right)$$

$$f_9(x_1, x_2) = \left(\overline{x_1} + x_2\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2}\right)$$

$$f_9(x_1, x_2) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot f_9(0,0) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot f_9(0,1) +$$

$$+ x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot f_9(1,0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f_9(1,1) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot 0 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot 0 + x_1 \cdot x_2 \cdot 1 =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$$

$$f_9(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$$