$\frac{19}{3} \doteq 6,5$ b.

[redacted]

F

1

Poloha částice v lineárním urychlovači je dána vztahem $x = 5e^{2t} + 2t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách.

a) Odvoďte závislost rychlosti a zrychlení na čase.
b) Určete jednotky všech pěti konstant.
c) Jak by vypadal vztah stejné závislosti polohy na čase pro t v minutách.

$x = 5e^{2t} + 2t^3$ $\qquad$ $F = ma = m\cdot\dot{v} = m\ddot{x}$

a) rychlost, zrychlení:

$\dot{v} = \ddot{x} \Rightarrow v = \dot{x}$

$v(t) = (5e^{2t} + 2t^3)' = 5\cdot 2\cdot e^{2t} + 6t^2 = 10e^{2t} + 6t^2$

$\underline{\underline{v(t) = 10e^{2t} + 6t^2\ m\cdot s^{-1}}}$

$a = \dot{v}$

$a(t) = (10e^{2t} + 6t^2)' = 10\cdot 2\cdot e^{2t} + 12t = 20e^{2t} + 12t$

$\underline{\underline{a(t) = 20e^{2t} + 12t\ m\cdot s^{-2}}}$ $\qquad$ ✓ (4)

b) $[x] = m \quad [t] = s$ $\qquad$ ↗ $[2] = (s^{-1})$ $\qquad$ (3)

$[x] = \boxed{A}\cdot\boxed{5} = \boxed{B}\,[e^{2t}] = [C]\,[2t^3]$

$\underline{\underline{[A] = m}} \quad \underline{\underline{[B] = (-)}} \quad \underline{\underline{[C] = m\cdot s^{-3}}} \quad \underline{\underline{[D] = (-)}} \quad \underline{\underline{[E] = (-)}}$

c) $x = 5e^{2\left(\frac{t}{60}\right)} + 2\left(\frac{t}{60}\right)^3$ → t je potřeba násobit 60x, aby za 1 min bylo stejné m jako za 60 s

$\underline{\underline{x = 5e^{t/30} + 2(t/60)^3}}$

(2)

[redacted]

2

Na hmotný bod působí homogenní gravitační pole silou $F = mg$ a pružina silou $F = -k(s + x)$, kde s je rovnovážná poloha.

a) Sestavte pohybovou rovnici.

b) Vyřešte pohybovou rovnici pro polohu x jako funkci času.

c) Proč řešení není závislé na gravitačním poli? Kdyby pružina působila silou $F = -k(s + x)^2$, bylo by řešení závislé na gravitačním poli?

a) $F = -k(s+x) + mg$ $\qquad F = ma = m\dot{v} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg \; /:m$ $\qquad \dot{v} = \ddot{x} \Rightarrow v = \dot{x}$

$\ddot{x} = \frac{-k(s+x)}{m} + g$

$\ddot{x} = \frac{-mg - kx}{m} + g \Rightarrow \ddot{x} = -\cancel{g} - \frac{kx}{m} + \cancel{g}$

$\ddot{x} = -\frac{kx}{m}$ ✓ (4)

b) $\frac{dx^2(t)}{dt} = -\frac{kx}{m}$

$x = e^{\lambda t}$ $\quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{k e^{\lambda t}}{m} \; /: e^{\lambda t}$

$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$ $\qquad \Omega^2 = -\frac{k}{m}$

$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$

$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}$

$x(t) = c_1(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)) + c_2(\cos(\Omega t) - i \sin(\Omega t))$

$x(t) = (c_1 + c_2)\cos(\Omega t) + (c_1 - c_2)\, i \sin(\Omega t)$

$x(t) = A\cos(\Omega t) + B i \sin(\Omega t)$

$c_1 + c_2 = A$

$c_1 - c_2 = B$ ✓ (4)

c) $F = -k(s+x)^2 + mg$

$m\ddot{x} = -k(s^2 + 2sx + x^2) + mg$

$m\ddot{x} = -mg - k(2sx + x^2) + mg$

$\Rightarrow$ v tomto případě je řešení závislé na gravitačním poli

✓ proč původní řešení závislé není

(2)