

Μεταβατική Απόκριση Περιστρεφόμενου Άξονα σε Έδρανα Ολίσθησης

Δυναμική Περιστρεφόμενων Μηχανών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών



Ονοματεπώνυμο: Παπαδάκης Μιχαήλ
Αριθμός Μητρώου: 02118026
Ακαδημαϊκό έτος: 4^ο
Ημερομηνία: 31/12/21

Περιεχόμενα

0	Εισαγωγή	2
1	Ερώτημα 1	2
1.1	Guyan reduction	2
1.2	Επίλυση στον χώρο κατάστασης	3
1.3	Χρονοσειρές απόκρισης	3
2	Ερώτημα 2	3
3	Ερώτημα 3	7
4	Ερώτημα 4	7
5	Ερώτημα 5	9

Κατάλογος Σχημάτων

1	Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο έδρανο 1	4
2	Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας	4
3	Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο midspan	5
4	Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο έδρανο 1	5
5	Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας	6
6	Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο midspan	6
7	Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο έδρανο 1	7
8	Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας	7
9	Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο midspan	8
10	Διάγραμμα αζυγοσταθμίας στη μεταβατική απόκριση	8
11	Ελαστική γραμμή άξονα στη ταχύτητα λειτουργίας	9

Εισαγωγή

Στην παρούσα άσκηση μελετήθηκε η μεταβατική απόκριση ενός περιστρεφόμενου άξονα ώστε να παρατηρηθεί η επίδραση που έχουν τα μη γραμμικά έδρανα σε αυτή.

Ερώτημα 1

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + ([C] + \Omega[G])\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (1)$$

όπου $[M]$ ο πίνακας αδράνειας, $[G]$ ο πίνακας γυροσκοπικής σύζευξης, $[K]$ ο πίνακας στιβαρότητας, \mathbf{F} είναι το διάνυσμα δύναμης, οι οποίοι ορίζονται μέσα στο πρόγραμμα. Εδώ να αναφερθεί πως δεν υπάρχει ιξώδης απόσβεση, δηλαδή $[C] = 0$.

Για τη μεταβατική απόκριση θεωρείται πως η γωνιακή θέση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Omega = \Omega_o + at \quad (2)$$

Συνεπώς, η δύναμη διέγερσης είναι:

$$\begin{Bmatrix} Fu_x \\ Fu_y \end{Bmatrix} = u \begin{Bmatrix} \Omega^2 \cos(\Omega_o t + 0.5at^2) + a \sin(\Omega_o t + 0.5at^2) \\ \Omega^2 \sin(\Omega_o t + 0.5at^2) - a \cos(\Omega_o t + 0.5at^2) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Ωστόσο, επειδή σε μεγάλες ταχύτητες το a είναι μικρότερο του Ω^2 , **αμελείται ο δεύτερος όρος στο πρόγραμμα.**

Για την εύρεση της μεταβατικής απόκρισης, πρέπει να λυθεί η εξίσωση 1 για κάθε χρονική στιγμή μέχρι να φτασθεί η επιθυμητή ταχύτητα. Ωστόσο, αυτή σημαίνει την επίλυση ενός συστήματος $(36 \cdot 4) = 144 \times 144$ για κάθε χρονική στιγμή, με βήμα επαρκές ώστε τα αποτελέσματα να έχουν μικρό σφάλμα. Καθώς μάλιστα το πρόβλημα είναι *stiff* όταν λαμβάνει χώρο το φαινόμενο του oil whip, είναι αναγκαίο να μειωθεί η τάξη του συστήματος. Συνεπώς χρησιμοποιείται η μέθοδος μείωσης τάξης του guyan.

Guyan reduction

Στη μέθοδο αυτή, λύνεται το στατικό πρόβλημα στο αρχικό full μοντέλο που έχει 144 βαθμούς ελευθερίας και ύστερα δημιουργείται ένα reduced μοντέλο με τόσους κόμβους όσα τα επίπεδα που εξετάζονται ως προς την απόκρισή τους (εδώ επίπεδα εδράνων και επίπεδα αζυγοσταθμίας) και βαθμούς ελευθερίας μόνο για τις κινήσεις που εξετάζονται (εδώ x, y).

Αρχικά, επιλέγονται οι master nodes. Αυτοί είναι οι:

$$MN = 6, 14, 20, 26, 34$$

Από αυτούς ο πρώτος και ο τελευταίος είναι οι κόμβοι των εδράνων ενώ οι ενδιάμεσοι είναι τα επίπεδα αζυγοσταθμίας για single και pair unbalance αντίστοιχα. Ύστερα, βρίσκονται οι master DoFs από τον τύπο:

$$MDOFs = 4(MN - 1) + [1, 2] \quad (4)$$

Συνολικά, προκύπτει πως οι MDOFs είναι οι [21, 22, 53, 54, 77, 78, 101, 102, 133, 134]. Έπειτα, γίνεται μια αναδιάταξη των όρων της εξίσωσης του στατικού προβλήματος και λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fg_m \\ Fg_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ο δείκτης m υποδεικνύει τους master DOFs και ο δείκτης s υποδεικνύει τους slave DOFs. Λύνοντας προς τους slave DOFs προκύπτει:

$$X_s = K_{ss}^{-1} Fg_s - K_{ss}^{-1} K_{sm} X_m$$

Σε μορφή πίνακα το παραπάνω γράφεται:

$$\begin{bmatrix} X_m \\ X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{bmatrix} X_m + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ss}^{-1} Fg_s \end{bmatrix}$$

Ουσιαστικά γίνεται μια αλλαγή βάσης που δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} X_m = T_r X_m \quad (6)$$

Έτσι, κάνοντας την αλλαγή βάσης και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον ανάστροφο του T_r προκύπτει η νέα εξίσωση:

$$[M_r]\ddot{\mathbf{x}} + ([C_r] + \Omega[G_r])\dot{\mathbf{x}} + [K_r]\mathbf{x} = \mathbf{F}_r \quad (7)$$

όπου:

$$[M_r] = T_r^T [M] T_r, [K_r] = T_r^T [K] T_r, [G_r] = T_r^T [G] T_r, [C_r] = T_r^T [C] T_r, F_r = T_r^T F$$

Το διάνυσμα F περιέχει όλες τις εξωτερικές διεγέρσεις. Η εξίσωση 7 έχει συνολικά 10 βαθμούς ελευθερίας, συνεπώς είναι σημαντικά ευκολότερη ως προς την επίλυση. Για την επίλυση της όμως, επειδή η είσοδος αλλάζει με τον χρόνο και δεν είναι καθαρά ημιτονική, χρησιμοποιείται η αναπαράσταση της εξίσωσης στο χώρο κατάστασης και επιλύεται η προκύπτουσα διαφορική.

Επίλυση στον χώρο κατάστασης

Ορίζοντας :

$$y_1 = x_m, y_2 = \dot{x}_m$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = A_r \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + H_r \quad (8)$$

όπου:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_r^{-1}K_r & -M_r^{-1}(C_r + \Omega G_r) \end{bmatrix}, H_r = \begin{bmatrix} 0 \\ M_r^{-1}F_r \end{bmatrix},$$

Η λύση γίνεται μέσω της συνάρτησης ode15s. Έχοντας βρει τη λύση, προκύπτει πως το τελικό αποτέλεσμα για όλους τους βαθμούς ελευθερίας είναι:

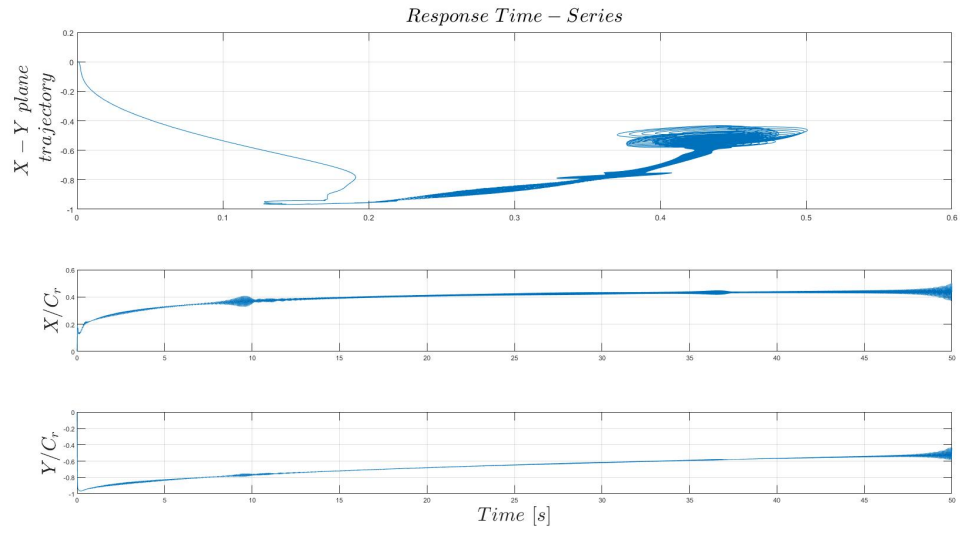
$$\begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = [T_r]y_1$$

Χρονοσειρές απόκρισης

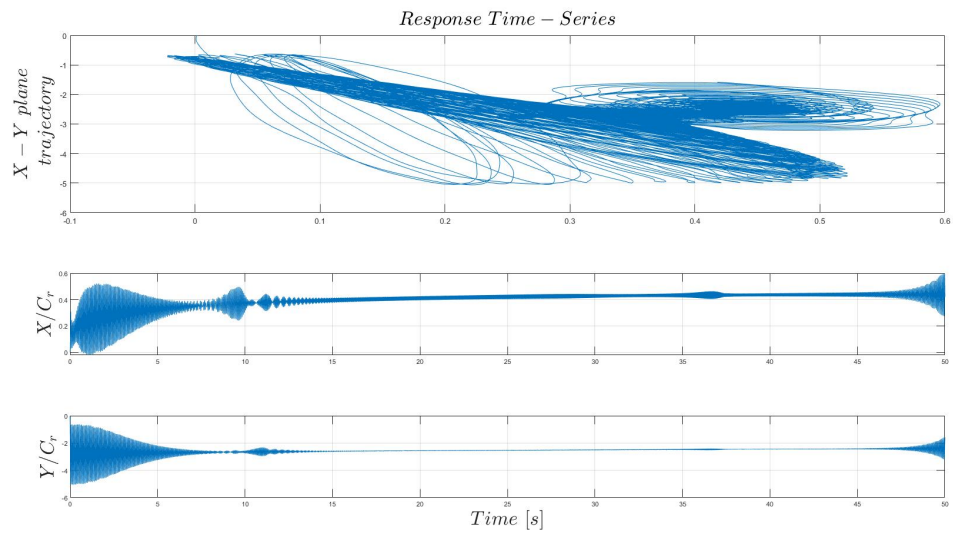
Τελικά οι προκύπτουσες χρονοσειρές παρουσιάζονται στα σχήματα 1,2,3. Παρατηρείται πως η απόκριση γίνεται ασταθής αρκετά μακριά από την ταχύτητα λειτουργίας, και συγκεκριμένα το όριο ευστάθειας φαίνεται να είναι περίπου 470 rad/s . Ακόμα παρουσιάζεται και η τροχιά των σημείων στο χρόνο, η οποία δεν παρουσιάζει κάτι ιδιαίτερο αφού δεν προλαβαίνει να εξελιχθεί τελείως το φαινόμενο του oil whip.

Ερώτημα 2

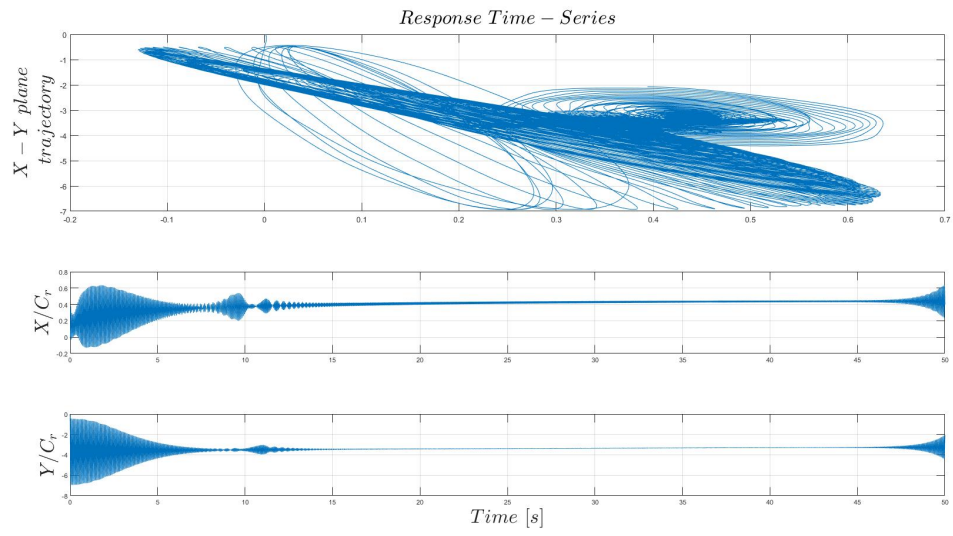
Οι προκύπτουσες χρονοσειρές για ζεύγος αζυγοσταθμίας παρουσιάζονται στα σχήματα 4,5,6.



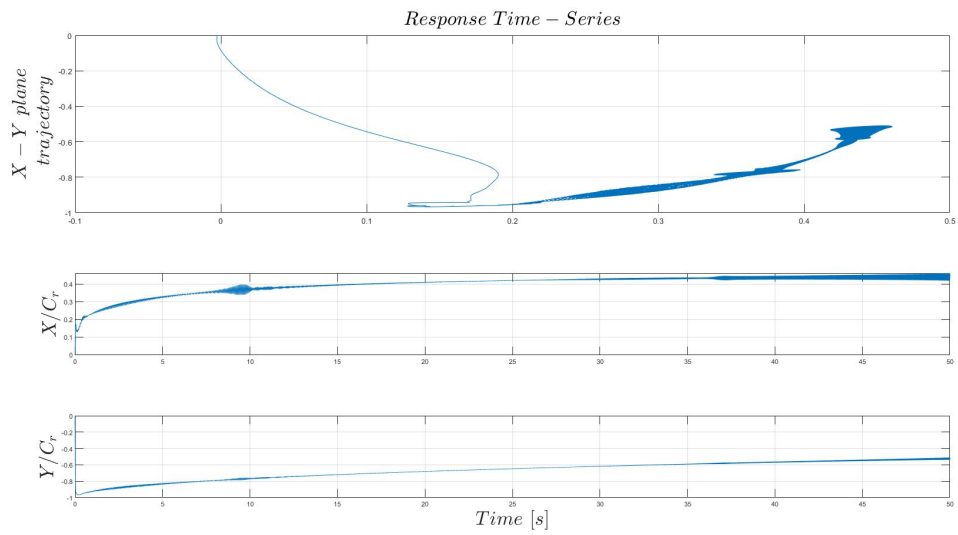
Σχήμα 1: Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο έδρανο 1



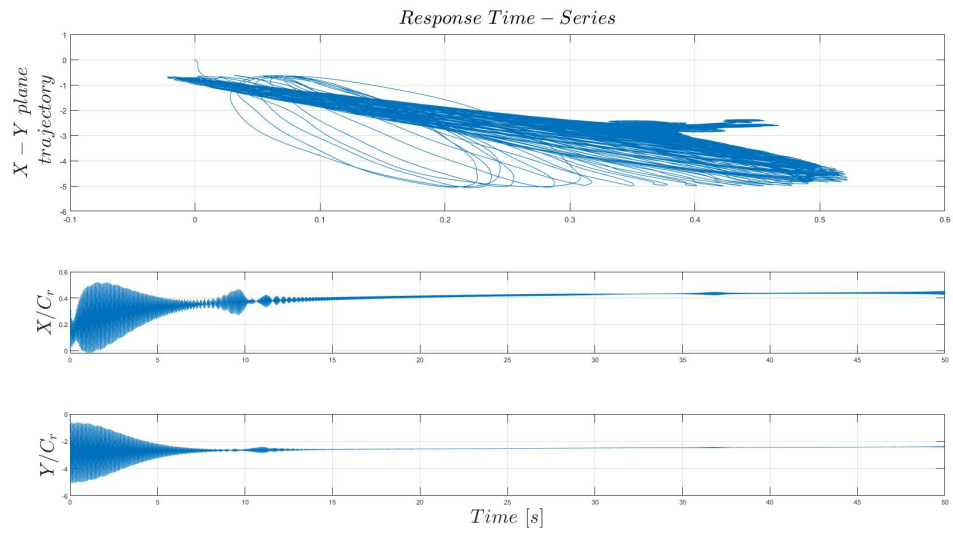
Σχήμα 2: Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας



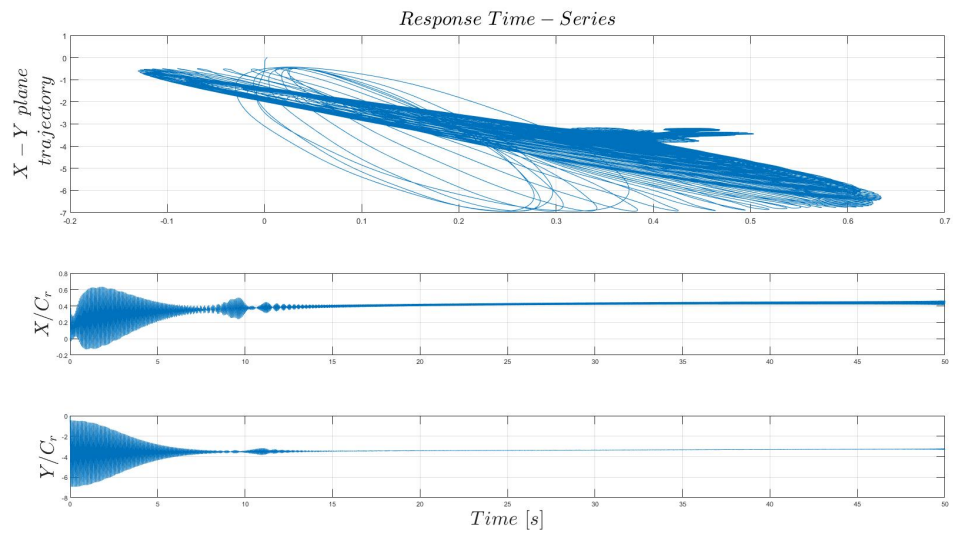
Σχήμα 3: Χρονοσειρά απόκρισης για single unbalance στο midspan



Σχήμα 4: Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο έδρανο 1



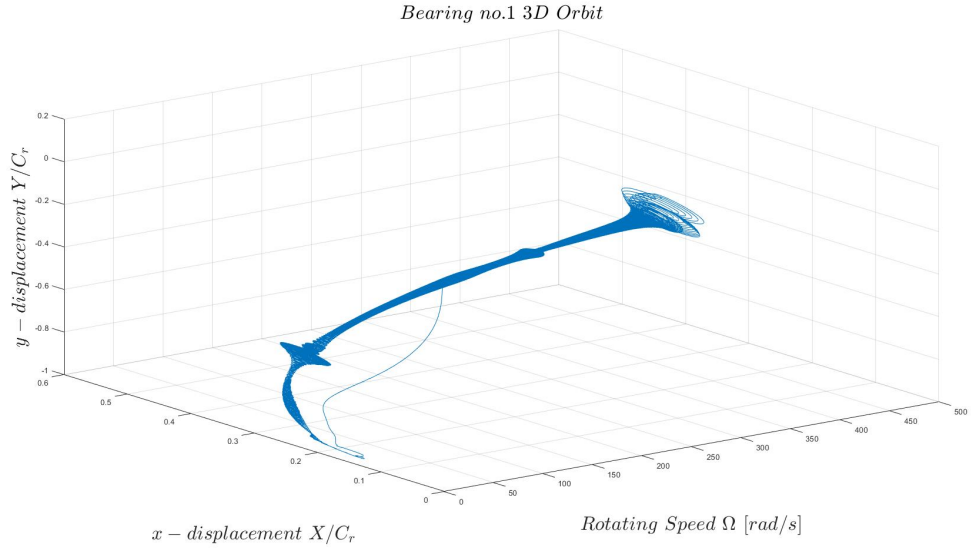
Σχήμα 5: Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας



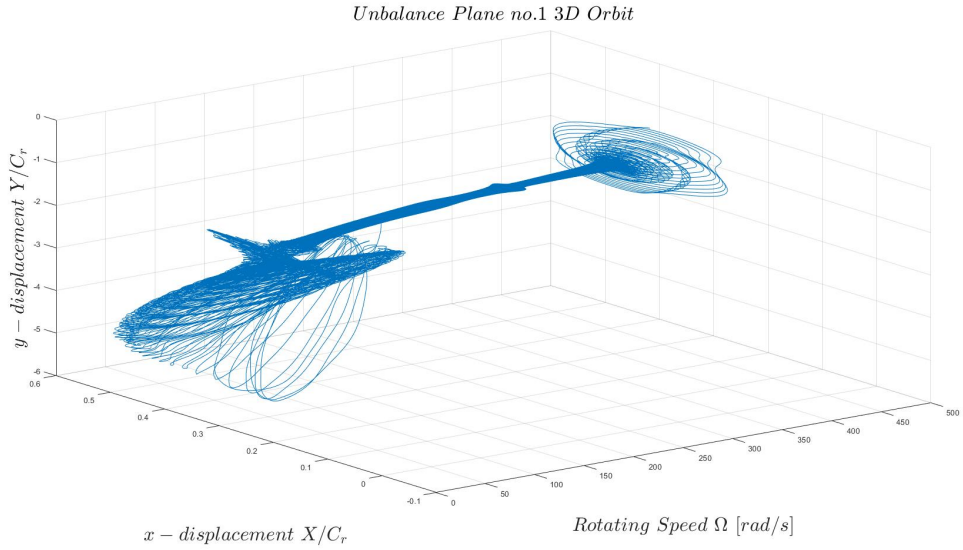
Σχήμα 6: Χρονοσειρά απόκρισης για pair unbalance στο midspan

Ερώτημα 3

Οι 3D τροχιές παρουσιάζονται στα σχήματα 7,8,9. Δεν παρουσιάζονται για διπλή αζυγοσταθμίας διότι τα αποτελέσματα προκύπτουν παρόμοια.



Σχήμα 7: Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο έδρανο 1

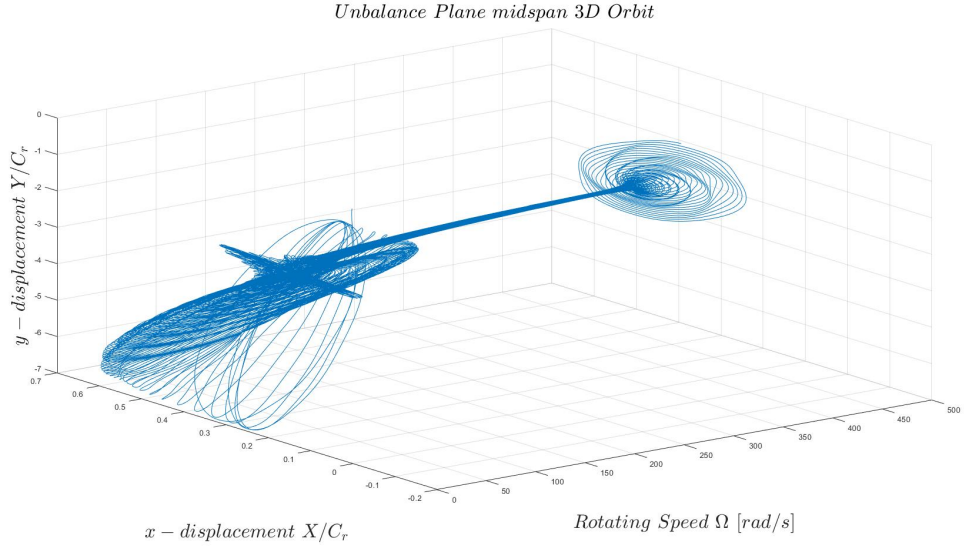


Σχήμα 8: Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο πρώτο επίπεδο αζυγοσταθμίας

Ερώτημα 4

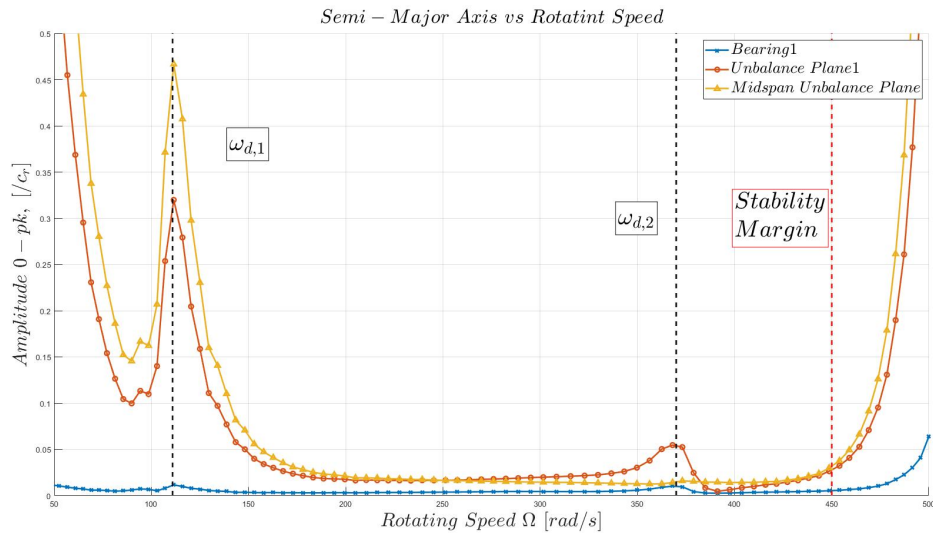
Η απόκριση αζυγοσταθμίας παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα. Καθώς δεν εξετάζεται η μόνιμη κατάσταση ώστε να βρεθεί ο κύριος άξονας της έλλειψης με αναλυτικό τύπο, χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω σχέση ώστε να υπολογισθεί η ένταση των ταλαντώσεων.

$$\bar{r} = \frac{\max(\sqrt{x^2 + y^2}) - \min(\sqrt{x^2 + y^2})}{2} \quad (9)$$



Σχήμα 9: Τρισδιάστατη τροχιά σε single unbalance στο midspan

όπου τα x, y λαμβάνονταν κάθε φορά στο διάστημα ανάμεσα σε δύο σημεία του διαγράμματος αζυγοσταθμίας. Έτσι, προκύπτει το διάγραμμα αζυγοσταθμίας στη μεταβατική απόκριση που παρουσιάζεται στο σχήμα 10.



Σχήμα 10: Διάγραμμα αζυγοσταθμίας στη μεταβατική απόκριση

Από το διάγραμμα αυτό φαίνονται 2 κρίσιμες ταχύτητες στα:

$$\omega_{d,1} = 110 \text{ rad/s}, \omega_{d,2} = 370 \text{ rad/s}$$

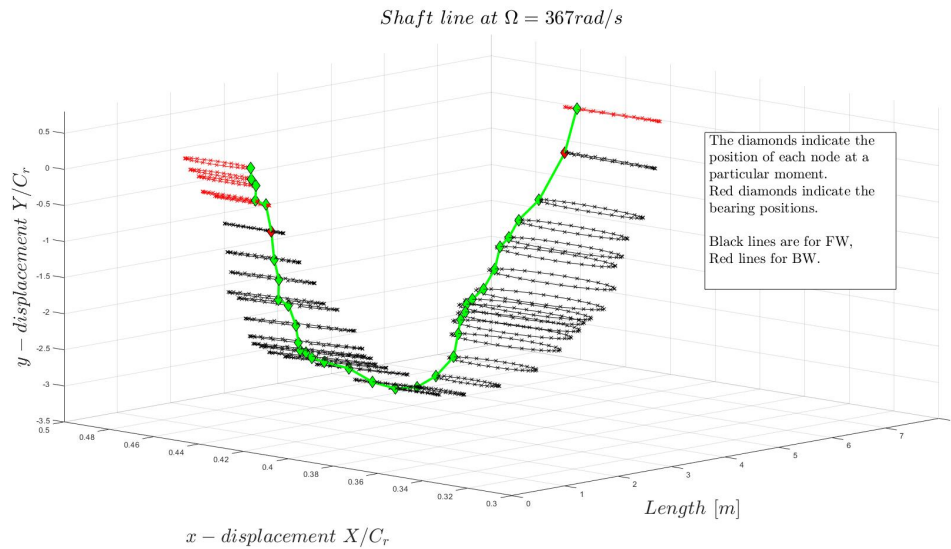
ενώ το όριο ευστάθειας βρίσκεται περίπου στα :

$$\omega_M = 450 \text{ rad/s}$$

Δεν παρουσιάζονται αποτελέσματα για διπλή αζυγοσταθμία διότι τα αποτελέσματα προκύπτουν παρόμοια.

Ερώτημα 5

Η ελαστική γραμμή του άξονα φαίνεται στο σχήμα 11. Πρέπει να τονισθεί πως οι διαστάσεις είναι κάπως παραμορφωμένες διότι οι άξονες x και y δεν έχουν ίδιες διαστάσεις. Παρουσιάζονται οι κόμβοι με backwards whirling με κόκκινο χρώμα. Η πράσινη γραμμή δείχνει τη θέση του άξονα σε μια χρονική στιγμή.



Σχήμα 11: Ελαστική γραμμή άξονα στη ταχύτητα λειτουργίας

Δεν παρουσιάζεται η ελαστική γραμμή για διπλή αζυγοσταθμία διότι τα αποτελέσματα προκύπτουν παρόμοια.