אמידה נקודתית

- פרק ראשון -הצגת נתונים בטבלאות ועקומות
- פרק שני -מדדים למיקום מרכזי
- פרק שלישי –מדדים לפיזור
- פרק רביעי –אמידה נקודתית
- פרק חמישי –רווחי סמך
- פרק שישי –בדיקת השערות
- פרק שביעי –מבחן לבדיקת טיב התאמה
- פרק שמיני –ניתוח שונות
- פרק תשיעי -רגרסיה

דגימה מקרית:

<u>אוכלוסיה</u>: כלל הפריטים לגביהם אנו שואלים שאלה מסוימת

<u>פרמטר</u>: גודל קבוע המאפיין את האוכלוסייה (למשל, μ, σ, ρ)

<u>מדגם מקרי</u>: תת-אוכלוסיה שעליה בודקים את נושא השאלה, כאשר יש הסתברות שווה לכל איבר באוכלוסיה להופיע במדגם

<u>אומד</u>: על סמך תוצאות המדגם, חישוב ערך משוער לפרמטר המבוקש.

דוגמא

- <u>**אוכלוסיה**</u>**: כל הנורות המיוצרות במפעל "אור חדש"**

- <u>**פרמטר**</u>**:** ***תוחלת*** **אורך החיים של הנורות,** ***אחוז*** **הנורות התקינות, אורך החיים** ***המקסימלי*** **של הנורות וכו**

- <u>**מדגם מקרי**</u>**: 5 נורות הנבחרות אקראית מהמפעל לבדיקה**

- <u>**אומד**</u>**: ממוצע אורך החיים של ה5 נורות, אחוז המדגם שהם תקינות וכו**

ייצוג מתמטי של המדגם

x_i הוא המשתנה המקרי של התצפית ה-i.

לכל x_i אותה פונקציית הסתברות.

כל ה-x_i הם בלתי תלויים.

דוגמא: x_i =אורך החיים של הנורה שנבחרה

אמידה:

<u>סטטיסטי</u>: $\hat{\theta} = f(X_1,\dots,X_n)$

<u>דוגמה</u>:

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

<u>אומד</u> (Estimator): בתור משתנה מקרי: $\frac{\sum X_i}{n}$

<u>אומדן</u> (Estimation): תצפית של $\hat{\theta}$: על סמך מדגם מסוים $\frac{\sum x_i}{n}$

הערה: כל פונקציה של המשתנים קרויה בשם **סטטיסטי** כאשר תלויה בתצפיות המדגם בלבד ולא בשום פרמטר לא ידוע.

בסטטיסטי משתמשים בכדי לאמוד את הפרמטר, ואז ייקרא בשם **אומד**.

הערך הספציפי של האומד המחושב באמצעות המדגם נקרא **אומדן**.

דוגמא

- במדגם של 5 נורות, התקבלו התוצאות הבאות (אורך החיים בשעות) :

.789,787,800,780 ,794

- הפונקציה $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{5}X_i}{5}$ היא אומד, והמספר

$\bar{x}=\frac{(789+787+800+780+794)}{5}=790$ הוא אומדן.

- התפלגות האוכלוסיה : ממוצע μ

  סטיית התקן σ

- התפלגות התצפיות המדגם : ממוצע $\bar{x}$

  סטיית התקן S

הטייה

- הגדרה, ההטיה של האומד עבור פרמטר :

$$bias[\hat{\theta}] = E(\hat{\theta}) - \theta$$

האומד $\hat{\theta}$ הינו חסר הטייה אם $E(\hat{\theta}) = \theta$

אומדים שונים

- נתונים שני אומדים חסרי הטייה. $\mu = E(X)\,,\, \sigma^2 = V(X)$
- דוגמא יהי X משתנה מקרי. נסמן .
- ביחס למדגם בגודל 3, נגדיר שני אומדים עבור התוחלת :
- $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ו- $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$
- תשימו לב ש-2 האומדים חסרי הטייה

אומד חסר הטייה עבור התוחלת :

- משפט : $\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ הוא אומד חסר הטייה עבור μ.
- הוכחה :

$$E(\hat{\mu}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

אומד חסר הטייה עבור השונות:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$$

ג. אומד חסר הטייה עבור השונות:

משפט: אם μ ידוע, אזי $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$ הוא אומד חסר הטייה עבור σ^2.

הוכחה: $E(\hat{\sigma}^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n} = \sigma^2$

מ.ש.ל.

משפט : אם μ אינו ידוע, אזי $\hat{s}^2$

הוא אומד חסר הטייה עבור σ^2.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$a = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu)^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$\Rightarrow E(a) = n\sigma^2 - nV(\bar{X})$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow E(a) = n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2 \qquad \Rightarrow E\left(\frac{a}{n-1}\right) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: $s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$

אומד חסר הטיה עבור הפרמטר p של ההתפלגות הבינומית

- נתון : k- מספר ההצלחות

  n- מספר הניסויים

- אזי $\hat{p}=\dfrac{k}{n}$ כאשר $k\sim B(n,p)$

$$E(\hat{p})=E\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{E(k)}{n}=\frac{np}{n}=p$$

לכן הוא אומד חסר הטייה

אומד חסר הטייה עבור הפרמטר θ של התפלגות אחידה:

- נניח $X \sim U(0,\theta)$
- האומד שנבדוק הוא $\hat{\theta}_2 = \max(X_i)$
- .
- התפלגות של מקסימום:

$$F_{\hat{\theta}_2}(X) = P(\hat{\theta}_2 < x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$F_X{}' = f_X$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}_2}(n) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}_2) = \int_0^{\theta} \frac{xnx^{n-1}dx}{\theta^n} = \int_0^{\theta} \frac{nx^n dx}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\theta}$$

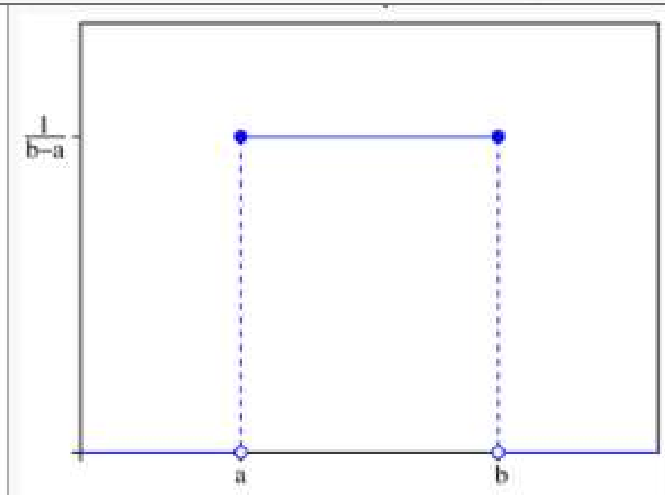
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

שימו לב שהשתמשנו בעובדה כי המקסימום קטן מ-x אם ורק אם כל האיברים קטנים מ-x.

בנוסף, השתמשנו בעובדה כי המשתנים בלתי תלויים
ולכן ההסתברות המשותפת שווה למכפלת ההסתברויות השוליות וכן הם שווי התפלגות ולכן ההסתברות המחושבת לכל משתנה שווה להסתברות המחושבת עבור המשתנה הראשון.

$$\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2 \Leftarrow$$

הוא אומד חסר הטייה.



פרמטרים	$a, b \in (-\infty, \infty)$
תומך	$a \le x \le b$
פונקציית התפלגות	$\begin{cases} 0 \ , \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \ , \ x \in [a,b] \\ 1 \ , \ x \ge b \end{cases}$
פונקציית צפיפות	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} \ , \ x \in [a,b] \\ 0 \ , \ x < a, x > b \end{cases}$
תוחלת	$\frac{a+b}{2}$
חציון	$\frac{a+b}{2}$
שונות	$\frac{(b-a)^2}{12}$

אומד חסר הטייה בצורה אסימפטוטית:

א) הגדרה: $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

אומד חסר הטייה בצורה אסימפטוטית:

א) הגדרה: $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}$$

ב) דוגמה: $E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2$$

טעות ריבועית ממוצעת Mean Squared Error (MSE)

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$$

- יהי מדגם מקרי. הקריטריון שמגדיר את טיבו של האומד , הוא תוחלת ריבוע המרחק של האומד מהערך הנאמד:
- כאן $\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$ מהווה את ריבוע המרחק של האומד מהערך האמיתי. כיוון שמרחק זה הוא משתנה מקרי, אנו מחשבים את תוחלתו - הממוצע התיאורטי של המרחקים.
- אומד טוב הוא כזה המקיים MSE מזערי. הטעות הריבועית הממוצעת תלויה בערך הפרמטר הלא ידוע ולכן יכולה להיות קטנה עבור ערכי θ מסוימים וגדולה עבור אחרים. יחד עם זאת, במידה וקיימים שני אומדים

כך ש $MSE(\hat{\theta}_1)\le MSE(\hat{\theta}_2)$ לכל ערכי θ, אנו נעדיף את $\hat{\theta}_1$ על $\hat{\theta}_2$.

ניתן לפתח את פונקציית ה-MSE :

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = E[\hat{\theta}^2+\theta^2-2\hat{\theta}\theta] = \cdots$$
$$= E[\hat{\theta}^2]+E[\theta^2]-2E[\hat{\theta}\theta] = E[\hat{\theta}^2]+\theta^2-2\theta E[\hat{\theta}] = \cdots$$
$$\ldots = E[\hat{\theta}^2]-E[\hat{\theta}]^2+E[\hat{\theta}]^2+\theta^2-2\theta E[\hat{\theta}] = \cdots$$
$$\ldots = V[\hat{\theta}]+\left(E[\hat{\theta}]-\theta\right)^2 = V[\hat{\theta}]+\left(bias[\hat{\theta}]\right)^2$$

מסקנה : עבור אומד בלתי מוטה נקבל כי $MSE\left(\hat{\theta}\right) = \mathrm{V}\left(\hat{\theta}\right)$

לכן נהיה מעוניינים בשונות מינימלית של האומד.

דוגמא: איך בוחרים בין שני אומדים חסרי הטייה?

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$$

נעדיף את האומד בעל השונות הנמוכה מבין שניהם.

$$V(\hat{\mu}_1) =$$

$$V(\hat{\mu}_2) =$$

אומד מתכנס

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

- הגדרה : אומד נקרא מתכנס אם השונות שלו שואפת לאפס

דוגמה

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

מבחן 21- שאלה 2

נתון מדגם בגודל n=2. מציעים אומד עבור התוחלת:

$$\hat{\mu} = aX_1 + bX_2$$

.

- [1] איזה תנאי צריכים לקיים a ו-b כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?
- [2] תחת התנאי שבסעיף א, מה ערכם של a ו-b כדי שהאומד יהיה בעל שונות מזערית?

פתרון

1. $$E(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a \cdot E(X_1) + b \cdot E(X_2)$$

$$= a \cdot \mu + b \cdot \mu = (a + b) \cdot \mu$$

$$=> a + b = 1$$

$$b = 1 - a$$

2. $$V(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a^2 \cdot \sigma^2 + b^2 \cdot \sigma^2$$

$$= (a^2 + b^2) \cdot \sigma^2 = F(a) \cdot \sigma^2$$

$$F(a) = a^2 + (1 - a)^2 = a^2 + 1 + a^2 - 2 \cdot a$$

$$F'(a) = 4 \cdot a - 2 = 0$$

$$=> a = \frac{1}{2}$$

$$F''(a) = 4 > 0$$

שיטת הנראות המירבית

א. נראות של מדגם (X1,....Xn)

L(X1,…Xn; θ)= $\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

במקרה בדיד לוקחים עבור $f(x_i,\theta)$ את $P_\theta(X=x_i)$

ב. שיטת הנראות המרבית

- הגדרה: אומדן בעל נראות מרבית $\hat{\theta}$ מקיים את התנאי הבא:

$$\forall \theta \in \Theta \qquad L(x,\hat{\theta}) \geq L(x,\theta)$$

- דרך החישוב:

$$L(x,\hat{\theta}) = \max L(x,\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- יש לבדוק שהנגזרת השנייה שלילית.

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}, E(X)=V(X)=\lambda$$

דוגמא:

$$X \sim P(\lambda)$$

המודל הפואסוני:
הוכח שממוצע המדגם
הוא אומד נראות
מקסימלית עבור λ

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_i}}{k_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum k_i}}{\prod k_i!}$$

$$\ln L = -n\lambda + \sum k_i \ln\lambda - \ln\left(\prod k_i!\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum k_i}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum k_i}{n} = \bar{k}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum k_i}{\lambda^2} < 0$$

התפלגות פואסון מתקבלת כאשר סופרים אירועים נדירים שמתרחשים בפרק זמן קבוע ((קצב-λ). אם האירועים מתרחשים באופן בלתי תלוי ובקצב (ממוצע) קבוע, אזי מספר האירועים שהתרחשו בפרק זמן נתון מתפלג פואסונית.

דוגמא :

נניח שהגעת למדינה חדשה. אינך יודעת מה הסיכוי ללידת בת בכל לידה, אבל את רואה כמה בנות יש בשלוש משפחות, כל אחת בת שבעה ילדים.
על סמך מידע זה, מה לדעתך הסיכוי ללדת בת?– 25%? 50%? 75?

משפחה	מס בנות במשפחה
1	6
2	4
3	6

שימי לב ש-4 מתוך 7 הם0.571, ו-6 מתוך 7 הם0.857. אולם יש שתי משפחות עם 6 בנות ואילו רק משפחה אחת עם 4 בנות. איך נחשב את הסיכוי הכי מתאים ללידת בת?

- אפשר למצוא את הסיכוי הכי מתאים (הנראות המרבית) אם לוקחים את המכפלה של כל ההתפלגויות, גוזרים ומשווים לאפס.
- מכיוון שהמשוואה תהיה מכפלה מורכבת, כדאי ראשית להפעיל ln על שני האגפים.

$$1.L(p)=\binom{7}{6}p^{6}(1-p)^{1}\bullet\binom{7}{6}p^{6}(1-p)^{1}\bullet\binom{7}{4}p^{4}(1-p)^{3}=1715p^{16}(1-p)^{5}$$

וזה אומדן ה"נראות המרבית" של הסיכוי לבת (p) בכל לידה.

מבחן 20

- נתון משתנה מקרי X המתפלג על פי הצפיפות .

$$f(x)=\frac{2}{\theta^2}(\theta-x) \quad 0<x<\theta$$

נתון מדגם בגודל n=2.

- [10] מצא אומד בעל נראות מרבית עבור n=2.
- [5] ממש את אשר מצאת בסעיף א' וחשב את האומדן אם נתון :

$$x_1=2, x_2=5$$

3)

א)

$$L = \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^2 \cdot (\theta - x_1) \cdot (\theta - x_2)$$
$$= \frac{4}{\theta^4} \cdot [\theta^2 - \theta \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2]$$
$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{x_1 + x_2}{\theta^3} + \frac{x_1 \cdot x_2}{\theta^4}\right]$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 4 \cdot \left[-\frac{2}{\theta^3} + \frac{3 \cdot (x_1 + x_2)}{\theta^4} - \frac{(4 \cdot x_1 \cdot x_2)}{\theta^5}\right] = 0$$
$$=> -2 \cdot \theta^2 + 3 \cdot \theta \cdot (x_1 + x_2) - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$=> \theta = \frac{-3 \cdot (x_1 + x_2) \pm \sqrt{9 \cdot (x_1 + x_2)^2 - 32 \cdot x_1 \cdot x_2}}{-4}$$
$$\hat{\theta} = \frac{3 \cdot (x_1 + x_2) \pm \sqrt{9 \cdot (x_1 + x_2)^2 - 32 \cdot x_1 \cdot x_2}}{4}$$

ב)

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$
$$=> \hat{\theta} = \frac{3 \cdot 7 \pm \sqrt{9 \cdot 7^2 - 32 \cdot 10}}{4}$$
$$= \frac{21 \pm 11}{4} = 8 , 2.5$$

2.5 לא יתכן, לכן $\hat{\theta} = 8$.

משתנה מקרי X מתפלג על-פי פונקציית צפיפות ההסתברות הבאה –

$$f(x) = \begin{cases} e^{\theta - x} & x \ge \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נתון מדגם בגודל n מאוכלוסייה המתפלגת על-פי המשתנה המקרי X.

נחלץ אומד נראות מקסימלי לפרמטר θ – נרשום את פונקציית הנראות –

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \cdots$$

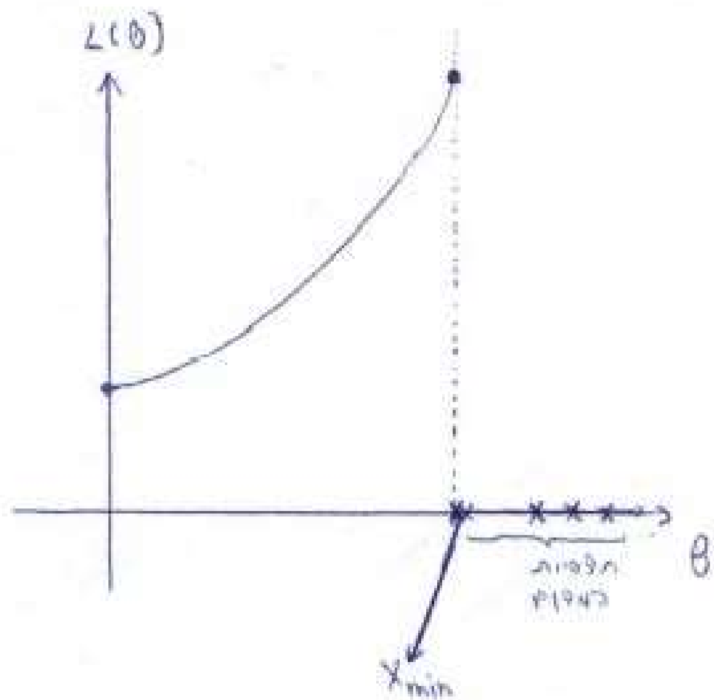
$$\ldots = e^{\theta - x_1} e^{\theta - x_2} e^{\theta - x_3} \cdot \ldots \cdot e^{\theta - x_n} = e^{n\theta} e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ניתן לראות כי פונקציית הנראות מונוטונית עולה ב-θ ללא שקיימת נקודת קיצון. לאור זה על מנת שפונקציית הנראות תקבל ערך מקסימום היינו צריכים לאמוד את θ להיות שווה לאינסוף.

אבל מאידך קיימת המגבלה כי צפיפות ההסתברות של המשתנה המקרי לא תהיה שווה ל- 0, רק כשמתקיים התנאי $\theta \le x_i$ לכל אחת מהתצפיות שבמדגם. אם קיימת תצפית שעבורה $\theta > x_i$ אזי לאותו x_i מתקיים $f(x_i) = 0$. במצב זה נקבל שפונקציית הנראות הנה 0 כיון שבמכפלת פונקציות הצפיפות קיימת פונקציה אחת (לפחות) ששווה ל- 0.

כלומר, פונקציית הנראות מונוטונית עולה ב- θ, כל עוד הערך של θ קטן מכל תצפיות המדגם. היה ונגדיל את θ ונעבור גבול שבו θ חוצה בגודלה אפילו רק את ערך התצפית המינימלית הקיימת במדגם, אזי פונקציית הנראות תהיה שווה ל- 0.

גרף פונקציית הנראות ייראה אם-כן כך –



לא תמיד השיטה של גזירה עובדת:

או – פונקציית הנראות עולה ב- θ, עד הנקודה $\theta = x_{min}$. לכל $\theta > x_{min}$ נקבל כי $L(\theta) = 0$.
לכן אומד נראות מקסימלי ל- θ, יהיה במקרה זה:

$$\hat{\theta} = x_{min}$$

קיימים גם המקרים ההפוכים שבהם פונקציית הנראות מונוטונית יורדת, ואז נקבל $\hat{\theta} = x_{max}$.

שאלה 1

נתונה פונקציית צפיפות הסתברות למשתנה מקרי X כדלקמן:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. [10] הוכח ש- $\bar{X}$ אינו אומד חסר הטיה לפרמטר θ.

ב. [5] קיים אומד חסר הטיה לפרמטר θ מהצורה $m\bar{X}$, כאשר m הוא מספר קבוע. על בסיס תשובתך לסעיף א' מצא את ערכו של m.

ג. [10] מצא אומד בעל נראות מרבית (מקסימלית) לפרמטר θ.

תזכורת: למשתנה מקרי רציף: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

פתרון 1

א. נחשב תוחלת ל- $\bar{X}$ –

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \cdots$$

$$\dots = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \cdots$$

נחשב תוחלת למשתנה המקרי –

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \cdots$$

$$\dots = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^2 dx = \frac{2}{\theta^2}\cdot\frac{1}{3}[x^3]_0^{\theta} = \frac{2}{3\theta^2}(\theta^3 - 0^3) = \frac{2}{3}\theta$$

ולכן –

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3}\theta = \frac{1}{n}n\frac{2}{3}\theta = \frac{2}{3}\theta \neq \theta$$

ומכאן כי האומד $\bar{X}$ אינו אומד חסר הטיה לפרמטר θ.

ב. קיבלנו –

$$E[\bar{X}] = \frac{2}{3}\theta$$

מכאן –

$$\frac{3}{2}E[\bar{X}] = \theta \quad \Longrightarrow \quad E\left[\frac{3}{2}\bar{X}\right] = \theta$$

ולכן קיבלנו שהאומד $\frac{3}{2}\bar{X}$ הנו אומד חסר הטיה לפרמטר θ.

ג. נרשום פונקציית נראות לפרמטר θ –

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \cdots$$

$$\cdots = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i$$

ניתן לראות ש- $L(\theta)$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ב- θ. לכן עקרונית על מנת להגדיל במידת האפשר את פונקציית הנראות, נרצה להקטין את θ במידת האפשר. מאידך קיימת המגבלה הנתונה בפונקציית הצפיפות של X לפיה $x \geq \theta$. לכן על מנת שפונקציית הנראות לא תתאפס, הפרמטר θ צריך להיות גדול או שווה לכל אחת מתצפיות המדגם, כלומר צריך להיות גדול או שווה לתצפית הגבוהה ביותר x_{max}. מכאן כי נקטין את θ עד הערך המירבי האפשרי שהוא x_{max}. לכן אומד נראות מקסימלי לפרמטר θ הוא - $\hat{\theta} = x_{max}$.

<u>שאלה 2</u>

משתנה מקרי X מקבל את הערכים 0 ו- 1 בלבד.

פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X היא –

$$P(X=x)=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^{1-x}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)^{x}$$

בהתאם לכך מתקבל כי –

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^{1-0}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)^{0}=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)$$

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^{1-1}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)^{1}=\left(\frac{1}{2}+\theta\right)$$

<u>א.</u> **[12]** הוכח כי האומד $\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$, הוא אומד נראות מרבית (מקסימלית) לפרמטר θ.

<u>ב.</u> **[10]** הוכח כי האומד $\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$, הוא אומד חסר הטיה לפרמטר θ.

<u>ג.</u> **[12]** האם האומד $\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$, הוא אומד מתכנס לפרמטר θ? נמק ופרט את שיקוליך וחישוביך.

שאלה 3

משתנה מקרי X מקבל את הערכים -1 או 1 בלבד, כאשר פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי זה היא:

$$P(X = x) = p^{\frac{1+x}{2}}(1-p)^{\frac{1-x}{2}}$$

כאשר $0 \le p \le 1$.

על מנת לאמוד את הפרמטר p שבפונקציית ההסתברות, נלקח מדגם מהאוכלוסייה:

$$X_1, X_2, X_3, \dots \dots, X_{n-1}, X_n$$

א. בהתבסס על המדגם כאמור שנלקח מהאוכלוסייה, מצאו אומד נראות מרבית (מקסימלית) לפרמטר p אשר בפונקציית ההסתברות.

ב. הוכיחו שהאומד שמצאתם בסעיף א' הוא אומד חסר הטיה לפרמטר p. פרטו ונמקו את חישוביכם ותשובתכם.

ג. האם האומד שמצאתם בסעיף א' הוא אומד מתכנס לפרמטר p ? פרטו ונמקו את חישוביכם ותשובתכם.

הערה – בפתרון סעיף זה, התחשבו בכך ששונות המשתנה המקרי X היא σ^2.

פתרון 3

א. נרשום פונקציית נראות –

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|p) = \cdots$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{\frac{1+x_i}{2}}(1-p)^{\frac{1-x_i}{2}} = [p(1-p)]^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{x_i}{2}} =$$

$$\dots = [p(1-p)]^{\frac{n}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

נרשום את לוגריתם פונקציית הנראות –

$$l(p) = \ln[L(p)] = \cdots$$

$$\dots = ln\left\{[p(1-p)]^{\frac{n}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right\} = \cdots$$

$$= \frac{n}{2}\ln(p) + \frac{n}{2}\ln(1-p) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot [\ln(p) - \ln(1-p)] = 0$$

נגזור לפי p ונשווה ל- 0 – נקבל –

$$\frac{dl(p)}{dp} = \frac{n}{2p} + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{1-p} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p} \cdot (-1)\right] = \cdots$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{1-p-p}{p(1-p)}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{p+1-p}{p(1-p)}\right] = 0$$

נקבל –

$$n(1-2p) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$2np = n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bar{x}$$

לכן אומד נראות מרבית ל- p הוא –

$$\hat{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bar{X}$$

ב. נבדוק הטיה/אי-הטיה של האומד שחולץ בסעיף א' –

$$E[\hat{p}] = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{X}\right] = \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[\bar{X}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

נחשב את $E[X_i]$ –

$$P(X_i = 1) = p^{\frac{1+1}{2}}(1-p)^{\frac{1-1}{2}} = p$$

$$P(X_i = -1) = p^{\frac{1+(-1)}{2}}(1-p)^{\frac{1-(-1)}{2}} = 1-p$$

ולכן –

$$E[X] = \sum_{x} xP(X = x) = \cdots$$

$$= 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$$

נקבל בהתאם בהמשך פיתוח תוחלת $\hat{p}$ –

$$\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(2p-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \cdot n(2p-1) = \frac{1}{2} + p - \frac{1}{2} = p$$

מכאן כי –

$$E[\hat{p}] = p$$

מסקנה – האומד $\hat{p}$ הוא אומד חסר הטיה לפרמטר p.

ג. נחשב את שונות האומד –

$$V[\hat{p}] = V\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{X}\right] = \cdots$$

$$\frac{1}{4}V[\bar{X}] = \frac{1}{4}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{4n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{4n}$$

לכן –

$$\lim_{n\to\infty} V[\hat{p}] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{4n} = \cdots$$

$$= \frac{\sigma^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{\sigma^2}{4}\cdot 0 = 0$$

מסקנה – האומד $\hat{p}$ הוא אומד מתכנס של הפרמטר p.

שאלה 3

משתנה מקרי בדיד X מתפלג על-פי פונקציית ההסתברות הבאה –

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-p)^{x-\alpha}p & x\geq\alpha\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאשר α הנו מספר חיובי שלם כלשהו.

א. [13] בהנחה שערכו של הפרמטר α ידוע, מצאו אומד נראות מרבית לפרמטר p שבפונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X.

ב. [11] נניח עתה שערכו של הפרמטר α לא ידוע, וכן כי ערכו של הפרמטר p ידוע והוא 0.75. כלומר על-פי כך פונקציית ההסתברות של X היא -

$$P(X=x)=\begin{cases}0.25^{x-\alpha}\cdot 0.75 & x\geq\alpha\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

לאור כך, מצאו אומד נראות מרבית (מקסימלית) לפרמטר α שבפונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X.

ג. מתוך האוכלוסייה הנדונה נלקח מדגם בגודל 6. התצפיות שהתקבלו הן –

2 , 6 , 5 , 9 , 4 , 4

(1) [5] בהנחה שערכו של הפרמטר α ידוע, חשבו אומדן נראות מרבית של הפרמטר p כפונקציה של α.

(2) [5] בהנחה שערכו של הפרמטר α לא ידוע וכן שערכו של הפרמטר p הוא 0.75, חשבו אומדן נראות מרבית של הפרמטר α.

פתרון 3

א. נחשב פונקציית נראות –

$$L[p]=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i|p)=\cdots$$

$$\ldots=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-\alpha}p=\frac{p^n}{(1-p)^{\alpha n}}\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i}$$

נעביר לצורת לוגריתמית –

$$l[p]=\ln\{L[p]\}=\cdots$$

$$=nln(p)-\alpha n\cdot ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(1-p)$$

נגזור לפי p –

$$\frac{dl(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\alpha n}{1-p}\cdot(-1)+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{1-p}\cdot(-1)=0$$

$$\frac{n}{p}+\frac{\alpha n}{1-p}-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{1-p}=0$$

$$n(1-p)+\alpha np-p\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$p\sum_{i=1}^{n}x_i+np-\alpha np=n$$

יתקבל –

$$p=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i+n(1-\alpha)}$$

לכן אומד נראות מרבית ל- p הוא –

$$\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i+n(1-\alpha)}$$

ב. נחשב פונקציית נראות –

$$L[\alpha]=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i|\alpha)=\cdots$$

$$\ldots=\prod_{i=1}^{n}0.25^{x_i-\alpha}\cdot 0.75=\frac{0.75^n}{0.25^{\alpha n}}\prod_{i=1}^{n}0.25^{x_i}$$

ניתן לראות כי פונקציית הנראות היא מונוטונית עולה ב- α.

מאידך, הנחת החישוב לעיל לפיה לכל איברי המכפלה לעיל מתקיים כי $P(X_i=x_i|\alpha)=0.25^{x_i-\alpha}\cdot 0.75$, הנה רק בתנאי שלכל x_i במדגם התקבל $x_i\geq\alpha$. תנאי מספיק לכך הוא כי $x_{min}\geq\alpha$. אם ישנו אפילו x_i אחד אשר קטן מ- α, שתנאי מספיק לכך הוא כי $x_{min}<\alpha$, אזי בתוך המכפלה לעיל יהיה איבר השווה ל- 0, ויתקבל כי $L[\alpha]=0$. לכן למעשה ניתן לדייק ולרשום –

$$L[\alpha]=\begin{cases}\frac{0.75^n}{0.25^{\alpha n}}\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i} & x_{min}\geq\alpha\\ 0 & x_{min}<\alpha\end{cases}$$

לכן מחד נרצה שערך α יהיה הגבוה ביותר האפשרי שהרי $L[\alpha]$ הוא פונקציה עולה ב- α, ומאידך אנו מוגבלים על ידי התנאי $\alpha\leq x_{min}$. לכן נבחר את α להיות שווה ל- x_{min}.

מסקנה – אומד נראות מרבית ל- α הוא –

$$\hat{\alpha}=X_{min}$$

ג.

(1) נחשב אומדן נראות מרבית ל- p על-פי אומד הנראות המרבית שחולץ בסעיף א' לעיל-

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i + n(1-\alpha)}$$

נציב את נתוני המדגם דנן ונקבל אומדן נראות מרבית ל- p -

$$\frac{6}{2+6+5+9+4+4+6\cdot(1-\alpha)} = \frac{6}{30+6\cdot(1-\alpha)} = \cdots$$

$$= \frac{1}{5+1-\alpha} = \frac{1}{6-\alpha}$$

(2) נחשב אומדן נראות מרבית ל- p על-פי אומד הנראות המרבית שחולץ בסעיף א' לעיל-

$$\hat{\alpha} = X_{min}$$

לכן אומדן נראות מרבית ל- α אצלנו יהיה התצפית המינימלית שהיא 2.