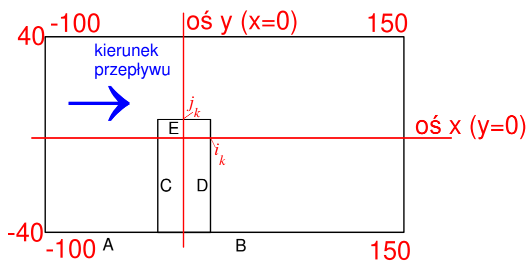
Przepływ nieściśliwej cieczy lepkiej w rurze zastawką

2 czerwca 2025

Nieściśliwa ciecz płynie przez rurę (rysunek) ze strony lewej na prawą. Do rury wstawiona jest zastawka (patrz rysunek). Znajdziemy linie strumienia cieczy (styczne do prędkości w każdym punkcie cieczy).



Rysunek 1: Rura z zastawką. Rozwiązania będziemy poszukiwać na siatce $[-100, 150] \times [-40, 40]$ punktów. Punkt siatki (i, j) odpowiada współrzędnym $(x, y) = (idz, jdz)$, $dz = 0.01$. Liczby podają numery punktów siatki na rogach pudła obliczeniowego. Przegroda mieści się na punktach od $-i_k$ do i_k siatki w kierunku x oraz na punktach od -40 do j_k siatki w kierunku y. Uwaga: w razie problemów z ujemnymi indeksami można przesunąć całe pudło o $+40$ w 'y' oraz $+100$ w 'x' z odpowiednią zmianą y_1 oraz y_2 poniżej

Funkcja strumienia ψ definiuje pole prędkości $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, a składowa z-owa rotacji pola prędkości wirowość $\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$. Stacjonarny przepływ opisują dwa równania

$$\nabla^2 \psi = \zeta \tag{1}$$

oraz

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{2}$$

Przyjmiemy lepkoś oraz gęstość płynu: $\mu = 1$, $\rho = 1$. Równania (1,2) rozwiążemy przy pomocy przepisu relaksacyjnego. W każdym kroku będziemy poprawiać rozwiązania na ψ i ζ

$$\psi(i,j) := \left[\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j) + \psi(i,j-1) + \psi(i,j+1) - \zeta(i,j)dz^2\right]/4 \quad (3)$$

(dz jest krokiem siatki, przyjmiemy $dz = 0.01$) oraz

$$\begin{aligned}\zeta(i,j) \; := \; & [\zeta(i+1,j) + \zeta(i-1,j) + \zeta(i,j-1) + \zeta(i,j+1)]/4 \\ & - \{[\psi(i,j+1) - \psi(i,j-1)][\zeta(i+1,j) - \zeta(i-1,j)] \\ & - [\psi(i+1,j) - \psi(i-1,j)][\zeta(i,j+1) - \zeta(i,j-1)]\}/16. \quad (4)\end{aligned}$$

Zad. 1 Przepływ w rurze bez zastawki (przepływ Poiseuille). Bez zastawki brzeg to cały prostokąt przedstawiony na rysunku, a równania posiadają rozwiązania analityczne. Ze względu na symetrię prędkość pionowa znika wszędzie $v = 0$, a prędkość pozioma zależy tylko od y i dana jest przez $u = \frac{Q}{2\mu}(y - y_1)(y - y_2)$, gdzie Q jest gradientem ciśnienia $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$, y_1 i y_2 dają położenie dolnego i górnego końca rury (u nas $y_2 = -y_1 = 0.4$). Dla takiego rozkładu prędkości funkcja strumienia i wirowość dane są odpowiednio przez

$$\psi_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_1 + y_2) + y_1 y_2 y\right) \quad (5)$$

oraz

$$\zeta_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}(2y - y_1 - y_2). \quad (6)$$

Zadać warunki brzegowe, wg. danych analitycznych na brzegu pudła. Przyjąć $Q = -1$. Wewnątrz pudła startujemy od $\psi = 0$ oraz $\zeta = 0$. Przeiterować równania (3-4) aż wartości funkcji strumienia i wirowości w punkcie o współrzędnych $(50 \times dz, 0 \times dz)$ z iteracji na iterację zaczną się zmieniać o mniej niż 10^{-7} (uwaga: aby sprawdzać ten warunek, należy odczekać np. 100 iteracji. Na samym starcie wartości są równe 0 i się nie zmieniają aż informacja z brzegów dotrze do tego punktu). Po uzyskaniu zbieżności: Narysować funkcję strumienia oraz wirowości na przekrojach $x = 0$ oraz $x = 0.7$. Porównać z rozwiązaniem analitycznym (5-6). Wyliczyć i narysować $u(y)$ dla $x = 0$. (**40 pkt**).

Zad. 2. Wstawiamy zastawkę. Górny i dolny brzeg są liniami strumienia cieczy. Na cały dolny brzeg łącznie z obrysem zastawki przyjmujemy wartość $\psi_0(x,y)$ dla $y = y_1$. Na górnym brzegu - bez zmian. Warunki na wirowość na górnym i dolnym brzegu wynikają ze znikania obydwu składowych prędkości oraz pochodnej stycznej składowej prędkości normalnej do brzegu (patrz wykład). W przeciwieństwie to warunków na ψ, warunki na ζ nie są one ustalone raz na zawsze. Zależą od ψ. Należy je wyliczyć od nowa w każdej iteracji. I tak: na górnym brzegu przyjmujemy

$$\zeta(i,40) = 2(\psi(i,39) - \psi(i,40))/dz^2, \tag{7}$$

na dolnym (odcinek A i B)

$$\zeta(i,-40) = 2(\psi(i,-39) - \psi(i,-40))/dz^2, \tag{8}$$

na przeszkodzie – line C i D – odpowiednio

$$\zeta(-i_k,j) = 2(\psi(-i_k-1,j) - \psi(-i_k,j))/dz^2 \tag{9}$$

oraz

$$\zeta(i_k,j) = 2(\psi(i_k+1,j) - \psi(i_k,j))/dz^2, \tag{10}$$

na górnym końcu przegrody (odcinek E)

$$\zeta(i,j_k) = 2(\psi(i,j_k+1) - \psi(i,j_k))/dz^2. \tag{11}$$

Na kantach przegrody (styk C/E, D/E) rozsądnie przyjąć średnią arytmetyczną warunków brzegowych danych dla odpowiednich odcinków. Start dla iteracji oraz warunki **brzegowe** wstawiamy z przepływu Poiseuille (5-6).

Zadania do wykonania Przyjąć $i_k = 5$ oraz $j_k = 10$. Rozwiązać równania (6) i (7) dla gradientu ciśnienia $Q = -1, -10, -100, -200$ oraz -400. Narysować linie strumienia ($\psi = const$), rozkład prędkości poziomej i pionowej dla wszystkich Q. **(40 pkt).**

Zadanie 3 20 pkt: Usuńmy lepkość $\mu = 0$. Przepływ stacjonarny wymaga wtedy aby $Q = 0$. Przepływ można opisać rozwiązując równanie Laplace'a na ψ. Nielepka ciecz ślizga się po granicach przepływu, a $\zeta = 0$. Z dala od przeszkody przepływ będzie jednorodny z $u = A$. Na wejściu i wyściu do rury możemy zadać $\psi_0 = Ay$, gdzie A możemy być równe 1. Wartości ψ_0 z górnego i dolnego końca wejścia przepisujemy odpowiednio na górną i dolną granicę rury – podobnie jak w zadaniu powyżej. Wewnątrz pudła startujemy od $\psi = 0$. Rozwiązać równanie $\nabla^2\psi = 0$ i narysować linie przepływu.

Dodatek: Do podejrzenia kod w języku fortran dla zadania 2:

```
      program viscous
      dimension psi(-200:200,-40:40)
      dimension dze(-200:200,-40:40)
      dimension psin(-200:200,-40:40)
      dimension dzen(-200:200,-40:40)
      dimension p(-200:200,-40:40)
      dimension u(-200:200,-40:40)
      dimension v(-200:200,-40:40)
      dimension pn(-200:200,-40:40)
      Q=-10
      eta=1
      rho=1
      dz=.01
      jdo=30
      ido=5
      y1=-40*dz
      y2=40*dz
      do 1 i=-100,150
      do 1 j=-40,40
      x=i*dz
      y=j*dz
      psi(i,j)=0.5*Q/eta*(1.0/3*y**3-0.5*y**2*(y1+y2)+y1*y2*y)
      dze(i,j)=0.5*Q/eta*(2*y-y1-y2)
1     continue
      do 100 iter=1,30000
c warunki brzegowe na funkcję strumienia
      do 2 j=-39,jdo
      psi(-ido,j)=psi(-100,-40)
      psi( ido,j)=psi(-100,-40)
2     continue
      do 3 i=-ido,ido
      psi(i,jdo)=psi(-100,-40)
3     continue



c warunki brzegowe na wirowosc
       do 101 i=-99,149
```

```
      dze(i,-40)=2*(psi(i,-39)-psi(i,-40))/dz**2
      dze(i,40)=2*(psi(i,39)-psi(i,40))/dz**2
101   continue
      do 102 j=-39,jdo
      dze(-ido,j)=2*(psi(-ido-1,j)-psi(-ido,j))/dz**2
      dze(ido,j)= 2*(psi(ido+1,j)-psi(ido,j))/dz**2
102   continue
      do 103 i=-ido+1,ido-1
      dze(i,jdo)=2*(psi(i,jdo+1)-psi(i,jdo))/dz**2
103   continue
      dze(-ido,jdo)=dze(-ido,jdo)/2+
     >(psi(-ido,jdo+1)-psi(-ido,jdo))/dz**2
      dze(ido,jdo)=dze(ido,jdo)/2
     >+(psi(ido,jdo+1)-psi(ido,jdo))/dz**2
      do 104 i=-99,149
      do 104 j=-39,39

c rownanie na psi
      psin(i,j)=(psi(i+1,j)+psi(i-1,j)+psi(i,j-1)+psi(i,j+1))/4
     >-dze(i,j)/4*dz**2
      dzen(i,j)=(dze(i+1,j)+dze(i-1,j)+dze(i,j-1)+dze(i,j+1))/4-
     >rho/eta/16*((psi(i,j+1)-psi(i,j-1))*(dze(i+1,j)-dze(i-1,j))
     >          -(psi(i+1,j)-psi(i-1,j))*(dze(i,j+1)-dze(i,j-1)) )
104   continue
      do 105 i=-99,149
      do 105 j=-39,39
      psi(i,j)=psin(i,j)*1+psi(i,j)*.0
      dze(i,j)=dzen(i,j)*1+dze(i,j)*.0
105   continue
      if(mod(iter,100).eq.0) write(*,*) psi(50,0),psi(60,20)
100   continue

     do 33 i=-100,150
     do 33 j=-40,40
     write(2,*) i,j,psi(i,j),dze(i,j)
33   continue
     do 34 j=jdo+1,39
     write(3,*) j,(psi(0,j+1)-psi(0,j-1))/dz
```

```
34    continue
       do 201 i=-99,149
       do 201 j=-39,39
       u(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/2/dz
       v(i,j)=-(psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/2/dz
       write(4,*) i,j,u(i,j)**2+v(i,j)**2
201    continue
       do 333 j=-39,39
       write(1,*) j,u(0,j)
333    continue c       stop
       do 200 i=-40,40
       p(-100,i)=0
200    p(100,i)=dz*200*q


       end
```