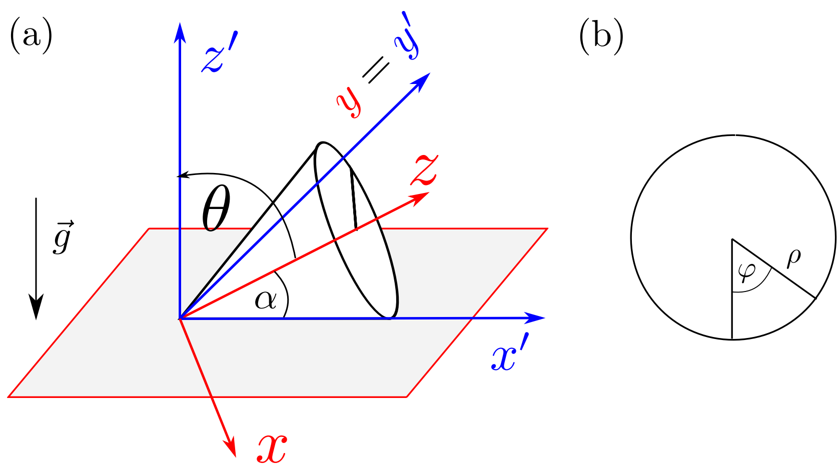
Projekt 2: symulacja ruchu cząstki w układzie z więzami

13 listopada 2018

1 Wstęp



Rysunek 1: a) geometria układu, b) przekrój stożka

Na zajęciach rozważaliśmy ruch cząstki poruszającej się w polu grawitacyjnym po powierzchnii stożka. Stożek o kącie rozwarcia 2α położony jest na płaszczyźnie $x'y'$ jak na rysunku. Aby rozwiązać problem, użyliśmy współrzędnych cylindrycznych z osią z pokrywającą się z osią symetrii stożka tj. $(x, y, z) \to (\rho, \varphi, z)$. Znalezione równania ruchu mają postać

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g\,\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}\,\frac{\sin(\varphi)}{z} - \frac{2\,\dot{z}\,\dot{\varphi}}{z} \tag{1}$$

$$\ddot{z} = \sin^2(\alpha)\,z\,\dot{\varphi}^2 - g\,\sin(\alpha)\,\cos^2(\alpha)[1 - cos(\varphi)] \tag{2}$$

Mamy więc układ równań różniczkowych 2 rzędu. Znajdziemy jego rozwiązania numerycznie przy użyciu metody RK4. W tym celu wprowadzamy nowe zmienne

$$s_0 = \varphi \tag{3}$$

$$s_1 = z \tag{4}$$

$$s_2 = \dot{\varphi} \tag{5}$$

$$s_3 = \dot{z} \tag{6}$$

i poprzedni układ 2 równań 2 rzędu zamieniamy na układ 4 równań 1 rzędu

$$\dot{s}_0 = f_0(t, \vec{s}) = s_2 \tag{7}$$

$$\dot{s}_1 = f_1(t, \vec{s}) = s_3 \tag{8}$$

$$\dot{s}_2 = f_2(t, \vec{s}) = -g\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}\,\frac{\sin(s_0)}{s_1} - \frac{2\,s_2\,s_3}{s_1} \tag{9}$$

$$\dot{s}_3 = f_3(t, \vec{s}) = \sin^2(\alpha)\,s_1\,s_2^2 - g\,\sin(\alpha)\,\cos^2(\alpha)[1 - \cos(s_0)] \tag{10}$$

1.1 implementacja

Prawe strony równań (7)-(10) stanowią elementy wektora $\vec{f}(t,\vec{s})$ które wyznaczamy w programie w procedurze liczącej wartości pochodnych

```
void pochodne( double t, double *s, double *k){
        double alfa=0.5;
        double g=9.81;

        k[0]= f_0(t,s);
        k[1]= f_1(t,s);
        k[2]= f_2(t,s);
        k[3]= f_3(t,s);

        return;
}
```

Mając procedurę *rk4_vec* i *pochodne* możemy przystąpić do wykonania symulacji ruchu cząstki.

1.2 kontrola jakości rozwiązania

Do kontroli jakości rozwiązania wykorzystamy energię całkowitą układu, która powinna być stała

$$E = \frac{1}{2}\left[tg^2(\alpha)\, z^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{z}^2}{\cos^2(\alpha)}\right] + g\, z\, \sin(\alpha)[1 - cos(\varphi)] \tag{11}$$

Energia wyznaczona numerycznie może się w czasie zmieniać ze względu na błędy numeryczne. Jeśli rozwiązanie jest poprawne to zmiany te są bardzo małe tj. rzędu 10^{-4} wartości energii lub mniejsze.

1.3 wizualizacja

Trajektorię wyznaczamy w układzie cylindrycznym $\vec{r}(t) = [\rho(t), \varphi(t), z(t)]$ możemy więc od razu poznać położenie cząstki w układzie związanym ze stożkiem. Jeśli jednak chcielibyśmy zobaczyć jak wygląda trajektoria w układzie laboratoryjnym O' ($\vec{r}\,' = (x', y', z')$) to współrzędne $\vec{r} = (x, y, z)$ musimy przetransformować. Na rysunku 1(a) widać że układ O' jest obrócony względem układu związanego ze stożkiem O o kąt θ wokół osi $0y$ (osie y i y' pokrywają się). Taką transformację opisuje macierz obrotu $R_y(\theta)$

$$\vec{r}\,' = R_y(\theta)\vec{r} \tag{12}$$

dla kąta

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \tag{13}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{14}$$

W układzie związanym ze stożkiem korzystamy z zależności:

$$\rho = z\, tg(\alpha) \tag{15}$$

$$x = \rho \cos(\varphi) \tag{16}$$

$$y = \rho \sin(\varphi) \tag{17}$$

$$z = z \tag{18}$$

2 Zadania do wykonania

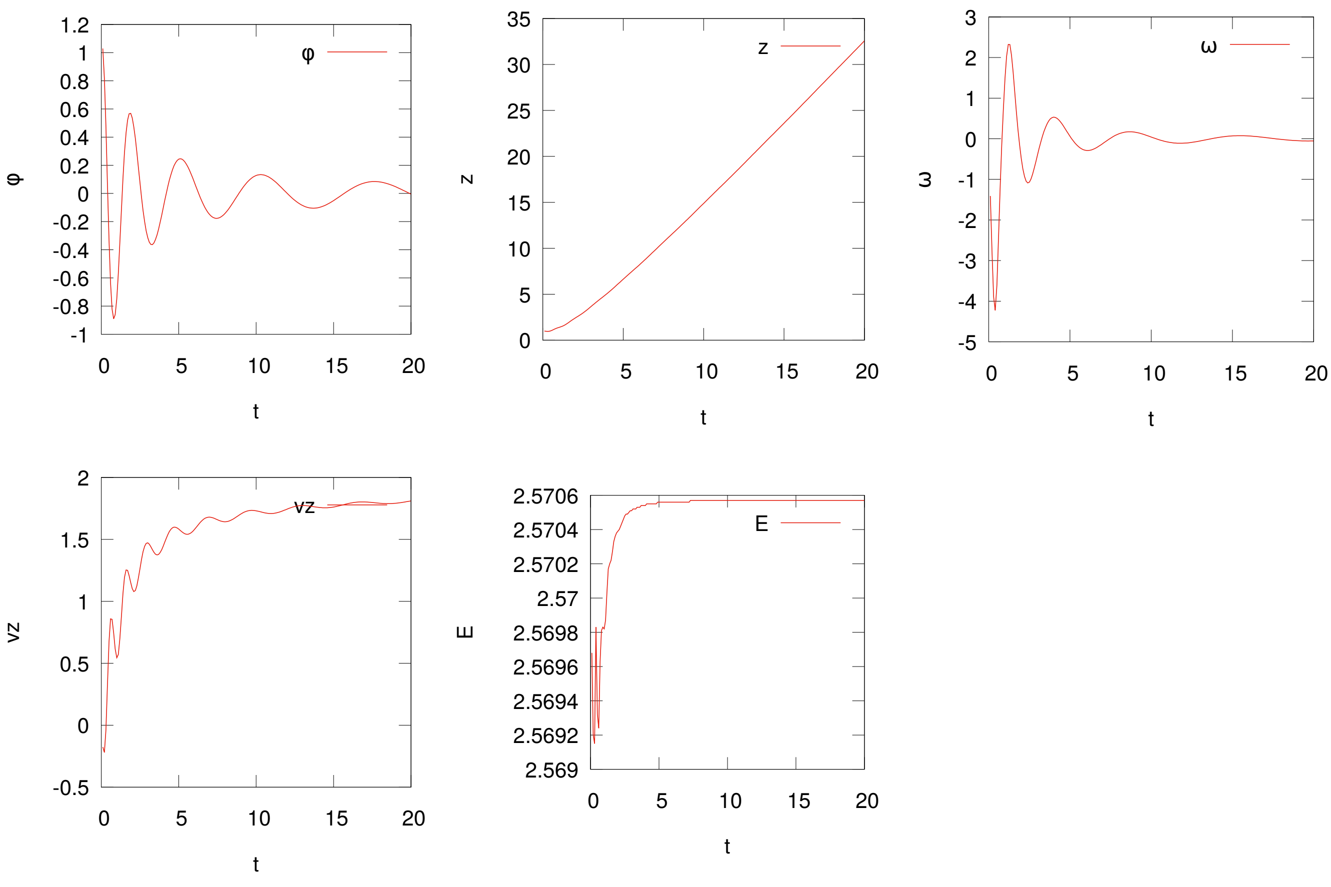
1. Napisać program do symulacji ruchu cząstki

2. Przetestować jego działanie dla parametrów: $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.1$, $n = 500$, $t_0 = 0$, oraz warunków początkowych: $\varphi_0 = 1.1$, $z_0 = 1.0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{z} = 0$. W trakcie ruchu energia cząstki powinna być stabilna.

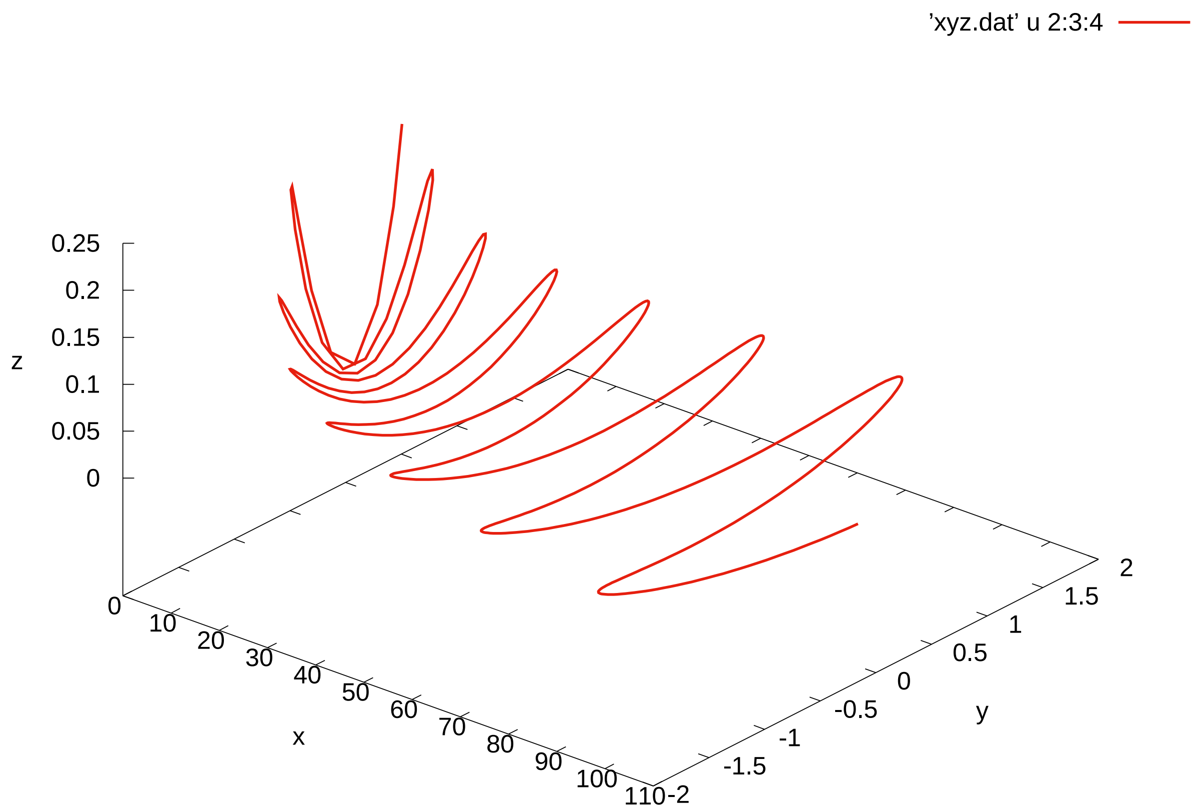
3. Narysować rozwiązania: $\varphi(t)$, $z(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{z}(t)$, $E(t)$ (patrz rys.2) oraz kilka rzutów izometrycznych trajektorii w laboratoryjnym układzie odniesienia $\vec{r}\,'(t)$ (patrz rys.3). Rysunki można szybko wykonać w Gnuplocie.

4. W sprawozdaniu proszę zamieścić wyniki dla innych warunków początkowych oraz przeanalizować uzyskane rozwiązania.

2.1 przykładowe wyniki



Rysunek 2: Wyniki dla parametrów $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.1$, $n = 500$, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 1.1$, $z_0 = 1.0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{z} = 0$



Rysunek 3: Trajektoria w układzie laboratoryjnym