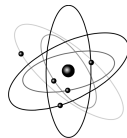


Sprawozdanie z laboratorium 1. "Symulacja ruchu wahadła o stałej długości"

Podstawy fizyki teoretycznej

wykonanie:

Michał Hubczak



Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
maj 2025

1 Wstęp teoretyczny

W rozwiązaniu problemu została wykorzystana metoda **Rungego-Kutty 4 rzędu**, pozwalająca na numeryczne rozwiązanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Rozwiązanie polega na obliczeniu czterech wartości pochodnych w ramach jednego kroku czasowego i znalezienie kolejnego punktu jako średnia ważona tych pochodnych. Wzór prezentuje się następująco

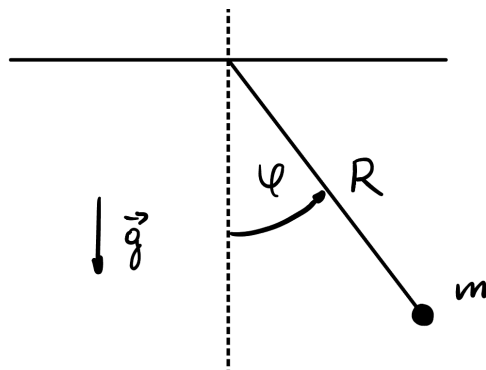
$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, y_i) \\k_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta tk_3)\end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

gdzie $f(t, y)$ jest wzorem na pochodną, Δt to krok czasowy, a y_{i+1} to wartość y w kolejnej chwili.

Stosując powyższy wzór dla wszystkich równań w układzie równań różniczkowych (po podaniu warunków początkowych) uzyskujemy rozwiązanie numeryczne problemu. Błąd lokalny wynosi $O(\Delta t^5)$, a błąd globalny $O(\Delta t^4)$.

2 Opis problemu



Rysunek 1: Wahadło matematyczne w polu grawitacyjnym

Problemem ćwiczenia jest znalezienie trajektorii wahadła matematycznego. W tym celu zostanie wykorzystane równanie ruchu wahadła

$$R \ddot{\varphi} m = -g m \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin(\varphi),$$

z zadanymi warunkami początkowymi.

Dla małych kątów φ stosujemy przybliżenie $\sin(\varphi) \approx \varphi$ co pozwala uzyskać liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \varphi,$$

którego rozwiązaniem jest odpowiednia funkcja trygonometryczna $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t)$.

Dla większych wartości φ , a zatem przy nieliniowym równaniu różniczkowym 2 rzędu, możemy rozdzielić je na układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

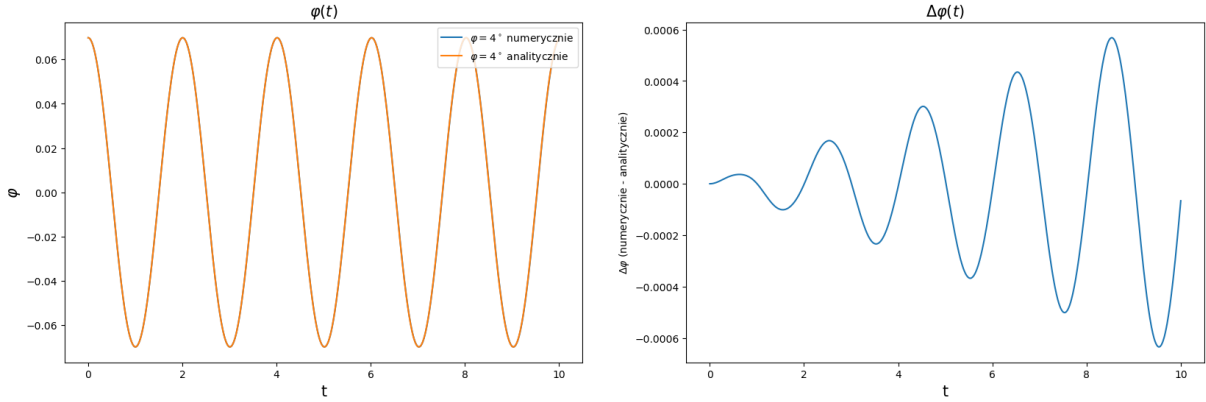
$$\dot{\varphi} = v_{\varphi}$$

$$\dot{v}_{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin(\varphi).$$

Zapisany układ rozwiązujemy numerycznie metodą RK4 przyjmując warunki początkowe $v_{\varphi} = 0$ oraz kilka przypadków $\varphi_0 = \{4^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}, 135^{\circ}, 175^{\circ}\}$.

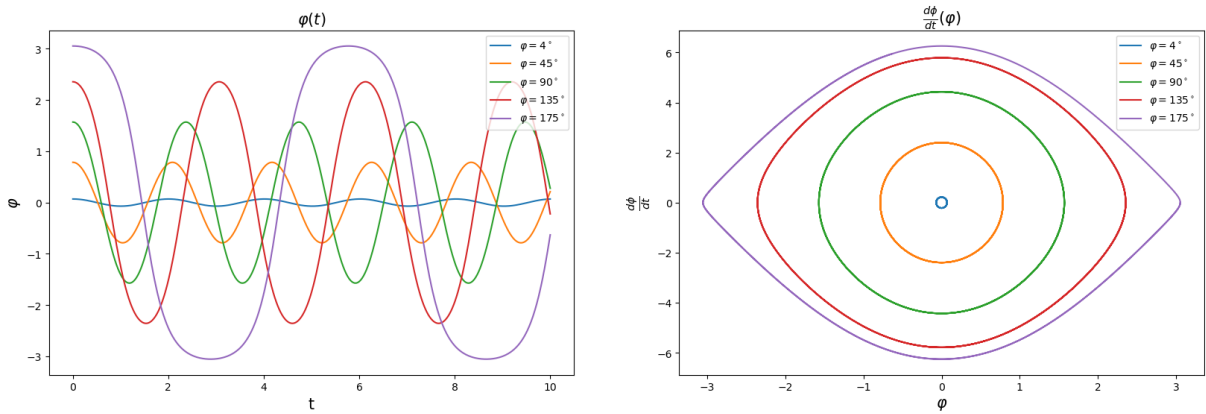
W pierwszej kolejności powyższa metoda została porównana z rozwiązaniem analitycznym (przybliżenie dla małych kątów ($\sin(\varphi) = \varphi$), konkretnie dla wychylenia 4° . Następnie zostały powtórzone obliczenia dla kolejnych warunków początkowych. Dodatkowo został sporządzony wykres energii potencjalnej ($U = mgR \cos(\varphi)$), energii kinetycznej ($T = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2$) oraz energii całkowitej ($E = T + U$).

3 Wyniki



Rysunek 2: Po lewej - wykres $\varphi(t)$ wyznaczone numerycznie oraz analitycznie dla wahadła matematycznego. Po prawej - wykres różnicy $\varphi(t)$ rozwiązania numerycznego i analitycznego.

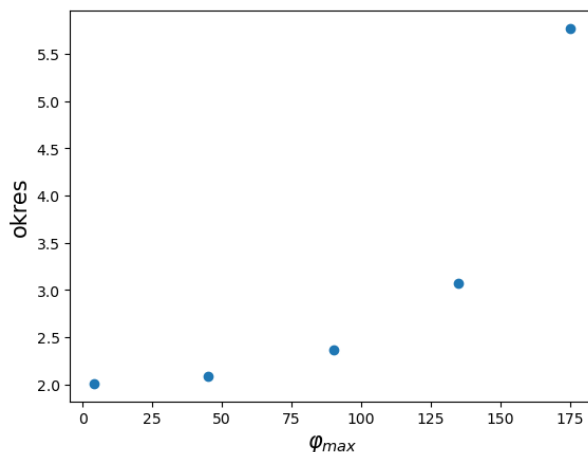
Na wykresie $\varphi(t)$ obserwowany jest pozorny brak narysowanego rozwiązania numerycznego. Wynika to z faktu, że rozwiązania te są bardzo zbliżone i nakładają się na siebie. Wykres po prawej prezentuje różnicę wychyleń w czasie (między rozwiązaniem analitycznym a numerycznym), które przyjmują wartości o dwa rzędy wielkości mniejsze niż faktyczne wychylenie φ .



Rysunek 3: Po lewej - wykres $\varphi(t)$ dla poszczególnych początkowych wychyleń wahadła. Po prawej - trajektoria fazowa.

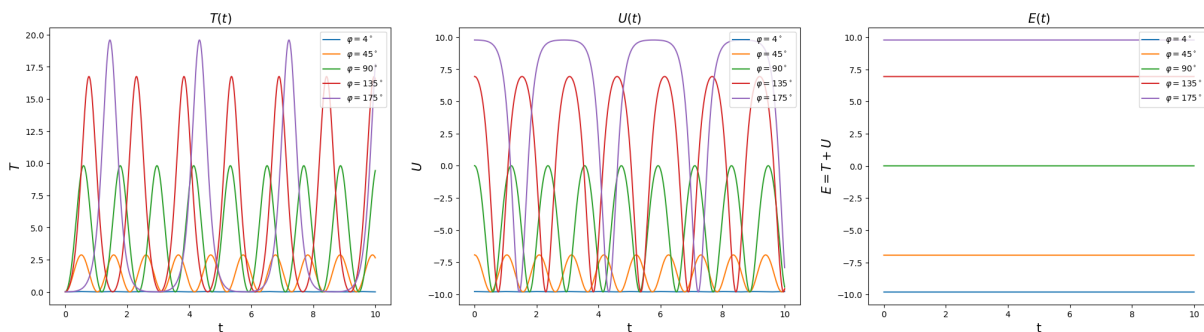
Na powyższych wykresach położenia w czasie widzimy, że dla większych odchyśleń wahadła, ruch przestaje być funkcją sinus. Jest to najmocniej widoczne dla $\varphi = 175^\circ$, gdzie obserwujemy istotne "spłaszczenie" przy granicznych wartościach - okres ruchu się wydłuża, wahadło prawie się zatrzymuje.

Na wykresie trajektorii fazowej obserwujemy zniekształcone elipsy dla większych wychyleń początkowych. W tej skali wydaje się, że trajektoria fazowa dla odchylenia początkowego 45° jest elipsą jednak na wykresie $\varphi(t)$ obserwujemy zwiększenie okresu drgań.



Rysunek 4: Wykres okresu drgań od wartości wychylenia początkowego

Powyższy wykres przedstawia wcześniejszą obserwację rosnącego okresu drgań wahadła wraz z rosnącym wychyleniem początkowym



Rysunek 5: Wykresy energii dla ruchu wahadła w czasie od lewej kolejno: kinetycznej, potencjalnej, całkowitej.

Na wykresie energii potencjalnej obserwujemy, że dla dużych wychyleń początkowych występuje spłaszczenie wykresu dla maksymalnych wartości energii (dla energii kinetycznej podobnie ale dla minimalnych wartości) oznacza to, że im większe wychylenie początkowe, tym dłuższy czas przebywania w okolicy największych wychyleń oraz szybsze przejście przez punkt równowagi.

Ponadto na wykresie energii całkowitej widzimy, energia pozostaje zachowana niezależnie od początkowego kąta nachylenia.

4 Wnioski

Powyższe wyniki potwierdzają słuszność przybliżenia $\sin(\varphi) \approx \varphi$ dla niewielkich kątów (błąd względny $\approx 1\%$). Przy większych wartościach wychylenia początkowego obserwujemy dłuższy okres drgań. Ponadto obserwujemy, że wahadło dla większych wychyleń spędza więcej czasu w okolicach skrajnych położeń, a szybciej przechodzi przez punkt równowagi. Z wykresów energii wnioskujemy, że energia całkowita, zgodnie z oczekiwaniami, pozostaje stała.