Projekt 3: ruch cząstki w polu magnetycznym

4 stycznia 2019

1 Wstęp

Na zajęciach rozważaliśmy ruch cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym. Lagranżjan układu we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{2}\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \tag{1}$$

Jeśli wprowadzimy współrzędne cylindryczne z osią 'z' skierowaną w kierunku pola B, to funkcja Hamiltona zapisana w nowych współrzędnych będzie miała postać

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) - \frac{qB}{2m}p_\varphi + \frac{q^2B^2}{8m}r^2 \tag{2}$$

Z niej możemy wydobyć równania ruchu

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{m} && (3)\\
\dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{m\,r^2} - \frac{qB}{2m} && (4)\\
\dot{z} &= \frac{p_z}{m} && (5)\\
\dot{p}_r &= \frac{p_\varphi^2}{m\,r^3} - \frac{q^2B^2r}{4m} && (6)\\
\dot{p}_\varphi &= 0 && (7)\\
\dot{p}_z &= 0 && (8)
\end{aligned}$$

Analogicznie jak na poprzednich zajęciach wprowadzamy nowe zmienne

$$\begin{aligned}
s_0 &= r && (9)\\
s_1 &= \varphi && (10)\\
s_2 &= z && (11)\\
s_3 &= p_r && (12)\\
s_4 &= p_\varphi && (13)\\
s_5 &= p_z && (14)
\end{aligned}$$

i określamy ich pochodne

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= f_0(t,\vec{s}) = \frac{s_3}{m} && (15)\\
\dot{s}_1 &= f_1(t,\vec{s}) = \frac{s_4}{m\,s_0^2} - \frac{qB}{2m} && (16)\\
\dot{s}_2 &= f_2(t,\vec{s}) = \frac{s_5}{m} && (17)\\
\dot{s}_3 &= f_3(t,\vec{s}) = \frac{s_4^2}{m\,s_0^3} - \frac{q^2B^2s_0}{4m} && (18)\\
\dot{s}_4 &= f_4(t,\vec{s}) = 0 && (19)\\
\dot{s}_5 &= f_5(t,\vec{s}) = 0 && (20)
\end{aligned}$$

Wartości wektora $\vec{f}(t,\vec{s})$ wyrażone wzorami (15)-(20) wyliczamy w procedurze do liczenia pochodnych, którą wykorzystujemy w metodzie RK4 (procedura *rk4_vec*).

1.1 Warunki początkowe

Warunki początkowe zadane dla równania różniczkowego określają jednoznacznie jego rozwiązanie. Zastanówmy się jaki szczególnie interesujące przypadki możemy zamodelować. Ponieważ w funkcji Hamiltona nie występuje zmienna φ więc **pęd uogólniony** p_φ z nią sprzężony będzie całką ruchu

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow p_\varphi = const \tag{21}$$

wykorzystajmy tę informację do znalezienia WP dla trajektorii w postaci okręgu o środku w punkcie $(x,y)=(0,0)$. Wówczas $r = const$ skąd od razu dostajemy dwa warunki:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} = 0 \Rightarrow p_r = 0 \tag{22}$$

oraz

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{m\,r^3} - \frac{q^2B^2r}{4m} = 0 \Rightarrow p_\varphi^2 = \frac{q^2B^2r^4}{4} \tag{23}$$

Na podstawie drugiego warunku określimy p_φ

$$p_\varphi = \pm\frac{q\,B\,r^2}{2} \tag{24}$$

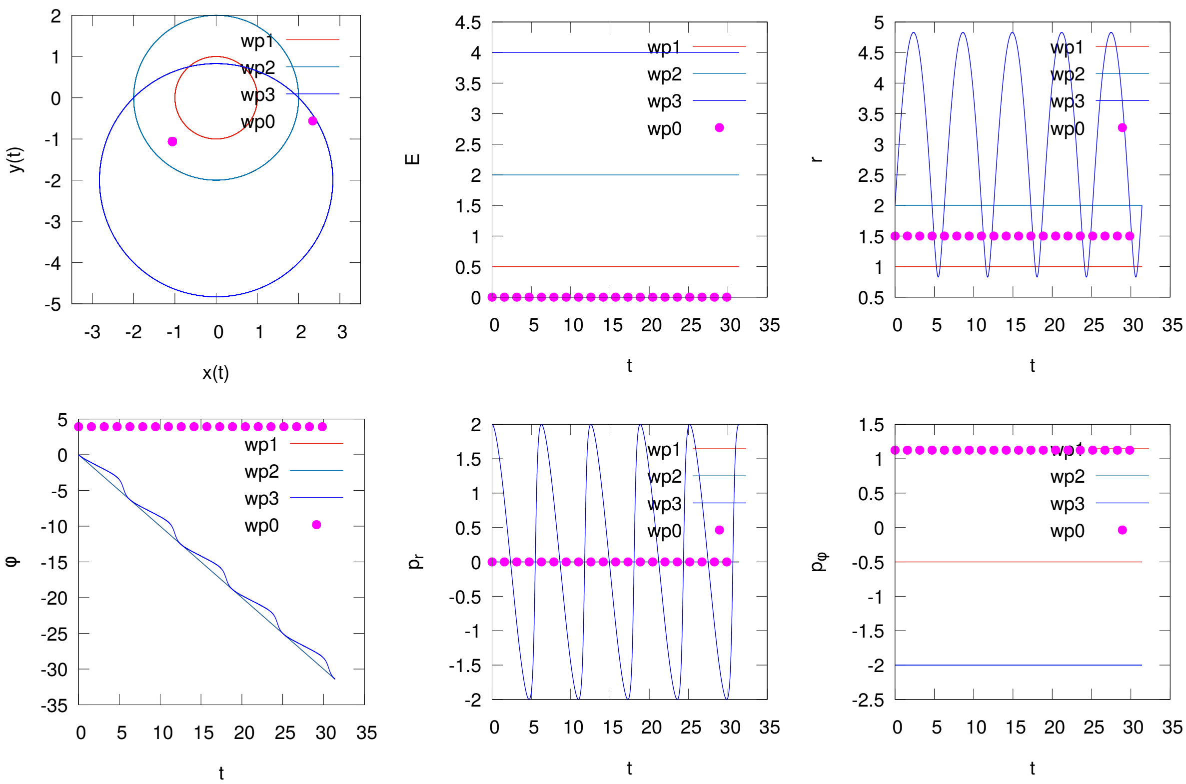
Pojawiają się więc dwie opcje.

- Dla $p_\varphi = +\frac{q\,B\,r^2}{2}$ na mocy wzoru (4) dostajemy warunek $\dot{\varphi}=0$, czyli cząstka nie porusza się.
- Dla $p_\varphi = -\frac{q\,B\,r^2}{2}$ dostajemy $\dot{\varphi} = -\frac{qB}{m} = -\omega_c$, czyli cząstka porusza się po trajektorii kołowej z częstością cyklotronową ω_c (niezależnie od długości wektora wodzącego $r = const$).

2 Zadania do wykonania

1. Napisać program do wyznacznia trajektorii cząstki naładowanej w polu magnetycznym wykorzystując metdę RK4 (procedura *rk4_vec*).
2. Przyjąć parametry symulacji: $n = 6$ (liczba zmiennych niezależnych), $n_t = 5000$ (liczba kroków czasowych), $\omega_c = q\,B/m$, $q = B = m = 1$, $T = 2\pi/\omega_c$ (okres obiegu zamkniętej orbity cząstki), $\Delta t = 5\cdot T/n_t$ (krok czasowy).
3. Znaleźć trajektorie dla następujących warunków początkowych:
   0) (bezruch) $r_0 = 1.5$, $\varphi_0 = 1.25\cdot\pi$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi_0} = qBr_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
   1) (okrąg centrowany w początku ukł. wsp.) $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi_0} = -qBr_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
   2) (okrąg centrowany w początku ukł. wsp. - niezależność od r) $r_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi_0} = -qBr_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
   3) (okrąg zorientowany dowolnie) $r_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 2$, $p_{\varphi_0} = -qBr_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
4. W sprawozdaniu przedyskutować uzyskane wyniki.

2.1 Przykładowe wyniki



Rysunek 1: Wyniki dla warunków początkowych: 0,1,2,3