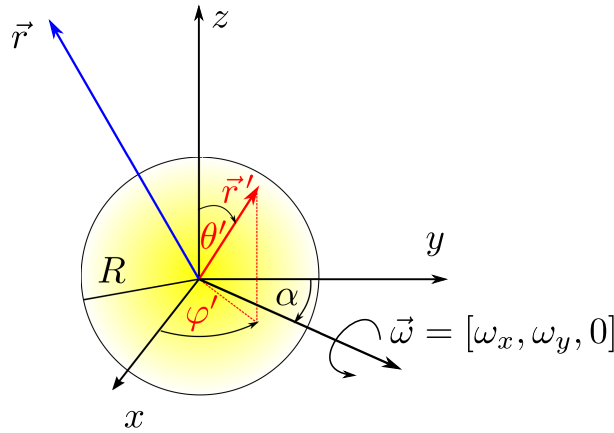


Projekt 6: modelowanie pola elektrycznego i magnetycznego w otoczeniu obracającej się naładowanej sfery

10 czerwca 2021

1 Wstęp

Na powierzchni sfery o promieniu R znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej σ . Sfera obraca się wokół osi leżącej w płaszczyźnie xy (rys.1). Na zajęciach wyznaczymy rozkład potencjału i pola elektrycznego oraz pola magnetycznego w jej otoczeniu.



Rysunek 1: Środek naładowanej sfery znajduje się w początku układu współrzędnych. Sfera obraca się wokół osi leżącej w płaszczyźnie xy .

1.1 Pole elektryczne

Skorzystamy z zasady superpozycji

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1)$$

Gęstość ładunku definiujemy w postaci $\rho(\vec{r}') = \sigma \cdot \delta(r' - R)$ ($\sigma = const$) i wprowadzamy współrzędne sferyczne

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty dr' \frac{\sin\theta' r'^2 \sigma \delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sin\theta' R^2 \sigma}{|\vec{r} - \vec{R}'|} \quad (3)$$

gdzie:

$$\vec{r} \rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \vec{R}' \rightarrow \begin{cases} R'_x = R \sin \theta' \cos \varphi' \\ R'_y = R \sin \theta' \sin \varphi' \\ R'_z = R \cos \theta' \end{cases} \quad (4)$$

Całkę (3) wyznaczmy numerycznie stosując złożenie dwóch kwadratur (2 wymiary) i wzór całkowy parabol (Simpsona). W tym celu na powierzchni sfery wprowadzamy siatkę węzłów

$$\Delta \theta = \frac{\pi}{N} \quad (5)$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{M} \quad (6)$$

$$\theta \rightarrow \theta_i = \Delta \theta \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (7)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi_j = \Delta \varphi \cdot j, \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (8)$$

a całkowanie zastępujemy sumowaniem

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \theta}{3} \frac{\Delta \varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|} \quad (9)$$

Uwaga: $\vec{R}'_{i,j}$ oznacza że współrzędne R'_x, R'_y, R'_z zależą od pary indeksów $(i, j) \leftrightarrow (\theta'_i, \varphi'_j)$ zgodnie z wzorami (4).

Współczynniki a_i/b_j są określone następująco

$$a_i = \begin{cases} a_i = 1, & i = 0 \vee i = N \\ a_i = 4, & i \bmod 2 = 1 \text{ (i nieparzyste)} \\ a_i = 2, & i \bmod 2 = 0 \text{ (i parzyste)} \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} b_j = 1, & j = 0 \vee j = M \\ b_j = 4, & j \bmod 2 = 1 \text{ (j nieparzyste)} \\ b_j = 2, & j \bmod 2 = 0 \text{ (j parzyste)} \end{cases} \quad (10)$$

Podobnie możemy wyznaczyć numerycznie wektor pola elektrycznego

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R^2 \sigma \sin \theta' (\vec{r} - \vec{R}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} \quad (11)$$

po zastąpieniu całki sumą

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \theta}{3} \frac{\Delta \varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i (\vec{r} - \vec{R}'_{ij})}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \quad (12)$$

1.2 Pole magnetyczne

Na powierzchni sfery rozłożony jest ładunek, gdy sfera obraca, generuje się prąd, który jest źródłem pola magnetycznego. Indukcję pola magnetycznego także wyznaczmy z zasady superpozycji

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (13)$$

Gęstość prądu definiujemy jako

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}' = \sigma \delta(r' - R) \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (14)$$

wstawiamy ją do równania (13) a następnie wykonujemy całkowanie po zmiennej radialnej

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sigma R^2 \sin \theta' (\vec{r} - \vec{R}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} \quad (15)$$

Całkę liczymy numerycznie (analogicznie jak dla pola elektrycznego)

$$B_p(\vec{r}) = -\frac{\sigma R^2 \mu_0}{4\pi} \frac{\Delta \theta}{3} \frac{\Delta \varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i [(\vec{r} - \vec{R}') \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')] \cdot \hat{e}_p}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3}, \quad p = x, y, z \quad (16)$$

2 Zadania do wykonania

1. Przyjmujemy następujące wartości parametrów: $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, $R = 1$, $\sigma = 1$, $N = M = 201$, $\Delta\theta = \pi/N$, $\Delta\varphi = 2\pi/M$, $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, 0]$, $\omega_x = \omega \cdot \sin \alpha$, $\omega_y = \omega \cdot \cos \alpha$

2. Napisać funkcję obliczającą iloczyn wektorowy (jako wyznacznik) $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{g}$:

```
void iloczyn_wektorowy(double c[3], double d[3], double g[3])
```

posłużymy się nią licząc składowe pola magnetycznego \vec{B} .

3. Wyznaczyć $V(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ oraz $\vec{B}(\vec{r})$ dla $\vec{r} = (x, y, 0)$ w zakresie $x \in [-L, L]$, $y \in [-L, L]$, $L = 3.0$ z krokiem $\Delta x = \Delta y = 2L/K$, $K = 41$. Sporządzić mapę rozkładu potencjału $V(x, y, 0)$, wykres wektorowy $\vec{E}(x, y, 0)$ oraz wykres wektorowy $\vec{B}(x, y, 0)$ dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi/4$. Ponadto proszę zrobić wykres $V(0, y, 0)$ i porównać z rozwiązaniem analitycznym.

3 Uwagi

Do wyznaczania wartości współczynników a_i oraz b_j można użyć funkcji

```
int wspolczynnik(int i, int N){
    int k;
    if(i==0 || i==N ) k=1;
    else if(i%2==1 ) k=4;
    else if(i%2==0 ) k=2;
    return k;
}
```

wówczas $a_i = \text{wspolczynnik}(i, N)$ lub $b_j = \text{wspolczynnik}(j, M)$.

Natomiast poniższy pseudokod pozwala wygenerować dane potrzebne do utworzenia wykresów

```
int wspolczynnik(int i, int N){
    int k;
    if(i==0 || i==N ) k=1;
    else if(i%2==1 ) k=4;
    else if(i%2==0 ) k=2;
}
```

inicjalizacja parametrów:

$R, \sigma, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta_x, \Delta_y, L, \alpha, \vec{\omega}$

```
FOR x FROM -L TO L STEP  $\Delta_x$  DO
  FOR y FROM -L TO L STEP  $\Delta_y$  DO
```

```
    z=0
    //==== zerowanie zmiennych przed całkowaniem =====
    v=0
    ex=0
    ey=0
    bx=0
    by=0
    //===== całkowanie =====
    for i from 0 to N step 1 do
```

```

for j from 0 to M step 1 do
     $\theta'_i = \dots$ 
     $\varphi'_j = \dots$ 
     $x' = \dots$ 
     $y' = \dots$ 
     $z' = \dots$ 

     $|\vec{r} - \vec{r}'| = \dots$ 
     $W = \frac{\sigma R^2}{4\pi} \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\varphi}{3}$ 
     $v = v + W a_i b_j \sin \theta'_i / |\vec{r} - \vec{r}'|$ 
     $ex = ex + W a_i b_j \sin \theta'_i (x - x'_i) / |\vec{r} - \vec{r}'|^3$ 
     $ey = ey + \dots$ 
    iloczyn_wektorowy( $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}'$ ,  $\vec{g}^{(1)}$ )
    iloczyn_wektorowy( $\vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\vec{g}^{(1)}$ ,  $\vec{g}^{(2)}$ )
     $bx = bx + W a_i b_j \sin \theta'_i g_x^{(2)} / |\vec{r} - \vec{r}'|^3$ 
     $by = by + W a_i b_j \sin \theta'_i g_y^{(2)} / |\vec{r} - \vec{r}'|^3$ 
end do
end do

//=== zachowujemy obliczone wartości =====

zapis do pliku: x,y,v,ex,ey,bx,by

END DO
END DO

```

Wykres wektorowy w Gnuplocie tworzymy poleceniem

```
plot 'dane.dat' u A:B:C:D w vectors
```

gdzie: A i B to numery kolumn w których zapisane są x i y , a w kolumnach C i D znajdują się składowe x - owa i y - owa pola wektorowego. W takim przypadku wektory (strzałki są zaczepione w węzłach siatki).

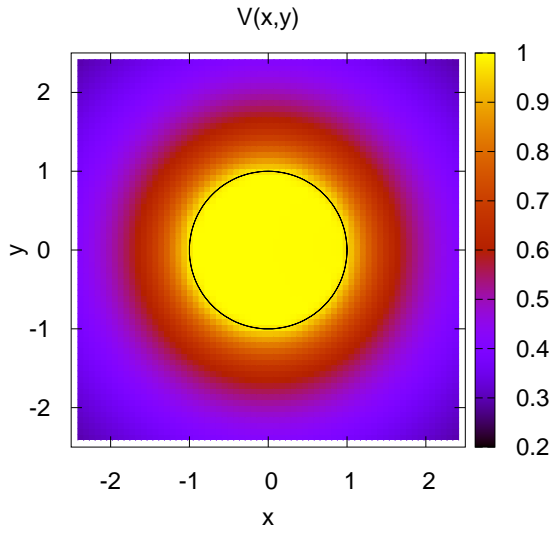
Wektory możemy skalować i zmieniać punkt zaczepnia (np. w środku wektora)

```
scale=5
```

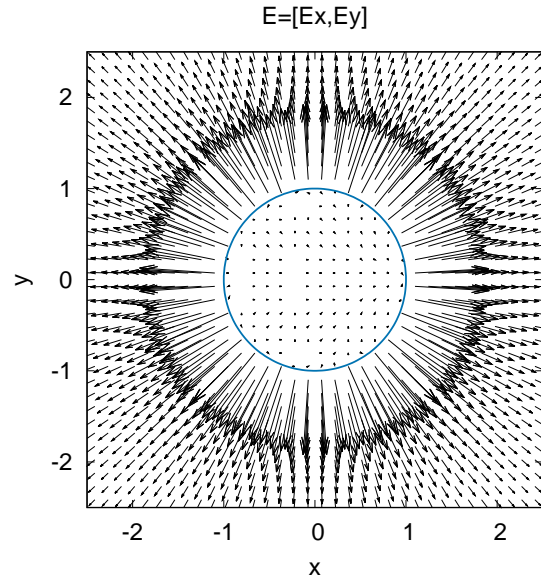
```
plot 'dane.dat' u ($A-$C*scale/2):($B-$D*scale/2):($C*scale):($D*scale) w vectors
```

4 Przykładowe wyniki

(a)

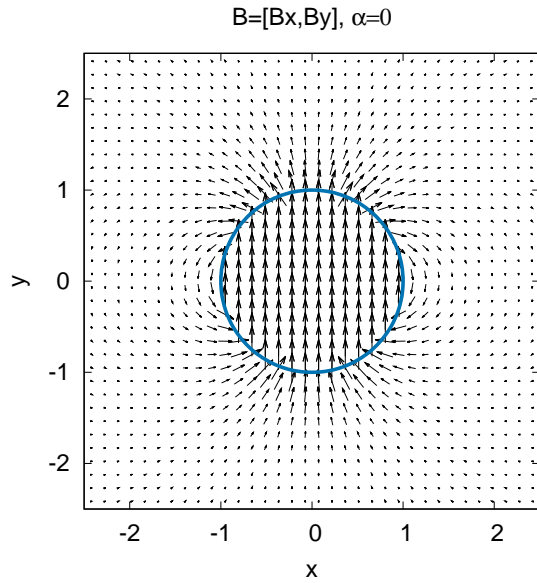


(b)

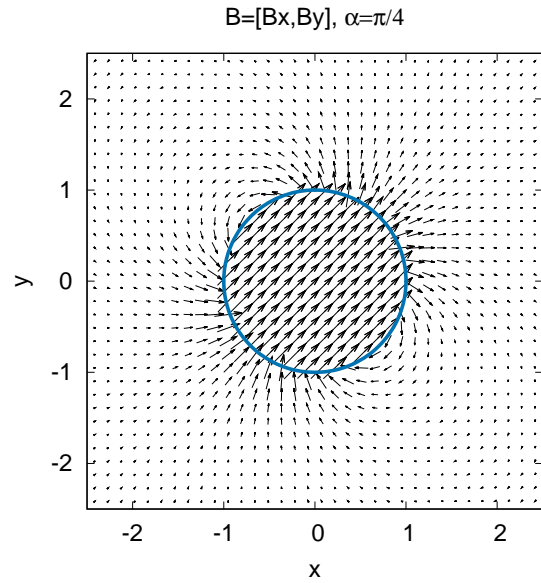


Rysunek 2: (a) Rozkład potencjału $V(x,y)$ oraz (b) pola elektrycznego $\vec{E} = [E_x, E_y]$ dla $z = 0$.

(a)



(b)



Rysunek 3: Rozkład pola magnetycznego $\vec{B} = [B_x, B_y]$ dla $z = 0$ oraz: (a) $\alpha = 0$ i (b) $\alpha = \pi/4$