在PMC模型下单向k元n立方体的诊断度

张雯丽,林上为,李艺海,郭慧铃
山西大学 数学科学学院,太原 030006

摘 要: 图的连通度和诊断度是与互连网络的可靠性密切相关的两个参数,而g好邻连通度和g好邻诊断度是比连通度和诊断度更精确的指标。k元n立方体是多处理机系统的最常用网络之一,而单向k元n立方体是指具有单向边的k元n立方体。证明了当$k \geqslant 3, n \geqslant 3$时,单向$k$元$n$立方体在PMC模型下的1好邻连通度是$k(n-1)$,诊断度是$n$且1好邻诊断度是$kn-1$。

关键词: 有向网络;单向k元n立方体;诊断度;连通度;PMC模型
文献标志码: A **中图分类号:** O157.5 doi:10.3778/j.issn.1002-8331.1806-0093

张雯丽,林上为,李艺海,等.在PMC模型下单向k元n立方体的诊断度.计算机工程与应用,2019,55(4):62-65.
ZHANG Wenli, LIN Shangwei, LI Yihai, et al. Diagnosability of unidirectional k-ary n-cubes under PMC model. Computer Engineering and Applications, 2019, 55(4):62-65.

Diagnosability of Unidirectional k-Ary n-Cubes Under PMC Model

ZHANG Wenli, LIN Shangwei, LI Yihai, GUO Huiling
School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

Abstract: The connectivity and diagnosability of graphs are two parameters that are closely related to the reliability of interconnection networks. The g-good-neighbor connectivity and g-good-neighbor diagnosability are more accurate indexes than the connectivity and diagnosability. The k-ary n-cube is one of the most common interconnection networks for multiprocessor systems, and the unidirectional k-ary n-cube is the k-ary n-cube with simplex unidirectional links. This paper shows that the 1-good-neighbor connectivity, the diagnosability and the 1-good-neighbor diagnosability of the unidirectional k-ary n-cube under the PMC model are $k(n-1)$, n and $kn-1$, respectively.

Key words: directed network; unidirectional k-ary n-cube; diagnosability; connectivity; PMC model

1 引言和预备知识

k元n立方体因为具有对称性、可扩展性、低延迟等优秀性能而成为iWarp、J-machine和Blue Gene等商用并行与分布式系统的基础拓扑结构[1-3]。在一些并行计算系统中,两个处理器间的双向连接是通过两个方向相反的单向信道实现的。基于此观察,为减少构建网络的费用和复杂性,人们提出了许多单向网络的概念[4-6]。特别地,在2015年,张国珍[7]提出了单向k元n立方体网络这一概念。

定义1[7] 对给定整数$k \geqslant 3$和$n \geqslant 1$,单向k元n立方体UQ_n^k的顶点集为$\{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 : a_i \in \{0,1,\cdots,k-1\}, i=0,1,\cdots,n-1\}$,顶点$x=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$控制顶点$y=b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0$当且仅当存在整数$d \in \{0,1,\cdots,n-1\}$,使得$b_d = a_d + 1 \pmod k$且对任意的$i \neq d$都有$a_i = b_i$。此时,称$(x,y)$是$UQ_n^k$的一条$d$维弧,记$x = y^{d-}$和$y = x^{d+}$。

图1给出了单向3元2立方体UQ_2^3,其中$(00,01)$是一条0维弧且$00 = 01^{0-}$。

为了表述的方便,在本文剩余部分的类似表达中将省略“$(\bmod k)$”的书写。易见UQ_n^k是n个有向k圈的笛卡尔积,是一个顶点数为k^n的n-正则有向图。

对给定的$d \in \{0,1,\cdots,n-1\}$,删去UQ_n^k中的所有d维弧将得到k个连通分支$UQ[0], UQ[1], \cdots, UQ[k-1]$,

基金项目: 国家自然科学基金(No.61202017)。
作者简介: 张雯丽(1994—),女,硕士研究生,主要研究领域为图论;林上为(1981—),男,博士,副教授,主要研究领域为图论及其应用,E-mail:shangweilin@126.com;李艺海(1998—),男,主要研究领域为图论;郭慧铃(1999—),女,主要研究领域为图论。
收稿日期: 2018-06-11 **修回日期:** 2018-08-06 **文章编号:** 1002-8331(2019)04-0062-04

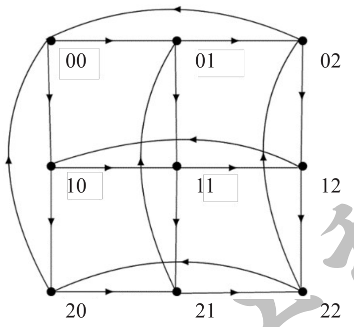

图1　单向3元2立方体 UQ_2^3

其中 $UQ[i]$ 是 UQ_n^k 由顶点集 $\{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\in V(UQ_n^k): a_d=i\}$ 导出的子图。显然，对任意的 $0\leqslant i\leqslant k-1$，$UQ[i]$ 都与 UQ_{n-1}^k 同构。下文将始终用 V_i 表示 $UQ[i]$ 的顶点集合。

随着VLSI技术的飞速发展，并行计算系统包含越来越多的处理器，这使得系统出现故障处理器的可能性增加，而故障的出现将延缓系统的通信，甚至导致整个系统瘫痪，因此诊断出系统中的故障是至关重要的[8]。由Preparata等提出的PMC模型是应用最为广泛的故障自诊断模型之一[9]。在PMC模型下，自诊断系统可用有向图 D 表示，其中 D 的顶点表示处理器，D 的弧集表示系统的测试分配，即 (u,v) 是 D 中一条弧当且仅当 u 测试 v。诊断度是根据测试结果所能识别的故障顶点的最大数目。Dahbura等[10]给出了诊断度的一个等价的图论定义。

定义2[10]　设 D 是一个有向图，$V(D)$ 和 $A(D)$ 分别表示 D 的顶点集和弧集。称 D 的两个不同的顶点子集 F_1 和 F_2 在PMC模型下可区分，若存在顶点 $u\in V(D)-F_1-F_2$ 和顶点 $v\in F_1\Delta F_2=(F_1-F_2)\cup(F_2-F_1)$，使得 $(u,v)\in A(D)$。有向图 D 在PMC模型下是 t-可诊断的，如果 D 的任意两个不同的基数至多为 t 的顶点子集 F_1 和 F_2 都可区分。有向图 D 的诊断度 $t(D)$ 是使 D 是 t-可诊断的 t 的最大值。

如果 $(u,v)\in A(D)$，则称 u 是 v 的入邻点，v 是 u 的出邻点。对于任意点 $u\in V(D)$，u 的出邻点集和入邻点集分别记为 $N_D^+(u)$ 和 $N_D^-(u)$，u 的出度 $d_D^+(u)$ 和入度 $d_D^-(u)$ 分别指 $N_D^+(u)$ 和 $N_D^-(u)$ 所含顶点的个数。有向图 D 中的最小出度 $\delta^+(D)=\min\{d_D^+(u): u\in V(D)\}$，最小入度 $\delta^-(D)=\min\{d_D^-(u): u\in V(D)\}$，最小度 $\delta(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}$。对本文涉及但未给出具体定义的概念请参见文献[11]。

在实际应用中，与一个处理器相邻的所有处理器同时发生故障的可能性很小，基于这个观察，Peng等[12]提出了 g 好邻诊断度的概念。在此之后，各种无向图的 g 好邻诊断度得到大量的研究[13-16]，但是关于有向图的 g 好邻诊断度的概念还没有见到，本文将此概念推广到有向网络。

定义3　对给定有向图 D 和非负整数 g，称顶点子集 $F\subseteq V(D)$ 为 D 的一个 g 好邻故障集，若 $\delta(D-F)\geqslant g$。

定义4　有向图 D 在PMC模型下是 g 好邻 t-可诊断的，如果 $V(D)$ 中的任意两个不同的基数至多为 t 的 g 好邻故障集 F_1 和 F_2 都可区分。有向图 D 的 g 好邻诊断度 $t_g(D)$ 是使 D 是 g 好邻 t-可诊断的 t 的最大值。

连通度是测量网络容错性的一个重要参数，在研究系统诊断度中起着重要的作用[17-18]。下面介绍与图的连通性相关的一些概念。

一个有向图 D 是强连通的，如果对于 D 中不同的顶点 x 和 y，都存在一条从 x 到 y 的路和一条从 y 到 x 的路。有向图 D 的强连通分支是 D 的极大强连通子图。D 的所有强连通分支可标记为 $D_1,D_2,\cdots,D_t$，使得当 $i>j$ 时，不存在从 D_i 到 D_j 的弧[11]，称这样的一个序列为 D 的强连通分支无圈序。

定义5　称顶点子集 $F\subseteq V(D)$ 是有向图 D 的一个顶点割，如果 $D-F$ 不强连通。有向图 D 的最小顶点割的点数称为 D 的连通度，记为 $\kappa(D)$。

定义6　如果顶点子集 F 既是 D 的 g 好邻故障集又是 D 的顶点割，则称 F 是 D 的一个 g 好邻割。有向图 D 的最小 g 好邻割的点数称为 D 的 g 好邻连通度，记作 $\kappa_g(D)$。

显见当 $g=0$ 时，$\kappa_g(D)=\kappa(D)$。因此，g 好邻连通度是连通度的一个推广。本文将研究单向 k 元 n 立方体的1好邻连通度、诊断度和1好邻诊断度。

2　单向 k 元 n 立方体的连通度

定理1[7]　对整数 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 1$，单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 的连通度 $\kappa(UQ_n^k)=n$。

有向图 D 中顶点集 X 的出邻点集定义为 $N_D^+(X)=\bigcup\limits_{u\in X}N_D^+(u)-X$，入邻点集定义为 $N_D^-(X)=\bigcup\limits_{u\in X}N_D^-(u)-X$。为了方便，当不出现歧义时，将在类似的表达中省略下标 D。

引理1　设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 2$ 是两个正整数，令 $X=\{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\in V(UQ_n^k): a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_2=a_1=0\}$，则 $N^-(X)$ 和 $N^-(X)\cup X$ 都是 UQ_n^k 的1好邻故障集且 $|N^-(X)|=k(n-1)$，$|N^-(X)\cup X|=kn$。

证明　对任意的 $i\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，记 $x_i=00\cdots0i$，则 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}\}$ 且 $N^-(X)=\bigcup\limits_{i=0}^{k-1}(N^-(x_i)-\{x_{i-1}\})$。注意，若顶点 $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0\in N^-(x_i)-\{x_{i-1}\}$，则 $b_0=i$。因此对不同的 i 和 j，$(N^-(x_i)-\{x_{i-1}\})\cap(N^-(x_j)-\{x_{j-1}\})=\varnothing$，从而得出，$|N^-(X)|=\sum\limits_{i=0}^{k-1}|N^-(x_i)-\{x_{i-1}\}|=k(n-1)$。由定义，$N^-(X)\cap X=\varnothing$，故 $|N^-(X)\cap X|=|X|+|N^-(X)|=kn$。

注意，$b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0\in N^-(x_i)-\{x_{i-1}\}$ 当且仅当 $\{b_{n-1},b_{n-2},\cdots,b_1\}$ 中恰有 $n-2$ 个 0 和 1 个 $k-1$。这说明对任意的 $y\notin N^-(X)$，y^{0+} 和 y^{0-} 也不属于 $N^-(X)$，即 y 在 $UQ_n^k-N^-(X)$ 中有一个出邻点和一个入邻点，从而 $\delta(UQ_n^k-N^-(X))\geqslant 1$。由定义，$N^-(X)$ 是 UQ_n^k 的 1 好邻故障集。

同理可证，对每个 $y\notin N^-(X)\cup X$，都有 y^{0+} 和 y^{0-} 也不属于 $N^-(X)\cup X$，从而有 $\delta(UQ_n^k-(N^-(X)\cup X))\geqslant 1$。由定义，$N^-(X)\cup X$ 是 UQ_n^k 的 1 好邻故障集。

引理2 设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 2$ 是两个正整数，C 是 UQ_n^k 中的一个圈，它含 d 维弧。记 $UQ[0],UQ[1],\cdots,UQ[k-1]$ 是 UQ_n^k 删去所有的 d 维弧得到的连通分支，则对 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，每个 $UQ[i]$ 都含 C 中至少一个顶点。特别的，UQ_n^k 中每个圈的长度至少为 k。

证明 设 (x,y) 是 C 中的一条 d 维弧，则存在 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得 $x\in V_j,y\in V_{j+1}$。假设结论不成立，则存在 i，使得 $V(C)\cap V_i=\varnothing$，即有 $C\subseteq UQ_n^k-V_i$，因此 $UQ_n^k-V_i$ 包含从 y 到 x 的路。显然，$i\neq j,i\neq j+1$，且 $UQ[i+1],UQ[i+2],\cdots,UQ[j],UQ[j+1],\cdots,UQ[i-1]$ 是 $UQ_n^k-V_i$ 的一个强连通分支无圈序。由强连通分支无圈序的定义知在 $UQ_n^k-V_i$ 中不存在从 y 到 x 的路，矛盾。

定理2 设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 3$ 是两个正整数，X 是单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 的一个顶点子集。若 $|X|\leqslant k^n/2$ 且 $UQ_n^k[X]$ 含圈，则 $\left|N^-(X)\right|\geqslant k(n-1)$ 且 $\left|N^+(X)\right|\geqslant k(n-1)$。

证明 由 UQ_n^k 的对称性，只需考虑 $N^-(X)$ 的情形。令 C 是 $UQ_n^k[X]$ 中的一个圈，则存在 d 使得 C 含 d 维弧。删去 UQ_n^k 中所有的 d 维弧得到 k 个连通分支，记为 $UQ[0],UQ[1],\cdots,UQ[k-1]$。令 $X_i=X\cap V_i,i=0,1,\cdots,k-1$，由引理2可得 $|X_i|\geqslant 1$。令 $Y_i=V_i-X_i-N^-_{UQ[i]}(X_i)$。

情形1 对任意的 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，有 $|X_i|\leqslant k^{n-1}-(n-1)$。

若 $Y_i\neq\varnothing$，则 $N^-_{UQ[i]}(X_i)$ 是 $UQ[i]$ 的顶点割。由定理1知，$\left|N^-_{UQ[i]}(X_i)\right|\geqslant\kappa\left(UQ[i]\right)=\kappa\left(UQ_{n-1}^k\right)=n-1$。若 $Y_i=\varnothing$，则 $\left|N^-_{UQ[i]}(X_i)\right|=|V_i|-|X_i|=k^{n-1}-|X_i|\geqslant n-1$。综上，对任意的 i，都有 $\left|N^-_{UQ[i]}(X_i)\right|\geqslant n-1$，进而有 $\left|N^-_{UQ[i]}(X_i)\right|\geqslant\sum\limits_{i=0}^{k-1}\left|N^-_{UQ[i]}(X_i)\right|\geqslant k(n-1)$。

情形2 存在 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得 $\left|X_j\right|>k^{n-1}-(n-1)$。

若 $Y_j\neq\varnothing$，则 $N^-_{UQ[j]}(X_j)$ 是 $UQ\left[j\right]$ 的顶点割，但 $\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|<n-1$，与定理1矛盾，故 $Y_j=\varnothing$，即 $V_j=X_j\cup N^-_{UQ[j]}(X_j)$。

对任意的 $x\in X_j$，令 $C(x)=x_0x_1\cdots x_{k-1}x_0$，其中 $x_0=x$ 且对任意的 $i=1,2,\cdots,k-1$ 有 $x_i=x_{i-1}^{d+}$。显然，$C(x)$ 是一个长为 k 的圈。称圈 $C(x)$ 是一个 X 圈，如果 $V\left(C(x)\right)\subseteq X$；否则称 $C(x)$ 为一个非 X 圈。若 $C(x)$ 为一个非 X 圈，则 $C(x)$ 含 X 中点 x_0，且 $C(x)$ 含至少一个非 X 中的顶点，因此存在整数 $s\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $x_s\notin X$ 且 $x_{s+1}\in X$。此时，$x_s\in N^-(x)$ 且 $x_s\notin V_j$，这说明每个非 X 圈都含 $N^-(x)-V_j$ 的点。对任意不同的 $x,y\in X_j$，显然有 $V\left(C(x)\right)\cap V\left(C(y)\right)=\varnothing$，这说明不同的非 X 圈所含的 $N^-(x)-V_j$ 中顶点不同。记 $\mathbb{C}$ 是 X 圈的集合，$\mathbb{NC}$ 是非 X 圈的集合，则：

$|\mathbb{C}|+|\mathbb{NC}|=\left|X_j\right|$

由以上分析可得：

$\left|N^-(X)\right|\geqslant\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|+|\mathbb{NC}|$

当 $|\mathbb{NC}|<k(n-1)-\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|$ 时，有 $|\mathbb{C}|\geqslant\left|X_j\right|-k(n-1)+\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|+1=\left|V_j\right|-k(n-1)+1=k^{n-1}-k(n-1)+1$。又由于每个 X 圈在 $UQ_n^k-V_j$ 中含 $k-1$ 个 X 中的顶点，故当 $k\geqslant 3,n\geqslant 3$ 时，$k^n/2\geqslant|X|\geqslant\left|X_j\right|+(k-1)|\mathbb{C}|=\left|X_j\right|+(k-1)(k^{n-1}-k(n-1)+1)\geqslant k^n-(n-1)(k^2-k+1)+k-1>k^n/2$，矛盾。因此，$|\mathbb{NC}|\geqslant k(n-1)-\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|$。此时，$\left|N^-(X)\right|\geqslant\left|N^-_{UQ[j]}(X_j)\right|+|\mathbb{NC}|\geqslant k(n-1)$。

定理3 设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 3$ 是两个正整数，则单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 的 1 好邻连通度 $\kappa_1\left(UQ_n^k\right)=k(n-1)$。

证明 考虑引理1所给出的 X。显然，在 $UQ_n^k-N^-(X)$ 中没有从 $V\left(UQ_n^k\right)-X-N^-(X)$ 到 X 的弧，故 $N^-(X)$ 是一个顶点割。结合引理1知，$N^-(X)$ 是1好邻割且 $\left|N^-(X)\right|=k(n-1)$。因此 $\kappa_1\left(UQ_n^k\right)\leqslant\left|N^-(X)\right|=k(n-1)$。

下证 $\kappa_1\left(UQ_n^k\right)\geqslant k(n-1)$。假设 F 是 UQ_n^k 的任意一个给定的 1 好邻割，记 $D_1,D_2,\cdots,D_t$ 是 UQ_n^k-F 的一个强连通分支无圈序。由定义，$t\geqslant 2$。由于 $\left|V(D_1)\right|+\left|V(D_t)\right|\leqslant\left|V\left(UQ_n^k\right)\right|=k^n$，故不失一般性可设 $\left|V(D_1)\right|\leqslant k^n/2$。由于 F 是 1 好邻故障集，故对任意的 $x\in V(D_1)$，有 $d^-_{UQ_n^k-F}(x)\geqslant 1$。又由于 D_1 是初始分支，故 $N^-(V(D_1))\subseteq F$，进而有 $d^-_{D_1}(x)=d^-_{UQ_n^k-F}(x)\geqslant 1$，因此 $\delta^-(D_1)\geqslant 1$，这说明 D_1 含圈，结合定理2可知 $|F|\geqslant\left|N^-(V(D_1))\right|\geqslant k(n-1)$。

3 单向 k 元 n 立方体的诊断度

定理4 设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 2$ 是两个正整数，则单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 在 PMC 模型下的诊断度为 n，即 $t(UQ_n^k)=n$。

证明 首先证明 $t(UQ_n^k)\geqslant n$ 。如果结论不成立，由定义2可知，存在不同的顶点子集 F_1 和 F_2，满足 $|F_1|,|F_2|\leqslant n$ 且没有从 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 到 $F_1\Delta F_2$ 的弧。注意，$V(UQ_n^k)-(F_1\cap F_2)$ 的顶点集合可划分为 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 和 $F_1\Delta F_2$ 。因为 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 2$，所以 $|V(UQ_n^k)|-|F_1\cup F_2|\geqslant k^n-|F_1|-|F_2|\geqslant k^n-2n\geqslant 0$，这说明 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2\neq\varnothing$ 。由于 F_1 和 F_2 不同，不妨设 $F_1-F_2\neq\varnothing$，此时 $F_1\Delta F_2\neq\varnothing$ 。综上可知 $F_1\cap F_2$ 是 UQ_n^k 的顶点割。由定理1知，$|F_1\cap F_2|\geqslant\kappa(UQ_n^k)=n$，从而有 $|F_1|=|F_1\cap F_2|+|F_1-F_2|\geqslant n+1$，与 $|F_1|\leqslant n$ 矛盾。

下证 $t(UQ_n^k)\leqslant n$ 。取 UQ_n^k 中的一个顶点 $x=00\cdots00$，令 $F_1=N^-(x)$，$F_2=\{x\}\cup N^-(x)$，则 $|F_1|=n$，$|F_2|=n+1$。显然没有从 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2=V(UQ_n^k)-\{x\}-N^-(x)$ 到 $F_1\Delta F_2=\{x\}$ 的弧。由定义，UQ_n^k 不是 $(n+1)$-可诊断的，即有 $t(UQ_n^k)\leqslant n$ 。

定理5 设 $k\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 3$ 是两个正整数，则单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 在PMC模型下的1好邻诊断度为 $kn-1$，即 $t_1(UQ_n^k)=kn-1$ 。

证明 考虑引理1所给出的 X 。令 $F_1=N^-(X)$，$F_2=X\cup N^-(X)$，由引理1可知，F_1 和 F_2 都是1好邻故障集且 $|F_1|,|F_2|\leqslant kn$ 。显然没有从 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2=V(UQ_n^k)-X-N^-(X)$ 到 $F_1\Delta F_2=X$ 的弧。由定义，UQ_n^k 不是1好邻 kn-可诊断的，即有 $t_1(UQ_n^k)\leqslant kn-1$ 。

下面证明 $t_1(UQ_n^k)\geqslant kn-1$ 。假设结论不成立，则存在不同的1好邻故障集 F_1 和 F_2，满足 $|F_1|,|F_2|\leqslant kn-1$，且没有从 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 到 $F_1\Delta F_2$ 的弧。注意，$V(UQ_n^k)-(F_1\cap F_2)$ 可划分为 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 和 $F_1\Delta F_2$。因为 $k\geqslant 3$，$n\geqslant 3$，所以 $|V(UQ_n^k)|-|F_1\cup F_2|\geqslant k^n-2\times(kn-1)>0$，这说明 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2\neq\varnothing$ 。因为 F_1 和 F_2 不同，所以 $F_1\Delta F_2\neq\varnothing$ 。综上可知 $F_1\cap F_2$ 是 UQ_n^k 的一个顶点割。

对任意的 $x\in V(UQ_n^k)-F_1\cap F_2$，或者 $x\in V(UQ_n^k)-F_1$，或者 $x\in V(UQ_n^k)-F_2$ 。不妨设 $x\in V(UQ_n^k)-F_1$，由于 F_1 是1好邻故障集，则 $\delta(UQ_n^k-F_1)\geqslant 1$，从而 $d_{UQ_n^k-F_1}(x)\geqslant 1$，这说明 $UQ_n^k-F_1$ 中含 x 的至少一个入邻点和一个出邻点。又由于 $UQ_n^k-F_1\subseteq UQ_n^k-(F_1\cap F_2)$，从而 $UQ_n^k-(F_1\cap F_2)$ 中也含 x 的至少一个入邻点和一个出邻点，即有 $d_{UQ_n^k-F_1\cap F_2}(x)\geqslant 1$ 。因此，$F_1\cap F_2$ 是1好邻故障集。

综上可知 $F_1\cap F_2$ 是1好邻割。由定理3可知，$|F_1\cap F_2|\geqslant\kappa_1(UQ_n^k)=k(n-1)$ 。

不妨设 $F_1-F_2\neq\varnothing$ 。因为 F_2 是1好邻故障集，所以 $\delta(UQ_n^k-F_2)\geqslant 1$。又由于 $UQ_n^k-F_2$ 可划分为 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 和 F_1-F_2，且从 $V(UQ_n^k)-F_1-F_2$ 到 F_1-F_2 无弧，则 UQ_n^k 由 F_1-F_2 导出子图的最小入度 $\delta^-(UQ_n^k[F_1-F_2])\geqslant\delta^-(UQ_n^k-F_2)\geqslant 1$，这说明 $UQ_n^k[F_1-F_2]$ 含圈，结合引理3知，$|F_1-F_2|\geqslant k$。因此，$|F_1|=|F_1-F_2|+|F_1\cap F_2|\geqslant k+k(n-1)=kn$，与 $|F_1|\leqslant kn-1$ 矛盾。

4 结束语

本文确定了单向 k 元 n 立方体 UQ_n^k 在PMC模型下的1好邻连通度、诊断度和1好邻诊断度。文献[13-14]给出了 k 元 n 立方体 Q_n^k 的1好邻连通度、诊断度和1好邻诊断度。表1总结这些结果。

表1 Q_n^k 与 UQ_n^k 的1好邻连通度、诊断度和1好邻诊断度

立方体	1好邻连通度	诊断度	1好邻诊断度
Q_n^3	$4n-3$	$2n$	$4n-2$
$Q_n^k(k\geqslant 4)$	$4n-2$	$2n$	$4n-1$
UQ_n^k	$k(n-1)$	n	$kn-1$

注意，单向 k 元 n 立方体只有 k 元 n 立方体一半的连接。从表1可知在大部分情形下，单向 k 元 n 立方体的1好邻连通度和1好邻诊断度甚至比 k 元 n 立方体还大，这说明单向 k 元 n 立方体是一个容错性和可诊断性很强的网络。

参考文献：

[1] Kessler R E，Schwarzmeier J L.Cray T3D：a new dimension for cray research[C]//Compcon Spring，Digest of Papers. Piscataway：IEEE，1993：176-182.

[2] Noakes M，Dally W J.System design of the J-Machine[C]//Proceedings of the 6th MIT Conference on Advanced Research in VLSI，Cambridge，MA，1990：179-194.

[3] Chen D，Eisley N A，Heidelberger P，et al.The IBM blue gene/Q interconnection fabric[J].IEEE Micro，2012，32（1）：32-43.

[4] Chou C H，Du D H C.Unidirectional hypercubes[C]//Proceedings of Supercomputing，1990：254-263.

[5] Day K，Tripathi A.Unidirectional star graphs[J].Information Processing Letters，1993，45（3）：123-129.

[6] Cheng E，Kruk S.Routing in unidirectional (n,k)-star graphs[J].Journal of Systemics Cybernetics and Informatics，2006，4（3）：74-78.

[7] 张国珍.单向 k 元 n 立方体网络[J].计算机工程与应用，2015，51（20）：1-4.

[8] Angjeli A，Cheng E.Linearly many faults in dual-cube-like networks[J].Theoretical Computer Science，2013，472：1-8.

[9] Preparata F P，Metze G，Chien R T.On the connection assignment problem of diagnosable systems[J].IEEE Transactions on Electronic Computers，2006，EC-16（6）：848-854.

（下转第111页）