Chapter 1

Theory of Electrodynamics

1.1 零、数学与物理常量基础公式

1. 矢量叉乘公式

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \tag{1.1.1}$$

[* 请自行结合 ∇ 的微分性与线性叠加，得到 $\nabla \times (a \times b), \nabla \times (\nabla \times a)$ 等]

2. 关于 ∇ 的相关公式 (推导用):

$$\nabla \cdot \left(\frac{R}{R^3}\right) = 4\pi\delta(R) \quad \nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\nabla r = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} \tag{1.1.2}$$

3. 关于 ∇ 积分的相关公式:

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot A \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathrm{S}} A \cdot \mathrm{d}S \quad \int_{\mathrm{V}} \nabla\psi \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathrm{S}} \psi \mathrm{d}S \tag{1.1.3}$$

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla \times A d\tau = \oint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S \times A \tag{1.1.4}$$

$$\int_{\mathrm{S}} \nabla \times A \cdot \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{c}} A \cdot \mathrm{d}l \quad \int_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S \times \nabla\psi = \oint_{\mathrm{c}} \psi \mathrm{d}l \tag{1.1.5}$$

4. 物理常量基本公式

$$\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{1.1.6}$$

1.2 麦克斯韦方程组

1. 电场及标量势，及 2 者关系

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(r'\right)}{R^3} R d\tau' = -\nabla\varphi \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(r'\right)}{R} d\tau' \tag{1.2.1}$$

2. 电偶极子 ($p=ql$) 的电场及电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cdot r}{r^3}\quad E=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p-3(p\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right] \tag{1.2.2}$$

3. 电荷守恒/连续性方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot j=0\quad j=\rho v \tag{1.2.3}$$

4. 磁场及矢势，及 2 者关系

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j\left(r'\right)d\tau'\times R}{R^3}=\nabla\times A\quad A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j\left(r'\right)}{R}d\tau' \tag{1.2.4}$$

5. 点电荷在电磁场中的受力

$$F=q(E+v\times B) \tag{1.2.5}$$

6. 磁偶极子 ($m=IS$) 的矢势及磁场

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\times r}{r^3}\quad B=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m-3(m\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right] \tag{1.2.6}$$

7. 真空及介质中的 Maxwell 方程组

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\cdot E=\rho/\epsilon_0\\ \nabla\times E=-\frac{\partial}{\partial t}B\\ \nabla\cdot B=0\\ \nabla\times B=\mu_0 j+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\nabla\cdot D=\rho_f\\ \nabla\times E=-\frac{\partial}{\partial t}B\\ \nabla\cdot B=0\\ \nabla\times H=j_f+\frac{\partial}{\partial t}D\end{array}\right. \tag{1.2.7}$$

8. 各项同性材料中的本构关系

$$D=\epsilon E,H=B/\mu\ (\text{无色散}) \tag{1.2.8}$$

$$D_\omega(r)=\epsilon(\omega)E_\omega(r),B_\omega(r)=\mu(\omega)H_\omega(r)\ (\text{色散介质}) \tag{1.2.9}$$

$$(j_\omega=\sigma(\omega)E_\omega) \tag{1.2.10}$$

9. 材料的线性响应

$$P=\epsilon_0\chi_e E,\quad\epsilon=\epsilon_r\epsilon_0=\left(1+\chi_e\right)\epsilon_0 \tag{1.2.11}$$

$$M=\frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}B,\quad\mu=\mu_r\mu_0=\left(1+\chi_m\right)\mu_0, \tag{1.2.12}$$

10. 介质中的电荷和电流 (自由、极化、磁化)

$$\rho=\rho_f+\rho_p,\rho_p=-\nabla\cdot P \tag{1.2.13}$$

$$j=j_f+j_m+j_\rho,j_m=\nabla\times M,j_p=\frac{\partial P}{\partial t} \tag{1.2.14}$$

11. 麦克斯韦方程组的边界条件 $(\nabla \to n)$

$$\begin{cases} n\cdot(D_1-D_2)=\sigma_f \text{ 自由电荷面密度} \\ n\times(E_1-E_2)=0 \\ n\cdot(B_1-B_2)=0 \\ n\times(H_1-H_2)=\alpha_f \text{ 面电流密度} \end{cases} \tag{1.2.15}$$

1.3 电磁场的守恒定律和对称性

1. 电 (磁) 场对电荷做功:

$$dR = E\cdot \mathrm{j}\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \tag{1.3.1}$$

2. 真空中电磁场的能量守恒定律及各项的含义

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[W_m+\int u\ \mathrm{d}\tau\right]=-\oint S_p\cdot \mathrm{d}S \tag{1.3.2}$$

$$u(r,t)=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right),\quad S_p(r,t)=\frac{1}{\mu_0}E\times B \tag{1.3.3}$$

其物理意义为: 在一个闭合空间内物理量 (总能) $W_m+\int u\ \mathrm{d}\tau$ 的增加等于从边界流入闭合空间的 S_p 的大小。其中 $u(r,t)$ 是 r 点处 t 时刻电磁场的能量密度, S_p 即为相应的能流密度，也称做坡印廷矢量。

3. 真空中电磁场的动量守恒定律及各项的含义

$$\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t}=-\oint \mathrm{d}S\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int g\mathrm{d}\tau \tag{1.3.4}$$

$$\text{电磁场的动量密度}g=\epsilon_0(E\times B)=\frac{1}{c^2}S_p \tag{1.3.5}$$

$$\text{动量流密度}\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\epsilon_0EE-\frac{1}{\mu_0}BB \tag{1.3.6}$$

$$\text{受力}F_m=\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.7}$$

4. 带电的运动粒子在外磁场中的总动量

$$p=mv+qA \tag{1.3.8}$$

5. 介质中的电磁能量守恒定律

$$u(r,t)=\frac{1}{2}\left(\epsilon E^2+\mu H^2\right),\quad S_p(r,t)=E\times H \tag{1.3.9}$$

6. 介质中电磁场的动量守恒定律

$$g'=D\times B,\quad \overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}(E\cdot D+B\cdot H)\overleftrightarrow{I}-DE-BH \tag{1.3.10}$$

1.4 导体静电学

1. 导体静电问题中电势满足的方程及边界条件

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon \\ \varphi \text{ 在边界有限} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{边界}} = -\frac{\sigma}{\epsilon}, \quad Q = -\epsilon\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S \end{cases} \tag{1.4.1}$$

2. 格林互易定理给定一个有 m 个导体组成的体系，假设当导体上的电荷为 $q_1, q_2, \cdots$ 时，它们的电势等于 ϕ_i ，而对应另外一种电荷分布 q_i', 导体的电势分布为 ϕ_i' ，那么有关系式 $\sum_i q_i\phi_i' = \sum_i q_i'\phi_i$.

3. 导体系中的总能和相互作用能

$$\text{总能}W = \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i\phi_i Q_i \tag{1.4.2}$$

$$\text{相互作用能}W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i', \quad \phi_i' = \sum_{j\neq i}\phi_j \text{ 为其余电荷在}q_i\text{ 处电势} \tag{1.4.3}$$

4. 电容的定义

$$q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j, \phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1}q_j \to W = \frac{1}{2}\sum_{i,j}C_{ij}\phi_i\phi_j \tag{1.4.4}$$

5. 静电体系的稳定性一汤姆逊定理和恩肖定理

   汤姆逊定理：若导体系中每个导体的位置固定不变，电荷可再分布，则体系基态对应，电荷的分布使所有导体均为等势体。

   恩肖定理：静电体系的平衡条件是体系中任一导体所处的位置的电场均为 0 ，因此无约束下静电体系没有平衡态。

6. 导体表面所受静电力

$$F_s = \frac{\epsilon_0}{2}E^2\hat{e}_n = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2\hat{e}_n \tag{1.4.5}$$

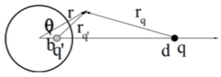
1.5 电介质静电学

1. 电介质的边界条件

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \epsilon_1\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f(\vec{n}: 2\to 1) \end{cases} \tag{1.5.1}$$

2. 唯一性定理对于确定的静电 (磁) 问题 (已知电荷分布和电介质分布 $\rho(r),\epsilon(r)$ 或电流和磁介质分布)，边条唯一决定解 (前提: 介质中 D 与 $E(H$ 与 $A)$ 之间的本构关系为单调单值)

3. 镜像法 (会做)



$$q'=\frac{R}{d}q,\quad b=\frac{R^2}{d} \tag{1.5.2}$$

4. 本征函数展开法

外场为均匀电场时，对于球/柱体系，解只具有 $l=1$ 的项。

$$\text{轴对称球坐标系}\varphi=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta \tag{1.5.3}$$

$$\text{与z 无关的柱对称}\varphi=B_0\ln\rho+\left(A_1\rho+B_1\rho^{-1}\right)\cos\phi+\left(C_1\rho+D_1\rho^{-1}\right)\sin\phi \tag{1.5.4}$$

5. 退极场

$$E_d=E_0-E_{\text{in }}=-L\cdot P/\epsilon_0 \tag{1.5.5}$$

L 为退极因子，取决于物体形状，对于球 $L=1/3$.

6. 多极矩展开

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}-\frac{P}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\overrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{1.5.6}$$

$$Q=\int\rho\left(r'\right)\mathrm{d}\tau',P=\int\rho\left(r'\right)r'\mathrm{d}\tau',\overrightarrow{D}=3\int\rho\left(r'\right)r'r'\mathrm{d}\tau' \tag{1.5.7}$$

7. 多极矩在外场中的作用

$$W=Q\varphi-p\cdot E+\frac{1}{6}\overrightarrow{D}:\nabla E \tag{1.5.8}$$

8. 电偶极矩在外场中的受力与力矩

$$F_e=p\cdot\nabla E,\quad M=p\times E \tag{1.5.9}$$

1.6 静磁场

1. 磁场的矢势方程及边界条件

$$\nabla^2 A = -\mu_0 j \tag{1.6.1}$$

$$\hat{e}_n \times (A_1 - A_2) = 0 \tag{1.6.2}$$

$$\hat{e}_n \times \left[\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times A_1) - \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times A_2)\right] = \alpha_f \tag{1.6.3}$$

2. 静磁场总能

$$U_m = \frac{1}{2}\int B \cdot H \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int A \cdot j \mathrm{d}\tau \tag{1.6.4}$$

3. 磁场的标量势解法中磁标势的定义，引入磁标势的条件及其意义

$$H = -\nabla \varphi_m \tag{1.6.5}$$

1) 无传导电流；2) 引入磁壳使得空间为单连通;

从而保证了 H 是个保守场，且保证了磁标势单值性.

4. 磁介质中的边界条件

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \mu_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \mu_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases} \tag{1.6.6}$$

5. 铁磁介质中的边界条件 (饱和磁化为 M_0^i)

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = e_n \cdot \left(M_0^1 - M_0^2\right) \end{cases} \tag{1.6.7}$$

6. 磁多极展开

$$A = A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m \times r}{r^3}, m = \frac{1}{2}\int r' \times j \ \mathrm{d}\tau' \tag{1.6.8}$$

7. 磁偶极子的能量、受力和力矩

$$U = -m \cdot B; F = \nabla(m \cdot B); \tau = m \times B \tag{1.6.9}$$

1.7 似稳场 (准静)

1. 似稳条件

   (a) 电磁场变化频率远小于金属特征频率 $\omega << \omega_\sigma = \sigma_c/\epsilon$, 其中 $j = \sigma_c E$.

(b) $R << \lambda/2\pi$ 从而忽略位移电流与辐射

2. 似稳场方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{1.7.1}$$

3. 趋肤效应与趋肤深度

$$E = \hat{x}A\exp[pz - i\omega t] = \hat{x}E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z) \tag{1.7.2}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}} \tag{1.7.3}$$

1.8 电磁波的传播

1. 电磁波的传播方程

$$\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{1.8.1}$$

[* 请自行从 Maxwell 方程推导得到该式.]

2. 电磁波的解

$$E(r,t) = E_0\cos(k\cdot r - \omega t + \phi) \tag{1.8.2}$$

$$B(r,t) = B_0\cos(k\cdot r - \omega t + \phi) \tag{1.8.3}$$

3. 电磁波的色散关系、波速、波长和折射率

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 \tag{1.8.4}$$

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}, v_p = \omega/k \tag{1.8.5}$$

$$k = 2\pi/\lambda \tag{1.8.6}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} = k\omega/c \tag{1.8.7}$$

4. 波矢与电场、磁场的关系

$$k\cdot E_0 = 0, \quad k\cdot B_0 = 0 \tag{1.8.8}$$

$$k\times E_0 = \omega B_0, \quad k\times B_0 = -\epsilon\mu\omega E_0 \tag{1.8.9}$$

5. 阻抗的定义

$$Z = \sqrt{\mu/\epsilon}, |E_0| = Z\,|H_0| \tag{1.8.10}$$

6. 电磁波的能流

$$\langle S_p \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E \times H^*\right) = \frac{1}{2Z}E_0^2\hat{k} = \langle u \rangle \cdot v \tag{1.8.11}$$

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon}{2}E_0^2 \tag{1.8.12}$$

7. $E_0 = \hat{x}E_{x0}e^{i\phi_x} + \hat{y}E_{y0}e^{i\phi_y}$ 的线偏振和圆偏振条件

   线偏振: $\phi_x = \phi_y$;

   圆偏振 $\phi_x - \phi_y = \pm\pi/2, |E_{x0} = E_{y0}|$, 正负对应右旋、左旋偏振 $\hat{e}_{\text{right}} = (\hat{x} - i\hat{y})/\sqrt{2}, \hat{e}_{\text{eft}} = (\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}$

8. 金属的有效电导率一—Drude 模型及其推导

   利用散射力模型 (平均 τ 时间受到一次异种粒子的散射而丢失所有的动量)

$$\sigma(\omega) = \frac{n_e e^2}{m(-i\omega + 1/\tau)} \tag{1.8.13}$$

9. 金属的有效介电函数及其不同频段的行为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\epsilon_v + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \epsilon_r = \epsilon_v - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}, \quad \epsilon_v \approx 1 \tag{1.8.14}$$

$$\epsilon_r(\omega) \approx \begin{cases} i\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\omega}, & \leq \mathrm{GHz} \\ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, & \text{可见光波段} \end{cases} \tag{1.8.15}$$

   在可见光波段，电子高频下碰撞时间远大于周期，几乎不表现出损耗。在 GHz 波段，电子平均碰撞时间远小于电场周期，表现为欧姆损耗直流良导体特征。

10. 等离共振频率及其物理含义

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}} \tag{1.8.16}$$

   表示自由电子气在外场的驱动下集体震荡。

11. 导电介质的色散关系

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r(\omega) \tag{1.8.17}$$

12. 良导体在不同电磁波频率的行为

   (a) 在 GHz 以下,$1/\omega >> \tau$ 既震荡又衰减,电磁场有 $\pi/4$ 相位差,$\alpha = \sqrt{\sigma_c\mu_0\omega/2}$, 趋肤深度 $\delta = \alpha^{-1}$.

(b) 在光波段 $k^2 = \left(\omega^2 - \omega_p^2\right)/c^2$ ，电磁场 $\pi/2$ 相位差. 当
$\omega < \omega_p$ ，不传播，造成反射；
当 $\omega = \omega_p$ 隧穿至极值；
当 $\omega > \omega_p$ ，紫外透明，有一定反射.

13. 非良导体在不同电磁波频率的行为

非良导体 $\omega \ll 1/\tau$, 电磁场几乎无相位差，电磁波传播伴随很小的衰减。

14. 各向异性介质/旋光介质中的本构关系

$$D_\omega = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r(\omega) E. \tag{1.8.18}$$

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{1.8.19}$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \epsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_B}{\left(\omega^2 - \omega_B^2\right)\omega}, \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \omega_B = -\frac{eB_0}{m} \tag{1.8.20}$$

15. 左 (k_-) 右 (k_+) 旋光的色散关系

$$k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1 \pm \epsilon_2} \tag{1.8.21}$$

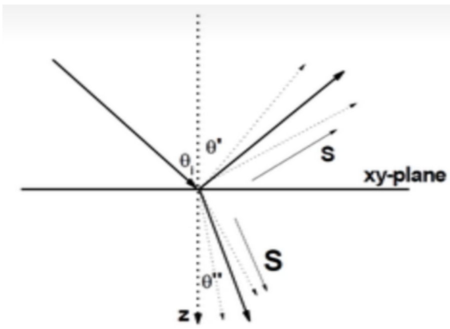
16. 法拉第效应

与入射光比较偏振方向旋转了如下的角度 $\Delta\phi = (k_+ - k_-) \cdot d/2$.

17. 电磁波在介质界面反射、折射的基本规律及其物理本质

(a) 反射波、折射波与入射波 ω 相等一一时间平移不变性
(b) 入射线、反射线和折射线在同一平面内, $k_{\|}$ 相同一一空间平移不变性
(c) 在正常介质中, 反射波 k_z' 应取负根，折射波 k_z'' 应取正根一一因果律
(d) 入射角等于反射角　一空间平移不变性
(e) Snell law　空间平移不变性

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1.8.22}$$



18. 电磁波在介质界面反射、折射的振幅关系

    (a) 横电波 S/TE ，电场垂直于入射面，有效阻抗 $Z_{eff} = Z/\cos\theta$

$$E_0' = \frac{Z_{eff,2} - Z_{eff,1}}{Z_{eff,2} + Z_{eff,1}} E_0 = r_s \cdot E_0, E_0'' = \frac{2Z_{eff,2}}{Z_{eff,2} + Z_{eff,1}} E_0 = t_s \cdot E_0 \tag{1.8.23}$$

    (b) 横磁波 P/TM，磁场垂直于入射面，$Z_{\text{eff}} = Z\cos\theta$

$$H_0' = \frac{Z_{eff,1} - Z_{eff,2}}{Z_{eff,2} + Z_{eff,1}} H_0 = r_p \cdot H_0, H_0'' = \frac{2Z_{eff,1}}{Z_{eff,2} + Z_{eff,1}} H_0 = t_p \cdot H_0 \tag{1.8.24}$$

19. 电磁波的反射率 R 与透射率 T

$$R = |r|^2, T = \begin{cases} |t_s|^2 \frac{Z_{eff,1}}{Z_{2ff,2}} \\ |t_p|^2 \frac{Z_{eff,2}}{Z_{ef,1}} \end{cases} \tag{1.8.25}$$

20. 布鲁斯特 Brewster 角及其意义

    当反射波与折射波相互垂直时，P 偏振的电磁波完全不被反射, 入射角

$$\theta_B = \arctan(n_2/n_1) \tag{1.8.26}$$

21. 全反射临界角

$$\theta_C = \arcsin(n_2/n_1) \tag{1.8.27}$$

1.9 波导和谐振腔

1. 波导管 (PEC) 的边界条件

$$n \cdot B = 0, n \times E = 0 \tag{1.9.1}$$

$$n \cdot D = \sigma, n \times H = j \tag{1.9.2}$$

2. 波导管中波的模式 (偏振)

    (a) 横电波 TE: $B_{0z} \neq 0, E_{0z} = 0$

    (b) 横电波 TM: $B_{0z} = 0, E_{0z} \neq 0$

3. TE 波的解及基模

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right); B_z = B_{0z}\exp\left[ik_z z - \omega t\right] \tag{1.9.3}$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = k_0^2 - k_z^2 \tag{1.9.4}$$

$$\text{截止频率, 电磁波能够传播的最低频率: } \omega_c = ck_c \tag{1.9.5}$$

$$\text{色散关系} k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{1.9.6}$$

TE 模的最低阶模式 (基模) 为 TE_{01} 或 TE_{10}

4. TM 波的解及基模

$$E_{0z} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right); E_z = E_{0z}\exp\left[ik_z z - \omega t\right] \tag{1.9.7}$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \tag{1.9.8}$$

TM 模的最低阶模式 (基模) 为 TM_{11}.

5. 谐振腔的频率及基模

$$\omega_{\{mnp\}} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \tag{1.9.9}$$

谐振腔中 m, n, p 三个指标中只能有一个不是 0 ，故谐振腔的最低阶模式为 (110), (101) 或 (011).

1.10 电磁波的辐射

1. 用电势和矢势求得电场

$$E = -\frac{\partial}{\partial t}A - \nabla\varphi \tag{1.10.1}$$

[* 请自行从 Maxwell 方程推导得到]

2. 库仑规范条件与洛伦兹规范条件

$$\nabla \cdot A = 0 \tag{1.10.2}$$

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{1.10.3}$$

3. 洛伦兹规范条件下势所满足的方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi\\ A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\rho/\epsilon_0\\ -\mu_0 j\end{pmatrix} \tag{1.10.4}$$

4. 推迟势

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau',\quad [\rho]=\rho\left(r',t'=t-R/c\right),R=r-r' \tag{1.10.5}$$

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[j]}{R}d\tau' \tag{1.10.6}$$

5. 电偶极辐射 $\left([p]=p_0e^{-i\omega t}e^{ikr}\right)$

$$\varphi_1=-\nabla\cdot\frac{[p]}{4\pi\epsilon_0 r},[p]=\left[\int r'\rho d\tau'\right] \tag{1.10.7}$$

$$A_0=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{p}]=\frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{[p]}{r} \tag{1.10.8}$$

远场下的电磁场为 $(\nabla\to ik\hat{r})$

$$B=\nabla\times A=\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\hat{r}\times[p] \tag{1.10.9}$$

$$E=-\hat{r}\times(cB)=-\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0c^2r}\hat{r}\times(\hat{r}\times[p]) \tag{1.10.10}$$

6. 辐射能流的角分布

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle=\langle S_p\rangle r^2 \tag{1.10.11}$$

7. 远场下磁偶极辐射

$$A=\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2c}r\times[m] \tag{1.10.12}$$

$$B=\nabla\times A=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{k^2}{r}\hat{r}\times(\hat{r}\times[m]) \tag{1.10.13}$$

$$E=-\hat{r}\times(cB)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{k^2c}{r}\hat{r}\times[m] \tag{1.10.14}$$

8. 天线电流及矢势

$$I\left(z',t'\right)=I_0e^{-i\omega T}\sin\left(k\left(\frac{l}{2}-\left|z'\right|\right)\right) \tag{1.10.15}$$

$$A_z=\frac{\mu_0I_0}{2\pi kr}e^{-i\omega(t-r/c)}\left(\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\right) \tag{1.10.16}$$

9. 天线阵的辐射角分布

利用相邻路程差 $l\cos\theta,E_i=C(\theta)\exp\left[ikR_i\right]/R_i$ ，求和得到，总的辐射角分布

$$f_{\text{total}}\left(\theta,\phi\right)=f_{\text{single}}\left(\theta,\phi\right)\frac{\sin^2(m\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)},\alpha=kl\cos\theta \tag{1.10.17}$$

1.11 相对论电动力学

1. 狭义相对论的两条基本假设

    (a) 相对性原理: 自然规律在不同惯性系中的表达式相同

    (b) 光速不变原理，选择 Maxwell 方程在一切惯性系中形式不变

2. 洛伦兹变换

$$x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}, t' = \left(t - vx/c'/\sqrt{1 - v^2/c^2}\right. \tag{1.11.1}$$

$$x_\mu = (x, y, z, ict), \beta = v/c, \gamma = /\sqrt{1 - \beta^2} \tag{1.11.2}$$

$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\nu, \alpha = \begin{pmatrix} \gamma & & & i\beta\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -i\beta\gamma & & & \gamma \end{pmatrix} \tag{1.11.3}$$

$$\tag{1.11.4}$$

3. 电荷守恒定律的协变形式

$$J_\mu = (j, ic\rho), \quad \partial_\mu J_\mu = 0, \partial_\mu = \left(\nabla, -i\frac{\partial_t}{c}\right) \tag{1.11.5}$$

4. 协变形式的麦克斯韦方程组

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\nu, \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 (\mu \neq \nu \neq \alpha) \tag{1.11.6}$$

$$A_\mu = (A, i\varphi/c), F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.11.7}$$