

第一周作业反馈

罗晏宸

February 25 2020

1 作业答案

练习 1

1. 列出以下复合命题的真命题。(其中支命题 p, q, r, s 视为命题变元.)

$$7^\circ \quad (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

$$8^\circ \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

解 复合命题的真命题由如下真值表可得:

$(\neg p \wedge q)$	\rightarrow	$(\neg q \wedge r)$	$(p \rightarrow q)$	\rightarrow	$(p \rightarrow r)$
1 0 0 0	1	1 0 0 0	0 1 0	1	0 1 0
1 0 0 0	1	1 0 1 1	0 1 0	1	0 1 1
1 0 1 1	0	0 1 0 0	0 1 1	1	0 1 0
1 0 1 1	0	0 1 0 1	0 1 1	1	0 1 1
0 1 0 0	1	1 0 0 0	1 0 0	1	1 0 0
0 1 0 0	1	1 0 1 1	1 0 0	1	1 1 1
0 1 0 1	1	0 1 0 0	1 1 1	0	1 0 0
0 1 0 1	1	0 1 0 1	1 1 1	1	1 1 1

命题 7° 的真值表

命题 8° 的真值表

练习 2

2. 写出由 $X_2 = \{x_1, x_2\}$ 生成的公式集 $L(X_2)$ 的三个层次: L_0, L_1 和 L_2 .

解

$$L_0 = \{x_1, x_2\}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2\}$$

$$L_2 = \{\neg\neg x_1, \neg\neg x_2, \neg x_1 \rightarrow x_1, \neg x_1 \rightarrow x_2, \neg x_2 \rightarrow x_1, \neg x_2 \rightarrow x_2,$$

$$x_1 \rightarrow \neg x_1, x_1 \rightarrow \neg x_2, x_2 \rightarrow \neg x_1, x_2 \rightarrow \neg x_2,$$

$$\neg(x_1 \rightarrow x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_2), \neg(x_2 \rightarrow x_1), \neg(x_2 \rightarrow x_2),$$

$$(x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1,$$

$$(x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2,$$

$$x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2),$$

$$x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2), \}$$

练习 3

2. 写出以下公式在 L 中的“证明”(即证明它们是 L 的定理)

$$1^\circ \quad (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))$$

$$2^\circ \quad ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$$

解

$$1^\circ$$

证明.

$$(1) \quad (\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \quad (L3)$$

$$(2) \quad (\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))) \quad (L1)$$

$$(3) \quad (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)) \quad (1), (2), MP$$

□

2°

证明.

$$(1) \quad (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) \quad (\text{L2})$$

$$(2) \quad (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) \rightarrow \\ ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) \quad (\text{L2})$$

$$(3) \quad ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) \quad (1), (2), \text{MP}$$

□

3. 证明下面的结论

$$2^\circ \quad \{\neg \neg p\} \vdash p$$

$$3^\circ \quad \{p \rightarrow q, \neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p\} \vdash p \rightarrow r$$

$$4^\circ \quad \{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$$

解

2°

证明.

$$(1) \quad \neg \neg p \quad \text{假定}$$

$$(2) \quad \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \quad (\text{L1})$$

$$(3) \quad \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p \quad (1), (2), \text{MP}$$

$$(4) \quad (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \quad (\text{L3})$$

$$(5) \quad \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p \quad (3), (4), \text{MP}$$

$$(6) \quad (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) \quad (\text{L3})$$

$$(7) \quad \neg \neg p \rightarrow p \quad (5), (6), \text{MP}$$

$$(8) \quad p \quad (1), (7), \text{MP}$$

□

3°

证明.

- | | | |
|-----|---|--------------|
| (1) | $\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$ | 假定 |
| (2) | $(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ | (L3) |
| (3) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | (1), (2), MP |
| (4) | $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | (L2) |
| (5) | $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | (3), (4), MP |
| (6) | $p \rightarrow q$ | 假定 |
| (7) | $p \rightarrow r$ | (5), (6), MP |

□

4°

证明.

- | | | |
|-----|--|--------------|
| (1) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | 假定 |
| (2) | $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | (L2) |
| (3) | $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | (1), (2), MP |
| (4) | $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ | (L1) |
| (5) | $q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | (3), (4), MP |
| (6) | $(q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow$
$((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$ | (L2) |
| (7) | $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ | (5), (6), MP |
| (8) | $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ | (L1) |
| (9) | $q \rightarrow (p \rightarrow r)$ | (7), (8), MP |

□

2 问题总结

2.1 真值表格式有误

许多同学沿袭了数字电路等课程中的真值表绘制习惯，表格中没有还原复合命题的书写顺序，分割线也有画的太多的情况。在本门课程中，列出真值表的过程是：

先写一遍复合命题，

$$\underline{(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)}$$

将构成它的支命题所有可能的真值组合抄写在对应支命题的下方，

$(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$			
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

再按命题中联结词作用次序将每次作用所得的真值写在该联结词的下方，

$(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$			
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	0	1

最后得到的一列结果写在最后一个联结词下，用竖线标出

$(\neg p \wedge q)$	\rightarrow	$(\neg q \wedge r)$
1 0 0 0	1	1 0 0 0
1 0 0 0	1	1 0 1 1
1 0 1 1	0	0 1 0 0
1 0 1 1	0	0 1 0 1
0 1 0 0	1	1 0 0 0
0 1 0 0	1	1 0 1 1
0 1 0 1	1	0 1 0 0
0 1 0 1	1	0 1 0 1

2.2 公式集各层次元素有遗漏

部分同学在练习 2 第 2 题中遗漏了 L_2 层次中的部分公式，从批改情况来看容易被遗漏的有 $\neg(x_1 \rightarrow x_1)$, $\neg(x_1 \rightarrow x_2)$, $\neg(x_2 \rightarrow x_1)$, $\neg(x_2 \rightarrow x_2)$ 这些公式， L_2 层次中的公式数量为 30.

2.3 证明格式不规范

我们这里所说的证明指形式证明，它被严格定义为一列有限的公式，在完成证明时，需要列出每个公式的编号、写出该公式的依据（包括假定集中的公式也需要写出“假定”）。格式可以参照上述作业答案和课本中的证明。

2.4 证明过程不完整

如上所述，书写证明时需要列出这一公式列中的所有公式，包括假定集中的公式也需要列出编号，部分同学出现了跳步的现象，尤其体现在证明中出现较长的 L_2 型公理

$$(n) \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L2)$$

时，往往遗漏了列出前件公式

$$(n+1) \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

和相应的 MP 规则

$$(n+2) \quad ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (n), (n+1), \text{MP}$$

，直接写成

$$(n) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (\text{L2})$$

。比如练习 3 第 2 题第 2° 小问中连续 2 次使用 L_2 型公理后，许多同学忽略了假言推理 MP 的过程，直接结束了证明。

3 关于公式语法与排版

许多同学已经开始使用 Markdown、 \LaTeX 等语法编写作业中的公式，有一部分同学在具体的符号上使用有些不准确，比如否定词符号 \neg 应当使用数学环境中的 `\lnot` 而不是 \sim ，还有一些同学在证明的公式排版上出现了一些混乱，这些内容受限于时间与精力，我可能没有办法在作业反馈中系统地整理出来，但是通过查阅资料和积累一些经验，相信大家会很快实现比较好的效果。本次作业反馈的 `.tex` 源文件我也会一并上传供使用 Markdown 和 \LaTeX 的同学参考语法，也欢迎使用 Word 中 UnicodeMath 公式编辑或者 Mathematica 完成作业的同学和我讨论这方面的内容。