第二周作业反馈

罗晏宸

March 3 2020

1 作业答案

随着大家学习的深入，作业题目的复杂度也逐渐增加，可用的命题或结论也慢慢积累，作业题的答案很多都是不唯一的，在作业反馈中所有问题的答案仅供大家参考，也欢迎和助教们讨论.

练习 4

1. 先根据定义直接证明 $\vdash (x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)$ ，然后再利用演绎定理来证明它

解

直接证明

证明.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2)) && \text{(L2)}\\
&(2) \quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))) \to \\
&\qquad\quad \big(((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to \\
&\qquad\quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2))\big) && \text{(L2)}\\
&(3) \quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to \\
&\qquad\quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)) && \text{(1), (2), MP}\\
&(4) \quad x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1) && \text{(L1)}\\
&(5) \quad (x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1)) \to
\end{aligned}
$$

	$((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1))$	(L2)
(6)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)$	(4), (5), MP
(7)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)$	(3), (6), MP

□

利用演绎定理证明

证明. 由演绎定理，只用证 $\{x_1 \to (x_1 \to x_2)\} \vdash x_1 \to x_2$.
下面是 $x_1 \to x_2$ 从 $\{x_1 \to (x_1 \to x_2)\}$ 的一个证明：

(1)	$x_1 \to (x_1 \to x_2)$	假定
(2)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))$	(L2)
(3)	$(x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2)$	(1), (2), MP
(4)	$x_1 \to x_1$	同一律
(5)	$x_1 \to x_2$	(3), (4), MP

□

2. 利用演绎定理证明以下公式是 *L* 的定理

2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$.（换位律）

3° $((p \to q) \to p) \to p$.（Peirce 律）

解

2°

证明. 由演绎定理，只用证 $\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$.
下面是 $\neg p \to \neg q$ 从 $\{q \to p\}$ 的一个证明：

(1)	$\neg\neg q$	新假定
(2)	$\neg\neg q \to (\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q)$	(L1)
(3)	$\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q) \to (\neg q \to \neg\neg\neg q)$	(L3)

(5) $\neg q \to \neg\neg\neg q$ (3), (4), MP

(6) $(\neg q \to \neg\neg\neg q) \to (\neg\neg q \to q)$ (L3)

(7) $\neg\neg q \to q$ (5), (6), MP

(8) q (1), (7), MP

以上(1)至(8)是 q 从 $\{\neg\neg q\}$ 的一个证明

(9) $\neg\neg q \to q$ 由演绎定理

可以在证明过程中使用演绎定理，但不宜过度改变证明顺序

(10) $q \to p$ 假定

(11) $\neg\neg q \to p$ (9), (10), HS

(12) $\neg\neg\neg p$ 新假定

此处可以用与上同理来表达，但是不宜从 $\neg\neg q \to q$ 直接得到 $\neg\neg\neg p \to \neg p$ ——书上没有类似的表达

(13) $\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L1)

(14) $\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p$ (12), (12), MP

(15) $(\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$ (L3)

(16) $\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p$ (14), (15), MP

(17) $(\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$ (L3)

(18) $\neg\neg\neg p \to \neg p$ (16), (17), MP

(19) $\neg p$ (12), (18), MP

以上(12)至(19)是 $\neg p$ 从 $\{\neg\neg\neg p\}$ 的一个证明

(20) $\neg\neg\neg p \to \neg p$ 由演绎定理

(21) $(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ (L3)

（利用第一双重否定律）我们证明了第二双重否定律

(22) $p \to \neg\neg p$ (20), (21), MP

(23) $\neg\neg q \to \neg\neg p$ (9), (22), HS

(24) $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$ (L3)

(25) $\neg p \to \neg q$ (23), (24), HS

□

3°

证明. 由演绎定理，只用证 $\{(p \to q) \to p\} \vdash p$.

下面是 p 从 $\{(p \to q) \to p\}$ 的一个证明：

(1)	$(p \to q) \to p$	假定
(2)	$\neg p \to (p \to q)$	否定前件律
(3)	$\neg p \to p$	(1), (2), HS
(4)	$(\neg p \to p) \to p$	否定肯定律
(5)	p	(3), (4), MP

□

练习 5

1. 证明

3° $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

5° $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$.

解

3°

证明. 由演绎定理，只用证 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. 把 q 作为新假定，可得

(1)	q	新假定
(2)	$q \to (p \to q)$	(L1)
(3)	$p \to q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to q)$	假定

由(3)，(4)用归谬律即得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. □

5°

证明. 由演绎定理， 只用证 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$. 把 $\neg q$ 作为新假定，可得

(1)	$p \to q$	假定
(2)	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	换位律

(3)	$\neg q \to \neg p$	(1), (2), MP
(4)	$\neg q$	新假定
(5)	$\neg p$	(3), (4), MP
(6)	$\neg p \to q$	假定
(7)	q	(5), (6), MP

由(4)，(7)用反证律即得 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$. □

练习 6

2. 证明命题 2-$2°$, $3°$, $4°$

.

命题 2-$2°$ $\vdash (p \wedge q) \to q$.

命题 2-$3°$ $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

命题 2-$4°$ $\vdash p \to (p \wedge p)$.

解

命题 2-$2°$

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to q$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to q$. 由演绎定理，只用证 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. 把 $\neg q$ 作为新假定，可得

(1)	$\neg q$	新假定
(2)	$\neg q \to (p \to \neg q)$	(L1)
(3)	$p \to \neg q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to \neg q)$	假定

使用了两次演绎定理

由(3)，(4)用反证律即得 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. □

命题 2-3°

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$. 下面是所要的一个证明：

假定 $q \to \neg p$、p 和 q， 立即可得

注意此处(1)，(2)不是公式集中的公式

(1) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash p$

(2) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{q \to \neg p, p\} \vdash \neg q$.

(3) $(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$ 由演绎定理

(4) $((q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p))$ 换位律

(5) $\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$ (3), (4), MP

□

命题 2-4°

证明. 要证 $\vdash p \to (p \wedge p)$，即要证 $\vdash p \to \neg(p \to \neg p)$. 由演绎定理，只用证 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. 把 $p \to \neg p$ 作为新假定，立即可得

(1) $\{p, p \to \neg p\} \vdash p$

(2) $\{p, p \to \neg p\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. □

2 问题总结

2.1 对于"（根据定义）直接证明"理解不够准确

在上一周的作业批改反馈中我们已经提到了，对形式证明定义的理解是十分重要的. 这次作业部分同学在第一题中使用了同一律来辅助证明，这并不满足根据定义直接证明的要求. 而在命题演算系统 L 的学习中，随着各种结论、命题的加入，大家对于一般证明的书写也有不足之处，现将教材中关于形式证明的定义、相关概念以及在几个小节结尾处的总结摘录如下，希望有助于大家理解.

设 $\mathit{\Gamma} \subseteq L(X), p \in L(X)$. 当我们说“公式 p 是从公式集 $\mathit{\Gamma}$ 可证的”，是指存在着 $L(X)$ 的公式的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$，其中尾项 $p_n = p$，且每个 $p_k(k = 1, \cdots, n)$ 满足：

(i) $p_k \in \mathit{\Gamma}$，或

(ii) p_k 是“公理”，或

所以严格的直接证明就是列出一列这样的公式

(iii) $\exists i, j < k,\ p_j = p_i \to p_k$.

具有上述性质的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 $\mathit{\Gamma}$ 的“证明”，通常也叫作形式证明.

如果公式 p 从公式集 $\mathit{\Gamma}$ 可证，那么我们写 $\mathit{\Gamma} \vdash p$，必要时也可以写成 $\mathit{\Gamma} \vdash_L p$. 这时 $\mathit{\Gamma}$ 中的公式叫做“假定”，p 叫做假定集 $\mathit{\Gamma}$ 的语法推论.

若 $\varnothing \vdash p$ ，则称 p 是 L 的“定理”，记为 $\vdash p$. p 在 L 中从 $\varnothing$ 的证明 $p_1, \cdots, p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明.

……下面介绍的三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律将会帮助我们更容易建立 $\mathit{\Gamma} \vdash p$ 这种形式的结果. 但在开头，还是有必要做一些按照定义写出证明的联系.

……命题 1 的证明中列出的“证明”已经不是原来定义所要求的的严格意义下的“证明”，因为这里已经引用了前面建立的结论. 尽管如此，仍足以证明所要建立的结论是正确的.

2.2 同一证明中语法定理的多次使用导致呈现出的结构混乱

如前所述，三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律在帮助我们证明出题设公式时是十分有力的，但当一次证明较为复杂，需要多次使用演绎定理或者需要使用多个语法定理时，如果不能很好的组织公式顺序，不仅会导致呈现出比较混乱的证明流程，而且很有可能影响考虑证明时的思路，产生一些不必要的错误.

参考前面给出的参考答案，在常见的此类问题中，可以首先使用多重的演绎定理简化目标式，比如证明形如 $\vdash p \to (q \to r)$ 的公式，直接连续使用两次演绎定理，则只用证 $\{p, q\} \vdash r$. 然后再视情况使用反证律或归谬律进一步证明. 而当需要 在证明过程中使用相应语法定理 时，可以穿插文字说明以表述公式是在何种假定集下证明的.

如练习 4 的 2-2° 题

2.3 证明的格式问题依然存在

尽管使用语法定理能够很直观地简化证明，小部分同学在证明的格式上依然存在问题，主要表现为列出公式时的依据不明、使用 MP 规则或 HS 规则时没有明确列出引用的公式编号、使用语法定理时表述过于口语化等. 大家需要注意，这门课程讨论的证明一般情况下和数学中的证明是有一定区别的，形式化是很重要的内核，请参考教材中的例题以及前面列出的参考答案纠正自己作业中可能出现的错误.

2.4 证明中跳步问题依然存在

除了上次作业中频繁出现的“由 (L2) 得出的长公式与 MP 连写、多个 MP 叠写”等问题，在本次作业中还出现了对于双重否定律 $\neg\neg p \to p$ 与第二双重否定律 $p \to \neg\neg p$ 的随意使用，不仅仅是在练习 4 题目的证明中直接使用了尚未证明的第二双重否定律（在 1.2.4 节才得到证明），而且在后面的证明中，默认 p 与 $\neg\neg p$ 可以随意交换，这是不合适的，作为 $L(X)$ 中的公式，这两者在层数上就有本质区别，更不要说在一些非古典命题演算系统中，双重否定律是不被承认的（教材 P_{33}）.