周二:

1.4 用直接证明和简化证明方法证明 p.25: 1；p.28: 1(3, 4).

P25

1. 先根据定义直接证明

$$\vdash (x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2),$$

然后再利用演绎定理来证明它.

①.直接证明:

1. $x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1)$ L1
2. $(x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1)) \to ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1))$ L2
3. $(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)$ MP 1,2
4. $(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))$ L2
5. $((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))) \to (((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)))$ L2
6. $((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2))$ MP 4,5
7. $(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)$ MP 3,6

证毕

②.演绎定理证明: 依演绎定理, 只需证

$\{x_1 \to (x_1 \to x_2),\ x_1\} \vdash x_2$

1. x_1 前提
2. $x_1 \to (x_1 \to x_2)$ 前提
3. $x_1 \to x_2$ MP 1,2
4. x_2 MP 1,3

证毕

P28

1. 3° $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q.$

4° $\vdash \neg(p \to q) \to p.$

$\vdash p \to p$	(同一律)
$\vdash \neg q \to (q \to p)$	(否定前件律)
$\vdash (\neg p \to p) \to p$	(否定肯定律)
$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$	(HS，即假设三段论)
$\vdash \neg\neg p \to p$	(双重否定律)
$\vdash p \to \neg\neg p$	(第二双重否定律)
$\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	(换位律，见练习 4 题 2 – 2°.)

3°. (1)简化证明:

1. $q \to (p \to q)$ L1
2. $(q \to (p \to q)) \to (\neg(p \to q) \to \neg q)$ 换位律.
3. $\neg(p \to q) \to \neg q$ MP 1,2

证毕

(2). 直接证明:

①HS的证明: 即证 $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$

1. $p \to q$ 前提
2. $q \to r$ 前提
3. $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ L1
4. $p \to (q \to r)$ MP 2,3
5. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ L2

4°. (1)简化证明:

1. $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律
2. $(\neg p \to (p \to q)) \to (\neg(p \to q) \to \neg\neg p)$ 换位律
3. $\neg(p \to q) \to \neg\neg p$ MP 1,2
4. $\neg\neg p \to p$ 双重否定律.
5. $\neg(p \to q) \to p$ HS 3,4

证毕.

(2). 直接证明: 此处借用上边第3°题里

①. HS的证明

②. 双否律证明 (∵ 过程完全一样)

③. 第二双否律证明

6. $(p\to q)\to(p\to r)$ MP 4,5

7. $p\to r$ MP 1,6

证毕.

② 双重否定律证明: 即证 $\vdash \neg\neg p\to p$

1. $\neg\neg p\to((\neg\neg p\to\neg\neg p)\to\neg\neg p)$ L1
2. $(\neg\neg p\to((\neg\neg p\to\neg\neg p)\to\neg\neg p))\to((\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg p))\to(\neg\neg p\to\neg\neg p))$ L2
3. $(\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg p))\to(\neg\neg p\to\neg\neg p)$ MP 1,2
4. $\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg p)$ L1
5. $\neg\neg p\to\neg\neg p$ MP 3,4
6. $\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg p)$ L1
7. $(\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg\neg\neg p)$ L3
8. $\neg\neg p\to(\neg p\to\neg\neg\neg p)$ HS 6,7
9. $(\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p)$ L3
10. $\neg\neg p\to(\neg\neg p\to p)$ HS 8,9
11. $(\neg\neg p\to(\neg\neg p\to p))\to((\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p))$ L2
12. $(\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p)$ MP 10,11
13. $\neg\neg p\to p$ MP 5,12

③. 第二双重否定律证明: 即证: $\vdash p\to\neg\neg p$

1. $\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to\neg\neg\neg p)$ L1
2. $(\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to\neg\neg\neg p))\to((\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))$ L2
3. $(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ MP 1,2
4. $\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ L1
5. $\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p$ MP 3,4
6. $\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ L1
7. $(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)$ L3
8. $\neg\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)$ HS 6,7
9. $(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)$ L3
10. $\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)$ HS 8,9
11. $(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg p))\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p))$ L2
12. $(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)$ MP 10,11
13. $\neg\neg\neg p\to\neg p$ MP 5,12
14. $(\neg\neg\neg p\to\neg p)\to(p\to\neg\neg p)$ L3

④.

3° $\vdash \neg(p\to q)\to\neg q$.

4° $\vdash \neg(p\to q)\to p$.

1. $(p\to q)\to\neg\neg(p\to q)$ 第二双否律
2. $(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$ L3
3. $(\neg q\to\neg p)\to\neg\neg(p\to q)$ HS 1,2
4. $\neg p\to(\neg q\to\neg p)$ L1
5. $\neg p\to\neg\neg(p\to q)$ HS 3,4
6. $(\neg p\to\neg\neg(p\to q))\to(\neg(p\to q)\to p)$ L3
7. $\neg(p\to q)\to p$ MP 5,6

15. $p \to \neg\neg p$ MP 13,14

④

1.	$(p\to q)\to \neg\neg(p\to q)$	第二双重否定律
2.	$(\neg\neg p\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg p)$	L3
3.	$(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$	L3
4.	$(\neg\neg p\to\neg\neg q)\to(p\to q)$	HS 2,3
5.	$(\neg\neg p\to\neg\neg q)\to\neg\neg(p\to q)$	HS 1,4
6.	$\neg\neg q\to(\neg\neg p\to\neg\neg q)$	L1
7.	$\neg\neg q\to\neg\neg(p\to q)$	HS 5,6
8.	$(\neg\neg q\to\neg\neg(p\to q))\to(\neg(p\to q)\to\neg q)$	L3
9.	$\neg(p\to q)\to\neg q$	MP 7,8

证毕.

习四:

2° $\neg((p\to q)\to(\neg(q\to p)))$.

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$\neg(q\to p)$	$(p\to q)\to(\neg(q\to p))$	$\neg((p\to q)\to(\neg(q\to p)))$
t	t	t	t	f	f	t
t	f	f	t	f	t	f
f	t	t	f	t	t	f
f	f	t	t	f	f	t

7° $(\neg p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)$.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge q$	$\neg q\wedge r$	$(\neg p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)$
t	t	t	f	f	f	f	t
t	t	f	f	f	f	f	t
t	f	t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	f	f	t
f	t	t	t	f	t	f	f
f	t	f	t	f	t	f	f
f	f	t	t	t	f	t	t
f	f	f	t	t	f	f	t

8° $(p \to q) \to (p \to r)$.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$
t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	f
t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	f	t
f	t	t	t	t	t
f	t	f	t	t	t
f	f	t	t	t	t
f	f	f	t	t	t