

第十七、十八次作业反馈

刘硕

June 2 2020

1 作业答案

练习24

1. 证明当 $n=2k$ 时, $\mathcal{N} \vdash \exists x(x \times \bar{2} \approx \bar{n})$

解 从 \mathcal{N} 的证明如下:

证明.

- | | | |
|-----|--|-----------------|
| (1) | $\bar{k} \times \bar{2} \approx \bar{2k}$ | (命题2) |
| (2) | $\bar{2k} \approx \bar{n}$ | (命题16), $n=2k$ |
| (3) | $\bar{k} \times \bar{2} \approx \bar{n}$ | (1),(2),(E3) MP |
| (4) | $\bar{k} \times \bar{2} \approx \bar{n} \rightarrow \exists x(x \times \bar{2} \approx \bar{n})$ | \exists_1 规则 |
| (5) | $\exists x(x \times \bar{2} \approx \bar{n})$ | (3),(4) MP |

□

4. 证明 $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \not\approx t_1$

解 使用反证律的证明如下:

考虑 $\mathcal{N} \cup \{t'_1 + t_2 \approx t_1\}$, 有如下证明:

证明.

- | | | |
|-----|-----------------------------------|-----------------|
| (1) | $t'_1 + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$ | (命题4) |
| (2) | $t_1 + t'_2 \approx (t_1 + t_2)'$ | (N4) |
| (3) | $t_1 + t'_2 \approx t'_1 + t_2$ | (1),(2),(E3) MP |
| (4) | $t'_1 + t_2 \approx t_1$ | 假定 |
| (5) | $t_1 + t'_2 \approx t_1$ | (3),(4),(E3) MP |
| (6) | $t'_2 \approx \bar{0}$ | (5),加法消去律 |
| (7) | $t'_2 \not\approx \bar{0}$ | (N1) |

由(6)(7)以及反证律可以得到 $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \not\approx t_1$

□

2 问题总结

2.1 注意 K_N 形式算术中的(E1)型公理的使用

练习24的第1题大家做的都比较好，但严格来讲，这个题证明出来 $\mathcal{N} \vdash \exists x(x \times \bar{2} \approx \bar{2}k)$ 以后，并不能直接得到题目要求的结论。这里还需要使用E1型公理。

2.2 使用 K_N 形式算术中的(E2)型公理的时候需要注意的问题

部分同学在使用(E2)型公理时，想得到诸如 $(x + t)' \not\approx x \rightarrow (x + t)'' \rightarrow x'$ 的公式。注意这里这样写和E2等词公理是有出入的，相当于你默认存在了下面的公式：

$$\neg R_1^2(t_k, u) \rightarrow \neg R_1^2(f_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n), f_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n)) \quad (\text{fake E2})$$

或者用 \approx 表示等词的话，则相当于你使用了下面的式子。

$$t_k \not\approx u \rightarrow (f_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) \not\approx f_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n)) \quad (\text{fake E2})$$

这并不一定是正确的，至少需要你去证明这个问题。

对于没有使用反证律并且因为错误使用E2而扣分的同学，下面是对你的公式的一个证明。

证明.

$$(1) \quad t'_1 \approx t'_2 \rightarrow t_1 \approx t_2 \quad (\text{N2})$$

$$(2) \quad (t'_1 \approx t'_2 \rightarrow t_1 \approx t_2) \rightarrow (t_1 \not\approx t_2 \rightarrow t'_1 \not\approx t'_2) \quad \text{换位律}$$

$$(3) \quad t_1 \not\approx t_2 \rightarrow t'_1 \not\approx t'_2 \quad (1),(2) \text{ MP}$$

□