

第一周(9.17)

chp1.1

证明: " \Rightarrow " $\because X(t)$ 是宽平稳的.

$$\therefore EX(t) = m. \quad m \text{ 为常数}$$

$$\text{且 } R_x(s, s+t) = EX(s)X(s+t) - EX(s)E(s+t) \text{ 只与时间差 } t \text{ 有关}$$

$$\therefore EX(s) = m. \text{ 该常数与 } s \text{ 无关}$$

$$\text{而 } EX(s)X(s+t) = R_x(s, s+t) + EX(s)E(s+t)$$

$$= R_x(s, s+t) + m^2$$

$$= f(t) + m^2$$

$$\therefore EX(s)X(s+t) \text{ 也不依赖于 } s$$

" \Leftarrow " 由于 $EX(s)$ 不依赖于 s , \therefore 可认为 $EX(s)$ 是一个与 s 无关的常数.
记该常数为 m .

由于 $EX(s)X(s+t)$ 中变量仅有 s 与 t , 而由题与 s 无关, \therefore

记 $EX(s)X(s+t) = f(t)$, 其中 $f(t)$ 为 t 的函数, 也可以是常数.

$$\text{则: ① } EX(s) = m.$$

$$\text{② } R_x(s, s+t) = EX(s)X(s+t) - EX(s)EX(s+t)$$

$$= f(t) - m^2$$

只与时间差 $s+t-s=t$ 有关.

\therefore 对二阶矩存在的随机过程 $X(t)$, $X(t)$ 是宽平稳的

★

□.

① 很多同学只证了充分/必要

② 忘了二阶矩存在的要求

3.

$$\text{均值函数 } E X(t) = E(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)$$

$$= \cos \lambda t E Z_1 + \sin \lambda t E Z_2$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

$$\text{协方差函数 } R_X(t, s) = E(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s) - E X(t) E X(s)$$

$$= E(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s)$$

$$= E(Z_1^2) \cos \lambda t \cos \lambda s + E(Z_1 Z_2) \cos \lambda t \sin \lambda s$$

$$+ E(Z_1 Z_2) \sin \lambda t \cos \lambda s + E(Z_2^2) \sin \lambda t \sin \lambda s$$

$$= \sigma^2 \cos \lambda t \cos \lambda s + 0 + 0 + \sigma^2 \sin \lambda t \sin \lambda s$$

$$= \sigma^2 \cos \lambda(t-s)$$

∴ 只与时间差 $t-s$ 有关.

$$E X^2(t) = E(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)^2$$

$$= E(Z_1^2) \cos^2 \lambda t + E(Z_2^2) \sin^2 \lambda t + 0 + 0$$

$$= \sigma^2 (\cos^2 \lambda t + \sin^2 \lambda t)$$

$$= \sigma^2$$

∴ 二阶矩存在

又由上, 有 $E X(t) = 0$ 为常数且 $R_X(t, s)$ 只与 $t-s$ 有关

∴ $X(t)$ 是宽平稳的

这里
 t 与 s 与 λ 不是
随机变量

4

由(i), (ii), 有 $X(t) - X(0) = X(t)$, 即 $X(t)$ 服从均值为 λt 的 Poisson 分布
 $\therefore E X(t) = \lambda t$
 $Var X(t) = \lambda t$ } \leftarrow 直接由 Poisson 分布性质得出, 不用 proof

$$\begin{aligned} R_X(t, s) &= E X(t) X(s) - E X(s) E X(t) \\ &= E X(t) [X(s) - X(t) + X(t)] - \lambda^2 s t \\ &= E X^2(t) + E X(t) [X(s) - X(t)] - \lambda^2 s t \\ &= (E X)^2 + Var X(t) + E X(t) [X(s) - X(t)] - \lambda^2 s t \\ &= \lambda^2 t^2 + \lambda t + E X(t) E [X(s) - X(t)] - \lambda^2 s t \\ &= \lambda^2 t^2 + \lambda t + \lambda t (\lambda s - \lambda t) - \lambda^2 s t \\ &= \lambda t \quad (s \geq t > 0) \end{aligned}$$

\downarrow 独立增量 \star

\therefore 协方差函数不是只与时间差 $t-s$ 有关, 不是宽平稳的

10 Sep. 24

同学, 你的作业是班上写的比较好的之一, 不介意作为标答上传群文件吧?