

数理逻辑整理

童世炜

2015 年 6 月 18 日

目录

1 命题演算公式,定理,性质合集	1
2 一阶逻辑（一阶谓词逻辑）/谓词演算	3
3 一阶理论/形式算术与递归函数+不完备性定理	7
4 思考题提示	10
5 杂记	13

烤柿前突击出来的，有错的话自行脑补修正^_^

1 命题演算公式,定理,性质合集

公理:

$$(L1) p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(L2) (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$(L3) (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

定理:

$$\vdash p \rightarrow p \quad (\text{同一律})$$

$$\vdash \neg q \rightarrow (q \rightarrow p) \quad (\text{否定前件律})$$

$$\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \quad (\text{否定肯定律})$$

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (\text{HS, 假设三段论})$$

$$\vdash \neg \neg p \rightarrow p \quad (\text{双重否定律})$$

$$\vdash p \rightarrow \neg \neg p \quad (\text{第二双重否定律})$$

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (\text{换位律})$$

$$\text{演绎定理} \quad \Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \rightarrow q$$

$$\text{假设三段论} \quad \{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$$

反证律

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash p$$

归谬律

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash \neg p$$

L的简单性质:

性质 1 (单调性)

1° 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$, 且 $\Gamma \vdash p$, 则 $\Gamma' \vdash p$;

2° 若 $\vdash p$, 则对任何 Γ , $\Gamma \vdash p$.

性质 2 (紧致性)

若 $\Gamma \vdash p$, 则存在有穷子集 $\Delta \subseteq \Gamma$, 使 $\Delta \vdash p$.

性质 3 (平凡性)

定义: 一致性/相容性/无矛盾性

若存在公式 p 使 $\Gamma \vdash p$ 且 $\Gamma \vdash \neg p$, 则称 Γ 是不一致的 (不相容的, 矛盾的); 否则, 称其为一致的

平凡性: 若 Γ 不相容, 则对 $\forall p$ 有 $\Gamma \vdash p$.

性质 4 (可证等价替换规则)

若 p 是 q 的子公式, q' 是任意公式, p' 是用 q' 替换 p 中的 q 所得公式

若 $\vdash q \rightarrow q'$ 且 $\vdash q' \rightarrow q$;

则 $\vdash p \rightarrow p'$, 且 $\vdash p' \rightarrow p$.

性质 5 (语义后承/逻辑推论/语义推论性质)

1° 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \models p$, 则 $\Gamma' \models p$ (语义的单调性)

2° 若 $\Gamma \models p$ 且 $\Gamma \models p \rightarrow q$, 则 $\Gamma \models q$ (语义的MP规则)

3° $\Gamma \models p \rightarrow q \Leftrightarrow \Gamma \cup \{p\} \models q$ (语义的演绎定理)

4° p 是重言式 $\Leftrightarrow \phi \models p$ (记 $\phi \models p$ 为 $\models p$)

5° $p \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models p$

6° $\models p \Rightarrow \Gamma \models p$, 即永真式是任何公式集的语义推论

性质 6 (L的可靠性与完全性)

$$\left. \begin{array}{l} L \text{ 的可靠性} \quad \Gamma \vdash p \Rightarrow \models p \\ L \text{ 的完全性} \quad \Gamma \models p \Rightarrow \vdash p \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash p \Leftrightarrow \models p$$

性质 7 (等值公式)

p 与 q 等值, 是指 $p \leftrightarrow q$ 为永真式

判断两公式是否等值的方法: 真值表

2 一阶逻辑（一阶谓词逻辑）/谓词演算

公理:

(K1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(K2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(K3) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(K4) $\forall x p(x) \rightarrow p(t)$, 其中项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的

(K5) $\forall x (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \forall x q)$, 其中项 x 不在 p 中自由出现

(*Gen)

定理 1 (From L)

$\vdash p \rightarrow p$ (同一律)

$\vdash \neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$ (否定前件律)

$\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (否定肯定律)

$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (HS, 假设三段论)

$\vdash \neg \neg p \rightarrow p$ (双重否定律)

定理 2 (平凡性)

Γ 有矛盾 $\Rightarrow K$ 的任一公式从 Γ 可证

定理 3 (\exists_1 规则)

设项 t 对 $p(x)$ 中的 x 自由, 则有 $\vdash p(t) \rightarrow \exists x p(x)$

定理 4 (\exists_2 规则)

设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ ，其证明中 *Gen* 变元不在 p 中自由出现，且 x 不在 q 中自由出现，那么有 $\Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash q$ ，且除了 x 不增加其它 *Gen* 变元

定理 5 (演绎定理)

1° 若 $\Gamma \vdash p \rightarrow q$ ，则 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

2° 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ ，且证明中所用的 *Gen* 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 *Gen* 变元就可得 $\Gamma \vdash p \rightarrow q$

推论：当 p 是闭式时，有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \rightarrow q$$

定理 6 (不知道叫什么($-.-$))

$$\vdash \forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (\exists x p \rightarrow \exists q)$$

定理 7 (反证律)

所用 *Gen* 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 *Gen* 变元就可以得到结论

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash p$$

定理 8 (归谬律)

所用 *Gen* 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 *Gen* 变元就可以得到结论

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash \neg p$$

定理 9

$$1^\circ \vdash \forall x p(x) \leftrightarrow \forall y p(y)$$

$$2^\circ \vdash \exists x p(x) \leftrightarrow \exists y p(y)$$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现

定理 10

$$1^\circ \vdash \neg \forall x p \leftrightarrow \exists x \neg p$$

$$2^\circ \vdash \neg \exists x p \leftrightarrow \forall x \neg p$$

谓词演算的语义

K的字母表,一阶语言

1、逻辑符号

(1)个体变元 x_1, x_2, \dots

(2)联接词 \neg, \vdash

(3)量词 \forall, \exists

2、非逻辑符号

(4)个体常元 c_1, c_2, \dots

(5)函数符号

f_1^1, f_2^1 (一元函数符号)

f_1^2, f_2^2 (二元函数符号)

...

(6)谓词符号

P_1^0, P_2^0 (0元谓词符号)

P_1^1, P_2^1 (1元谓词符号)

...

K的解释域,一阶结构

解释域的元素叫做个体对象,解释域通常也叫做“解释”和“结构”。

设K(Y)是任一给定的一阶语言.K(Y)的一个一阶结构是一个三元组,记为 $M = \{\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$, \mathcal{D} 是一个非空集,称为M的论域,是上的函数集,是上关系的非空集,使得

(1) 对K(Y)的每一个个体常元 a , \mathcal{D} 中有一个个体 a^M

(2) 对K(Y)中每个 n 元 ($n > 0$) 函数符号 f , \mathcal{F} 中有一个 n 元函数 $f^M: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$

(3) 对K(Y)中每个 n 元 ($n > 0$) 谓词符号 P , \mathcal{P} 中有一个 n 元关系 $P^M \subseteq \mathcal{D}^n$

(也就是把每个符号的含义告诉给机器,这只这只是啥子)

也可以酱紫看 (符号区别上面的):

M具有以下性质:

(1)对K的每个个体常元 c_i , 都有M的元素 $\overline{c_i}$ 与之对应: $c_i \mapsto \overline{c_i}, \overline{c_i} \in M$

(2)对K的每个运算符 f_i^n , 都有M上的 n 元运算符 $\overline{f_i^n}$ 与之对应: $f_i^n \mapsto \overline{f_i^n}, \overline{f_i^n}$ 是M上的 n 元运算

(3)对K的每个谓词 f_i^n , 都有M上的 n 元关系 $\overline{R_i^n}$ 与之对应: $R_i^n \mapsto \overline{R_i^n}, \overline{R_i^n}$ 是M上

的 n 元关系

个体变元指派

对任给 $K(Y)$ 及其一阶结构 $M = \{\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}, K(y)$ 的一个个体变元（相对于）个体变元指派是一个映射 $V : Y \rightarrow \mathcal{D}$

另一种看法（符号区别上面的）是项解释，在个体常元被解释以后，就需要对个体变元进行解释，从而使得每一项都可以被解释；而在解释域确定以后，项解释 φ 便由个体变元的指派 φ_0 完全确定

而对于带全称量词的 p ，引入变元变通概念

一记：设 x 是某个给定的个体变元， y 是任意的个体变元，且 $\varphi, \varphi' \in \Phi_M$ 满足条件： $y \neq x \Rightarrow \varphi'(y) = \varphi(y)$ （也就是把量词限定的 x 做一个全映射检查（其实也就0/1））

另可记为：对任何公式 p 与个体变元 x

$$I(\forall xp) = \begin{cases} t & \text{如果对所有 } d \in \mathcal{D}; I_d^x = t \\ f & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $I_d^x = (M, V|_d^x, v)$

（注：一阶解释的 I 是一个符合映射 $I = (M, V, v), M = (\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 是一阶结构， V 是一个指派， v 是一个（标准）赋值）

$$V|_d^x(y) = \begin{cases} d & y = x \\ V(y) & y \neq x \end{cases}$$

公式的赋值函数

一记为 $|p|(\varphi)$ ，一记 v

定理 11

1° $|p|_M = 1 \Leftrightarrow |\forall xp|_M = 1$

2° 设 p' 是 p 的全称闭式，则 $|p|_M = 1 \Leftrightarrow |p'|_M = 1$

3° $|p|_M = 0 \Leftrightarrow |\forall xp|_M = 0$

4° 设 p' 是 p 的全称闭式，则 $|p|_M = 0 \Rightarrow |p'|_M = 0$

5° $|p|_M = 1$ 且 $|p \rightarrow q|_M = 1 \Rightarrow |q|_M = 1$

定理 12

1° $\Gamma \models p$ 且 $\Gamma \models p \rightarrow q \Rightarrow \Gamma \models q$

$$2^\circ \Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vdash \forall x p$$

$$3^\circ \text{ 若 } p' \text{ 是 } p \text{ 的全称闭式, 则: } \Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vdash p'$$

定理 13 (K的可靠性)

$$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \models p$$

定理 14 (K的完全性)

$$\Gamma \models p \Rightarrow \Gamma \vdash p$$

3 一阶理论/形式算术与递归函数+不完备性定理

等词公理:

$$(E1) R_1^2(t, t)$$

$$(E2) R_1^2(t_k, u) \rightarrow R_1^2(f_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_m), f_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n))$$

$$(E3) R_1^2(t_k, u) \rightarrow (R_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_m) \rightarrow R_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n))$$

亦可以“ \approx ”记 R_1^2

$$(E1) t \approx t$$

$$(E2) t_k \approx u \rightarrow (f_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_m) \approx f_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n))$$

$$(E3) t_k \approx u \rightarrow (R_i^n(t_1, \dots, t_k, \dots, t_m) \rightarrow R_i^n(t_1, \dots, u, \dots, t_n))$$

等词定理(E是由所有等词定理组成的集)

$$1^\circ E \vdash t \approx t$$

$$2^\circ E \vdash t \approx u \rightarrow u \approx t$$

$$3^\circ E \vdash t \approx u \rightarrow (u \approx v \rightarrow t \approx v)$$

定理 1 (等项替换, (E2)的推广) $E \vdash u \approx v \rightarrow t(u) \approx t(v)$

其中项 u 是项 $t(u)$ 的子项, $t(v)$ 是将 $t(u)$ 中某一处出现的 u 替换成项 v 所得结果

定理 2 (等项替换, (E3)的推广) $E \vdash t \approx u \rightarrow (p(t) \rightarrow p(u))$

其中 $p(u)$ 是将公式 $p(t)$ 中某一处出现的项 t 用项 u 替换后的结果, 且 t 和 u 的变元都不在替换处受约束

形式算术 K_n

算术公理

$$(N1) t' \not\approx \bar{0}$$

$$(N2) t'_1 \approx t'_2 \rightarrow t_1 \approx t_2$$

$$(N3) \ t + \bar{0} \approx t$$

$$(N4) \ t_1 + t'_2 \approx (t_1 + t_2)'$$

$$(N5) \ t \times \overline{0} \approx \bar{0}$$

$$(N6) \ t_1 \times t'_2 \approx t_1 \times t_2 + t_1$$

$$(N7) \ p(\bar{0}) \rightarrow (\forall x(p(x) \rightarrow p(x')) \rightarrow \forall x p(x))$$

其中 t, t_1, t_2 是任意的项, $p(x)$ 是任意的公式, 算术公理的集记为 \mathcal{N}

$$\text{定理 3 } \mathcal{N} \vdash \overline{m} + \overline{n} \approx m + n$$

$$\text{定理 4 } \mathcal{N} \vdash \overline{m} \times \overline{n} \approx m \times n$$

$$\text{定理 5 } \mathcal{N} \vdash \bar{0} + t \approx t$$

$$\text{定理 6 } \mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$$

$$\text{定理 7 (加法交换律) } \mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$$

其中 t_1, t_2 是任意的项

$$\text{定理 8 (加法结合律) } \mathcal{N} \vdash (t_1 + t_2) + t_3 \approx t_1 + (t_2 + t_3)$$

其中 t_1, t_2, t_3 是任意的项

$$\text{定理 9 (加法消去律) } \mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx t_2 \leftarrow t_1 \approx \bar{0}$$

其中 t_1, t_2 是任意的项

$$\text{定理 10 } \mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx \bar{0} \rightarrow t_1 \approx \bar{0}$$

$$\text{定理 11 } \mathcal{N} \vdash t_3 + t_1 \approx t_2 \rightarrow (t_4 + t_2 \approx t_1 \rightarrow t_1 \approx t_2)$$

$$\text{定理 12 } \mathcal{N} \vdash \exists x(x + t_1 \approx t_2) \rightarrow (\exists x(x + t_2 \approx t_1) \rightarrow (t_1 \approx t_2))$$

$$\text{定理 13 } \mathcal{N} \vdash t \not\approx \bar{0} \rightarrow \bar{1} \leq t$$

$$\text{定理 14 (上面那只的推广) } \mathcal{N} \vdash (t \not\approx \bar{0} \wedge \dots \wedge t \not\approx \overline{n-1} \rightarrow \overline{n} \leq t)$$

$$\text{定理 15 } \mathcal{N} \vdash (t \not\approx \bar{0} \wedge \dots \wedge t \not\approx \overline{n} \rightarrow t \not\leq \overline{n})$$

定理 16 设公式 $p(x)$ 只含一个自由变元 x , 则有

$$\mathcal{N} \vdash (p(\bar{0}) \wedge \dots \wedge p(\overline{n})) \rightarrow t \not\leq \overline{n}$$

定理 17 若 $n > 0$, 则

$$\mathcal{N} \vdash x \not\leq \bar{n} \rightarrow \bar{n} \leq x$$

定理 18 对任意自然数 m 和 n

$$(1) \text{ 当 } m = n \text{ 时, } \mathcal{N} \vdash \bar{m} \approx \bar{n}$$

$$(2) \text{ 当 } m \neq n \text{ 时, } \mathcal{N} \vdash \bar{m} \not\approx \bar{n}$$

可表示函数和关系

“ k 元函数”指 k 元数论函数 $f: N^k \rightarrow N$, “ R 是 k 元关系”指 R 是 k 元数论关系 $R \subseteq N^k$

(可表示函数) k 元函数 f 在 K_N 中可表示: 如果存在含 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ 使对任意 $n_1, \dots, n_k, m \in N$,

$$(1) f(n_1, \dots, n_k) = m \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, m)$$

$$(2) f(n_1, \dots, n_k) \neq m \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, m)$$

$$(3) \mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, t) \rightarrow t \approx \overline{f(n_1, \dots, n_k)}$$

k 元函数 f 用公式 $p(x_1, \dots, x_k, y)$ 在 K_N 中可表示的充要条件是: 对任意 n_1, \dots, n_k 及项 t (t 对 $p(x_1, \dots, x_k, y)$ 中 y 自由),

$$1^\circ \mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, \overline{f(n_1, \dots, n_k)})$$

$$2^\circ \mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, t) \rightarrow t \approx \overline{f(n_1, \dots, n_k)}$$

(可表示关系) N 上的 k 元关系 R 在 K_N 中可表示, 是指存在着含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1, \dots, x_k)$, 它具有以下性质: 对任意 $n_1, \dots, n_k, m \in N$,

$$(1) (n_1, \dots, n_k) \in R \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$$

$$(2) (n_1, \dots, n_k) \notin R \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$$

只有递归函数(关系)是 K_N 可表示的

K_N 是相容, 但是不完备的

4 思考题提示

思考题1-1 试用联接词表达自然语言中的“如果……则”

$p \rightarrow q$

思考题1-2 同一律证明是否一定要用 (L1)

一定要用

定义特征函数 $\delta(p) \in S$. 设:

(1) $\delta(L2) \in S$

(2) $\delta(L3) \in S$

(3) MP 可以保持这个特征: 即 $\delta(p) \in S$ 且 $\delta(p \rightarrow q) \in S \Rightarrow \delta(q) \in S$

$\Rightarrow \{L2, L3, MP\} \vdash r \Rightarrow \delta(r) \in S$

若 $\delta(r) \notin S$, 说明 $\delta(r)$ 不能由 $L2, L3, MP$ 推出

$\delta(p) \in S$ 是一个三值函数, 定义一个三值真值表

证明 $\delta(p \rightarrow p) \notin S$ 即可

(附: 特征函数的定义)

k 元关系 $R(\subseteq N^k)$ 的特征函数 $C_R: N^k \rightarrow \{0, 1\}$ 是用下式定义的

$$C_R(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1, \dots, n_k) \in R \\ 0 & (n_1, \dots, n_k) \notin R \end{cases}$$

思考题1-3 演绎定理说明了什么

蕴含词的解釋: 蕴含词 (\rightarrow) 必须被解釋 (或者说赋值) 为实质蕴含 (真值表表示的蕴含)。否则, 三个公理不成立, 以及语义语法之间可能出现不一致

可以简化证明

思考题1-4 双否律 $\{\neg \neg p\}$ 无需证明, 因为 $\neg \neg p$ 与 p 相同, 对吗

不对, 在 $L(X)$ 中, 由层次性可知, $\neg \neg p \neq p$

思考题1-5 直接证明 $\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ 最少需要几步

⊙ ∇ ⊙ 只能做23步的渣渣不会呀…… > - <

思考题1-6

1° 语义后承与重言式有何关系

2° 论断是否成立: 任给 $\Gamma \subseteq L(X)$ 和 $p \in L(X)$, 存在 $q \in L(X)$ 使 $\Gamma \models p$ 当且

仅当 $\models q$

p 为重言式为语义后承 $\Gamma \vdash p$ 的特例($\Gamma = \Phi$)

1° $\Gamma = \{p_1 \dots p_n\}$ 有限

$q = p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow \dots (p_n \rightarrow p) \dots)$

则由语义的演绎定理可得 $\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \models q$

2° Γ 无限

利用紧致性, 得到 $\Gamma \vdash p \Rightarrow$ 有限子集 $\Gamma' \vdash p$, 转为1°

思考题1-7 $\Gamma \vdash p$ 是否是可判定的

一类问题可判定的标准:

- (1) 该类问题中的每一个问题实例只有“是”或“否”两种回答
- (2) 存在一个“能行”方法A, 使得对该类问题的每一实例, A都可以在有限时间内给出正确答案

命题逻辑的可判定性 存在一个能行方法A, 对 $P \in L(X)$, 当 $\vdash P$ 时, A回答yes, 当 $\not\vdash P$ 时A回答no.

利用L的可靠性和完全性: $\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \models p$

因此可以通过真值表来进行判定

首先要做的就是指派和赋值 (赋值此处不需要), 对于指派, 这里要求是对变元的任意指派

(1) Γ 集有限

(2) Γ 集无穷

外延: 一阶逻辑的判定问题

- 1° 任给符号是否是K的公理 \checkmark
- 2° 任给公式 p, q, r , 是否从 p, q 用MP规则推出 r \checkmark
- 3° 任给公式 p, q, q 是否从 p 中用Gen规则推出 \checkmark
- 4° 任给公式序列, 是否是K的一个形式证明 \checkmark
- 5° 任给公式 p 是否是K的内定理 \times

思考题2-1 (K4) (K5) 限制条件有何意义? 举例

限制条件的意义在于保证K4, K5在任何解释域M下均恒真, 即有效式

(K4) 为一个由多到一的推论, 限制条件保证了不再有更多的约束条件出现

无限制的反例: $M\{R, \Phi, >\}$

$$\forall x \exists y R_1^2(x, y) \rightarrow \exists y R_1^2(y, y)$$

(K5) 为一个由一到多的推论, 限制条件保证了不会有约束条件被忽略
无限制的反例: $M\{R, \Phi, \{R_1^1 :> 2, R_2^1 :> 1\}\}$

$$\forall x (R_1^1(x) \rightarrow R_2^1(x)) \rightarrow (R_1^1(x) \rightarrow \forall x R_2^1(x))$$

思考题2-2 K演绎定理的限制有何意义?

无限制反例:

$$\begin{aligned} \because R_1^1(x_1) \vdash \forall x_1 R_1^1(x_1) & \quad \text{UG} \\ \therefore \vdash R_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 R_1^1(x_1) \end{aligned}$$

再利用K的可靠性和完全性, 从语义上说明

思考题2-3 真在一阶逻辑里有那几个层次? 它们的关系

$$\text{三层} \left\{ \begin{array}{l} \text{M可满足: 在一个 } M \text{ 中, 在一种项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \\ \text{M有效: 在一个 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \\ \text{(模型类有效: } \Gamma \models p \text{ 在任一使 } \Gamma \text{ 中公式为真的 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的)} \\ \text{M逻辑有效: 在任何 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \end{array} \right.$$

M可满足: 设 $I = \{M, V, v\}$ 是 $K(Y)$ 的一阶解释, $p \in K(Y)$, 若 $I(p) = t$, 则称 p 在 I 下为真, 又称 p 在 M 下可满足

M有效: 设 M 为任一一阶结构, $p \in K(Y)$, 若对一切 V , p 在 $I\{M, V, v\}$ 下为真, 则称 p 在 M 中有效 (p 是 M 有效的, M 是 p 的一个模型, 记为 $M \models p$)

逻辑有效: 设 $p \in K(Y)$, 若对一切一阶结构 M , 若 $M \models p$, 则称 p 为逻辑有效的, 记为 $\models p$

思考题2-4 若 $\Gamma \models p$, 则对一切解释 I , 若 $\forall q \in \Gamma$ 有 $I(q) = t$, 则 $I(p) = t$?
不正确。

$$\Gamma \models p \Leftrightarrow \forall M \models \Gamma \text{ 则 } M \models p$$

换成一切解释, 可能其一阶结构 M 不再是 Γ 的模型, 则 \models 约束不再存在

思考题3-1 L是否“强迫” $' \rightarrow'$ 解释为实质蕴含（语义解释）

是，为了 $L1 \sim L3$ 的成立， $' \rightarrow'$ 必须解释为实质蕴含

$L1, L2, MP$ 强迫 \rightarrow 解释为实质蕴含,在此基础上， $L3$ 强迫 \neg 解释为非

5 杂记

HS直接证明

$$(1)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (L1)$$

$$(2)(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L2)$$

$$(3)((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L1)$$

$$(4)(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(2)(3)$$

$$(5)((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L2)$$

$$(6)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(4)(5)$$

$$(7)(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(1)(6)$$

$$(8)((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad (L2)$$

$$(9)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(7)(8)$$

$$(10)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L1)$$

$$(11)(p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(9)(10)$$

$$(12)((p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L2)$$

$$(13)((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(11)(12)$$

$$(14)(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \quad (L1)$$

$$(15)(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(13)(14)$$

双否律的直接证明

$$(1)\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow \neg\neg p) \quad (L1)$$

$$(2)(\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow \neg\neg p)) \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p)) \rightarrow$$

- $$\begin{aligned}
& (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L2) \\
(3) & (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & MP(1)(2) \\
(4) & \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L1) \\
(5) & \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p & MP(3)(4) \\
(6) & \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L1) \\
(7) & (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & (L3) \\
(8) & ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) & (L1) \\
(9) & \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) & MP(7)(8) \\
(10) & (\neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) & (L2) \\
(11) & (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) & MP(9)(10) \\
(12) & \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L1) \\
(13) & \neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & MP(11)(12) \\
(14) & (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) & (L3) \\
(15) & ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) & (L1) \\
(16) & \neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) & MP(14)(15) \\
(17) & (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) & (L2) \\
(18) & (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) & MP(16)(17) \\
(19) & \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) & MP(13)(18) \\
(20) & (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) & (L2) \\
(21) & (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) & MP(19)(20) \\
(22) & \neg \neg p \rightarrow p & MP(5)(21)
\end{aligned}$$

第二双否律的直接证明

- $$\begin{aligned}
(1) & \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg \neg p) & (L1) \\
(2) & (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) & (L2) \\
(3) & (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & MP(1)(2) \\
(4) & \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & (L1) \\
(5) & \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p & MP(3)(4)
\end{aligned}$$

$$(6) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(7) (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \quad (L3)$$

$$(8) ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))) \quad (L1)$$

$$(9) \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) MP(7)(8)$$

$$(10) (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))) \quad (L2)$$

$$(11) (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \quad MP(9)(10)$$

$$(12) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(13) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \quad MP(11)(12)$$

$$(14) (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \quad (L3)$$

$$(15) ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))) \quad (L1)$$

$$(16) \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \quad MP(14)(15)$$

$$(17) (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))) \quad (L2)$$

$$(18) (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \quad MP(16)(17)$$

$$(19) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \quad MP(13)(18)$$

$$(20) (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \quad (L2)$$

$$(21) (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \quad MP(19)(20)$$

$$(22) \neg \neg \neg p \rightarrow \neg p \quad MP(5)(21)$$

$$(23) (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg p) \quad (L3)$$

$$(24) p \rightarrow \neg \neg p \quad MP(22)(23)$$