Computer Science and Technology





运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

对偶理论与灵敏度分析

Chap.3 Duality theory & Sensitivity analysis

主要内容

- 3.1 单纯形法的矩阵描述
- 3.2 单纯形法的矩阵计算（改进单纯形法）
- 3.3 对偶问题的提出
- 3.4 线性规划的对偶理论
- 3.5 影子价格
- 3.6 对偶单纯形法
- 3.7 灵敏度分析
- 3.9 利用计算机工具求解本章问题

3.1 单纯形法的矩阵描述

- 设线性规划问题：

$$\max z = CX$$

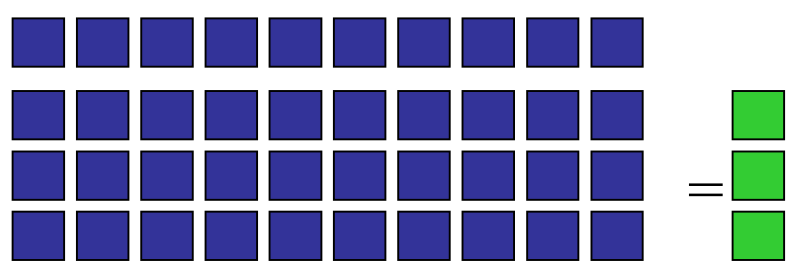
$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge O \end{cases}$$

  - 其中：

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

-z	X	RHS
1	C	0
O	A	b



单纯形法的矩阵描述

- 为了得到问题的标准形式，引入松弛变量 X_s：

$$\max z = CX + C_s X \;;\; AX + IX_s = b\;;\; X, X_s \geq 0 \qquad (3-1)$$

$$X_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{约束变为}} [A, I]\begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} = b, \text{且} \begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} \geq O$$

其中I为$m \times m$的单位矩阵,零向量O有$m+n$个元素

- 单纯形法的一般方法是为了得到一系列更优的基本可行解直到得到最优解，在上述的扩展形式中：

$n+m$个元素$\begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix}$中的$n$个非基变量被赋值为0

剩下了含有m个未知数（基变量）的m个方程

单纯形法的矩阵描述

*回 顾

- 将目标函数与约束条件组成**n+1**个变量**m+1**个方程的方程组

$$
\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
\quad x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\qquad\quad \ddots \\
\qquad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\
-z + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0
\end{array}
$$

- 将方程组写成增广矩阵

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c|ccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right]
$$

-z	X	RHS
1	C	0
O	A,I	b

单纯形法的矩阵描述

– 由上，在迭代中的每一步，系数矩阵(*A*, *I*)也可视为(*B*, *N*)两块，这里*N*是非基变量的系数矩阵。对应于*B*的变量是基变量，用向量 X_B 表示。其他的即为非基变量，用向量 X_N 表示。

– 同时将 C 也分成两块（C_B, C_N）。C_B是目标函数中 X_B 的系数行向量，C_N 是目标函数中 X_N 的系数行向量。

– 因此模型也可改写为：

$$\max z = [C_B, C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = C_B X_B + C_N X_N \qquad (3-2)$$

$$\begin{cases} [B, N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = BX_B + NX_N = b & (3-3) \\ X_B, X_N \geq 0 & (3-4) \end{cases}$$

单纯形法的矩阵描述

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \qquad (3\text{-}2)$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b & (3\text{-}3) \\ X_B, X_N \geq O & (3\text{-}4) \end{cases}$$

∵B线性无关 ⇒ 可逆.

- 将（3-3）式移项，再两边左乘B^{-1}，得到：
- $$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \qquad (3-5)$$

$X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b.$

- 将公式（3-5）代入目标函数（3-2），得到：

$$\begin{aligned} z &= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N \\ &= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \end{aligned} \qquad (3-6)$$

- 令非基变量 X_N =0，得到：

一组基可行解：$X^{(1)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$ 目标函数：$z = C_B B^{-1} b$

$C_B X_B$

(由(3-5))

(由(3-6))

单纯形法的矩阵描述----几点说明

- 用矩阵描述的**θ规则**：

$B^{-1}b$的第i个分量.

$X_B + B^{-1}N X_N = B^{-1}b$

$m\times m$

$N\times N$ $N\times 1$

$$\theta = \min\left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\middle|(B^{-1}P_k)_i > 0\right] = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

$m\times n$

N的第k列为P_k

- 其中，$B^{-1}b$为约束等式右端项，$(B^{-1}b)_i$表示$B^{-1}b$的第 i 个分量；$B^{-1}P_k$为换入变量 X_k 对应的系数列向量， $(B^{-1}P_k)_l$是其第 l 个分量，其对应的换出变量为 X_l；

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \qquad (3-5)$$

单纯形法的矩阵描述----几点说明

$$\max z = CX + C_s X_s \qquad (3-1)$$

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \qquad (3-2)$$

$$z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \qquad (3-6)$$

- **X_s 对应的系数：**
  - 在初始状态，由于 X_s 在式(3-1)中的系数 C_s 是 0，在式(3-6)中隐含基变量 X_s 的系数 $(C_B - C_B B^{-1} B) = 0$，若 X_s 的元素都为基变量时，即 X_s 的检验数为0。
  - 若迭代后，X_s 的部分元素是属于基变量，其对应的系数是0，属于非基变量的部分元素，其对应的系数是非零。

检验数？

单纯形法的矩阵描述----几点说明

$$\max z = CX + C_s X_s \qquad (3-1)$$

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \qquad (3-2)$$

$$z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \qquad (3-6)$$

- X_N 对应的系数：
  - 从式 (3-6) 可知非基变量的 X_N 系数是 $(C_N - C_B B^{-1} N)$，非基变量的系数 $(C_N - C_B B^{-1} N)$ 就是第 2 章中用符号 $c_j - z_j$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) 表示的检验数。
  - 如果有 X_s 的某元素 X_j ($j \in N$) 属于非基变量时，因为 $c_{s_{j \in N}} = 0$，$P_{s_{j \in N}}$ 是松弛变量单位向量，所以对应的系数是 $(-C_B B^{-1})$。
  - 因此所有检验数可以用 $(C - C_B B^{-1} A)$，与 $(-C_B B^{-1})$ 表示。?

Computer Science and Technology

单纯形表与矩阵表示的关系

例：矩阵表示示例

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始：

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad N \qquad\quad B \end{array}$$

N

某步迭代后:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix} \\ B \qquad\quad N \qquad\quad B \end{array}$$

单纯形表与矩阵表示的关系

将约束方程中的NX_N右移，同时两边同乘以B^{-1}。

即：

$$\max z = CX + C_S X_S$$

$$\begin{cases} AX + IX_S = b \\ X, X_S \geq 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

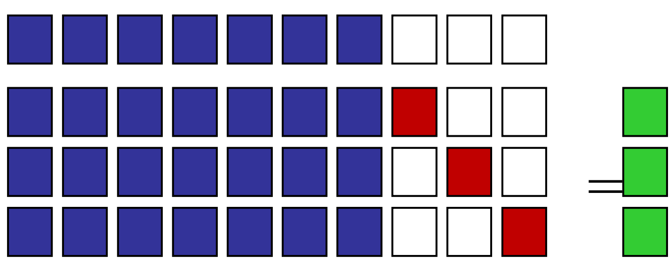
⇒

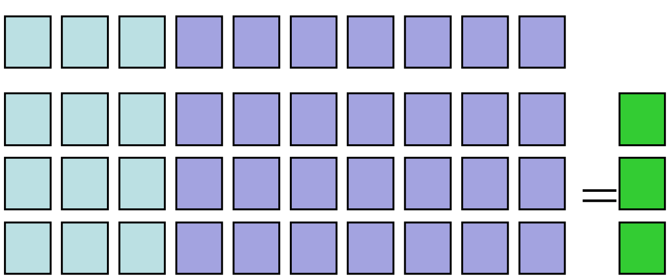
$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \qquad (3\text{-}2)$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b & (3\text{-}3) \\ X_B, X_N \geq O & (3\text{-}4) \end{cases}$$

-z	X	X_S	RHS
1	C	C_S	0
O	A	I	b

-z	X_B	X_N	RHS
1	C_B	C_N	0
O	B	N	b





单纯形表与矩阵表示的关系

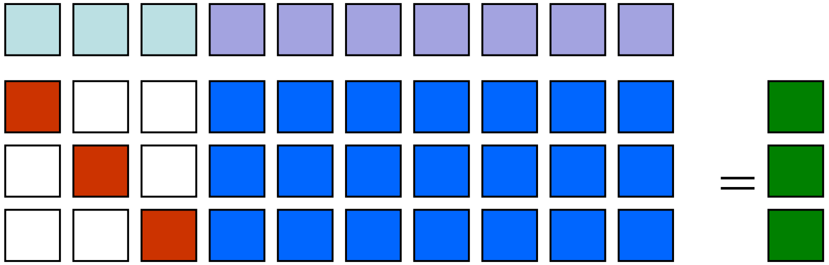
$$\max z = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} \underbrace{IX_B}_{=X_B} = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq O \end{cases} \quad (3\text{-}5)$$

这是写左边时系数$B^{-1}N$，而非$-B^{-1}N$

-z	X_B	X_N	RHS
1	C_B	C_N	0
O	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

任意一步迭代后得到的单纯形表形式



单纯形表与矩阵表示的关系

- 将前页（3-5）式中的X_B代入目标函数表达式：

$$\max z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1} b + \boxed{(C_N - C_B B^{-1} N)} X_N$$

$$\begin{cases} IX_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq O \end{cases}$$

z移动，常数项移过边，∴ $-z$: 1 ， RHS: $-C_B B^{-1} b$

$-z$	X_B	X_N	RHS
1	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

目标函数和约束条件表达式中不再包含X_B，就像ch2 例1 中那样

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2$$
$$x_3 = 8 - x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 16 - 4x_1$$
$$x_5 = 12 - 4x_2$$

单纯形表与矩阵表示的关系

- 最终得到了仅用非基变量表示的目标函数

$$\max z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

令非基变量全为0，得到一个基可行解：

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ O \end{pmatrix}$$

目标函数值为： $z = C_B B^{-1} b$

从目标函数的表达式可以看出，目标函数的值能否再进一步增大，将完全取决于其中非基变量X_N的系数：

$$C_N - C_B B^{-1} N$$

这也就是上一章中的"检验数"的另外一种表示形式——矩阵形式。

单纯形表与矩阵表示的关系

– 回到标准型

$$\max z = CX + C_S X_S$$

$$\begin{cases} AX + IX_S = b \\ X, X_S \geq 0 \end{cases}$$

-z	X	X_S	RHS
1	C	0	0
O	A	I	b

- 想从上述的系数矩阵中得到一组基B以及对应的基变量，将这组基B单独列在左侧。为了方便得到X_B的值，将目标函数全部以非基变量表示，做矩阵变换：

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	C_B	C	0	0
O	B	A	I	b

目标函数.

初始单纯形表

迭代多次后的单纯形表

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	0	$C-C_B B^{-1}A$	$-C_B B^{-1}$	$-C_B B^{-1}b$
O	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

单纯形表与矩阵表示的关系

-z	X_B	X	X_S	x_k	RHS
1	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$		$-C_BB^{-1}b$
0	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}P_k$	$B^{-1}b$

⇒此行为检验数

⇒此行为系数矩阵.

– 从而有：
$$\max z = C_BB^{-1}b+(C-C_BB^{-1}A)X+(-C_BB^{-1})X_S$$
$$= C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N \;?$$

- 构造标准型时引入的松弛变量对应的检验数为：$-C_BB^{-1}$
- 原问题决策变量对应的检验数为：$C-C_BB^{-1}A$

加的人工变量：对应 $C_N=0$，$N=I$.

– 单纯形表与矩阵表示的关系（表3-1）

	基变量 X_B	非基变量 X_N		等式右边 RHS
系数矩阵	$B^{-1}B=I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}P_{j\in N}$	$B^{-1}b$
检验数	$C_B-C_BB^{-1}B=0$	$C_N-C_BB^{-1}N$	$(-C_BB^{-1})_{j\in N}$	$-C_BB^{-1}b$

– 用矩阵描述的θ规则：
$$\theta=\min\left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\,\middle|\,(B^{-1}P_k)_i>0\right]=\frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

- 其中，$B^{-1}b$为约束等式右端项，$B^{-1}P_k$为换入变量x_k对应的系数列向量