数理逻辑 · 第一次小测
考试时间：90 分钟　　满分：100 分

一. （21 分） 判断并写出判断依据。

1. 任何命题符号是公式。
2. 不是所有公式都有等值主析取范式。
3. 对任意 p，不存在 Γ 使得 $\Gamma \vdash p$ 且 $\Gamma \vdash \neg p$。
4. 对所有解释 I：$I((p \to q) \vee (q \to p)) = t$, 则 p 与 q 逻辑等值。
5. 反证律和归谬律可相互证明.
6. 已被证明的公理，定理，定律具有普适性，在任何系统都能运用。
7. 在 L 中，$\Gamma \vdash p$ 是可判定的。

答： 1. 对 (称为原子公式),
2. 对 (若公式是矛盾式, 则没有等值主析取范式),
3. 错 (若 Γ 是不相容的, 则对任何 p, Γ p),
4. 错 (中间的符号是合取不是析取),
5. 对 (结合双否律可证明),
6. 错 (课本 28 面, 有些系统不承认 L3 和反证律)
7. 否

二. （5 分） 简答题。
L 的内定理和定理有什么区别

答： 若存在 p 的一个形式证明，则称 p 是可证的，即 p 为 L 的一个内定理

三. 证明题。

1. （20 分） 直接证明。
   i. $\{p \to (q \to r), q\} \vdash p \to r$
   ii. $\{p \to (q \to r)\} \vdash (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$
2. （20 分） 简化证明。
   i. $\vdash (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$
   ii. $\vdash (\neg p \to p) \to (q \to p)$

答：
(1). i
1. $q \to (p \to q) \quad L_1$
2. q
3. $p \to q \quad MP1,2$
4. $p \to (q \to r)$
5. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \quad L_2$
6. $(p \to q) \to (p \to r) \quad MP4,5$
7. $p \to r \quad MP3,6$

(1).ii

1. $q \to (p \to q)$ $L1$
2. $p \to (q \to r)$ 已知
3. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $L2$
4. $(p \to q) \to (p \to r)$ $2, 3, MP$
5. $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ $L1$
6. $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $4, 5, MP$
7. $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ $L2$
8. $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ $6, 7, MP$
9. $q \to (p \to r)$ $1, 8, MP$
10. $(q \to (p \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r))$ $L2$
11. $(q \to p) \to (q \to r)$ 9 10, MP
12. $((q \to p) \to (q \to r)) \to (((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r))$ $L2$
13. $((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)$ 11 12, MP
14. $(((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)) \to ((((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r))$ $L2$
15. $(((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$ $13, 14, MP$

(2).i
依演绎定理，只需证 $\{\neg p \to \neg q, \neg p \to q\} \vdash p$,
$\{\neg p \to \neg q, \neg p \to q, \neg p\} \vdash \neg q$, 且
$\{\neg p \to \neg q, \neg p \to q, \neg p\} \vdash q$
依反证律得 $\{\neg p \to \neg q, \neg p \to q\} \vdash p$，得证。

(2).ii
1. $\neg p \to (p \to \neg q)$
2. $(\neg p \to (p \to \neg q)) \to ((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)) L2$
3. $(\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)$1 2, MP
4. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p) L3$
5. $(\neg p \to p) \to (q \to p)$3 4 HS

四. （18 分） 求析取合取范式。
设 $A = p_0 \vee (p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$, $B = \neg (p_1 \wedge \neg p_0 \wedge (p_3 \to \neg (\neg p_2 \to p_0 \wedge \neg \ p_0))$

1. 求 A 的合取范式。
2. 求 B 的析取范式。
3. 试问 A 与 B 是否逻辑等价？证明你的结论。

答： 1. 答案 $(p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_3)$
2. 答案 $p_0 \vee \neg p_1 \vee (p_3 \wedge p_2)$
3. 是

五. （16 分） 判断下面的的公式是重言式或矛盾式或偶然式。

1. $((p_1 \wedge (\neg p_2)) \wedge (p_1 \to (\neg p_2)))$
2. $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$

答： 1. 偶然式
2. 重言式