1 第二次作业

1.1 习题1

1.1.1 Ex5

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

将$x_0=81, x_1=100, x_2=121, f(x_0)=9, f(x_1)=10, f(x_2)=11, x=105$代入上式，得到$L_2(105)=10.2481203$。

则$e=\sqrt{105}-L_2(105)=10.2469508-10.2481203=-1.17\times10^{-3}$

而$R_2(x)=\frac{f^3(\xi)}{3!}\prod_{i=1}^{3}(x-x_i), \xi\in[a,b]$，代入$x=105, a=x_0=81, x_1=100, b=x_2=121$，即得：

$$R_2(105)=-120\xi^{-\frac{5}{2}}\in[-2.03\times10^{-3},-7.45\times10^{-4}]$$

$\therefore$ 实际误差在误差界内。

1.1.2 Ex6

i	x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	-1	3			
1	2	5	$f[-1,2]=\frac{2}{3}$		
2	3	7	$f[2,3]=2$	$f[-1,2,3]=\frac{1}{3}$	
3	4	5	$f[3,4]=-2$	$f[2,3,4]=-2$	$f[-1,2,3,4]=-\frac{7}{15}$

$$\therefore N_3(x)=3+\frac{2}{3}(x+1)+\frac{1}{3}(x+1)(x-2)-\frac{7}{15}(x+1)(x-2)(x-3),\ N_3(1.2)=2.4016$$

1.1.3 Ex7

(1)

$$N_3(x)=1+2(x-4)+(x-4)(x-1)-(x-4)(x-1)(x-3)$$

(2)

$$f(2)=N_3(2)=-7$$

$$f[1,2,3,4]=\frac{f[2,3,4]-f[1,3,4]}{2-1}=-1$$

$$\therefore f[2,3,4]=f[1,3,4]-1=0$$

1.1.4 Ex9

$$f[2^0,2^1]=\frac{f(2^1)-f(2^0)}{2^1-2^0}=\frac{-2975+886}{2-1}=-2089$$

$$\because f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^n(\xi)}{(n)!}$$

$$\therefore f[2^0,\cdots,2^7]=\frac{f^7(\xi)}{7!}=1,\ f[2^0,\cdots,2^8]=\frac{f^8(\xi)}{8!}=0$$

1.1.5 Ex12

见例1.5，$H_2(x)=x^2-3x+5,\ R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-3)(x-5)^2,\ H_2(3.7)=7.59$

T15

法 1: 设 $P_4(x)=t_0(x)f(1)+t_1(x)f'(1)+t_2(x)f(2)+t_3(x)f'(2)+t_4(x)f''(2)$,其中 $t_0(x),t_1(x),t_2(x),t_3(x),t_4(x)$ 为次数不高于四次的多项式，分别满足

$$t_0(1)=1,t_0'(1)=0,t_0(2)=0,t_0'(2)=0,t_0''(2)=0$$

$$t_1(1)=0,t_1'(1)=1,t_1(2)=0,t_1'(2)=0,t_1''(2)=0$$

$$t_2(1)=0,t_2'(1)=0,t_2(2)=1,t_2'(2)=0,t_2''(2)=0$$

$$t_3(1)=0,t_3'(1)=0,t_3(2)=0,t_3'(2)=1,t_3''(2)=0$$

$$t_4(1)=0,t_4'(1)=0,t_4(2)=0,t_4'(2)=0,t_4''(2)=1$$

同 13 题，用待定系数法，求得

$$\begin{aligned}
t_0(x)&=(-3x+2)(x-2)^3\\
t_1(x)&=-(x-1)(x-2)^3\\
t_2(x)&=(x-1)^2(3x^2-14x+17)\\
t_3(x)&=(x-1)^2(x-2)(-2x+5)\\
t_4(x)&=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)^2
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
P_4(x)=&0.5(-3x+2)(x-2)^3-0.5(x-1)(x-2)^3+(x-1)^2(3x^2-14x+17)\\
&+(x-1)^2(x-2)(2x-5)+\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)^2\\
=&3.5x^4-22.5x^3+51.5x^2-49x+17
\end{aligned}$$

法 2: 对于重结点，实际上有 $f[\underbrace{x_0,x_0,...,x_0}_{n+1\text{个}}]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。由差商的计算方法，得差商表

1	0.5	0.5	0	-1.5	3.5
1	0.5	0.5	-1.5	2	
2	1	-1	0.5		
2	1	-1			
2	1				

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= 0.5 + 0.5(x-1) - 1.5(x-1)^2(x-2) + 3.5(x-1)^2(x-2)^2 \\
&= 3.5x^4 - 22.5x^3 + 51.5x^2 - 49x + 17
\end{aligned}
$$

余项为 $\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)^2(x-2)^3$, 证明如下：
令 $R(x) = f(x) - P_4(x)$，则 1,2 分别为 $R(x)$ 的零点，其中 1 为二重根,2 为三重根。设

$$R(x) = k(x)(x-1)^2(x-2)^3$$

令

$$\phi(t) = f(t) - P_4(t) - k(x)(t-1)^2(t-2)^3$$

则 $\phi(t)$ 至少有 $x, 1, 2$ 三个零点, 其中 1 为二重,2 为三重。根据 Rolle 定理，$\phi'(t)$ 至少有 $\eta_1, \eta_2, 1, 2$ 四个零点，其中 2 为二重根。再次使用 Rolle 定理，$\phi''(t)$ 至少有 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, 2$ 四个零点。重复使用，可得 $\phi^{(5)}(t)$ 至少有一个零点 ξ。则

$$\phi^{(5)}(\xi) = f^{(5)}(\xi) - k(x)5! = 0$$

即

$$k(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}$$

故

$$R(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)^2(x-2)^3, \quad 1 < \xi < 2$$

P46 T16

用课本 41-43 页的方法，计算得到

$$h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \mu_1 = \frac{1}{3}, d_1 = -12$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}, \mu_2 = \frac{2}{3}, d_2 = 12$$

关于 M_1, M_2 的方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

得到

$$M_1 = -9, M_2 = 9$$

故

$$S(x) = \begin{cases} -1.5x^3 - 9x^2 - 9.5x + 1 & x \in [-2, -1] \\ 1.5x^3 - 0.5x + 4 & x \in [-1, 1] \\ -1.5x^3 + 9x^2 - 9.5x + 7 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$S(0) = 4$$

P46 T17

计算得到

$$h_0 = 1, h_1 = 1, h_2 = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \mu_1 = \frac{1}{2}, d_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{3}, d_2 = 23$$

通过 $S'(-1) = 5, S'(3) = 29$ 得到的方程为

$$2M_0 + M_1 = -24$$

$$M_2 + 2M_3 = \frac{99}{2}$$

故关于 M_0, M_1, M_2, M_3 的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ 23 \\ \frac{99}{2} \end{bmatrix}$$

解得

$$M_0 = -13.2273, M_1 = 2.45455\ M_2 = 3.40909, M_4 = 23.0455$$

故

$$S(x) = \begin{cases} 2.61364x^3 + 1.22728x^2 - 0.386367x + 3 & x \in [-1, 0] \\ 0.15909x^3 + 1.22728x^2 - 0.386365x + 3 & x \in [0, 1] \\ 1.63637x^3 - 3.20456x^2 + 4.04545x + 1.52274 & x \in [1, 3] \end{cases}$$

$$S(2) = 9.88636$$