习题二：

- 1. 用图解法求解下述线性规划问题，并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

- 1)

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$x_1+2x_2\le 10$

- 2)

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

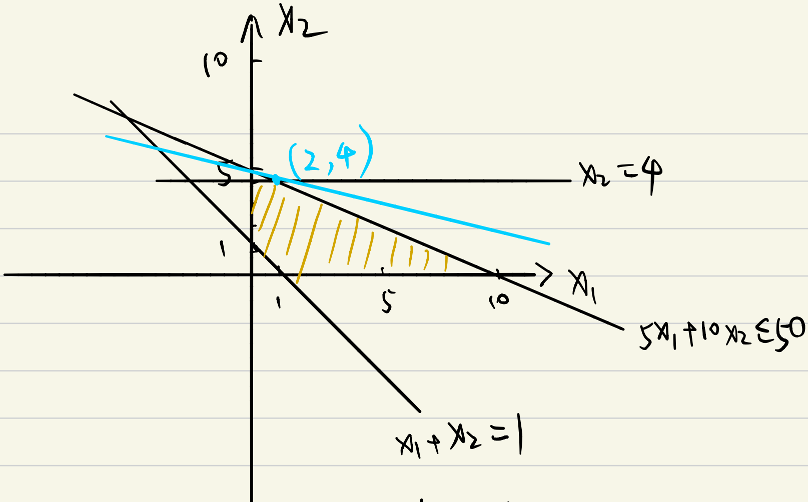
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

- 3)

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.(1)

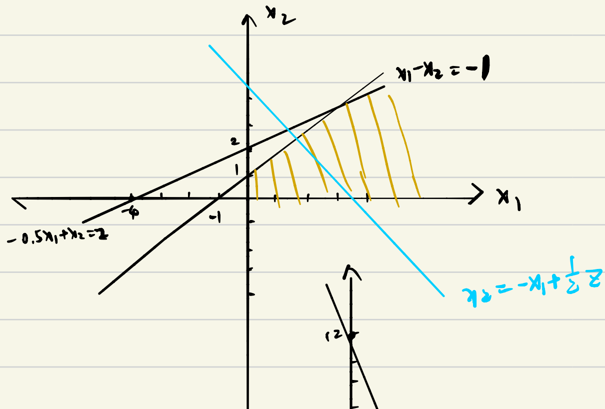


$\max\ z = x_1+3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}z$

由图知，当 $x_1=2, x_2=4$ 时，取 $z_{max}=14$，问题有唯一最优解

(2)

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



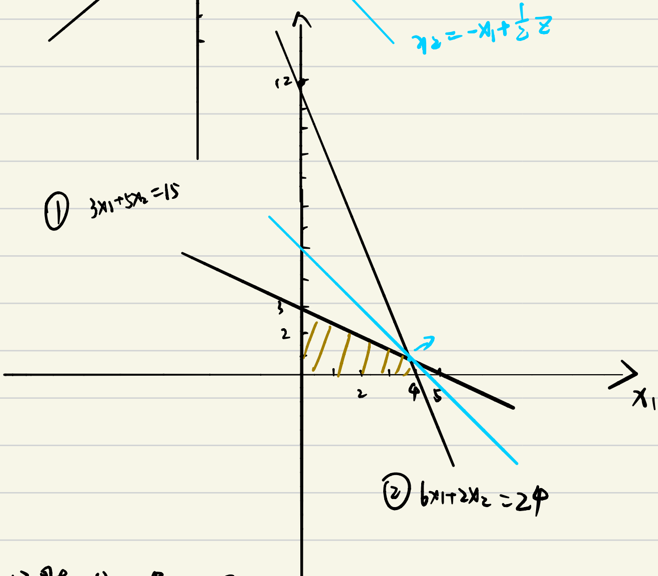
$\max z = 2x_1+2x_2$

$x_2 = -x_1+\frac{1}{2}z$

由图，问题有无界解

(3)

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



$\max z = 2x_1+x_2$

即 $x_2 = -2x_1+z$

由①②两直线方程知其交点为 $(\frac{15}{4}, \frac{3}{4})$

$\therefore z_{max} = \frac{15}{2}+\frac{3}{4} = \frac{33}{4}$，问题有唯一最优解

习题二：

- 2. 将下列线性规划问题变换成标准型：
- 1) $\max z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

2) $\max z = 2x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

- 3) $\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

1) $\max z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 & ① \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 & ② \\ x_2 \leqslant 4 & ③ \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

①式左端加入松弛变量 x_3

②式左端减去剩余变量 x_4

③式左端加入松弛变量 x_5

$\Rightarrow$ 得标准型：

$$\max z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

2) $\max z = 2x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 & ① \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 & ② \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

①式两端同乘 -1 $\Rightarrow$ $-x_1 + x_2 \leq 1$ ③

在②③式左端分别加入松弛变量 x_3, x_4，得标准型：$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -0.5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

- 3) $\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 & ① \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 & ② \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 & ③ \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

I：令①式两边同乘 -1：$-4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$ ④

II：令 $x_4 = x_5 - x_6$，其中 $x_5, x_6 \geqslant 0$

III：此时，在②左端加入松弛变量 x_7

在③式左端减去剩余变量 x_8

IV：令 $z' = -z$，将 $\min z$ 改为求 $\max z'$

得标准型：$\max z' = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_5 - x_6) + 0x_7 + 0x_8$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - (x_5 - x_6) + x_7 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2(x_5 - x_6) - x_8 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0 \end{cases}$$