习题 1

1. 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程，试证它是宽平稳的当且仅当 $EX(s)$ 与 $E[X(s)X(s+t)]$ 都不依赖 s.

证明：充分性：若 $X(t)$ 为宽平稳的，则由定义知

$EX(t)=\mu$, $EX(s)X(s+t)=r(t)$ 均与 s 无关

必要性：若 $EX(s)$ 与 $EX(s)X(s+t)$ 都与 s 无关，说明

$EX(t)=$ 常数, $EX(s)X(s+t)$ 为 t 的函数

2. 记 $U_1,...,U_n$ 为在（０，１）中均匀分布的独立随机变量，对 $0<t,x<1$ 定义

$$I(t,x)=\begin{cases}1, & x\le t,\\ 0, & x>t,\end{cases}$$

并记 $X(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k)$，$0\le t\le 1$，这是 $U_1,...,U_n$ 的经验分布函数。试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

解：$EI(t,U_k)=P(U_k\le t)=t$，

$$D(I(t,U_k))=EI(t,U_k)-(EI(t,U_k))^2$$

$$=t-t^2=t(1-t)$$

$k\ne j$，$\operatorname{cov}(I(t,U_k),\ I(s,U_j))=EI(t,U_k)I(s,U_j)-EI(t,U_k)EI(s,U_j)$

$$=st-st=0$$

$k=j$，$\operatorname{cov}(I(t,U_k),\ I(s,U_j))=EI(t,U_k)I(s,U_j)-st$

$$=\min(t,s)-st$$

$$EX(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EI(t,U_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}t=t$$

$$\operatorname{cov}(X(t),X(s))=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cov}(I(t,U_k),I(s,U_k))+\frac{1}{n^2}\sum_{k\ne j}\operatorname{cov}(I(t,U_k),I(s,U_j))$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[\min(s,t)-st]$$

$$=\frac{1}{n}(\min(s,t)-st)$$

3.令 Z_1， Z_2 为独立的正态分布随机变量，均值为 0，方差为 σ^2， λ 为实数，定义过程 $X(t)=Z_1\mathrm{Cos}\lambda t+Z_2\mathrm{Sin}\lambda t$.试求 $X(t)$的均值函数和协方差函数，它是宽平稳的吗？

Solution: $Z_1, Z_2 \sim N(0,\sigma^2)$. $EZ_1^2=EZ_2^2=0$.

$$D(Z_1)=D(Z_2)=\sigma^2 \quad , \quad Cov(Z_1,Z_2)=0 \quad , \quad EX(t)=0 \quad ,$$

$$Cov(X(t),X(s))=E\left[(Z_1\mathrm{Cos}\lambda t+Z_2\mathrm{Sin}\lambda t)\cdot(Z_1\mathrm{Cos}\lambda s+Z_2\mathrm{Sin}\lambda s)\right]$$

$$=E\left[Z_1^2\mathrm{Cos}\lambda t\,\mathrm{Cos}\lambda s+Z_2^2\mathrm{Sin}\lambda t\,\mathrm{Sin}\lambda s+Z_1Z_2\mathrm{Cos}\lambda t\,\mathrm{Sin}\lambda s+Z_2Z_1\mathrm{Sin}\lambda t\,\mathrm{Cos}\lambda s\right]$$

$$=\sigma^2(\mathrm{Cos}\lambda t\,\mathrm{Cos}\lambda s+\mathrm{Sin}\lambda t\,\mathrm{Sin}\lambda s)+0$$

$$=\sigma^2\mathrm{Cos}\left[(t-s)\lambda\right]$$

$\{X(t)\}$为宽平稳过程 .

4.Poisson过程 $X(t),t\ge 0$ 满足（i） $X(0)=0$ ；(ii) 对 $t>s$， $X(t)-X(s)$服从均值为 $\lambda(t-s)$的 Poisson分布；（iii）过程是有独立增量的 .试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗？

Solution $EX(t)=E(X(t)-X(0))=\lambda t$, $D(X(t))=\lambda t$

$$Cov(X(t),X(s))=EX(t)X(s)-\lambda t\cdot\lambda s$$

$$=E(X(t)-X(s))X(s)+EX^2(s)-\lambda^2 ts$$

$$=0+D(X(s))+(EX(s))^2-\lambda^2 ts$$

$$=\lambda s+(\lambda s)^2-\lambda^2 ts$$

$$=\lambda s(1+\lambda s-\lambda t)$$

显然 $X(t)$不是宽平稳的 .

5. $X(t)$为第 4 题中的 Poisson过程，记 $y(t)=X(t+1)-X(t)$，试求过程 $y(t)$的均值函数和协方差函数，并研究其平稳性 .

Solution $Ey(t)=\lambda\cdot 1=\lambda$, $D(y(t))=\lambda$

$Cov(y(t),y(s))=Ey(t)y(s)-Ey(t)y(s)$

$$=E(x(t+1)-x(t))(x(s+1)-x(s))-\lambda^2$$

(1) 若 $s+1<t$, 即 $s\leq t-1$, 则 $Cov(y(t),y(s))=0-\lambda^2=-\lambda^2$

(2) 若 $t<s+1\leq t+1$, 即 $t>s>t-1$, 则

$$Cov(y(t),y(s))=E[x(t+1)-x(s+1)+x(s+1)-x(t)][x(s+1)-x(t)+x(t)-x(s)]-\lambda^2$$

$$=E(x(t+1)-x(s+1))(x(s+1)-x(t))+E(x(t+1)-x(s+1))(x(t)-x(s))$$

$$+E(x(s+1)-x(t))+E(x(s+1)-x(t))(x(t)-x(s))-\lambda^2$$

$$=\lambda(s+1-t)=\lambda-\lambda(t-s)-\lambda^2$$

(3) 若 $t<s<t+1$

$$Cov(y(t),y(s))=E[x(t+1)-x(s)+x(s)-x(t)][x(s+1)-x(t+1)+x(t+1)-x(s)]-\lambda^2$$

$$=(x(t+1)-x(s))(x(s+1)-x(t+1))+E(x(t+1)-x(s))(x(t+1)-x(s))$$

$$+E(x(s)-x(t))(x(s+1)-x(t+1))+E(x(s)-x(t))(x(t+1)-x(s))-\lambda^2$$

$$=0+\lambda(t+1-s)+0-\lambda^2$$

$$=\lambda+\lambda(t-s)-\lambda^2$$

(4) 若 $s>t+1$ $Cov(y(t),y(s))=0-\lambda^2=-\lambda^2$

由此知，故方差只与 $t-s$ 有关，与 t,s 无关

故此过程为宽平稳的。

6，令 z_1 和 z_2 是独立同分布的随机变量， $P(z_1=-1)=P(z_2=1)=1/2$

记 $x(t)=z_1\cos\lambda t+z_2\sin\lambda t$, $t\in R$,试证： $x(t)$ 是宽平稳的，它是严平稳吗？

证明： $Ez_1=0$, $Ez_1^2=(-1)^2\times 1/2+1^2\times 1/2=1/2+1/2=1=D(z_1)$

$Cov(z_1,z_2)=0$

$Ex_t=0$

$cov(x_t,x_s)=E(x_t,x_s)=E(z_1^2\cos\lambda t\cos\lambda s+z_2^2\sin\lambda t\sin\lambda s+z_1z_2\cos\lambda t\sin\lambda s+z_1z_2\sin\lambda t\cos\lambda s)$

$= \cos\lambda t\cos\lambda s + \sin\lambda t\sin\lambda s + 0 + 0 = \cos(t-s)$

故 $\bar{x}(t)$ 为宽平稳的。

而

$x(t)$	$\cos\lambda t + \sin\lambda t$	$\cos\lambda t - \sin\lambda t$	$-\cos\lambda t + \sin\lambda t$	$-\cos\lambda t - \sin\lambda t$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$x(t+h)$	$\cos(\lambda(t+h) + \sin\lambda(t+h))$	$\cos(\lambda(t+h) - \sin\lambda(t+h))$	$-\cos\lambda(t+h) + \sin\lambda(t+h)$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$x(t+h)$	$-\cos\lambda(t+h) - \sin\lambda(t+h)$
P	$\frac{1}{4}$

显然， x(t) 与 x(t+h) 的分布不相等，故不是严平稳的。

7、试证：若 $Z_0, Z_1, \ldots\ldots$ 为独立同分布的随机变量， 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n$，则 $\{\overline{X_n}, n \geq 0\}$ 是独立增量过程。

Proof: $X_{n+m} - X_n = Z_{n+1} + \ldots + Z_{n+m}$ 与 $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ 相互独立，

故 $X_{n+m} - X_n$ 与 X_n 相互独立。

8、若 $X_1, X_2\ldots$为独立随机变量，还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程？

Solution: 添加 $X_1, X_2\ldots$，同分布的条件。

9. 令 X 和 Y是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标， 试计算条件概率：$P(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} | X > Y)$

Solution: $P(X > Y) = \iint_{x>y} f(x, y)dxdy = \frac{1}{2}$

$$P\left(X^2+Y^2\geq\frac{3}{4}\middle|X>Y\right)=\frac{P(X^2+Y^2\geq\frac{3}{4},X>Y)}{P(X>Y)}=2\cdot\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}rd\theta dr=\frac{1}{8}$$

10. 粒子依参数为 λ 的 Poisson 分布进入计数器，两粒子到达的时间间隔 T1, T2, …是独立的参数为 λ 的指数分布随机变量。记 S是 [0,1] 时段中的粒子总数，时间区间 I ∈[0,1], 其长度记为 |I|. 试证明 P（T1∈I,S=1 ）=P（T1∈I,T1+T2>1 ）, 并由此计算 P(T1∈I|S=1)=|I|.

Proof 。{T1∈I,S=1} 表明在 I 内来到了一个粒子，在 [0,1]-I 内再也没有来到粒子，也就是说第二个粒子的到来在 [0,1] 之后，即 T1+T2>1.(T1+T2 为第二个粒子来到的时间 ）。从而

P{T1∈I,S=1}=P{T1 ∈I,T1+T2>1}

P（T1∈I|S=1 ）= P（T1∈I,S=1 ）/P(S=1)

= P(T1 ∈I,T1+T2>1)/P(S=1)　　S~P(λ)

$=\{\lambda|I|e^{-\lambda|I|}*(\lambda(1-|I|))^0*e^{-\lambda(1-|I|)}\}/\lambda e^{-\lambda}$

=|I|

11.X,Y 为两独立随机变量且分布相同，证明 E(x|x+y=z)=E(y|x+y=z). 并试求基于 x+y=z 的 x 的最佳预报，并求出预报误差 $E(x-\phi(x+y))^2$

Proof ：因 x 与 y 独立，且分布相同，则 x|x+y=z =d y|x+y=z

故 E(x|x+y=z)=E(y|x+y=z)

而 E(x+y|x+y=z)=z, 故 E（x|x+y=z ）=z/2

用任意的 φ（z）来对 x 做预报，预报误差为：

$E(x-\phi(z))^2=E(x-E(x|x+y=z)+E(x|x+y=z)-\phi(z))^2$

$=E(x-E(x|x+y=z))^2+E(E(x|x+y=z)-\phi(z))^2$

$+2E(x-E(x|x+y=z))*(E(x|x+y=z)-\phi(z))$

$=E(x-E(x|x+y=z))^2+E(E(x|x+y=z)-\phi(z))^2$

$\geq E(x-E(x|x+y=z))^2$

取等号，当且仅当 φ（z）= E（x|x+y=z ）

预报误差 $E(x-\phi(x+y))^2=E(x-z/2)^2$

12、气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x，V_y，V_z，它们的联合分布密度依

Maxwell-Boltzman 定律为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{(2\pi\kappa T)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\left(\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2\kappa T}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数， T 为绝对温度，给定分子的总动能为 e. 试求分子沿 x 方向的动量的绝对值的期望值。

解：由于 V_x，V_y，V_z 的联合密度函数为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{(2\pi\kappa T)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\left(\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2\kappa T}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\kappa T)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{v_1^2}{2kT}\right\}\cdot\frac{1}{(2\pi\kappa T)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{v_2^2}{2kT}\right\}\cdot\frac{1}{(2\pi\kappa T)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{v_3^2}{2kT}\right\}$$

因此，V_x，V_y，V_z 互相独立，且 V_x，V_y，V_z 都服从正态分布 N (0 ，κ T) ． 故气体分子的总动能为

$$e=\frac{1}{2}mE(V_x^2+V_y^2+V_z^2)=\frac{3}{2}m\kappa T$$

由此可得 $$m=\frac{2e}{3\kappa T} \qquad (1)$$

而气体沿 x 方向的动量的绝对值的期望值为

$$mE(|V_x|)=\frac{m}{(2\pi\kappa T)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}|v_1|\exp\left\{\frac{v_1^2}{2\kappa T}\right\}dv_1$$

$$=\frac{m}{(2\pi\kappa T)^{\frac{1}{2}}}\left[-\int_{-\infty}^{0}v_1\exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\kappa T}\right\}dv_1+\int_0^{+\infty}v_1\exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\kappa T}\right\}dv_1\right]$$

$$=\frac{2m}{(2\pi\kappa T)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty}v_1\exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\kappa T}\right\}dv_1$$

$$= \frac{m}{(2\pi\kappa T)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\kappa T}\right\} d(v_1^2)$$

$$= m\left(\frac{2\kappa T}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此及（ 1）可得

$$mE(|V_x|) = \frac{2e}{3}\left(\frac{2}{\pi\kappa T}\right)^{\frac{1}{2}}$$

13. 若$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布，他们服从参数 λ的指数分布，试证： $\sum_{i=1}^n X_i$是参数(n, λ)为Γ的分布，其密度函数为： $f(t) = \lambda\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\qquad t \geq 0$

Proof. $X_1 \sim f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$$\varphi_{X_1}(t) = Ee^{X_1 t} = \int_0^{+\infty} e^{xt} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \underset{=t-\lambda}{\frac{-\lambda}{}} = \frac{\lambda}{\lambda - t}\ (\lambda > t)$$

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n x_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

记 Y~$\Gamma(n, \lambda, y)$, 则

$$\varphi_y(t) = Ee^{yt} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{yt} \cdot \lambda e^{-\lambda y} \cdot (\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - t)y} \cdot y^{n-1} dy$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad (\lambda > t)$$

由矩母函数与分布函数相互唯一决定知 $\sum_{i=1}^n X_i$为Γ分布。

14. 设X_1, X_2为相互独立的均值为 λ_1和λ_2的 Poisson 随机变量。试求 $X_1 + X_2$的分布。并计算给定 $X_1 + X_2 = n$时X_1的条件分布。

Solution. $P(X_1+X_2=k)=\sum_{m=0}^{\infty}P(X_1=m,X_2=k-m)$

$$=\sum_{m=0}^{k}P(X_1=m,X_2=k-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^{m}}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-m}}{(k-m)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\,(k-m!)}\cdot\lambda_1^{m}\lambda_2^{k-m}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\,(k-m!)}\cdot\lambda_1^{m}\lambda_2^{k-m}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},k=0,1,2,\ldots$$

$$P(X_1=\ell|X_1+X_2=n)=\frac{(X_1=\ell|X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^{\ell}}{\ell!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{n-\ell}}{(n-\ell)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=C_n^{\ell}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{\ell}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-\ell},\ \ell=0,1,2,\ldots$$

15. 若 X_1, X_2, …, 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N服从几何分布，即 $P(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1}$, $n=1,2,\ldots\ldots$, $0<\beta<1$. 试求随机和 $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 的分布。

解： $P(Y=y|N=n)=\int_0^y\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt$,

$$P(Y\le y)=\sum_{n=1}^{\infty}P(Y\le y,\ N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(Y\le y|N=n)P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} dt \cdot \beta \quad (1-\beta)^{n-1},$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta\lambda \quad \lambda 1-\beta \quad y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y}$$

$$= \beta\lambda \cdot e^{-\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \, 1-\beta \quad y^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \beta\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot e^{\lambda 1-\beta \; y} = \lambda\beta \, e^{-\lambda\beta y} . (y > 0)$$

$y \sim E(\lambda\beta)$

16. 若 X_1， X_2，…独立同分布， $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$,N 与 X_i， $i \geq 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布， $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ 的均值，方差和三、四阶矩。

解： $E(X_i) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$， $E(X_i^2) = D(X_i) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$

$E(X_i^3) = (-1)^3 \times \frac{1}{2} + (1)^3 \times \frac{1}{2} = 0$， $E(X_i^4) = (-1)^4 \times \frac{1}{2} + (1)^4 \times \frac{1}{2} = 1$

$EN = \frac{1}{\beta}$ ， $Ee^{tX_i} = e^{-t} \cdot \frac{1}{2} + e^{t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t}) = ch\ (t)$

$$g_y(t) = Ee^{ty} = E[E(e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N = n)] = E(Ee^{tX_i})^N$$

$$= E(ch(t))^N = \sum_{n=1}^{\infty} (ch(t))^n \cdot \beta \, 1-\beta^{\,n-1}$$

$$= \beta \cdot ch(t) \cdot \frac{1}{1-(1-\beta) \cdot ch(t)}$$

$$Ey^n = g^{(n)}(0)$$

$$g'(t)=\frac{\beta sh(t)}{(1-(1-\beta)ch(t))^2}, g'(0)=0$$

$$g''(t)=\frac{\beta ch(t)-\beta(1-\beta)+\beta(1-\beta)sh^2(t)}{(1-(1-\beta)ch(t))^3}, g''(0)=\frac{\beta-\beta(1-\beta)}{(1-(1-\beta))^3}=\frac{1}{\beta}$$

注：$sh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}, ch'(t)=sh(t), sh'(t)=ch(t)$，$sh(0)=0, ch(0)=1$

17. 随机变量 N 服从参数为 λ 的 poisson 分布，给定 N=n,随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布，试求 M 的无条件概率分布。

解：依题意，$P(M=m|N=n)=C_n^m P^m(1-p)^{n-m}, m=0.1.2...n$

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n=0,1,...$$

$$P(M=m)=\sum_{n=0}^{\infty}P(M=m,N=n)=\sum_{n=m}^{\infty}P(M=m,N=n)$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}P(M=m|N=n)\cdot P(N=n)$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(1-p)^{n-m}}{n!}\cdot\lambda^{n-m}\cdot(\lambda p)^m e^{-\lambda}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\sum_{l=n-m=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(1-p)^l\lambda^l\cdot e^{-\lambda}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda p}, m=0,1,2...$$

习题 2

1、N(t) 为 Poisson 过程，对 s<t，试求条件概率 $p(N(s)=k \mid N(t)=n)$

Solution: $$p(N(s)=k \mid N(t)=n)$$

$$=\frac{p(N(s)=k, N(t)=n)}{p(N(t)=n)}$$

$$=\frac{p(N(s)=k \cdot p(N(t)-N(s)=n-k))}{p(N(t)=n)}$$

$$=\frac{\dfrac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

2、{N（t）,t ≥0} 为一强度是 λ 的 Poisson 过程，对 s>0 试计算：E[N(t) · N(s)]

Solution: $E[N(t) \cdot N(t+s)]= E[N(t)] \cdot [N(t+s)- N(t) +N(t)]$

$= E[N(t)] \cdot [N(t+s)- N(t)]+ E\{N^2[(t)]\}$

(独立增量) $= E[N(t)] \cdot E[N(t+s)- N(t)]+ \lambda t+(\lambda t)^2$

$= \lambda t（\lambda s）+\lambda t+(\lambda t)^2$

$=\lambda t+ \lambda^2 t (t+s)$

注：$E[N(t)]= \lambda t$ $D[N(t)]= \lambda t$ $E[N^2(t)]= \lambda t+(\lambda t)^2$

3、电报依平均速度为每小时 3 个的 Poisson 过程到达电报局，试问：

（i）从早上八点到中午没收到电报的概率？

（ii）下午第一份电报到达时间的分布是什么？

注：以八点为初始时刻

Solution: 用 N(t) 表示在时间 t 内到达的电报数，则 N(t)~P（λt）

（i） $P(N(2)-N(8)=0)=((\lambda 4)^0/0!)\, e^{-4\lambda}=e^{-12}$

（ii）设 T 为下午第一份电报到达时间，则：

P （12≤T≤t）=P(N(t)-N(12)=1)=3(t-12)e$^{-3(t-12)}$,t ≥12

4. $P\{N(1)\le 2\}$ 为 $\lambda=2$ 的 possion 过程，试求

（1） $P\{N(1)\le 2\}$

(2) $P\{N(1)=1, N(2)=3\}$

(3) $P\{N(1)\ge 2 \mid N(1)\ge 1\}$

Solution ：(1) $P\{N(1)\le 2\}=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}=5e^{-2}$

(2)
$$P\{N(1)=1, N(2)=3\}=P\{N(1)=1, N(2)-N(1)=2\}$$
$$=P\{N(1)=1\}P\{N(2)-N(1)=2\}$$
$$=2e^{-2}\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2}=4e^{-4}$$

(3)
$$P\{N(1)\ge 2\mid N(1)\ge 1\}=P\{N(1)\ge 2, N(1)\ge 1\}/P\{N(1)\ge 1\}$$
$$=P\{N(1)\ge 2\}/P\{N(1)\ge 1\}$$
$$=\frac{1-e^{-2}-2e^{-2}}{1-e^{-2}}=1-\frac{2e^{-2}}{1-e^{-2}}$$

5. 证明概率 $P_m(t)=P\{N(t)=m\}$ 在命题 2.1 的假定（1）~（4）下满足微分方程 $P_m'(t)=-\lambda P_m(t)+\lambda P_{m-1}(t), m=1,2,\cdots\cdots \ (*)$ 并证明在初始条件下，

$P_m(0)=0$, $m=1,2,\cdots\cdots$ 的解为 $\frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}$ 。

证明：（*）的导出已在命题 2.1 中给出，

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

考虑齐次方程：$P'_m(t)=-\lambda P_m(t)\Rightarrow P_m(t)=ce^{-\lambda t}$

采用变易系数法, $P_m(t)=c(t)e^{-\lambda t}$ 代入（*）有

$$c'(t)e^{-\lambda t}-\lambda c(t)e^{-\lambda t}=-\lambda c(t)e^{-\lambda t}+\lambda P_{m-1}(t)$$

$$c(t)=\lambda\int_0^t e^{\lambda t}P_{m-1}(t)dt$$

从而 $P_m(t)=ce^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t e^{\lambda t}P_{m-1}(t)dt\cdot e^{-\lambda t}$

而 $P_m(0)=ce^{-\lambda t}+0=0.(m=1,2,...),c=0$

从而 $P_m(t)=\lambda\int_0^t e^{\lambda t}P_{m-1}(t)dt\cdot e^{-\lambda t}$

$$P_1(t)=\lambda\int_0^t e^{\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}dt\cdot e^{-\lambda t}=\lambda t\cdot e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t)=\lambda\int_0^t e^{\lambda t}\lambda t\cdot e^{-\lambda t}dt\cdot e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t},...$$

6. 一部 600 页的著作，总共有 240 个印刷错误，试利用 Poisson 过程近似求出连续 3 页无错误的概率。

Solution ： 首先求出强度 $\lambda=\frac{240}{600}=0.4$

P(N(ℓ+3)-N(ℓ)=0)= $e^{-0.4\times3}=e^{-1.2}$ (1.1)

7.N(t) 是强度为 λ 的 Poisson 过程，给定 N(t)=n ，试求第 r 个事件 (r $\le$n) 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r/N(t)}(W_r\mid n)$。

Solution ：

$f(W_r\mid n)\,g\Delta W_r$ =P{N(W_r)=r-1,N($W_r+\Delta W_r$)-N(W_r)=1,N(t)-N($W_r+\Delta W_r$)=n-r|N(t)=n}

$$= \frac{\frac{(\lambda W_r)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda W_r} \cdot \frac{(\lambda \Delta W_r)^1}{1!} e^{-\lambda W_r} \cdot \frac{(\lambda (t - W_r - \Delta W_r))^{n-2}}{(n-r)!} e^{-\lambda (t - W_r - \Delta W_r)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} + o(\Delta W_r)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot (\frac{W_r}{t})^{r-1} \cdot \frac{\Delta W_r}{t} \cdot (\frac{t - W_r - \Delta W_r}{t})^{n-r} + o(\Delta W_r)$$

从而 $f(W_r \mid n) = \frac{n}{t} \cdot C_{n-1}^{r-1} \cdot (\frac{W_r}{t})^{r-1} \cdot (1 - \frac{W_r}{t})^{n-r}$

8. 令{ $N_i(t)$, $t \geq 0$}, i=1 , 2, ……, n 为 n 个相互独立的有相同参数 λ 的 Poisson 过程, 记 T 为全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻，试求 T 的颁布。

Solution: 由题意知， $T = f\{t \mid \sum_{i=1}^{n} N_i(t) \geq 1\}$

$P(T>x)=P(\sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 0) = e^{-n\lambda x}$ (利用了独立性)

(说明在时刻经 x 前, 没有一个事件发生)

$$f_T(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, x > 0 \\ 0, else \end{cases}$$

9. 考察参数为 λ 的 Poisson 过程 N (t)，若每一事件独立地以概率 p 被观察到，并将观察到的过程记为 $N_1(t)$，试问： $N_1(t)$ 是什么过程？ $N(t) - N_1(t)$ 呢？

$N_1(t)$ 与 $N(t) - N_1(t)$ 是否独立？

$$P(N_1(t) = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_1(t) = k, N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P(N_1(t) = k)}{(N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot(\lambda t)^{n-k}\cdot(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda t}\cdot\sum_{l=n-k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p)t)^l}{l!}$$

$$= \frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda(1-p)t}$$

$$= \frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,3....$$

$N_1(t)$ 为强度参数为 λpt 的 Poisson 过程。

易知 $N(t)-N_1(t)$ 为强度参数为 $\lambda(1-p)t$ 的 Poisson 过程。

记 $N_2(t) = N(t) - N_1(t)$，则 $P(N_2(t) = m) = \frac{(\lambda(1-p)t)^m}{m!}e^{-\lambda(1-p)t}$

$$P(N_1(t) = k, N_2(t) = m) = P(N(t) = m+k) = \frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!}e^{-\lambda t}$$

$$\neq P(N_1(t) = k)\cdot P(N_2(t) = m)$$

故 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 不相互独立。

10. 到达某加油站的公路上的卡车数服从强度参数为 λ_1 的 Poisson 过程 $N_1(t)$，而到达的小汽车数服从参数为 λ_2 的 Poisson 过程 $N_2(t)$，且 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，试问：$N_1(t)+N_2(t)$ 是什么过程？并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率。

Solution. $P(N(t)=n) = \sum_{k=0}^{\infty}P(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P(N_1(t)=k)P(N_2(t)=n-k) \quad \text{(独立性)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot e^{-\lambda_2 t}$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot (\lambda_1 t + \lambda_2 t)^n = \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

n=0, 1, 2, ⋯.

$N(t)$为参数 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程

取 $T = \inf\{t \mid N_1(t)=1, N_2(t)=0\}$

$$f(\tau|n)\cdot\Delta\tau = \frac{P\{N(\tau)=0, N_1(\tau+\Delta\tau)-N_1(\tau)=1, N_2(\tau+\Delta\tau)-N_2(\tau)=0, N(t)-N(\tau+\Delta\tau=n-1\}}{P\{N(t)=n\}}$$

$$= \frac{((\lambda_1+\lambda_2)\tau)^0}{0!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} \cdot \frac{\lambda_1\Delta\tau}{1!} e^{-\lambda_1\Delta\tau} \cdot e^{-\lambda_2\Delta\tau} \cdot (t-\tau-\Delta\tau)$$

$$\cdot \frac{((\lambda_1+\lambda_2)(t-\tau-\Delta\tau))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} / \left[\frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right] + o(\Delta\tau)$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{(t-\tau-\Delta\tau)^{n-1}}{t^n} \cdot \Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

$$= n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \left(1-\frac{\tau}{t}-\frac{\Delta\tau}{t}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

$$\Rightarrow f(\tau|n) = n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{1}{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-1}, 0<\tau<t$$

11. 冲击模型（ shock model）: 记 N(t) 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数，它是参数为 λ 的 Poisson 过程，设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k服从参数为 μ 的指数分布，Y_k，k=1,2，……独立同分布。记 X(t) 为系统所受到的总损害，当损害超过一定的极限 σ时，系统不能运行，寿命终止，记 T 为系统寿命，试求系统的平均寿命 ET，并对所得结果作出直观解释。

Solution:
$$ET = \int_0^{+\infty} \tau \cdot P(\tau)\,d\tau = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{\tau} P(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} P(\tau)\,d\tau = \int_0^{+\infty} P(T>S)\,ds$$

而
$$P\{T>S\} = P\{\sum_{k=1}^{N(s)} Y_k < \alpha\}$$

$$ET=\int_0^{+\infty}P\{\sum_{k=1}^{N(s)}Y_k<\alpha\}ds=\int_0^{+\infty}P\{\sum_{k=1}^{L}Y_k<\alpha|N(s)=L\}\cdot P\{N(s)=L\}ds$$

$$\sum_{k=1}^{L}Y_k\sim\Gamma(L,\mu,y)=\begin{cases}\dfrac{\mu(\mu y)^{L-1}}{(L-1)!}e^{-\mu y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=\int_0^{\infty}1\cdot P\{N(s)=0\}ds+\int_0^{+\infty}\sum_{e=1}^{\infty}P\{\sum_{k=1}^{N(s)}Y_k<\alpha\}\cdot P\{N(s)=L\}ds$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\int_0^{+\infty}\sum_{L=1}^{\infty}\int_0^{\alpha}\frac{\mu(\mu y)^{L-1}}{(L-1)!}e^{-\mu y}dy\cdot\frac{(\lambda s)^L}{L!}e^{-\lambda s}ds$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^{\alpha}\sum_{L=1}^{\infty}\frac{L+1}{(L-1)!}\mu^L y^{L-1}\cdot e^{-\mu y}dy$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha}\sum_{k=L-1=0}^{\infty}\frac{k+\alpha}{k!}\mu^{k+1}y^k\cdot e^{-\mu y}dy$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}\mu^{k+1}y^k\cdot e^{-\mu y}dy+\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{k+1}}{k!}y^k\cdot e^{-\mu y}dy$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}\alpha\mu+\frac{1}{2\lambda}\mu^2\alpha^2$$

α越大，寿命越长，强度 λ越大，受到的冲击越多，寿命越小。

12. 令 $N(t)$是强度函数为 $\lambda(t)$的非齐次 Poisson 过程，$X_1,X_2,\cdots$ 为事件间的时间间隔，

（i） X_i是否独立；

（ii） X_i是否同分布；

（iii）试求 X_1及 X_2的分布。

Solution ：（i）根据非齐次 Poisson 过程的定义，其条件（ 1）在不相交的区间中事件发生的数目相互独立，这说明事件间的时间间隔是相互独立的。

（ii）因为在不同时刻，事件的来到数的分布不同，故 X_i的分布不相同。

（iii）

$$P(X_1>t)=P(N(t)=0)=\exp(-\int_0^t\lambda(u)du)$$

$$P(X_2>t\mid X_1=s)=P\{(s,s+t]\text{中事件不发生}\mid X_1=s\}$$

$$=P\{(s,s+t]\text{中事件不发生}\}(\text{独立增量性})$$

$$=P(N(t+s)-N(s)=0)=\exp(-\int_s^{s+t}\lambda(u)du)$$

$$P(X_2>t)=\int_0^{\infty}P(X_2>t\mid X_1=s)p_{X_1}(s)ds=\int_0^{\infty}\exp(-\int_s^{t+s}\lambda(u)du)\cdot$$

$$\lambda(s)\cdot\exp(-\int_0^s\lambda(u)du)\cdot ds$$

$$=\int_0^{\infty}\exp(-\int_s^{s+t}\lambda(u)du)\cdot\lambda(s)\cdot\exp(-\int_0^s\lambda(u)du)\cdot ds$$

13. 考虑对所有 t，强度函数 λ（t）均大于 0 的非齐次 Poisson 过程，$\{N(t),t>0\}$ 令 $m(t)=\int_0^{l(t)}\lambda(u)du$，$m(t)$ 的反函数为 $l(t)$，记为 $N_1(t)=N(t)$，试证 $N_1(t)$ 是通常的 poisson 过程，试求 $N_1(t)$.

证明：$l(m(t))=m(l(t))=t$

$$\int_0^{l(t)}\lambda(u)du=m(l(t))=t$$

$$p(N_1(t)=k)=p(N(l(t))=k)=\frac{\left(\int_0^{l(t)}\lambda(u)du\right)^k}{k!}\cdot\exp\{-\int_0^{l(t)}\lambda(u)du\}$$

易知：$\lambda=1$

14. 设 N(t) 为更新过程，试判断下述命题的真伪：

（1）{N(t)<k} {W_k>t}

（2）{N(t) ≤k} {W_k≥t}

（3）{N(t)>k} {W_k<t}

Sohction 根据更新过程定义：

$$N(t)=\max\{n:W_n\le t\},\quad W_n=\sum_{i=1}^{n}Xi,\quad W_0=0.$$

（2）（3）为真命题，（1）为假命题 .