Computer Science and Technology

运 筹 学

讲者： 顾乃杰 教授、 黄章进 副教授

中国科学技术大学
1958—2008

排队论

Chap. 13 *Queueing Theory*

13. 排队论

- 13.1 基本概念
- 13.2 到达间隔的分布和服务时间的分布
- 13.3 单服务台负指数分布排队系统的分析
- 13.4 多服务台负指数分布排队系统的分析
- 13.5 一般服务时间 M/G/1 模型
- 13.6 经济分析—系统的最优化

13.5 一般服务时间M/G/1模型

- 服务时间是任意分布的情形
  - 任何情形下列关系都成立：

    期望值

    E[系统中顾客数] = E[队列中顾客数] + E[服务机构中顾客数]

    E[在系统中逗留时间] = E[排队等候时间] + E[服务时间]

    其中$E[\cdot]$ 表示求期望值，用符号表示即：

$$L_s = L_q + L_{se}\ , \qquad W_s = W_q + E[T] \qquad (13.37)$$

    T表示服务时间（随机变量），当T服从负指数分布时，$E[T]=1/\mu$。

  - 结合Little公式中的 $L_s = \lambda W_s\ ,\quad L_q = \lambda W_q$

    $L_s, L_q, W_s, W_q, L_{se}, E[T], \lambda$

    - 上述七个指标中只要知道3个就可求出其余的指标；
    - 在有限源或者队长有限制的情况下，λ要换成有效到达率 λ_{eff}。

13.5 一般服务时间M/G/1模型

- Pollaczek-Khintchine(P-K)公式
  - 对于M/G/1模型，服务时间 T 的分布是一般的（但要求期望值E[T]和方差Var[T]都存在），其他条件和标准的M/M/1型相同。为了达到稳态，要求 $\rho=\lambda E[T]<1$。满足上述条件下有：

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var[T]}{2(1-\rho)} \qquad (13.38)$$

Pollaczek-Khintchine(P-K) 公式

  - 不管T是什么分布，只要知道 λ，E[T]和 Var[T]，就可以求出 L_s，并根据各项指标之间的关系式求出 L_q、W_q和 W_s。
  - 需要注意的是因为有方差项的存在，所以若在研究各期望值时不考虑概率性质，会得出错误结果，仅当 Var[T]=0时，随机性的波动才不会影响 L_s。要想改进各指标，除考虑期望值外，还可以从改变方差来考虑。

13.5 一般服务时间M/G/1模型

- 例9：有一售票口，已知顾客按平均为2分30秒的时间间隔的负指数分布到达，顾客在售票口前服务时间平均为2分钟。在下面两种情况下求顾客购票的平均逗留时间和等待时间；(1)服务时间也服从负指数分布，求顾客为购票所需平均逗留时间和等待时间;； (2)经过调查，顾客在售票窗口至少要占用1分钟，服从以下概率密度分布：

$$f(y)=\begin{cases} e^{-y+1}, & y\ge 1 \\ 0, & y<1 \end{cases}$$

Ws

Wq

- 分析：

(1) 是典型的M/M/1模型，$\lambda=1/2.5=0.4$， $\mu=1/2=0.5$，

$$\rho=\lambda/\mu=0.8, \quad W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=10分, \quad W_q=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=8分$$

(2) 令y为服务时间，那么 $y=1+x$，代入概率密度函数， 得：

⇒ y≥1转化为x≥0

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

可见x服从均值为1的负指数分布，则：

$$E[y]=2, \quad Var[y]=Var[1+x]=Var[x]=1, \quad \rho=\lambda E[y]=0.8,$$

代入$P-K$公式得： $L_s=0.8+\dfrac{0.8^2+0.4^2\times 1}{2\times(1-0.8)}=2.8$， $L_q=L_s-\rho=2$，

$W_s=L_s/\lambda=7分$， $W_q=L_q/\lambda=5分$

13.5 一般服务时间M/G/1模型

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var[T]}{2(1-\rho)} \qquad (13.38)$$

定长时 Ls最小

- 定长服务时间**M/D/1**模型
  - 服务时间是确定的常数，此时：

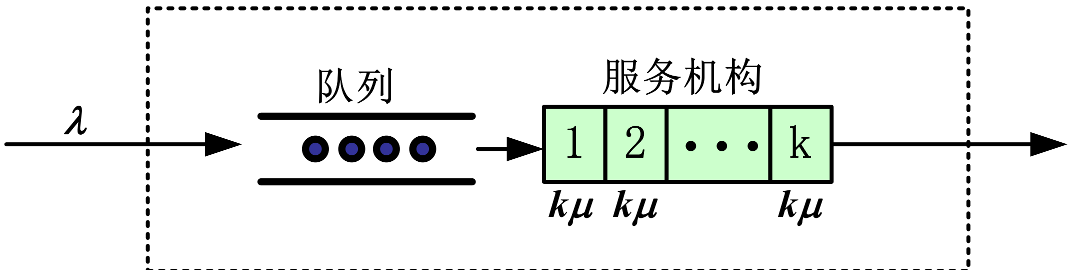
$$T = 1/\mu, \quad Var[T] = 0, \quad L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad (13.39)$$

书上有错

  - 例10：某实验室有一台自动检验机器性能的仪器，检验机器的顾客按泊松分布到达，每小时平均4个顾客，检验每台机器需要6分钟。
  - 分析： $\lambda = 4$，$E[T] = 1/10$(小时)，$\underbrace{\rho}_{}\overset{=\lambda E[T]}{=} 4/10$，$Var[T] = 0$
    - 在检验室内机器台数期望值： $L_s = 0.4 + \dfrac{(0.4)^2}{2(1-0.4)} = 0.533$ (台)
    - 等候检验的机器台数期望值： $L_q = 0.533 - 0.4 = 0.133$ (台)
    - 每台机器在室内逗留时间期望值： $W_s = \dfrac{0.533}{4} = 0.133$ 小时
    - 每台机器平均等待检验时间期望值： $W_q = \dfrac{0.133}{4} = 0.033$ 小时

13.5 一般服务时间M/G/1模型

- 爱尔朗服务时间 M/E$_k$/1 模型
  - 如果顾客必须经过 k 个服务站，在每个服务站的服务时间 T_i 相互独立并服从相同的负指数分布（参数为kμ），则：$T=\sum_{i=1}^{k} T_i$ 服从k阶爱尔朗分布。



$$E[T_i]=\frac{1}{k\mu} \qquad Var[T_i]=\frac{1}{k^2\mu^2}$$

$$E[T]=\frac{1}{\mu} \qquad Var[T]=\frac{1}{k\mu^2}$$

  - 代入P-K公式，该模型的各项指标如下：

$$\left.\begin{array}{l} L_s=\rho+\dfrac{\rho^2+\dfrac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2(1-\rho)}=\rho+\dfrac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}, \qquad L_q=\dfrac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \\ \\ W_s=L_s/\lambda, \qquad W_q=L_q/\lambda \end{array}\right\} \qquad (13.40)$$

→ $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$

13.5 一般服务时间M/G/1模型

- 例11：某单人裁缝店做西服，每套需经过4个不同的工序，4个工序完成后才能开始做另一套。每一个工序的时间服从负指数分布，期望值为2小时。顾客到来服从泊松分布，平均订货率为5.5套/周（设一周6天为工作日，每天8小时）。顾客为等到做好一套西服的期望时间有多长?
- 分析：$\lambda = 5.5\text{套}/\text{周}$，$1/(4\mu) = 2\text{小时}$，$\mu = \frac{1}{8}\text{套}/\text{小时} = 6\text{套}/\text{周}$，$\rho = 5.5/6$

$$E[T_i] = 2,\quad Var[T_i] = \left(\frac{1}{4\times 6}\right)^2$$

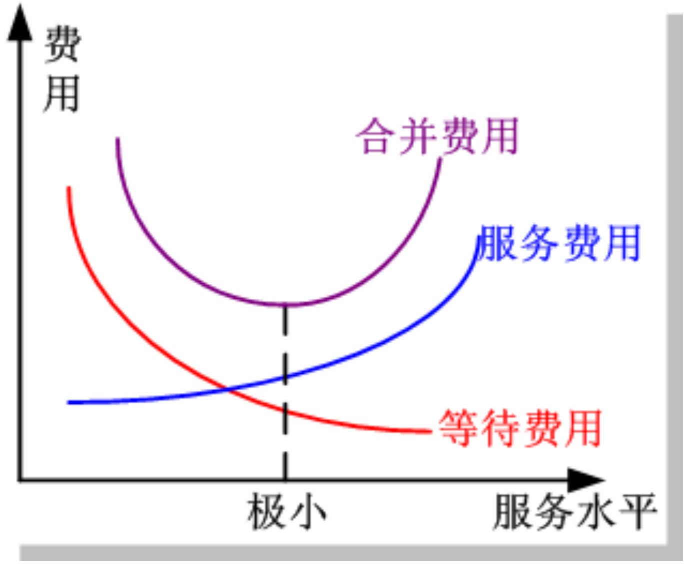
$$E[T] = 8,\quad Var[T] = \frac{1}{4\times 6^2}$$

$$L_s = \frac{5.5}{6} + \frac{\left(\frac{5.5}{6}\right)^2 + (5.5)^2 \times \frac{1}{4\times 6^2}}{2\left(1-\frac{5.5}{6}\right)} = 7.2188$$

顾客为等到做好一套西服的期望时间：$W_s = L_s/\lambda = 1.3\text{周}$

13.6 经济分析——系统的最优化

- 排队系统的最优化问题
  - 系统设计的最优化
    - 称为静态问题，目的在于使设备达到最大效益，在一定的质量指标下要求机构最为经济。
  - 系统控制的最优化
    - 称为动态问题，是指给定一个系统，如何运营可使某个目标函数得到最优。



□ 在一般情形下，提供服务水平（数量、质量）自然会降低顾客的等待费用（损失），但却常常增加了服务机构的成本。

□最优化的目标之一是使二者费用之和为最小；另一个常用的目标函数是使纯收入或使利润（服务收入与服务成本之差）最大。

13.6 经济分析——系统的最优化

- 费用
  - 各种费用在稳态情形下都是按单位时间来考虑的，一般情形，服务费用（成本）可以确切计算或估计，但是顾客的等待费用（损失）有许多不同情况。
- 服务水平
  - 平均服务率μ（代表服务机构的服务能力和经验等）；
  - 服务设备，如服务台个数c;
  - 由队列所占空间大小所决定的队列最大限制数N;
  - 服务水平也可以通过服务强度ρ来表示。
- 常用的求解方法：
  - 对于离散变量常用边际分析法;
  - 对于连续变量常用经典的微分法;
  - 对于复杂的问题，也可以使用非线性规划或动态规划方法。

13.6 经济分析——系统的最优化

- **M/M/1模型中最优服务率μ**
  - 标准的**M/M/1**模型

取目标函数 z 为单位时间服务成本与顾客在系统逗留费用之和的期望值：

$$z = c_s\mu + c_w L_s \qquad (13.41)$$

其中 c_s 为当 $\mu = 1$ 时服务机构单位时间的费用，

c_w 为每个顾客在系统停留单位时间的费用。

又 $L_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$，因此 $z = c_s\mu + c_w \cdot \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$，求极小值，

令：$\dfrac{dz}{d\mu} = c_s - c_w \cdot \dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = 0$，解得：

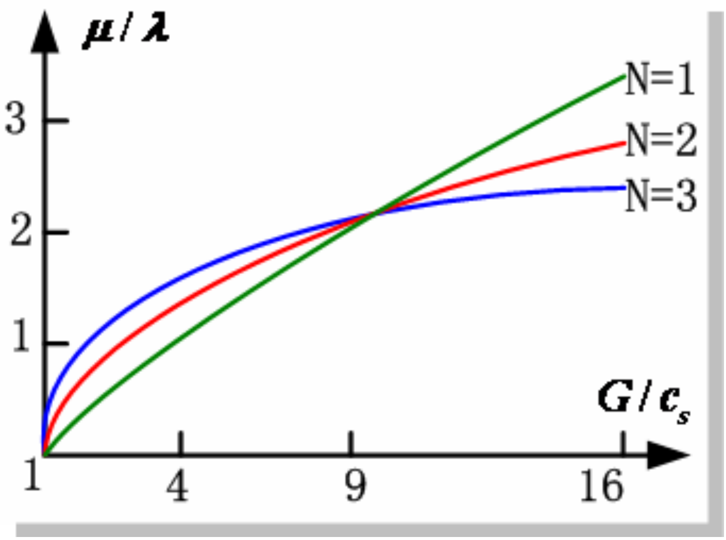
$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{c_w}{c_s}\lambda}$$

（为了保证 $\rho < 1$，$\mu > \lambda$，根号前取 + 号）

13.6 经济分析——系统的最优化

– 系统中顾客最大限制数为N的情形

- 系统中若有N个顾客，则后来的顾客被拒绝。P_N 即为被拒绝的概率（呼损率），$1-P_N$ 即为能接受服务的概率，$\lambda(1-P_N)$ 即为单位时间实际进入服务机构顾客的平均数（有效到达率），在稳定状态下，等于单位时间内实际服务完成的平均顾客数。
- **解:**



设每服务 1 人能收入 G元，于是单位时间收入的期望值是 $\lambda(1-P_n)G$元，纯利润是：

$$z=\lambda(1-P_n)G-c_s\mu$$

$$=\lambda G\cdot\frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}-c_s\mu=\lambda\mu G\cdot\frac{\mu^N-\lambda^N}{\mu^{N+1}-\lambda^{N+1}}-c_s\mu$$

令 $\dfrac{dz}{d\mu}=0$，得 $\rho^{N+1}\cdot\dfrac{N-(N+1)\rho+\rho^{N+1}}{(1-\rho^{N+1})^2}=\dfrac{c_s}{G}$

最优的μ^*应满足上式，其中 c_s、G、λ、N都是给定的，通常通过数值计算来求出 μ^*，或将上式左方（对一定的N）作为ρ的函数做出图形，对于给定的 G/c_s，根据图形可求出 μ^*/λ。

13.6 经济分析——系统的最优化

–顾客源为有限的情形（以机器故障问题为例）

- 共有机器 m 台以及1个修理工人，各台连续运转时间和修理时间均服从负指数分布。当服务率 μ=1 的时的修理费用 c_s，单位时间每台机器运转可得收入G元。平均运转台数为 m-L_s，所以单位时间纯利润为：

$$z=(m-L_s)G-c_s\mu=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)}-c_s\mu$$

其中 $E_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$ 称为泊松部分和；

令 $\rho=\frac{m\lambda}{\mu}$ 代入上式，得：

如何得到？

$$z=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)}-c_s\frac{m\lambda}{\rho}$$

13.6 经济分析——系统的最优化

- 由（13-28）和（13-27）式知道：

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}$$

$$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

令 $\rho=\frac{m\lambda}{\mu}$，$E_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$ 得：

$$z=(m-L_s)G-c_s\mu=\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)G-c_s\mu=\frac{mG}{\rho}(1-\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i})-c_s\mu$$

$$=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}{\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}-c_s\mu=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}{\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{1}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu})^i}-c_s\mu=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^{m-k}}{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^{m-k}}-c_s\mu$$

$$=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^{-k}}-c_s\mu=\boxed{\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)}-c_s\frac{m\lambda}{\rho}}$$

13.6 经济分析——系统的最优化

– 顾客源为有限的情形（以机器故障问题为例）

- 共有机器 m 台以及1个修理工人，各台连续运转时间和修理时间均服从负指数分布。当服务率 μ=1 的时的修理费用 c_s，单位时间每台机器运转可得收入G元。平均运转台数为 m-L_s，所以单位时间纯利润为：

$$z=(m-L_s)G-c_s\mu=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)}-c_s\mu$$

其中 $E_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$ 称为泊松部分和；

令 $\rho=\frac{m\lambda}{\mu}$ 代入上式，得：

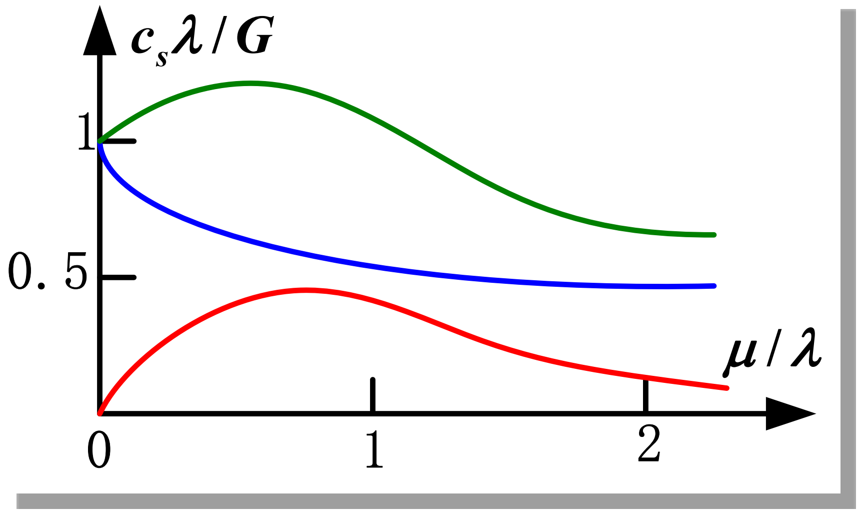
$$z=\frac{mG}{\rho}\cdot\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)}-c_s\frac{m\lambda}{\rho}$$

13.6 经济分析——系统的最优化

为了求得最优的μ^*，令$\dfrac{dz}{dx}=0$，整体对$\dfrac{m}{\rho}$求导

利用 $\dfrac{d}{dx}E_m(x)=E_{m-1}(x)-E_m(x)$， 得：

$$\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)+\frac{m}{\rho}\left[E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)E_{m-2}\left(\frac{m}{\rho}\right)-E_{m-1}^2\left(\frac{m}{\rho}\right)\right]}{E_m^2\left(\frac{m}{\rho}\right)}=\frac{c_s\lambda}{G}$$



给定m、G、c_s、λ，求解μ^*很困难，通常利用泊松分布表通过数值计算获得，或将上式左方（对一定的m）作为ρ的函数做出图形，对于给定的$\dfrac{c_s\lambda}{G}$根据图形可求出μ^*/λ。

13.6 经济分析——系统的最优化

- **M/M/c 模型中最优的服务台数 c**
  - 标准的M/M/c模型在稳态情形下单位时间全部费用（服务成本与等待费用之和）的期望值：

$$z = c_s' \cdot c + c_w \cdot L \qquad (13.43)$$

  - 其中

c： 服务台数;

c_s'： 每服务台单位时间的成本;

c_w： 为每个顾客在系统停留单位时间的费用;

L： 系统中顾客平均数 L_s 或 队列中等待的顾客平均数 L_q（它们随 z 值的不同而不同）

因为 c_s' 和 c_w 都是给定的，唯一可能变动的是服务台数 c，所以 z 是 c 的函数 $z(c)$。

13.6 经济分析——系统的最优化

- 因为c只取整数值，z(c) 不是连续变量的函数，采用边际分析法(Marginal Analysis)，根据 z(c*) 最小的特点：

$$\begin{cases} z(c^*) \le z(c^*-1) \\ z(c^*) \le z(c^*+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_s' \cdot c^* + c_w L(c^*) \le c_s'(c^*-1) + c_w L(c^*-1) \\ c_s' \cdot c^* + c_w L(c^*) \le c_s'(c^*+1) + c_w L(c^*+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad L(c^*) - L(c^*+1) \le c_s' / c_w \le L(c^*-1) - L(c^*)$$

- 依次求$c = 1,2,3,\cdots$时L的值，并作两相邻的L值之差，因c_s' / c_w是已知数，根据这个数落在哪个不等式区间里就可以确定出c^*。

13.6 经济分析——系统的最优化

- 例12：某检验中心为各工厂服务，要求做检验的工厂的到来服从泊松流，平均到达率 λ 为每天48次，每次来检验由于停工等原因损失为6元。服务时间服从负指数分布，平均服务率 μ 为每天25次，每设置一个检验员服务成本为每4元，其他条件符合标准 M/M/c 模型。问应设置几个检验员才能使总费用的期望值最小?
- 分析：$c_s' = 4$元/每检验员，$c_w = 6$元/次，$\lambda = 48$，$\mu = 25$，$\lambda/\mu = 1.92$

  设检验员数为c，令 c 依次为1、2、3、4、5，根据已有的计算表求出 L_s：

c	1	2	3	4	5
$\lambda / c\mu$	1.92	0.96	0.64	0.48	0.38
查多服务台的$W_q \cdot \mu$计算表	-	10.2550	0.3961	0.0772	0.0170
$L_s = \dfrac{\lambda}{\mu}(W_q \cdot \mu + 1)$	-	21.610	2.680	2.068	1.952

13.6 经济分析——系统的最优化

– 将 Ls 代入得表:

检验员数 c	来检验顾客数 $L_s(c)$	L(c)-L(c+1)~ L(c)-L(c-1)	总费用(每天) z(c)
1	∞		∞
2	21.610	18.930~ ∞	154.94
3	2.680	0.612~18.930	27.87
4	2.068	0.116~0.612	28.38
5	1.952		31.71

$\frac{c_s'}{c_w}=0.66$，落在区间 $(0.612\sim18.930)$ 内

所以 $c^*=3$

即设 3 个检验员使总费用最小， 此时 $z(c^*)=27.87$(元)

本章完

The end