# 概率论与数理统计B 第一次小测 参考答案

**2020.4.8　朱心远　PB17000015　zhuxinyuan@mail.ustc.edu.cn**

## 题目1（12分）

设连续型随机变量$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0,\\ A(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数$A$.

(2) 求$X$的分布函数$F(x)$.

(3) 问$P(-\frac{\pi}{4}<X<\frac{1}{2})$.

## 题目2（20 分）

设随机变量$X$和$Y$均服从参数为$\lambda$的指数分布且相互独立，记

$$Z=\frac{X}{X+Y},\ U=\min\{X,Y\},\ V=\max\{X,Y\}-\min\{X,Y\}.$$

(1) 求$Z$的密度函数;

(2) 给定$U=u$时，求$V$的条件密度函数;

(3) 证明$U$和$V$互相独立.

---

## 参考答案

### 题目1

(1) **3 分**

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$, 所以我们有

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}A\cos x\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1 A(1-x)\,\mathrm{d}\,x\\ &=A+\frac{1}{2}A=\frac{3}{2}A.\end{aligned}$$

所以$A=\frac{2}{3}$.

(2) **6分**

因为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

在本题中，我们有

$$F(x)=0,\ x<-\frac{\pi}{2}$$
$$F(x)=1,\ x\geq 1$$

注意到本题中$F(x)$是连续的，所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{2}{3}\sin x+\frac{2}{3}, & -\frac{\pi}{2}\leq x<0,\\ -\frac{1}{3}(1-x)^2+1, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$$

(3) **3分**

X是连续型随机变量，$\forall x\in\mathbb{R}, P(X=x)=0.$

$$P(-\frac{\pi}{4}<X<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{\pi}{4})=\frac{11}{12}-(-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3})=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

## 题目2

(1) **8 分**

已知$X\sim E(\lambda), Y\sim E(\lambda)$. 设$W=X+Y$, 我们有

$$Z=\frac{X}{W},$$
$$W=X+Y,$$
$$0<Z<1, W>0.$$

所以

$$X(Z,W)=ZW,$$
$$Y(Z,W)=W-X=W-ZW.$$

上述变换的Jacobian行列式是

$$J(z,w)=\frac{\partial(X,Y)}{\partial(Z,W)}=\begin{vmatrix} w & z\\ -w & 1-z\end{vmatrix}=w.$$

所以

$$\begin{aligned}f_{Z,W}(z,w)&=f_{X,Y}(X(Z,W),Y(Z,W))|J(Z,W)|\\ &=\lambda\exp\{-\lambda zw\}\cdot\lambda\exp\{-\lambda(w-zw)\}\cdot w\\ &=\lambda^2\exp\{-\lambda w\}w,\ 0<z<1, w>0\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)\,\mathrm{d}\,w \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda w} w\,\mathrm{d}\,w \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda w \cdot e^{-\lambda w}\,\mathrm{d}(\lambda w) \\
&= \Gamma(2) = 1,\ 0 < z < 1.
\end{aligned}
$$

(如果不使用$\Gamma$函数，

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)\,\mathrm{d}\,w \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda w} w\,\mathrm{d}\,w \\
&= \lambda^2 (-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda w} \cdot w\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda w}\,\mathrm{d}\,w) \\
&= \lambda^2 \cdot (-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda w})\Big|_0^{+\infty} \\
&= 1,\ \ 0 < z < 1.)
\end{aligned}
$$

也就是

$$
Z \sim U(0,1).
$$

(2) **8 分**

$$
\begin{aligned}
P(U=u, V=v) &= P(U=X, V=Y-X)\,\mathrm{I}(X \le Y) + \\
&\quad P(U=Y, V=X-Y)\,\mathrm{I}(Y < X) \\
&= P(X=U, Y=V+U)\,\mathrm{I}(X \le Y) + \\
&\quad P(X=V+U, Y=U)\,\mathrm{I}(Y < X)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f_{V,U}(v,u) &= f_{X,Y}(X(U,V), Y(U,V))|J(u,v)|\,\mathrm{I}(X \le Y) \\
&\quad + f_{X,Y}(X(U,V), Y(U,V))|J(u,v)|\,\mathrm{I}(Y < X)
\end{aligned}
$$

其中

$$
X(U,V) = \begin{cases} U, & X \le Y \\ V+U, & Y < X \end{cases}
$$
$$
Y(U,V) = \begin{cases} V+U, & X \le Y \\ U, & Y < X \end{cases}
$$

注意到$|J(u,v)| = 1$始终成立，又因为$X, Y$独立且$f_X(x) = f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}$, 所以

$$
\begin{aligned}
f_{V,U}(v,u) &= \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(v+u)} \cdot 2 \\
&= 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)},\ v \ge 0, u > 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^{+\infty} f_{V,U}(v,u)\,\mathrm{d}\,v \\
&= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)}\,\mathrm{d}\,v \\
&= (-2\lambda e^{-\lambda(v+2u)})\Big|_0^{+\infty} \\
&= 2\lambda e^{-2\lambda u}, u > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{V|U}(v|u) &= \frac{f_{V,U}(v,u)}{f_U(u)} \\
&= \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)}}{2\lambda e^{-2\lambda u}} \\
&= \lambda e^{-\lambda v},\ v \geq 0.
\end{aligned}
$$

(3) **4 分**

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_0^{+\infty} f_{V,U}(v,u)\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+2u)}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \left(-\lambda e^{-\lambda(v+2u)}\right)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \lambda e^{-\lambda v},\ v \geq 0.
\end{aligned}
$$

也就是说

$$
f_V(v) = f_{V|U}(v|u).
$$

所以$U$和$V$互相独立.