Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020/5/10

整数线性规划

Chap.6 Integer Linear Programming

主要内容

- 6.1 整数线性规划问题的提出
- 6.2 分支定界解法
- 6.3 割平面解法
- 6.4 0-1型整数线性规划
- 6.5 指派问题
- 6.6 使用计算机工具求解本章问题

6.5 指派问题

- 某单位需完成n项任务，恰好有n个人可承担这些任务，由于每人的专长不同，各人完成任务不同（或所费时间），效率不同。于是产生应指派哪个人去完成哪项任务，使完成n项任务的总效率最高（或所需总时间最小）的问题。这类问题称为**指派问题（Assignment Problem）**。
  - 例7 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作E、J、G、R。现有甲乙丙丁四人，他们将说明书翻译成不同语种的所需时间如表中所示。问应如何指派使所需总时间最少?

人员 \ 任务	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

6.5 指派问题

– 上例可推广为：有n项加工任务到n台机床上的指派、n条航线由n艘船来航行……等问题。对应每个指派问题，类似上表那样的数据表，称为效率矩阵或系数矩阵，其元素c_{ij}>0 (i,j=1,2,⋯,n)表示指派第 *i* 人去完成第*j*项任务时的效率（或时间、成本等）。解题时需引入0-1变量x_{ij}，令：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

– 问题要求极小化时的数学模型为：

$$\min z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n$$

表明第 j 项任务只能由1人完成

$$\sum_j x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

表明第 I 人只能完成1项任务

$$x_{ij}=1\text{或}0$$

6.5 指派问题

– 满足上述约束条件的可行解x_{ij}可写成表格或矩阵形式，称为解矩阵。
– 解矩阵 (x_{ij}) 中各行各列的元素之和都是1。
– 例7的一个可行解矩阵是：

$$x_{ij}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

– 该解矩阵不是最优解。
– 指派问题是0—1规划的特例，也是运输问题的特例；

即：$n=m$，$a_j = b_i = 1$ 的特殊情形。

– 可用整数规划，0-1规划或运输问题的解法去求解，但这就如同用单纯形法求解运输问题一样是不合算的。
– 利用指派问题的特点可设计更简便高效的解法。

6.5 指派问题

- 指派问题的最优解有这样性质：若从系数矩阵($c_{i,j}$)的一行(列)各元素中分别减去该行(列)的最小元素，得到新矩阵($b_{i,j}$)矩阵,那么以($b_{i,j}$)为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的最优解相同。
- 利用这个性质，可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵，而最优解保持不变；在系数矩阵($b_{i,j}$)中，位于不同行不同列的0元素，简称为独立的0元素。
- 若能在系数矩阵($b_{i,j}$)中找出n个独立的0元素，则令解矩阵($x_{i,j}$)中对应这n个独立0元素的元素取值为1，其他元素取值为0。
- 将其代人目标函数中得到 $z_b=0$ ，它一定是最小，这就是以($b_{i,j}$)为系数矩阵的指派问题的最优解，也就得到了原问题的最优解。

匈牙利算法

- 匈牙利算法是一种能在多项式时间内求解指派问题的组合优化算法，由美国数学家哈罗德·库恩(**Harold Kuhn**)于**1955**年提出该算法。
  - 之所以被称作匈牙利算法，是因为算法很大程度上基于两位匈牙利数学家**Dénes Kőnig**和**Jenő Egerváry**的一个关于矩阵中**0**元素的定理：系数矩阵中独立**0**元素的最多个数等于能覆盖所有**0**元素的最少直线数。
- 詹姆士·芒克勒斯(**James Munkres**)在**1957**年重新审视了这个方法，证明发现该方法是严格**polynomial**的，此后该算法被称为**Kuhn–Munkres**算法。
- 原始算法的时间复杂度为$O(n^4)$，之后**Edmonds**和**Karp**，以及**Tomizawa**独立地发现可以修改算法达到$O(n^3)$时间复杂度。
- **Ford**和**Fulkerson**将该方法推广到了一般运输问题。
- **2006**年发现卡尔·雅可比在**19**世纪就解决了指派问题，其解法在他逝世后于**1890**年以拉丁文发表。

- 匈牙利算法的两个基本定理：
  - 【定理1】假设问题求最小值，*m*个人恰好做*m*项工作，第*i*个人做第*j*项工作的效率为c_{ij}，效率矩阵为$[c_{ij}]$。如果从指派问题效率矩阵$[c_{ij}]$的每一行元素中分别减去（或加上）一个常数u_i（被称为该行的位势），从每一列分别减去（或加上）一个常数v_j（称为该列的位势），得到一个新的效率矩阵$[b_{ij}]$，其中$b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，则$[b_{ij}]$的最优解等价于$[c_{ij}]$的最优解。这里c_{ij}、b_{ij}均非负。
  - 【定理2】若矩阵A的元素可分成“0”与非“0”两部分，则覆盖“0”元素的最少直线数等于位于不同行不同列的“0”元素（称为独立0元素）的最大个数。——D. Konig

匈牙利算法

- 定理1的证明：

$$z' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{kj} \pm s)x_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} + (\pm s)\sum_{j=1}^{n} x_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} + (\pm s)$$

$$= z + (\pm s)$$

匈牙利算法

- 定理1告诉我们如何将效率矩阵中的元素转换为有零元素，定理2告诉我们效率矩阵中有多少个独立的“0”元素。
- 若从系数矩阵(c_{ij})的一行（列）各元素中分别减去该行（列）的最小元素，得到新矩阵(b_{ij})，那么以(b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的最优解相同。因此，可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。
- 若能在(b_{ij})中找出n个独立的0元素；则令解矩阵(x_{ij})中对应这n个独立的0元素的元素取值为1，其他元素取值为0。将其代入目标函数中得到了$z_b=0$，它一定是最小。这就是以为(b_{ij})系数矩阵的指派问题的最优解，即原问题的最优解。

若<n? 下面讲.

- 如果最少直线数等于n，则存在n个独立的“0”元素，令这些0元素对应的x_{ij}等于1，其余变量等于0，得到最优解。

指派问题例子

– 以下用例7说明指派问题的匈牙利解法。

– 解：第一步：使指派问题的系数矩阵经变换，在各行各列中都出现0元素。

$$(c_{ij})=\begin{bmatrix}2 & 15 & 13 & 4\\ 10 & 4 & 14 & 15\\ 9 & 14 & 16 & 13\\ 7 & 8 & 11 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{最小元素}]{\text{减去每行}}\begin{bmatrix}0 & 13 & 11 & 2\\ 6 & 0 & 10 & 11\\ 0 & 5 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{最小元素}]{\text{减去每列}}\begin{bmatrix}0 & 13 & 7 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 9\\ 0 & 5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=(b_{ij})$$

– 第二步：进行试指派，以寻求最优解。

(1)从只有一个0元素的行（列）开始，给这个0元素加圈，记作◎。这表示对这行所代表的人，只有一种任务可以指派。然后划去◎所在行（列）的其他0元素，记作Ø，表示这列所代表的任务已经完成，不必再考虑其他人；

(2)给只有一个0元素的列（行）的0元素加圈，然后划去所在行的0元素；

(3)反复进行(1)和(2)，直到所有的0元素都被画圈或者划掉。

指派问题例子

(4)若仍没有画圈的0元素，且同行（列）的0元素至少有两个（表示对这人可以两项任务中指派其一），则可用不同的方案试探。从剩余0元素最少的行（列）开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择最少的画圈（表示选择性多的要礼让选择性少的），然后划掉同行同列的0元素，反复进行；

(5)若◎元素的数目m等于矩阵的阶数n，那么指派问题的最优解已得到；若m<n则转入第三步。

$$
\begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{划掉所在列的0元素}]{\text{(a)给}b_{22}\text{、}b_{31}\text{加圈}}
\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & 0 \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(b)给b_{43}加圈，划掉所在行的0元素

$$
\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & 0 \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & \circledcirc & \phi \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{(c)最后给}b_{14}\text{加圈}}
\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & \circledcirc & \phi \end{bmatrix}
$$

m=n=4，所以最优解为：

$$
(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

指派问题例子

(m<n时)

– 第三步：作最少的直线覆盖所有的0元素，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立0元素数。按下列步骤进行：

(1)对没有◎的行打✓号；

(2)对已打✓号的行中所有含*Φ*元素的列打✓号；

(3)再对打有✓号的列中含◎元素的行打✓号；

(4)重复(2)、(3)，直到得不出新的打✓号的行、列为止；

(5)对没有打✓号的行画一横线，有打✓号的列画一纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

- 令直线数为l:

若$l<n$，说明必须再变换当前的系数矩阵才能找到n个独立的0元素，转第四步；
若$l=n$，而$m<n$，应回到第二步(4)，另行试探。

指派问题例子

- 例8 求下表所示效率矩阵的指派问题的最小解。

人员＼任务	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

- 解：

第一步变换系数矩阵：

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & \cancel{0} & 4 \\ \cancel{0} & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{array}$$

$\checkmark$ (under first column)

指派问题例子

- 第二步进行试指派，得到：

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
5 & \circledcirc & 2 & \phi & 2 \\
2 & 3 & \phi & \circledcirc & \phi \\
\circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & \circledcirc & \phi & 4 \\
\phi & 6 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix} \\
\begin{matrix} \checkmark & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} &
\end{array}$$

- 可知**m=4,n=5**，所以转入第三步；
- 第三步做最少直线覆盖可得：

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
5 & \circledcirc & 2 & \phi & 2 \\
2 & 3 & \phi & \circledcirc & \phi \\
\circledcirc & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & \circledcirc & \phi & 4 \\
\phi & 6 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix} \\
\begin{matrix} \checkmark & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} &
\end{array}$$

指派问题例子

– 可见*l*=4<*n*，所以应继续对矩阵进行变换，转入第四步；

– 第四步：对矩阵变换的目的是增加0元素。为此在没有被直线覆盖的部分中找出最小元素，然后在打✓号行的各元素中都减去这最小元素，而在打✓号列的各元素都加上这最小元素，以保证原来0元素不变。这样得到的新系数矩阵（它的最优解和原问题相同），若得到n个独立0元素，则已得到最优解，否则回到第三步重复进行。

– 上例6.9中，继续进行第四步，有：

复制的.

$$
\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 5 & ◎ & 2 & \phi & 2 \\ 2 & 3 & \phi & ◎ & \phi \\ ◎ & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & ◎ & \phi & 4 \\ \phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ ✓ \\ \\ ✓ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} ✓ & & & & \end{array} &
\end{array}
\xrightarrow[\text{变换矩阵}]{\text{第四步}}
\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 7 & ◎ & 2 & \phi & 2 \\ 4 & 3 & \phi & ◎ & \phi \\ \phi & 8 & 3 & 5 & ◎ \\ 11 & 8 & ◎ & \phi & 4 \\ ◎ & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}
$$

指派问题例子

- 可见具有**n=5**个独立**0**元素，即得到最优解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 最优指派方案为：甲－**B**，乙－**D**，丙－**E**，丁－**C**，戊－**A**
- 本例还有另一最优指派方案：甲－**B**，乙－**C**，丙－**E**，丁－**D**，戊－**A**
- 当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上**0**元素时，这时可以任选一行（列）中的某个**0**元素，再划去同行（列）的其他**0**元素，这时会出现多重解（如上例）。

指派问题的变异

- 指派问题的变异
  - 对于极大化问题:

$$\max z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

可令：$b_{ij}=M-c_{ij}$, 其中M是足够大的常数（如选c_{ij}中最大元素为M即可），这时系数矩阵可变为$B=(b_{ij})$, 这时$b_{ij}\geq 0$, 符合匈牙利法的条件。

目标函数经变换后，即解$\min z'=\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}$

所得的最小解就是原问题的最大解。

因为 $:\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}=\sum_i\sum_j(M-c_{ij})x_{ij}=\sum_i\sum_j Mx_{ij}-\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}=nM-\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$

nM为常数，所以当$\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}$取最小时 $,\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$便最大。

指派问题的变异

- 人数与任务数不均等问题
  - 设分配问题中人数为m，工作数为n，当m>n时，虚拟m-n项工作，对应的效率为零；当m<n时，虚拟n-m个人，对应的效率为零。通过上述步骤化为人数与任务数相等的平衡问题后再求解。
- 不可接受的配置问题
  - 当某人不能完成某项工作时，令对应的效率为一个大M即可。

6.6 使用计算机工具求解本章问题

- 6.6.1 使用编程语言
- 6.6.2 使用Excel
- 6.6.3 使用Matlab

6.6.1 使用编程语言

- 使用编程语言：（将算法用编程语言实现）
- 指派问题：
- 输入：效率矩阵（人数=任务）
- 输出：最优方案
- Java为例：

```
decrease(ma);//每行减去最小值
decrease2(ma);//每列减去最小值
int[][] best = new int[n][n];
//初始化最优解
while (true) {
        if (findbest(ma, best)) {
//查找矩阵最优值，能找到则返回true
                break;//计算结束
        }
        transformmatrix(ma);
//增加0值的个数
}
```

6.6.2 使用Excel

指派问题的Excel实现,例7（与运输问题类似）

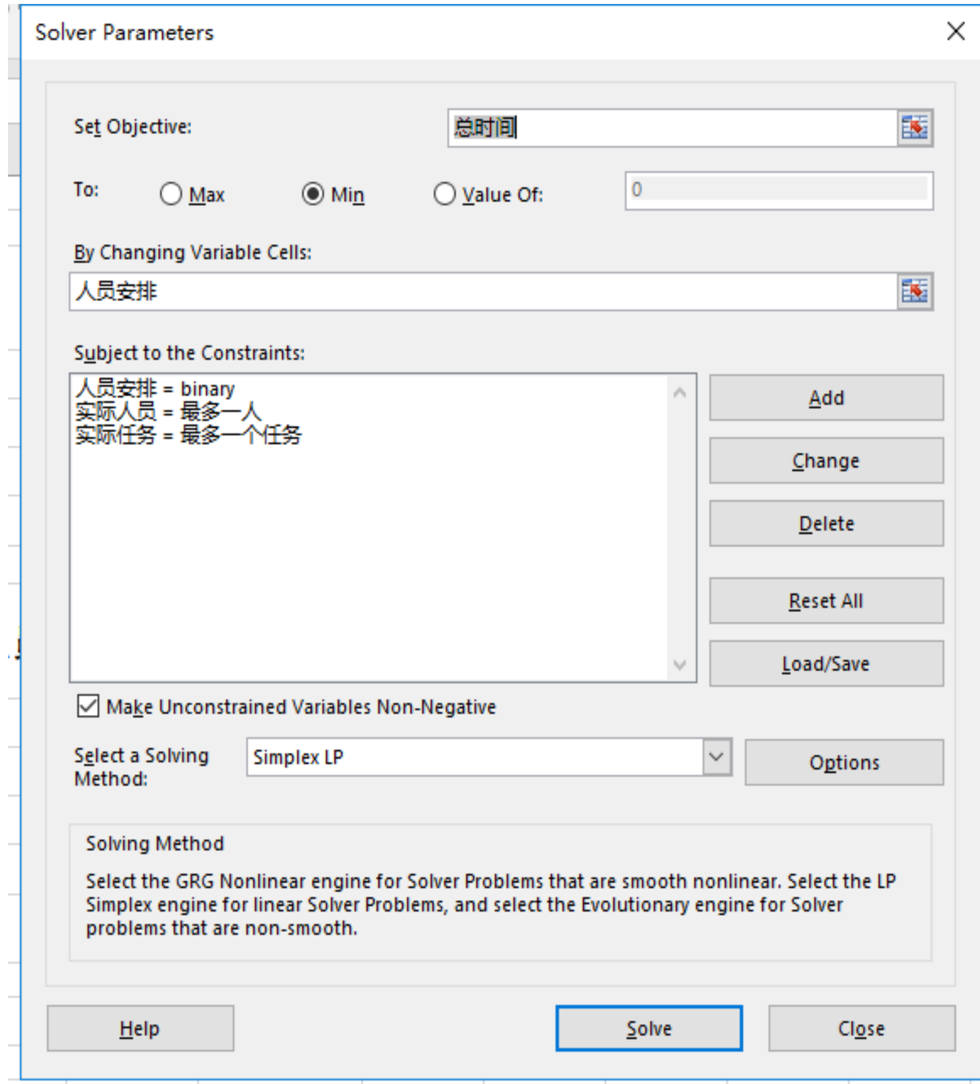
人员 \ 任务	E	J	G	R		总时间
甲	2	15	13	4		
乙	10	4	14	15		
丙	9	14	16	13		0
丁	7	8	11	9		

人员 \ 任务	E	J	G	R	实际人员		最多一人
甲	0	0	0	0	0	=	1
乙	0	0	0	0	0	=	1
丙	0	0	0	0	0	=	1
丁	0	0	0	0	0	=	1
实际任务	0	0	0	0			
	=	=	=	=			
最多一个任务	1	1	1	1			

使用Excel

规划求解规则设定:

总时间=SUMPRODUCT(C4:F7,C10:F13)



使用Excel

规划求解结果：

人员 \ 任务	E	J	G	R
甲	0	0	0	1
乙	0	1	0	0
丙	1	0	0	0
丁	0	0	1	0

6.6.3 使用Matlab

- **MATLAB**
  - 例7 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作E、J、G、R。现有甲乙丙丁四人，他们将说明书翻译成不同语种的所需时间如表中所示。问应如何指派使所需总时间最少?

人员 \ 任务	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

指派问题的MATLAB实现

```
%适用于任意n阶系数矩阵
clear all;
C=[2 15 13 4;10 4 14 15;9 14 16 13;7 8 11 9];%效率矩阵C
n=size(C,1);%计算C的行列数n
C=C(:);%计算目标函数系数，将矩阵C按列排成一个列向量即可。
A=[];B=[];%没有不等式约束
Ae=zeros(2*n,n^2);%计算等约束的系数矩阵a
for i=1:n
for j=(i-1)*n+1:n*i
Ae(i,j)=1;
end
for k=i:n:n^2
Ae(n+i,k)=1;
end
```

指派问题的MATLAB实现

```
end
Be=ones(2*n,1);%等式约束右端项b
Xm=zeros(n^2,1);%决策变量下界Xm
XM=ones(n^2,1);%决策变量上界XM
[x,z]=linprog(C,A,B,Ae,Be,Xm,XM);%使用linprog求解
x=reshape(x,n,n);%将列向量x按列排成一个n阶方阵
disp('最优解矩阵为:');%输出指派方案和最优值
Assignment=round(x)%使用round进行四舍五入取整
disp('最优解为:');
z
```

28.0000

本章完

The end