例二:

定理（语义后承的性质）

1. 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\models p$，则$\Gamma'\models p$；（语义后承单调性）
2. 若$\Gamma\models p$ 且 $\Gamma\models p\to q$，则$\Gamma\models q$；（语义MP）
3. $\Gamma\models p\to q$ 当且仅当 $\Gamma\cup\{p\}\models q$；（语义演绎定理）
4. p是重言式当且仅当$\varnothing\models p$。（p是内定理当且仅当$\varnothing\vdash p$）

◆记号 $\varnothing\models p$ 记为$\models p$。

❖定义7（语义后承/逻辑推论）

任给L(X)公式p和公式集Γ，称p为Γ的一个语义后承/逻辑推论，记为$\Gamma\models p$，如果对L的任何一个语义解释I，只要Γ中的所有公式q满足$I(q)=t$，则$I(p)=t$。

证明: 1、由$\Gamma\models p$知，对L的任一语义解释I，若Γ中所有公式q都满足$I(q)=t$，则$I(p)=t$.

而$\Gamma\subseteq\Gamma'$，∴对任意取定的解释I_0，若Γ'中所有公式q'满足$I_0(q')=t$，此时必有Γ中所有公式q满足$I_0(q)=t$，

由$\Gamma\models p$知，此时$I_0(p)=t$，而由I_0的任意性，知$\Gamma'\models p$.

2. 任意取定解释I_0，若Γ中所有公式q都满足$I_0(q)=t$，

由$\Gamma\models p$和$\Gamma\models p\to q$，知$I_0(p)=t$，$I_0(p\to q)=t$

下证明$I_0(q)=t$：

p	q	$p\to q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

∵只有p,q两变元，所以语义解释仅4种，观察知，

当$I_0(p)=t$且$I_0(p\to q)=t$时，一定有$I_0(q)=t$

而又由I_0的任意性，∴$\Gamma\models q$.

3. ⇒：任意取定语义解释I_0，若$\Gamma\cup\{p\}$中所有公式m满足$I_0(m)=t$，显然∵$p\in\Gamma\cup\{p\}$，此时$I_0(p)=t$，

且由于$\Gamma\subseteq\Gamma\cup\{p\}$，∴对$\Gamma$中所有公式$m'$也有$I_0(m')=t$，由条件$\Gamma\models p\to q$知$I_0(p\to q)=t$

记$I_0=(v_0,v)$，则$I_0(q)=v_0(q)=1\to v_0(q)$（由书上1.3节公式2：$1\to v=v$）

$=v_0(p)\to v_0(q)=I_0(p\to q)=t$

再由I_0的任意性，知$\Gamma\cup\{p\}\models q$

⇐：任取一个语义解释I_0，若Γ中所有公式m满足$I_0(m)=t$

① 若此时$I_0(p)=f$，则$I_0(p\to q)=v_0(p)\to v_0(q)=f\to I_0(q)=t$，

② 若此时$I_0(p)=t$，则由$\Gamma\cup\{p\}\models q$，此时$I_0(q)=t$，有$I_0(p\to q)=I_0(p)\to I_0(q)=t\to t=t$

综上，由I_0的任意性知，$\Gamma\models p\to q$

4. ⇒ ∵p是重言式，则对L的∀语义解释$I_0=(v_0,v)$，有$I_0(p)=v_0(p)=t$

∴当$\Gamma=\varnothing$中所有公式q满足$I_0(q)=t$时，仍有$I_0(p)=t$，∴$\varnothing\models p$

⇐：若$\varnothing\models p$：对L的任意一个语义解释I_0，∵$\Gamma=\varnothing$，即p不需任何推理前提即可得到$I_0(p)=t$，而由I_0的任意性知，p仅有成真指派，

∴p是重言式

习四:

1. 证明以下各对公式是等值的.

1° $p \to q$ 和 $\neg q \to \neg p$.

由真值表法证明:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg q \to \neg p$
t	t	f	f	t	t
t	f	f	t	f	f
f	t	t	f	t	t
f	f	t	t	t	t

可见 $p\to q$ 的真值函数 $f_{(p\to q)}$ 和 $\neg q \to \neg p$ 的真值函数 $f_{(\neg q\to\neg p)}$ 满足

$f_{(p\to q)} \equiv f_{(\neg q\to\neg p)}$

由语义推论4,可得

$\models (p\to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

1. 求以下公式的等值主析取范式. 先∧后∨

1° $x_1 \leftrightarrow x_2$.

2° $x_1 \to (\neg x_2 \vee x_3)$.

3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$.

真值表:

x_1	x_2	x_3	$\neg x_2$	$x_1\wedge x_2$	$\neg x_2 \leftrightarrow x_3$	$(x_1\wedge x_2)\vee(\neg x_2\leftrightarrow x_3)$
t	t	t	f	t	f	t
t	t	f	f	t	t	t
t	f	t	t	f	t	t
t	f	f	t	f	f	f
f	t	t	f	f	f	f
f	t	f	f	f	t	t
f	f	t	t	f	t	t
f	f	f	t	f	f	f

∴ 主析取范式为 $(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3)$