数理逻辑思考题

2020.8.20

第 0 章 导论

0.1

什么是“证明”?

形式化证明，在数理逻辑中，形式化证明并不是以自然语言书写，而是以形式化的语言书写：这种语言包含了由一个给定的字母表中的字符所构成的字符串。而证明则是一种由该些字符串组成的有限长度的序列。这种定义使得人们可以谈论严格意义上的“证明”，而不涉及任何逻辑上的模糊之处。研究证明的形式化和公理化的理论称为证明论。尽管理论上来说，每个非形式化的证明都可以转化为形式化证明，但实际中很少会这样做。对形式化证明的研究主要应用在探讨关于可证明性的一般性质，或说明某些命题的不可证明性等等，维基百科-数学证明

0.2

什么是“计算”?

计算理论的“计算”并非指纯粹的算术运算 (Calculation)，而是指从已知的输入透过算法来获取一个问题的答案 (Computation)，参见维基百科-计算理论

0.3

“计算”与“证明”是什么关系?

参见维基百科-数理逻辑

0.4

例 5：相对论与经典力学爱因斯坦提出狭义相对论之后，几乎无人理解关注，因为牛顿经典力学已被普遍接受和广泛应用。怎么办?

爱因斯坦的解法：令 $\mathit{\Gamma}_{\text{牛}}$ 为经典力学，$\mathit{\Gamma}_{\text{爱}}$ 为狭义相对论，$\vdash$ 代表演绎推理（具有保真性）。找出一个命题 p 使得

$$\mathit{\Gamma}_{\text{牛}} \to p,\ \mathit{\Gamma}_{\text{爱}} \vdash \neg p\ (\neg p \text{ 是 } p \text{ 的否定命题})$$

$\neg p$ 和 p 只有一个为真，而科学实验（天文观察）结果：$\neg p$ 为真！

例 5 中的天文观察结果是否证明了经典力学是假的，狭义相对论是真的？

0.5

如果在例 5 的基础上，还存在另一个命题 q，使得 $\Gamma_{牛} \vdash q$，$\Gamma_{爱} \vdash \neg q$ 都成立，而科学实验的结果为：q 是真的。这说明什么？

0.6

能否证明经典力学和狭义相对论的真假？其中，所谓的“证明”和“真假”是什么意思？

0.7

暴力法和训练法有没有“真假”？应该根据什么来评价它们？如何比较它们的优劣？

0.8

什么是常识？常识有什么应用？机器能具备并应用常识吗？

第 1 章 命题逻辑

1.1

试用复合命题表达自然语言条件句“如果…则…”。

用蕴涵词 $\to$ 连接即可

1.2

同一律的证明是否必须使用 (L1)？**证明你的结论。**

是。证明如下，假设 S 是由 L2 、L3 与 MP 规则但不使用 L1 可得的公式，在 $\mathcal{Z}_3=\{0,1,2\}$ 上构造如下的赋值函数

$f_\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	0	2
2	0	0	2

	0	1	2
$f_\neg$	2	1	0

并有

$$v(p\to q)=f_\to(v(p),v(q))$$
$$v(\neg p)=f_\neg(v(p))$$

这样的赋值可以保证由 L2 或 L3 得到的公式，赋值一定为 2：

(	p	$\to$	(	q	$\to$	r	))	$\to$	((	p	$\to$	q	)	$\to$	(	q	$\to$	r	))
	0	2		0	2	0		2		0	2	0		2		0	2	0	
	0	2		0	2	1		2		0	2	0		2		0	2	1	
	0	2		0	2	2		2		0	2	0		2		0	2	2	
	0	2		1	0	0		2		0	2	1		2		0	2	0	
	0	2		1	0	1		2		0	2	1		2		0	2	1	
	0	2		1	2	2		2		0	2	1		2		0	2	2	
	0	2		2	0	0		2		0	2	2		2		0	2	0	
	0	2		2	0	1		2		0	2	2		2		0	2	1	
	0	2		2	2	2		2		0	2	2		2		0	2	2	
	1	2		0	2	0		2		1	0	0		2		1	0	0	
	1	2		0	2	1		2		1	0	0		2		1	0	1	
	1	2		0	2	2		2		1	0	0		2		1	2	2	
	1	0		1	0	0		2		1	0	1		2		1	0	0	
	1	0		1	0	1		2		1	0	1		2		1	0	1	
	1	2		1	2	2		2		1	0	1		2		1	2	2	
	1	0		2	0	0		2		1	2	2		0		1	0	0	
	1	0		2	0	1		2		1	2	2		0		1	0	1	
	1	2		2	2	2		2		1	2	2		2		1	2	2	
	2	2		0	2	0		2		2	0	0		2		2	0	0	
	2	2		0	2	1		2		2	0	0		2		2	0	1	
	2	2		0	2	2		2		2	0	0		2		2	2	2	
	2	0		1	0	0		2		2	0	1		2		2	0	0	
	2	0		1	0	1		2		2	0	1		2		2	0	1	
	2	2		1	2	2		2		2	0	1		2		2	2	2	
	2	0		2	0	0		2		2	2	2		0		2	0	0	
	2	0		2	0	1		2		2	2	2		0		2	0	1	
	2	2		2	2	2		2		2	2	2		2		2	2	2	

(	$\neg$	p	$\to$	$\neg$	q	)	$\to$	(	q	$\to$	p	)
	2	0	2	2	0		2		0	2	0	
	2	0	2	2	0		2		0	2	0	
	2	0	2	2	0		2		0	2	0	
	2	0	0	1	1		2		1	0	0	
	2	0	0	1	1		2		1	0	0	
	2	0	0	1	1		2		1	0	0	
	2	0	0	0	2		2		2	0	0	
	2	0	0	0	2		2		2	0	0	
	2	0	0	0	2		2		2	0	0	
	1	1	2	2	0		2		0	2	1	
	1	1	2	2	0		2		0	2	1	
	1	1	2	2	0		2		0	2	1	
	1	1	0	1	1		2		1	0	1	
	1	1	0	1	1		2		1	0	1	
	1	1	0	1	1		2		1	0	1	
	1	1	0	0	2		2		2	0	1	
	1	1	0	0	2		2		2	0	1	
	1	1	0	0	2		2		2	0	1	
	0	2	2	2	0		2		0	2	2	
	0	2	2	2	0		2		0	2	2	
	0	2	2	2	0		2		0	2	2	
	0	2	2	1	1		2		1	2	2	
	0	2	2	1	1		2		1	2	2	
	0	2	2	1	1		2		1	2	2	
	0	2	2	0	2		2		2	2	2	
	0	2	2	0	2		2		2	2	2	
	0	2	2	0	2		2		2	2	2	

同时由 $f_{\to}$ 的真值表可知，当 $v(p) = 2$ 且 $v(p \to q) = 2$ 时，一定有 $v(q) = 2$，因此由 MP 规则得到的公式也一定有赋值为 2。但 L1 并不能保证：

p	$\to$	(	q	$\to$	p	)
0	2		0	2	0	
0	2		0	2	0	
0	2		0	2	0	
0	2		1	0	0	
0	2		1	0	0	
0	2		1	0	0	
0	2		2	0	0	
0	2		2	0	0	
0	2		2	0	0	
1	2		0	2	1	
1	2		0	2	1	
1	2		0	2	1	
1	0		1	0	1	
1	0		1	0	1	
1	0		1	0	1	
1	0		2	0	1	
1	0		2	0	1	
1	0		2	0	1	
2	2		0	2	2	
2	2		0	2	2	
2	2		0	2	2	
2	2		1	2	2	
2	2		1	2	2	
2	2		1	2	2	
2	2		2	2	2	
2	2		2	2	2	
2	2		2	2	2	

因此可以集合 S 的特征函数当且仅当 $v(p) \equiv 2$ 时取值 1
而同一律的赋值 $v(p \to p)$ 由 $f_{\to}$ 的真值表可知并不一定为 2，因此不可由 L2，L3 和 MP 规则推之

1.3

1.4

演绎定理说明了什么？

说明了每个有效的蕴涵语句都描述了一个正确的推理。

1.5

直接证明 $\vdash (\neg p \to p) \to p$ **最少需要多少步？**

最少需要 19 步，证明如下

证明.

(1) $(\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))$ (L3)

(2) $((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))$
$\to (\neg p \to \Big((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p)$
$\to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))\Big))$ (L1)

(3) $\neg p \to \Big((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p)$
$\to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))\Big)$ (1), (2), MP

(4) $\Big(\neg p$
$\to ((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))\Big)$
$\to \Big((\neg p \to (\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p))$
$\to (\neg p \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))\Big)$ (L2)

(5) $(\neg p \to (\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p))$
$\to (\neg p \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))$ (3), (4), MP

(6) $\neg p \to (\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p)$ (L1)

(7) $\neg p \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))$ (5), (6), MP

(8) $(\neg p \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))$
$\to ((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))$ (L2)

(9) $(\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))$ (7), (8), MP

(10) $(\neg p \to \neg(p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)$ (L3)

(11) $((\neg p \to \neg(p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p))$
$\to ((\neg p \to p)$

$\rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)))$ (L1)

(12) $(\neg p \rightarrow p)$
$\rightarrow \Big((\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))$
$\rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)\Big)$ (10), (11), MP

(13) $\Big((\neg p \rightarrow p)$
$\rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))\Big)$
$\rightarrow \Big(((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$
$\rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))\Big)$ (L2)

(14) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$
$\rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))$ (12), (13), MP

(15) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)$ (9), (14), MP

(16) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))$
$\rightarrow (((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p))$ (L2)

(17) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ (15), (16), MP

(18) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))$ (L1)

(19) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (17), (18), MP

□

1.6

编程实现一个命题演算中形式推理 $\Gamma \vdash p$ 的程序。

1.7

语义后承与重言式有何关系？下述论断是否成立？

任给 $L(X)$ 公式 p 和公式集 Γ，存在公式 q，使得 $\Gamma \vDash p$ 当且仅当 $\vDash q$。

重言式是空集 $\varnothing$ 的语义推论。

若 Γ 是有限集，设 $\Gamma=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，令

$$q=p_1\to(p_2\to\underbrace{(\cdots(}_{n-2\text{个}(}p_n\to p\underbrace{)\cdots)}_{n-2\text{个})}))$$

使用 n 次语义演绎定理即可得 $\Gamma\vDash p\Leftrightarrow\vDash q$。
若 Γ 是无限集，参考 1.9 及维基百科-递归可枚举集合

1.8

是否存在 L 公式 p 和公式集 Γ，使得 $\Gamma\vdash p$ 并且 $\Gamma\vdash\neg p$？

存在，$\Gamma=\{p,\neg p\}$

1.9

问题“$\Gamma\vdash p$”是不是可判定的？

问题“$\Gamma\vdash p$”是半可判定的。
若 Γ 是有限集，设 $\Gamma=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，令

$$q=p_1\to(p_2\to\underbrace{(\cdots(}_{n-2\text{个}(}p_n\to p\underbrace{)\cdots)}_{n-2\text{个})}))$$

使用 n 次语义演绎定理即可得 $\Gamma\vDash p\Leftrightarrow\vDash q$。通过真值表可对 q 是否为重言式做判定，由命题逻辑的一致性，即可判定 $\Gamma\vdash p$。
若 Γ 是无限集，由紧致性定理，若 $\Gamma\vdash p$ 成立，则有有限子集 $\Delta\subset\Gamma$，使得 $\Delta\vdash p$，则由上可知可以判定 $\Gamma\vdash p$ 确实成立。但若 $\Gamma\vdash p$ 不成立，则无法给出有限的判断算法。

第 2 章 一阶逻辑

2.1

(K4) $\forall x\, p(x) \to p(t)$, 其中项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的

(K5) $\forall x\,(p \to q) \to (p \to \forall x\, q)$, 其中 x 不在 q 中自由出现

(K4)和(K5)中的约束条件有何意义？举例说明。

对公理的限制保证了其在谓词逻辑的任何解释域中都是有效式。

对(K4)而言，直观上这是一个弱化结论的过程，从一个公式对任意 x 均成立得到其对某个具体的项 t 成立，在这个过程中，由于公式 $p(x)$ 是抽象的，所以必须要考虑到其内部可能存在的约束条件。举例说明，对于解释域 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}$ 上一元关系 $\overline{R_1^2}$ 为 $>$，则使用没有限制条件的 K4 公理得到

$$\forall x\, \exists y\, R_1^2(x, y) \to \exists y\, R_1^2(y, y)$$

前件的解释为“对任意的 $x \in \mathbb{Z}$ 均存在 $y \in \mathbb{Z}$ 使得 $x > y$”，这是恒真的；后件的解释为“存在 $y \in \mathbb{Z}$ 使得 $y > y$”，这是恒假的，公式在解释域 $\mathbb{Z}$ 上并不恒真。对于(K5)而言，这是一个具体化约束条件的过程，将对 x 的量词约束范围从整个蕴涵式 $p \to q$ 具体到后件 q 上。那么约束条件存在的意义是保证前件实际上并不受量词约束，即保证没有变元 x 逸出了约束范围。举例说明，对于解释域 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}$ 上一元关系 $\overline{R_1^1}$ 为 > 1，$\overline{R_2^1}$ 为 > 0，则使用没有限制条件的 K5 公理得到

$$\forall x\,((R_1^1(x) \to R_2^1(x))) \to ((R_1^1(x) \to \forall x\, R_2^1(x)))$$

前件的解释为“对任意的 $x \in \mathbb{Z}$，若 $x > 1$，则 $x > 0$”，这是恒真的；后件的解释为“若 $x > 1$，则对任意的 $x \in \mathbb{Z}$ 有 $x > 0$”，注意这里后件里的 x 既有自由出现也有约束出现，可以改写变元为“若 $x > 1$，则对任意的 $y \in \mathbb{Z}$ 有 $y > 0$”，这是恒假的，公式在解释域 $\mathbb{Z}$ 上并不恒真。

2.2

下列判断是否成立？若 $\Gamma \vDash p$，则对一切解释 I，如果对所有 $q \in \Gamma$ 有 $I(q) = t$，则 $I(p) = t$。

不成立，由语义推论的定义，公式 p 是公式集 Γ 的语义推论，记作 $\Gamma \vDash p$，指 p 在 Γ 的所有模型中都恒真。但在不是公式集 Γ 模型的解释域中，Γ 的公式的真值是不确定的，因此判断并不成立。

2.3

“真”在一阶逻辑中有哪几个层次？

三个层次，分别为

- 解释域中的可满足公式，公式 p 是在某个解释域 M 中的非恒假，$\exists\varphi \in \Phi_M$，$|p|(\varphi) = 1$
- 解释域中的恒真公式，公式 p 在某个解释域 M 中恒真，$\forall\varphi \in \Phi_M$，$|p|(\varphi) = 1$，记为 $|p|_M = 1$
  - 语义推论，公式 p 在任意一个公式集 Γ 的模型 M 中 p 恒真，记为 $\Gamma \vDash p$
- 有效式，公式 p 在 K 的所有解释域中恒真，记作 $\vDash p$

其中注意到语义推论是对某个公式集而言的，有效式也可以看做是空集的语义推论，因此对谓词逻辑整体而言可以认为是一个层次。

第 3 章 一阶理论

3.1

Peano 自然数公理：

(公理 1)$0 \in \mathbf{N}$

(公理 2)若 $x \in \mathbf{N}$，则 x 有且只有一个后继 $x' \in \mathbf{N}$

(公理 3)对任意 $x \in \mathbf{N}$，$x' \neq 0$

(公理 4)对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $x_1' \neq x_2'$

(公理 5)设 $M \subseteq \mathbf{N}$，若 $0 \in M$，且当 $x \in M$ 时也有 $x' \in M$，则 $M = \mathbf{N}$

形式化理论（尝试）：

(P1) $\mathbf{N}(0)$

(P2) $\forall x\,(\mathbf{N}(x) \to \exists y!\,(y{=}x' \wedge \mathbf{N}(y)))$

(P3) $\forall x\,((\mathbf{N}(x) \to (0{=}x')))$

(P4) $\forall x\,\forall y\,((x'{=}y' \to x{=}y))$

(P5) $p(0) \wedge \forall x\,(p(x) \to p(x')) \to \forall x\,p(x)$, 其中 p 是任意一阶公式

本节尝试给出的 $\Gamma = \{(\mathrm{P1}), (\mathrm{P2}), (\mathrm{P3}), (\mathrm{P4}), (\mathrm{P5})\}$ 是否完全表达了自然数的 Peano 定义？

3.2

L 是否“强迫”$\to$ 解释为实质蕴涵？

是的，由于 MP 规则与（语义）演绎定理的存在，蕴涵词 $\to$ 必须解释为实质蕴涵，可以尝试参考前文 1.2 的方法，以 L1、L2 与 MP 规则确定蕴涵词的真值表。

3.3

Frege **原则**：整体的语义由部件的语义复合而成。

Frege **组合原则在一阶语义中的具体表现是什么？并举例说明你的看法。**