

首先受到书上运用演绎定理的启发 并结合演绎定理的证明 再稍作改进

由否定前件律:

$\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ 其中 q 为任意公式 这个证明需要 7 步

再运用 L2 以及 MP 有

$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ 这里是第九步

再有 $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ 第十步

用直接证明 HS 需要 5 步, 之后有:

$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow p)$ 这里是 15 步

L2 MP 后有:

$((\neg p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ 这里是 17 步

因此只要构造 $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow q$ 为公理 就能在 19 步内得到证明

$q = p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$ (18)

下面是直接证明:

(1) $\neg p \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p$ (L1)
(2) $(\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))$ (L3)
(3) $((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$ (L1)
(4) $\neg p \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))$ (2) (3) MP
(5) $(\neg p \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$ (L2)
(6) $(\neg p \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$ (4) (5) MP
(7) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))$ (1) (6) MP
(8) $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))$ (L2)

(9) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))$ (7) (8) MP
(10) $(\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)$ (L3)
(11) $((\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))$ (L1)
(12) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))$ (10) (11) MP
(13) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)) \rightarrow (((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)))$ (L2)
(14) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))$ (12) (13) MP
(15) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)$ (9) (14) MP
(16) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)) \rightarrow (((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p))$ (L2)
(17) $((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$ (15) (16) MP
(18) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))$ (L1)
(19) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (17) (18) MP \square

证毕

这是比较直观的用 q 表示的版本:

(1) $\neg p \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)$ (L1)
(2) $(\neg \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ (L3)
(3) $((\neg \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)))$ (L1)
(4) $\neg p \rightarrow ((\neg \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$ (2) (3) MP
(5) $(\neg p \rightarrow ((\neg \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)))$ (L2)
(6) $(\neg p \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$ (4) (5) MP
(7) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ (1) (6) MP
(8) $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q))$ (L2)
(9) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ (7) (8) MP
(10) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ (L3)
(11) $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)))$ (L1)
(12) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ (10) (11) MP