疑问：一只昆虫某次产卵数 $n=Y+Z$
当一次产卵数一定时，Y与Z是相互制约的，∴看不
相互独立.

周三作业：

25. 设某种昆虫单只每次产卵的数量服从参数为 λ 的Poisson分布，而每个虫卵能孵出幼虫的概率均为 $p(0<p<1)$ 且相互独立. 分别以 Y 和 Z 记一只昆虫一次产卵后幼虫和未能孵出幼虫的虫卵的个数. 试问 Y 和 Z 分别服从什么分布? 它们是否相互独立?

记X为一只昆虫一次产卵数量，$X\sim P(\lambda)$，令 $q=1-p$

∵ $\{X=i\}$，$i=0,1,2,\cdots$ 是完备事件组，用全概率公式得

Y的概率分布：
$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)\cdot P(Y=k\mid X=n)$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^k p^k\cdot q^{n-k}$$
$$=\frac{p^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n\cdot q^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^i}{i!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda q}}{k!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda p},\ k=0,1,2,\cdots$$

$\therefore Y\sim P(\lambda p)$

同理：
$$P(Z=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)\cdot P(Z=k\mid X=n)$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^k q^k\cdot p^{n-k}$$
$$=\frac{q^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n\cdot p^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda q)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda q)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^j}{j!}$$
$$=\frac{(\lambda q)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda q},\ k=0,1,2,\cdots$$

$\therefore Z\sim P(\lambda q)=P(\lambda(1-p))$

对一次产卵，记 $Y=k_1$，$Z=k_2$，记 $B=\{Y=k_1 且 Z=k_2\}$

$$P(Y=k_1)=\frac{(\lambda p)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda p},\quad P(Z=k_2)=\frac{(\lambda q)^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda q}$$
$$P(B)=\frac{\lambda^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\cdot e^{-\lambda}\cdot C_{k_1+k_2}^{k_1}p^{k_1}\cdot q^{k_2}=\frac{(\lambda p)^{k_1}\cdot(\lambda q)^{k_2}\cdot e^{-\lambda}}{k_1!\cdot k_2!}$$
$$=P(Y=k_1)\cdot P(Z=k_2)$$

∴Y和Z独立.

27. 保险公司的资料表明持某种人寿保险单的人在保险期内死亡的概率为 2%. 利用Poisson分布，试求在 400 份保单中最终至少赔付两份保单的概率(精确到小数点后三位).

记 X为 400份保单中赔付保单的数量.

则 $X\sim B(400,0.02)$

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

由Poisson分布，$\lambda=400\times 0.02=8$，$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$，$(k=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore P\{X\geq 2\}\approx 1-e^{-8}-8\cdot e^{-8}=1-9\cdot e^{-8}\approx 0.997$$

32. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{4}, & 0\leq x\leq 1,\\ \frac{1}{2}+\frac{x-1}{4}, & 1\leq x<2,\\ \frac{5}{6}, & 2\leq x<3,\\ 1, & x\geq 3.\end{cases}$$

试求: (1) $\mathbb{P}(X=k)$, $k=1,2,3$; (2) $\mathbb{P}(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$.

(1) ① $P(X=1)=P(X\leq 1)-P(X<1)$
$$=F(1)-\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(X\leq 1-\varepsilon)$$
$$=F(1)-\lim_{x\to 1^-}F(x)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1-1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

② $P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<2)=F(2)-\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(X\leq 2-\varepsilon)$
$$=F(2)-\lim_{x\to 2^-}F(x)$$
$$=\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2-1}{4}\right)=\frac{1}{12}$$

③ $P(X=3)=P(X\leq 3)-P(X<3)=F(3)-\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(X\leq 3-\varepsilon)$
$$=F(3)-\lim_{x\to 3^-}F(x)$$
$$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

(2). $P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=P(X<\frac{3}{2})-P(X\leq\frac{1}{2})$
$$=\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}F(x)-F(\tfrac{1}{2})$$
$$=\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\left(\frac{1}{2}+\frac{x-1}{4}\right)-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1}{2}$$

周五:

45. 若随机变量 X 服从区间$(-5,5)$上的均匀分布, 求方程 $x^2+Xx+1=0$有实根的概率.

$x^2+Xx+1=0$ 有实根 $\Leftrightarrow$ $\Delta=X^2-4\geq 0 \Rightarrow$ $X>2$ 或 $X<-2$

$\therefore$ 记 A 为"方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根"

$P(A)=P(X>2 \text{ 或 } X<-2)=P(X>2)+P(X<-2)$

而 $X\sim U(-5,5)$, $\therefore$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & x\in(-5,5)\\ 0, & x\notin(-5,5)\end{cases}$

$\therefore$ $P(A)=\int_2^5 \frac{1}{10}dx+\int_{-5}^{-2}\frac{1}{10}dx=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

50. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X 服从参数为 $\lambda=1/5$ 的指数分布(单位: 分钟). 假设某顾客一旦等待时间超过 10 分钟他就立即离开, 且一个月内要到该银行 5 次, 试求他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率.

对于一次到银行, 等待服务的时间X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$P(X>10)=1-P(X\leq 10)=1-\int_{-\infty}^{10}f(x)dx=1-\left(-e^{-\lambda x}\Big|_0^{10}\right)$

$=1-(-e^{-2}+1)=e^{-2}$

记 Y: "顾客在一个月内至少有一次未接受服务而离开", 考虑到每次去银行是否接受服务事件是相互独立的.

$\therefore P(Y)=1-C_5^5(1-P(X>10))^5=1-(1-e^{-2})^5$

55. 由学校到飞机场有两条路线可供选择: 第一条要穿过市区, 路程短但塞车现象严重, 所需时间(单位: 分钟)服从正态分布 $N(30,100)$; 另一条是环城公路, 路程长但很少塞车, 所需时间服从正态分布 $N(40,16)$. 如果要求 (1) 在 50 分钟内达到机场; (2) 在 45 分钟内达到机场. 试问各应该选择哪条路线?

记 X 为从第一条路走花费的时间, $X\sim N(30,100)$, $\mu_1=30$, $\sigma_1=10$

Y为从第二条路走花费的时间, $Y\sim N(40,16)$ $\mu_2=40$, $\sigma_2=4$

$P(X\leq a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{a}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \overset{令 t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$

$=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

(1). $P(X\leq 50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)=\Phi(2)=0.97725$ $P(Y\leq 50)=\Phi\left(\frac{50-40}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.99379$

$\therefore$ 应选第二条路: 环城公路

(2). $P(X\leq 45)=\Phi\left(\frac{45-30}{10}\right)=\Phi(1.5)=0.93319$, $P(Y\leq 45)=\Phi\left(\frac{45-40}{4}\right)=\Phi(1.25)=0.8944$

$\therefore$ 应选第一条路: 穿过市区.