

中国科学技术大学数学科学学院
 2016 ~ 2017学年 第 1 学期期末考试试卷
☒ A卷 ☐ B卷

课程名称 计算方法(B) 课程编号 001511
 考试时间 2017年1月12日 考试形式 闭卷
 姓 名 _____ 学 号 _____ 学 院 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

一、(30分) 填空

- (1) (9分) 用规范的幂法求矩阵 A 的特征值。若 A 的按模最大特征值只有一个, 则序列表现为

若 A 的按模最大特征值是互为反号的两个实数, 则序列表现为

- (2) (6分) 解非线性方程 $f(x) = 0$ 的Newton迭代格式为_____

若已知方程的根是3重根, 则格式应该改为_____,

才能保证格式具有2阶收敛速度。

- (3) (3分) 6个点的数值积分公式至多可以到_____阶代数精度。

- (4) (6分) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $\|A\|_1 =$ _____, $\|A\|_\infty =$ _____

- (5) (6分) 已知 $f(1) = 0.12, f(2) = 0.25, f(3) = 0.20$, 则用Simpson公式得到的函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的数值积分为_____, 差商 $f[1, 2, 3] =$ _____

二、（10分）用Courant分解求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -54 \end{cases}$$

提示： $A = LU$ ，其中 U 为单位上三角阵， L 为下三角阵，称为 A 的Courant分解。

三、（12分）按下列数据，用最小二乘法做出 $f(x) = a + bx^2$ 形式的拟合函数。

x_i	-1	0	0.5	2	2.5
y_i	0.60	0.71	0.75	0.8	1.0

四、（12分）确定下面求积分公式中的待定参数A, 使其代数精度尽可能高，写出公式并指出该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0) + f(h)) + Ah^2(f'(0) - f'(h))$$

五、（12分）给定线性方程组 $Ax = b$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。若使用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \alpha \in \mathbb{R}$$

求解方程。

1. 写出迭代公式的迭代矩阵；
2. 求出 α 的取值范围，使得迭代收敛，并指出 α 取何值时迭代收敛速度最快。

六、（12分）函数 $f(x)$ 足够光滑，以点2.0, 4.0, 6.0, 8.0为节点构造的Lagrange插值多项式为 $l_1(x)$ ；以4.0, 6.0, 8.0, 10.0为插值节点的插值多项式为 $l_2(x)$ ，若 $l_1(7.0) = 0.325$ ， $l_2(7.0) = 0.315$ ，

1. 用事后估计方法，估计 $l_1(7.0)$ 处的误差；
2. $l(x)$ 是以2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0为节点的插值多项式，试计算 $l(7.0)$ 的值。给出计算公式，并证明。

七、(12分) 对常微分方程
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = b \end{cases}$$
 , 在等距节点下构造如下的线性多步格式

$$y_{n+1} + (\alpha - 1)y_n - \alpha y_{n-1} = \frac{h}{4}[(\alpha + 3)f_{n+1} + (3\alpha + 1)f_{n-1}]$$

假定节点间距为 h

1. 证明 $\alpha \neq -1$ 时格式是二阶精度的 (即格式的局部截断误差为 $O(h^3)$) , 当 $\alpha = -1$ 时格式是三阶精度的。
2. 当 $\alpha = -1$ 时, 说明格式是几步几阶显式还是隐式格式。

答案

1. 序列会收敛到一个向量（当特征值 >0 ），或奇、偶序列收敛到互为反号的两个向量（特征值 <0 ）（6分）

奇、偶序列会收敛到两个向量，这两个向量不是互为反号的（3分）

2. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ （3分）

$$x_{k+1} = x_k - 3 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3\text{分})$$

3. 11 (3分)

4. 16 (3分), 14 (3分)

5. 0.22 (3分) , -0.09 (3分)

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \\ 3 & -19 & \frac{48}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b,$$

$$y = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{51}{13} \\ \frac{97}{4} \end{pmatrix}$$

$$Ux = y$$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 5.0 & 11.5 \\ 11.5 & 56.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.86 \\ 10.2375 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6666 \\ 0.045813 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^h 1 dx &= h = \frac{h}{2}(1+1) + Ah^2(0-0) \\ \int_0^h x dx &= \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}(0+h) + Ah^2(1-1) \\ \int_0^h x^2 dx &= \frac{h^3}{3} = \frac{h}{2}(0+h^2) + Ah^2(0-2h)\end{aligned}$$

则 $A = \frac{h}{12}$ (8分)

又

$$\begin{aligned}\int_0^h x^3 dx &= \frac{h^4}{4} = \frac{h}{2}(0+h^3) + \frac{h}{12}h^2(0-3h^2) \\ \int_0^h x^4 dx &= \frac{h^5}{5} \neq \frac{h}{2}(0+h^4) + \frac{h}{12}h^2(0-4h^3) = \frac{h^5}{6}\end{aligned}$$

所以代数精度为3 (4分)

5. 1). 迭代矩阵

$$I - \alpha A = \begin{pmatrix} 1 - 3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 1 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

(6分)

2). 谱半径

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + 3\alpha & 2\alpha \\ \alpha & \lambda - 1 + 2\alpha \end{pmatrix} = (\lambda - 1 + 4\alpha)(\lambda - 1 + \alpha)$$

谱半径为 $\min(|4\alpha - 1|, |\alpha - 1|)$ (2分)

分析可得 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (2分)

$\alpha = \frac{2}{5}$ 收敛最快 (2分)

6. 1).

$$\frac{f(7.0) - l_1(7.0)}{f(7.0) - l_2(7.0)} \approx \frac{7.0 - 2.0}{7.0 - 10.0}$$

$$f(7.0) \approx \frac{5l_2(7.0) + 3.0l_1(7.0)}{8.0} = 0.31875$$

$$f(7.0) - l_1(7.0) \approx 0.31875 - 0.325 = -0.00625$$

2).

=

7. 1).

2). 2阶Runge-Kutta格式 (2分)