3.信号传送问题，信号只有0，1两种，分为多个阶段传输，每一步出错概率为α，$X_0=0$是送出的信号，而X_n是在第n步接收到的信号，假定X_n为一Markov链，它有概率转移矩阵$p_{00}=p_{11}=1-\alpha$，$p_{01}=p_{10}=\alpha$，$0<\alpha<1$，试求

(a)两步均不出错的概率$P\{X_0=0, X_1=0, X_2=0\}$

(b)两步传送后收到正确信号的概率；

(c)五步之后传送无误的概率$P\{X_5=0|X_0=0\}$

a. $P\{X_0=0, X_1=0, X_2=0\}$

$\because X_0=0$是送出信号 $\therefore$ 上式$=P\{X_1=0, X_2=0|X_0=0\}$

$=P\{X_1=0|X_0=0\}\cdot P\{X_2=0|X_1=0\}=(1-\alpha)^2$

(b) $0\to1\to0 \qquad 0\to0\to0$

$P=\alpha^2+(1-\alpha)^2=2\alpha^2+1-2\alpha$.

(c). $P\{X_5=0|X_0=0\}=p_{00}^{(n)}$

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{pmatrix}=P^n=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$P=T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix}T^{-1} \qquad \text{其中 } T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^n=T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix}^n T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(1-2\alpha)^n & 1-(1-2\alpha)^n \\ 1-(1-2\alpha)^n & 1+(1-2\alpha)^n \end{pmatrix}$$

$p_{00}^{(n)}=\frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^n]$

当n=5时 $p_{00}^{(n)}=\frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^5]$

4. A、B两罐总共装有N个球，作如下试验：在时刻n先从N个球中等概率地任取一个球，然后从A、B两罐中任选一个，选中A的概率为p，选中B的概率为q，之后再将选出的球放入选好的罐中，设X_n为每次试验时A罐中的球数，试求此Markov过程的转移概率矩阵.

+1　从B中拿出放入A　设此时 $X_n=i$　$P=p(1-\frac{i}{N})$

-1　从A中拿出放入B　$P=q\cdot\frac{i}{N}$

0　从A中拿出放入A、从B中拿出放入B　$P=p\cdot\frac{i}{N}+q(1-\frac{i}{N})$

$$\therefore P_{ij}=\begin{cases} p(1-\frac{i}{N}), & j=i+1 \\ q\cdot\frac{i}{N}, & j=i-1 \\ p\cdot\frac{i}{N}+q(1-\frac{i}{N}), & j=i \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

$$P=\frac{1}{N}\begin{pmatrix} \overset{P_{00}}{qN} & \overset{P_{01}}{pN} & 0 & \cdots & 0 \\ \overset{P_{10}}{q} & \overset{P_{11}}{q(N-1)+p} & \overset{P_{12}}{p(N-1)} & \ddots & \vdots \\ 0 & \overset{P_{21}}{2q} & \overset{P_{22}}{q(N-2)+2p} & \ddots & p \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & Nq & Np \end{pmatrix}$$

7. 设Z_i, $i=1,2,\cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1=k\}=p_k\geq 0$, $k=0,1,2,\cdots$, $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$, 记$X_n=Z_n$, $n=1,2,\cdots$, 试求过程X_n的转移概率矩阵

解: $P\{Z_{n+1}=i_{n+1}|Z_1=i_1,\cdots,Z_n=i_n\}=P\{Z_{n+1}=i_{n+1}\}=p_{i_{n+1}}$

$=P\{Z_{n+1}=i_{n+1}|Z_n=i_n\}$　　$X_n=Z_n$

$\therefore \{X_n\}$是一Markov链

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

10

12.2

优秀作业