2. 试证对任意公式 p 与 q，有

P73

$$\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q).$$

证明：先考虑证明 $\{\forall x(p\to q), \forall x p\} \vdash \forall x q$

(1) $\forall x(p\to q)$ 前提

(2) $\forall x(p\to q) \to (p\to q)$ (K4)

(3) $p\to q$ MP (1)(2)

(4) $\forall x p$ 前提

(5) $\forall x p \to p$ (K4)

(6) p MP (4)(5)

(7) q MP (3)(6)

(8) $\forall x q$ UG(7)

由于上述推理过程中仅有概括指导变元 x，且不在 $\forall x p$ 中自由出现

∴ 由演绎定理得：$\{\forall x(p\to q)\} \vdash \forall x p \to \forall x q$ ①

且由书中演绎定理的证明可知，只会涉及到概括指导变元 x

∴ ①的形式推理中同理只会出现概括指导变元 x，而 x 在 $\forall x(p\to q)$ 中自由出现。

∴ 又由演绎定理，知 $\vdash \forall x(p\to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$

P73 3(2)

2) $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\} \vdash \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$.
(要求写出在 K 中的证明.)

证明：

(1) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 前提

(2) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (K4)

(3) $\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ MP (1)(2)

(4) $\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_1,x_2)$ (K4)

(5) $R_1^2(x_1,x_2)$ MP (3)(4)

(6) $\forall x_3 R_1^2(x_1,x_2)$ (5)UG

(7) $\forall x_3 R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_1,x_3)$ (K4)

(8) $R_1^2(x_1,x_3)$ MP (6)(7)

(9) $\forall x_3 R_1^2(x_1,x_3)$ (8)UG

(10) $\forall x_3 R_1^2(x_1,x_3) \to R_1^2(x_2,x_3)$ (K4)

(11) $R_1^2(x_2,x_3)$ MP (9)(10)

(12). $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ (11) UG

(13) $\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ (12) UG

P74

4. 设 x 不在 p 中自由出现. 求证:

1° $\vdash (p \to \forall x q) \to \forall x(p \to q)$.

证明: 先证 $\{p \to \forall x q\} \vdash \forall x(p \to q)$

(1). $p \to \forall x q$ 前提

(2) $\forall x q \to q$ (K4)

(3) $p \to q$ HS (1)(2)

(4) $\forall x(p \to q)$ UG(3)

由于上述形式推理中仅有的概括变元 x 不在 $p \to \forall x q$ 中自由出现, 由演绎定理

则 $\vdash (p \to \forall x q) \to \forall x(p \to q)$

HS的推导:

想证 $\{p \to \forall x q, \forall x q \to q\} \vdash p \to q$

先证: $\{p \to \forall x q, \forall x q \to q, p\} \vdash q$

(1). p 前提

(2) $p \to \forall x q$ 前提

(3) $\forall x q$ MP (1)(2)

(4) $\forall x q \to q$ 前提

(5) q MP (3)(4)

上述形式推理中仅有的概括变元 x 不在 p 中自由出现

由演绎定理, $\{p \to \forall x q, \forall x q \to q\} \vdash p \to q$

P81

1. 设 x 不在 q 中自由出现. 求证

1° $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p \to q)$.

证明: 先证 $\{\exists x p \to q\} \vdash \forall x(p \to q)$

(1). $\neg \forall x \neg p \to q$ 前提

(2). $(\neg \forall x \neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p)$ 永真式

(3) $\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p$ MP (1)(2).

(4). $\neg\neg \forall x \neg p \to \forall x \neg p$ 双否律 (永真式)

(5). $\neg q \to \forall x \neg p$ HS (3)(4) (HS证明见上面一题, 且形式推理过程中仅用到的概括变元 x 不在 $\neg q$ 中自由出现)

(6). $\forall x \neg p \to \neg p$ (K4)

(7) $\neg q \to \neg p$ HS (5)(6)

(8) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ (K3)

(9) $p \to q$ MP (7)(8).

(10). $\forall x(p \to q)$ UG(9)

由于上述形式推理中仅有的概括变元x
不在 $\exists x p\to q$ 中自由出现，由演绎定理
则 $\vdash (\exists x p\to q)\to\forall x(p\to q)$

P81

3. 找出与所给公式等价的前束范式.

1° $\forall x_1 R_1^1(x_1)\to\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$.

2° $\forall x_1(R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2))$.

3° $\forall x_1(R_1^1(x_1)\to R_1^2(x_1,x_2))\to(\exists x_2 R_1^1(x_2)\to\exists x_3 R_1^2(x_2,x_3))$.

4° $\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\neg\exists x_3 R_1^2(x_1,x_3))$.

(4) $\Leftrightarrow\ \exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\forall x_3\neg R_1^2(x_1,x_3))$ (化前束范式定理3 + 子公式等价可替换性)

$\Leftrightarrow\ \exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_3(R_1^1(x_1)\to\neg R_1^2(x_1,x_3))$ (x_3 不在 $R_1^1(x_1)$ 中自由出现)

$\Leftrightarrow\ \forall x_3(\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\neg R_1^2(x_1,x_3)))$

$\Leftrightarrow\ \forall x_3(\exists x_4 R_1^2(x_4,x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\neg R_1^2(x_1,x_3)))$

$\Leftrightarrow\ \forall x_3\forall x_4(R_1^2(x_4,x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\neg R_1^2(x_1,x_3)))$