范数

向量的范数

- **Def**: （向量的范数）对任一向量$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，可以找到唯一与之对应的非负实数$\|\vec{x}\|$，满足：

  1. 非负性：$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\| \geq 0$，且 $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$。

  2. 奇次性：$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},\quad \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$。

  3. 三角不等式：$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$。

则称实数$\|\vec{x}\|$为向量$\vec{x}$的范数。

- **Def**: （向量的距离）两个向量$\vec{x}$和$\vec{y}$的距离可以定义为$\|\vec{x} - \vec{y}\|$。

- **Example**： 向量$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$的$L_p$范数:

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p \le +\infty$$

L_1范数： $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

L_2范数： $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

L_∞范数： $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

RK: 当 $0 < p < 1$ 时，上式不是范数： $\vec{x} = (1,0,\cdots,0), \vec{y} = (0,\cdots,0,1)$ 不满足三角不等式。 $\|\vec{x}\|_p = 1, \quad \|\vec{y}\|_p = 1, \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| = 2^{1/p} > 2$

- **Thm**：（范数等价原理）若$R_1(\vec{x})$和$R_2(\vec{x})$是$\mathbb{R}^n$上的两种不同的范数，则存在$0 < m < M < \infty$，使得

$$m \le \frac{R_1(\vec{x})}{R_2(\vec{x})} \le M, \quad \text{or} \quad mR_2(\vec{x}) \le R_1(\vec{x}) \le MR_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

- **Example:**

$$\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_1 \le \sqrt{n}\|\vec{x}\|_2$$

$$\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_1 \le n\|\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\vec{x}\|_\infty$$

向量序列的极限

- **Def**: （向量序列的极限）设 $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的向量序列，若存在 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\lim_{k\to\infty} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| = 0$，则称向量序列 $\vec{x}^{(k)}$ 是收敛的，$\vec{x}$ 称为该向量序列的极限。

- 利用范数的等价性：如果 $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ 收敛至 $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，当且仅当每个分量都收敛 $lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, i = 1, \ldots, n$。

- 收敛性与范数无关。

矩阵的范数

- **Def**: （矩阵的范数）设$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，则$\|A\| \in \mathbb{R}$为范数，如果它满足

  1. 非负性：$\|A\| \geq 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
  2. 齐次性：$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
  3. 三角不等式：$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
  4. 相容性：$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$

特别的，如果$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$为方阵，还要求 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$， $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- RK：类似的，矩阵的范数相互等价。

- **Example**: （从属范数）

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|(A\vec{x}/\|\vec{x}\|)\|}{\|(\vec{x})/\|\vec{x}\|\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$ （列和最大值）

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$$，λ_i 为 $A^T\cdot A$ 的特征值

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$ （行和最大值）

矩阵收敛和极限

- **Def**： （矩阵收敛和极限）设$\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathbb{R}^{n\times n}$上的矩阵序列，若存在$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，使得$\lim_{k\to\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$，则称序列$\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$是收敛的，$A$为该序列的极限。

- 类似的，收敛性与范数无关。

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim_{k\to k} A_{ij}^{(k)} = A_{ij}, i, j = 1,\ldots, n$$

收敛矩阵

- **Def**：（收敛矩阵）A称为收敛矩阵，如果$lim_{k\to\infty}A^k = 0$。

- **Thm**：A为收敛矩阵 $\Leftrightarrow$ 谱半径 $\rho(A) = \max|\lambda_i(A)| < 1$。

- **RK**：考虑A的特征值λ和对应的特征向量$\overrightarrow{x}$

$$|\lambda|\cdot\|\overrightarrow{x}\| = \|\lambda\overrightarrow{x}\| = \|A\overrightarrow{x}\| \le \|A\|\cdot\|\overrightarrow{x}\| \quad \Rightarrow |\lambda| \le \|A\| \quad \Rightarrow \rho(A) \le \|A\|$$

如果存在范数满足$\|A\| \le 1$，则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$。

条件数

- **Def**：（矩阵的条件数）若A为非奇异（$Det(A) \neq 0$），则定义A的条件数 $Cond_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$

- RK：矩阵的条件数以来所取的范数定义，且

$$Cond_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p \geq \|A \cdot A^{-1}\|_p = \|I\|_p = 1$$

- RK：当$Cond_p(A)$大的时候，矩阵称为“病态矩阵”。一般来说，当A的最大特征值和最小特征值之比较大时，矩阵呈病态。