第二十一、二十二次作业反馈

刘硕

June 4 2020

1 作业答案

练习26

以下函数和关系用什么公式可表示?

2. f(n)=n+2

这个题的求解可以参考课本P125定理1的证明。定理1不仅仅证明了函数的复合可以保持可表示性，还提供了表示复合函数的公式的一般构造方法。

解

由上次作业的习题中对于一元后继函数s(n)=n+1是可表示的证明，我们有：s(n)=n+1可以由公式$y \approx x'$表示。其次由于f(n)=(n+1)+1=s(n)+1=s(s(n)),于是1元函数f是由1元函数s和1元函数s复合产生的。根据定理1，f是可表示的。根据定理1的证明，f可以用下面的公式表示：

$$\exists y_1(y_1 \approx x' \wedge y \approx y_1')$$

练习27

2. 证明以下函数是递归的.

(5) $h(n) = f(n)^{g(n)}$

解 由于二元函数指数函数$r(n_1, n_2) = n_1^{n_2}$是递归函数，同时俩个一元函数f(n),g(n)均为递归函数，根据规则I，$h(n) = r(f(n), g(n))$为递归函数。即$f(n)^{g(n)}$为递归函数.

2. 证明以下函数是递归的.

(6) 对任一定数k,

$$f_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

解 可以证明函数$f_k(n) = \bar{sg}(n \dot{-} k) = \bar{sg}(n \dot{-} c_k(n))$,而这个函数均是有递归函数复合产生的，因此$f_k(n)$为递归的.

2. 证明以下函数是递归的.

(10) 本段15°中的f.

解 要证明$f(n_1, \ldots, n_k) = \mu x[g(n_1, \ldots, n_k, x) = 1]$是递归函数。简单起见，把$n_1, \ldots, n_k$简写成$\alpha$，令$h(\alpha, x) = g(\alpha \dot{-} c_1(\alpha))$，于是可以得到$f(\alpha) = \mu x[h(\alpha, x) = 0]$.因此$f(\alpha)$是通过规则III从递归函数$h(\alpha, x)$生成的。因此f也是递归函数。(这里不考虑规则III的根存在性条件)

3. 证明所有递归函数构成的集是可数集

解 不考虑规则III的根存在性条件，把基本函数构成的集合记作F_0，把从基本函数使用了n次规则生成的所有函数记作F_n。下面对n归纳证明每个F_n都是可数集。

当n=0时，F_0为有限集，可数。

假设$F_n(n \leq k)$为可数集，为求简洁，把$n_1, \ldots, n_j$记作α_j。由假设，以及可数个可数集合的并集也为可数集，故$\bigcup_{i=0}^{i=k} F_i$为可数集。当n=k+1时，对于F_k中的每个函数，可以使用以下方式生成一个F_{k+1}中的递归函数：

1) 取出F_k中的任意一个j元函数$g(\alpha_j)$。再从$\bigcup_{i=0}^{i=k} F_i$中取出j个元数相同的函数，假设元数为z，则记作$h_1(\alpha_z), \ldots, h_j(\alpha_z)$，使用规则I生成一个$F_{k+1}$中的函数。

2) 取出F_k中的任意一个j元函数$g(\alpha_j)$。再从F_k中取出一个j+2元函数h，使用规则II生成一个F_{k+1}中的函数。

3) 取出F_k中的任意一个j+1元函数$g(\alpha_j, x)$。对g使用规则III生成一个F_{k+1}中的函数。

对于方式1)中的每个函数g，由于$\bigcup_{i=0}^{i=k} F_i$是可数集，故从中选择j个z元函数时，对于每个特定的z，只能找到可数种$(h_1, \ldots, h_j)$，即使z从0增加到∞，可以选择的$(h_1, \ldots, h_j)$的个数是可数个可数集的并，从而由单个g函数使用规则I生成的新函数的个数是可数的。又由于F_k中只有可数个函数，这样的g函数的个数是可数的，由于每个g函数使用规则I产生的新的函数的个数也是可数的，可数个可数集合的并集还是可数集，故使用方式1)产生的新的函数的个数是可数的。

对于方式2)，有可数中方式选择出来函数g，对于每个函数g又最多只能在F_k中选择出来可数个函数h来使用规则II产生新的函数，因此通过方式2)产生的函数也是可数个的。

对于方式3),在不考虑规则III的根存在性的情况下(事实上，考虑也只会减少通过规则III生成的函数的个数)，对于每个F_k中的函数最多可以通过规则III产生一个F_{k+1}中的函数，因此通过规则III产生的函数是可数个的。

把通过方式1)2)3)产生的所有函数求并集就可以得到F_{k+1}，显然F_{k+1}也是可数集。

由数学归纳法，$F_n(n = 0, 1, \ldots)$为可数集
从而$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$也为可数集

1.1 练习28

4. 证明G是递归集，这里

$$\mathbf{G=\{n|n\text{为奇数，或}n \leq 2\text{，或}n\text{等于二素数之和}\}.}$$

解 记$G_1 = \{\mathrm{n}|\mathrm{n}\text{为奇数}\}, G_2 = \{\mathrm{n}|\mathrm{n}\leq 2\}, G_3 = \{\mathrm{n}|\mathrm{n}\text{为二素数之和}\}$，于是$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$. 这三个一元关系的特征函数可以如下表示：

$$C_{G_1} = rem(2, n) = sg(rem(2, n))$$

$$C_{G_2} = \bar{sg}(n \dot{-} 2) = sg(3 \dot{-} n)$$

$$C_{G_3} = sg(\sum_{x<n} \sum_{y<n} (\bar{sg}(n \ddot{-} (x + y)) C_{prm}(x) C_{prm}(y)))$$

于是$C_G = sg(rem(2,n)+3\dot{-}n+\sum_{x<n}\sum_{y<n}(\bar{sg}(n\ddot{-}(x+y))C_{prm}(x)C_{prm}(y)))$
从而G是递归集。

6. 设A与A_1是递归集，且$A = A_1 \cup A_2, A_2$一定是递归集吗？

解 A_2不一定是递归集。举例反证：$A_2 \subseteq A_1, A_1 = A = N$，因为此时$C_A = c_0(n)$，从而$A_2$可以是任意的自然数集的子集合。因此取$A_2$为任意的非递归集即可举出反例。

2 问题总结

2.1 练习27 T2(5)如何使用规则

有一些同学在做这道题的时候，想要使用规则II(递归)，但是没能把生成$f(n)^{g(n)}$的方式写出来。事实上，这个题最好不要用规则II，如果注意到课本上的指数函数是递归函数的证明中就采用了规则II，这部分同学事实上只是把指数函数是递归函数又证明了一遍。

2.2 练习27 T2(10)使用规则III时需要注意

规则III运用了根存在性的性质，决定了规则III只能生成形如$\mu x[g(x) = 0]$的公式，注意这里的常数是0。在证明这个题的时候，需要把1挪到式子的左边。

另外课本的这部分没有考虑$g(\alpha, x) = 1$是否有解，因此求出的f忽略了规则III的根存在性，求出的f应该是递归偏函数。

2.3 练习27 证明递归函数集是可数集需要注意的问题

同学们基本上都用了数学归纳法，但是几乎没有同学尝试使用三种规则证明若$F_n(n \leq k)$为可数集，则F_{k+1}也为可数集。在生成时，大家需要注意生成F_{k+1}中函数时，只要满足生成该函数用到的函数中有一个F_k中的函数就可以了，其它的函数可以是使用规则次数小于k的函数。