第八次作业讲解

杨清元

1. P(x, c)、∃P(x, c)、∀xP(x, c)都不是逻辑有效的

- 取M={N, Ø, {<}}，N是自然数集合, “<”是集合上的小于关系，c^M为自然数0，对任意V， I(P(x, c))、I(∃P(x, c))、I(∀xP(x, c))均为f。
- 因此P(x, c)、∃P(x, c)、∀xP(x, c)都不是逻辑有效的。

2. $P(x, c) \to P(x, c)$、$\exists x(P(x, c) \to P(x, c))$、$\forall x (P(x, c) \to P(x, c))$、$\forall x P(x, c) \to \forall x P(x, c)$都是逻辑有效的。

- ①对任意M、V， p = P(x, c)在I = (M, V, v)下有I(p) = t或I(p) = f
  - I(p) = t时I(p->p)=t; I(p) = f时I(p->p)=t;
- 所以P(x, c)-> P(x, c)逻辑有效。④同1

- ②等价于$\neg \forall \neg$ (P(x, c)-> P(x, c))
- 由①得对所有M, V, d∈D， $I_{x/d}$(P(x, c)-> P(x, c))=t
- ∴I($\forall \neg$ (P(x, c)-> P(x, c)))=f
- ∴I($\neg \forall \neg$ (P(x, c)-> P(x, c)))=t

- ③：①得对所有d∈D， $I_{x/d}$(P(x, c)-> P(x, c))=t
- ∴I(∀ P(x, c)-> P(x, c))=t

❖ 定理(语义性质) 对任何一阶结构M，任何$p \in K(Y)$：

1. $M \models p$当且仅当$M \models \forall xp$当且仅当$M \models \forall p$；（UG有效性）

2. 若$M \models p$且$M \models p \rightarrow q$，则$M \models q$；（MP有效性）

$(1)" \Rightarrow "$ …单调性）

$\because M \models p$

$\therefore$ 对$\forall V$有$I(p) = t$

$\therefore$ 对$\forall V$, 对$\forall d \in D$有$I_{x/d}(p) = t$也就是$I(\forall xp) = t$

$\therefore M \models \forall xp$

$" \Leftarrow "$

$\because M \models \forall xp$

$\therefore$ 对$\forall V$有$I(\forall xp) = t$也就是$\forall d \in D, I_{x/d}(p) = t$

这里取$d = V(x) \Rightarrow$ 对$\forall V, I(p) = t$

$\therefore M \models p$

2. 若M $\models p$且M $\models p\to q$，则M $\models q$；（MP有效性）

3. 若$\Gamma\subseteq\Gamma$'且$\Gamma\models p$，则Γ'$\models p$。（语义后承单调性）

$(2) \because M \models p, M \models p \to q$

$\therefore$ 对$\forall V$有$I(p) = t$且$I(p \to q) = t$

若$\exists V$有使得$I(q) = f$此时$I(p) = t$由定义有$I(p \to q) = f$矛盾！

$\therefore M \models q$

$\Gamma \models p$表示对$\forall M$，若$\forall q \in \Gamma$有$M \models q$, 则$\Gamma \models p$

即$M \models \Gamma \Rightarrow M \models p$

$\because \Gamma \subseteq \Gamma'$

$\therefore M \models \Gamma' \Rightarrow M \models \Gamma \Rightarrow M \models p$

$\therefore \Gamma' \models p$