

第十九二十次作业反馈

刘硕

June 4 2020

1 作业答案

练习25

1. 证明一元零函数 z 和后记函数 s 是可表示的($z(n)=0, s(n)=n+1$)

解

$z(n)=0$ 可以用含有俩个自由变元的公式 $x \approx x \wedge y \approx \bar{0}$ 表示;后继函数 $s(n)=n+1$ 可以用含有俩个自由变元的公式 $y \approx x'$ 表示。证明如下:

首先考虑一元零函数 $z(n)$.使用演绎定理, 需要从 $\mathcal{N} \cup \{\bar{n} \approx \bar{n} \wedge t \approx \bar{0}\}$ 证明 $\bar{n} \approx \bar{n} \wedge z(\bar{n}) \approx \bar{0}$ 以及 $t \approx z(\bar{n})$

证明.

- | | | |
|-----|--|-----------------|
| (1) | $\bar{n} \approx \bar{n}$ | (E1) |
| (2) | $z(\bar{n}) \approx \bar{0}$ | $z(n)=0$, 命题16 |
| (3) | $\bar{n} \approx \bar{n} \rightarrow (z(\bar{n}) \approx \bar{0} \rightarrow (\bar{n} \approx \bar{n} \wedge z(\bar{n}) \approx \bar{0}))$ | 永真式 |
| (4) | $\bar{n} \approx \bar{n} \wedge z(\bar{n}) \approx \bar{0}$ | (1),(2),(3) MP |
| (5) | $\bar{n} \approx \bar{n} \wedge t \approx \bar{0} \rightarrow t \approx \bar{0}$ | 永真式 |
| (6) | $t \approx \bar{0}$ | 假定,(5) MP |
| (7) | $z(\bar{n}) \approx \bar{0} \rightarrow (t \approx \bar{0} \rightarrow (t \approx z(\bar{n})))$ | 永真式 |
| (8) | $t \approx z(\bar{n})$ | (2),(6) MP |

从而由演绎定理以及(2)和(8)，可以得到：

$$(1^\circ) \quad \mathcal{N} \vdash \bar{n} \approx \bar{n} \wedge z(\bar{n}) \approx \bar{0}$$

$$(2^\circ) \quad \mathcal{N} \vdash \bar{n} \approx \bar{n} \wedge t \approx \bar{0} \rightarrow t \approx z(\bar{n})$$

□

再考虑一元后继函数 $s(n)$ ，证明与上面的完全类似。

证明. 由演绎定理，可以容易地得到：

$$(1^\circ) \quad \mathcal{N} \vdash s(\bar{n}) \approx \bar{n}'$$

$$(2^\circ) \quad \mathcal{N} \vdash t \approx \bar{n}' \rightarrow t \approx s(\bar{n})$$

□

2. 证明 K_N 中的同一个公式不能用来表示两个不同的关系.

参考课本P120的第二个问题解答,使用反证法

解 通过扩充关系的元的数量，可以把任意两个关系的元数量扩充到相同。因此在我们的证明中，只考虑两个关系均是 k 元关系的情况。若 R_1 和 R_2 是两个不同的 k 元关系，且 R_1, R_2 均可以用含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1, \dots, x_k)$ 表示。不妨设 $R_1 - R_2 \neq \emptyset$ ，则有 $n_1, \dots, n_k \in N$ 满足 $(n_1, \dots, n_k) \in R_1$ 且 $(n_1, \dots, n_k) \notin R_2$ 。

对前者，根据可表示关系的性质(i)，有 $\mathcal{N} \vdash p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$ ；对后者，根据可表示关系的性质(ii)，有 $\mathcal{N} \vdash \neg p(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$ 。矛盾！

因此假设不成立，两个不同的关系不可以用 K_N 中的同一个公式表示。

2 问题总结

2.1 明确地写出关系或函数可以用什么公式表示

有一些同学这次作业被扣分的原因是直接就开始证明函数或关系可被公式表示的充要条件。没有明确写出用来表达函数或关系的公式到底是什么。建议大家把公式明确写出来，从而避免你的证明给别人(aka 助教)带来额外的阅读上的障碍。

2.2 注意公式中含有的自由变元的数量与函数或关系的元数量是否匹配

另外一部分同学这部分被扣分是因为找到了可以用来表示的公式，但是公式的自由变量的数目不匹配。如第一题考虑一元零函数 $z(n)=0$ 可被什么公式表示时，有同学直接写“可被公式 $y \approx \bar{0}$ 表示”。建议这里被扣分的同学去仔细看看课本P119和P121的定义1和定义3，那里规定了对 k 元函数，需要含有 $k+1$ 个自由变元的公式来表示；对 k 元关系，需要一个含有 k 个自由变元的公式来表示。