011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无根；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

2.7 一阶逻辑的判定问题

陈小平（中国科学技术大学）

计算机科学的思维：用能行方法解决问题之要点

对所有输入都有限停止并给出正确回答的程序

2.7 一阶逻辑的判定问题

eg: 两个数的加法

是针对该类问题（每个实例输入该方法均可得结果）

- **可判定** 一类问题是可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定二种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A在有限步骤内输出no。
- **半可判定** 称一类问题是半可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定两种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A可以不回答。

为何提出半可判定？（∵命题逻辑是可判定的）⇒ 一阶逻辑中有些问题 {可判定, 半可判定.

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **一阶逻辑中的若干可判定问题** 下列问题是可判定的：

1. 任给一个公式是不是K的公理？ 依据公理模式

◆**证明** 构造一个能行过程A，A将输入公式的逻辑结构依次与5种公理模式匹配；如果与任何一种公理模式匹配成功，则A输出yes，若都不匹配则A输出no。

K1：$p \to (q \to p)$的逻辑结构是由三个子公式p, q, p经过$\to$的两次复合而成。经过有限步骤可确定输入公式是否与K1匹配。

其他4种公理模式的匹配类似。

K4, K5还需对附加条件作检查(不过仍能行)

2.7 一阶逻辑的判定问题

这个证明问题是可判定的

❖ **一阶逻辑中的若干可判定问题** 下列问题是可判定的：

2. 任给公式p, q, r，r是不是从p, q用MP规则推出的？

◆ **证明** 分析公式q的逻辑结构是不是$p \rightarrow r$，或者公式p的逻辑结构是不是$q \rightarrow r$，如果是则输出yes，否则输出no。(①、②均花有限时间)

3. 任给公式p, q，q是不是从p用UG规则推出的？(证明问题)

4. 任给公式序列是否K的一个形式证明？

◆ **证明** 对公式序列$p_1, \cdots, p_n$中的每一个公式p_k，调用问题1、2、3的能行过程（判定程序）。

即对p_k依次判断：公理？ MP？ UG？

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **观察** 虽然K的每一条公理模式都包含无穷多条公理，每一条推理规则实际上也是一个推理模式模式，由于以上四个问题都是可判定的，仍然有理由认为：一阶谓词演算K是一阶逻辑的一个“有穷描述”，换言之一阶为前面4个中的可判定问题，

即语法学

说明由计算机科学可以判决

否判定 ⇒ 即找证明序列.

2.7 一阶逻辑的判定问题

⇒ 是内定理,会给出yes(有限时间内); 不是内定理, 则该能行方法会不给出回答(论证证明其不是内定理)

❖ **一阶逻辑中的半可判定问题** 下列问题是半可判定的：

5. 任给公式p是不是K的内定理($\vdash p$是否成立)？ → 在L中是半可判定的

◆ **证明** 依公式序列长度递增次序，逐一枚举以p结尾的公式序列$p_1, \cdots, p_n = p$，对每个公式序列调用4的判定程序，如果是一个p的证明，则输出yes并终止，否则枚举下一个公式序列。如果p是K的内定理，则必经有限次枚举，生成p的一个形式证明。⇒ 若p不是K内定理，则这个判定程序无法终止，给不了回答.

① p
② p_1, p
③ p_1, p_2, p

❖ **对比（命题演算的可判定性）** 存在一个能行方法A，对任何L公式p，当$\vdash p$成立时，A在有限时间内回答“是”；当$\vdash p$不成立时，A在有限时间内回答“否”。

一阶逻辑中虽更精细，但也有相应代价：内定理是半可判定.

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **对比** 任给公式$p\in L(X)$，p是一个重言式当且仅当所有指派都是p的成真指派。

但不能找到多项式级的 的?目前还不确定

∵ p 有限长度

◆ **观察** 任给公式$p\in L(X)$，存在X_n使得$p\in L(X_n)$。因此，p是重言式当且仅当X_n上的所有2^n个指派都是p的成真指派。

❖ **对比(K的逻辑有效式)** 设$p\in K(Y)$。p是K的一个逻辑有效式，记为$\models p$，当且仅当对任何一阶结构M，有$M\models p$。

◆ **观察** 一般情况下，验证一个一阶公式是不是K的逻辑有效式涉及无穷多个一阶结构。

语义上 不保证在有限时间内完成.

$\models p \Leftrightarrow \vdash p$

(L中 $\vdash p$ 判定可转化为语义上的判定在有限时间,但K中用语义则不行,是无限)

L与K的本质区别.

附：弗雷格（Friedrich L. G. Frege）

❖ 主要生平事迹

1848年生于德国维斯玛；

1873年获哥廷根大学博士学位；

1874年获耶拿大学无薪授课资格；

1879年发表《概念文字》，受聘副教授(有薪)；

1896年任荣誉教授。

以此为基础 命题演算 一阶演算 等等.

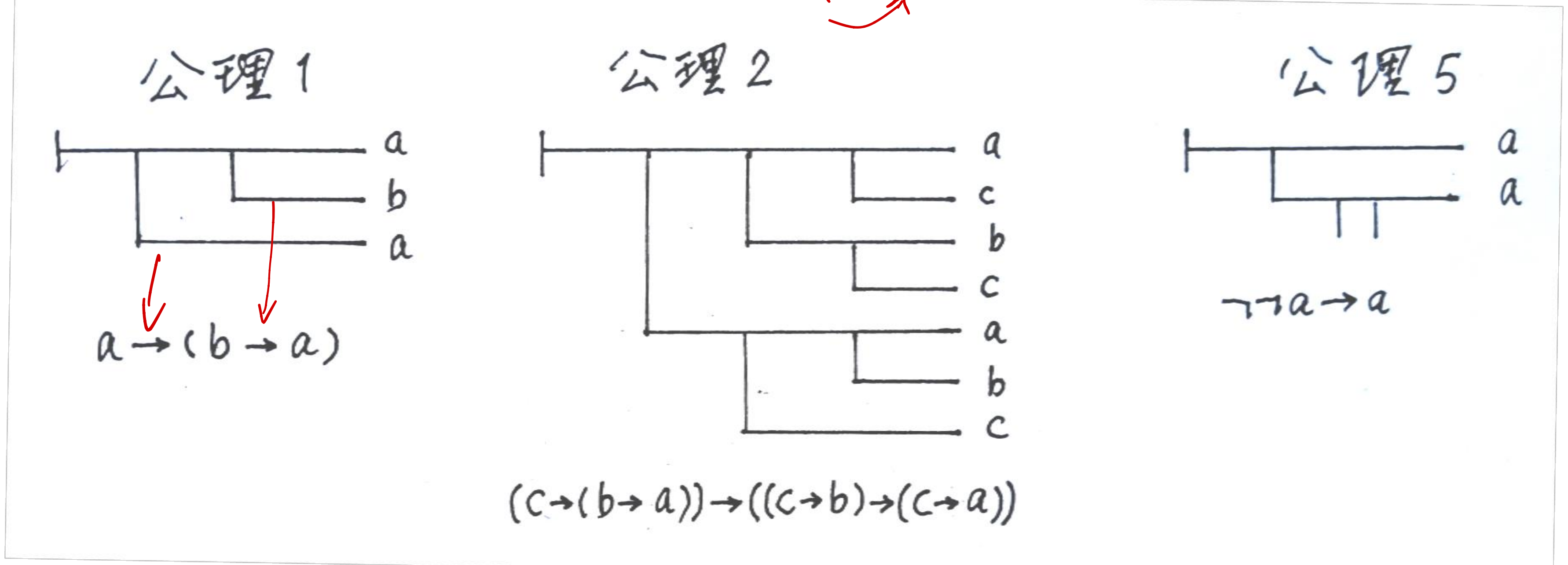
陈小平（中国科学技术大学）

附：弗雷格（Friedrich L. G. Frege）

❖ 《概念文字》建立了历史上第一个一阶逻辑形式公理系统。

◆ 公理举例：

$\vdash$ ：语法推出，即 $\vdash a \to (b \to a)$



学会了总结好项目啥的 作者及其团队的情况