HW3

1.证明:

❖ 定理（语义后承的性质）

1. 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \models p$，则$\Gamma' \models p$；（语义后承单调性）
2. 若$\Gamma \models p$ 且 $\Gamma \models p \to q$，则$\Gamma \models q$；（语义MP）
3. $\Gamma \models p \to q$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{p\} \models q$；（语义演绎定理）
4. p是重言式当且仅当$\varnothing \models p$。（p是内定理当且仅当$\varnothing \vdash p$）

(1)

所以若对任一 $q' \in \Gamma'$有 $v(q')=1$ 则对任一 $q \in \Gamma$ 有 $v(q)=1$ 〈1〉
由于 $\Gamma \models p$，
所以若对任一 $q \in \Gamma$ 有 $v(q)=1$ 则 $v(p)=1$ 〈2〉
结合〈1〉和〈2〉可得：
若对任一 $q' \in \Gamma'$有 $v(q')=1$ 则 $v(p)=1$，既 $\Gamma' \models p$。 证毕

(2)

命题 5 $\Gamma \models p$ 且 $\Gamma \models p \to q \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models q$.

证 每当 $v(p)=1$ 且 $v(p \to q)=1$ 时，便有

$$
\begin{aligned}
v(q) &= 1 \to v(q) && \text{(1.3.1 小节公式 2)} \\
&= v(p) \to v(q) \\
&= v(p \to q) = 1.
\end{aligned}
$$

□

命题 5 是 MP 规则的语义形式.

(3)

命题 6 (语义演绎定理)

$$\Gamma \cup \{p\} \models q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models p \to q.$$

证 ($\Rightarrow$) 设 $\Gamma \cup \{p\} \models q$, 且设 v 是使 Γ 中成员的真值都为 1 的赋值. 若有 $v(p)=1$, 则由所设条件可得 $v(q)=1$, 此时 $v(p \to q) = 1 \to 1 = 1$. 若有 $v(p)=0$, 则 $v(p \to q) = 0 \to v(q) = 1$. 这就证明了 $\Gamma \models p \to q$.

($\Leftarrow$) 设 $\Gamma \models p \to q$. 当 $v(p)=1$ 且 $v(p \to q)=1$ 时，必有 $v(q)=1$. 这说明 $\Gamma \cup \{p\} \models q$. □

(4)

4. $\phi \models p \iff \models p$

证明：

(⇒) 设 $\phi \models p$, 任取 $L(X)$ 一个赋值 v, 显然对 $\forall q \in \phi$, $v(q)=1$ $\therefore \models p$

(⇐) 设 $\models p$, 任取一个使 ϕ 中成员都为1的赋值 v

$\because \models p$ $\therefore v(p)=1$ $\therefore \phi \models p$

2.p49：1(1)；p53：1(3)

P49：1(1)

1. 证明以下各对公式是等值的.

1° $p \to q$ 和 $\neg q \to \neg p$.

两种方法：真值表和直接证明

①真值表方法：

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

②

即证 $\models (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)$

任取一个 $L(X)$ 的赋值 I

则 $I(\neg\neg q \vee \neg p) = (\neg\neg I(q)) \vee I(\neg p) = (\neg I(p)) \vee I(q) = I(\neg p \vee q)$

所以 $\models (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)$

P53:1(3)

1. 求以下公式的等值主析取范式.

1° $x_1 \leftrightarrow x_2$.

2° $x_1 \rightarrow (\neg x_2 \vee x_3)$.

3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$.

通过真值表，找到成真指派，然后转换为等值主析取范式：

1.3° 列真值表：

x_1	x_2	x_3	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$
t	t	t	t
t	t	f	t
t	f	t	t
t	f	f	f
f	t	t	f
f	t	f	t
f	f	t	t
f	f	f	f

则析取范式为

$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$