图论习题课
第1、5次作业

王霄阳, USTC

October 27th, 2019

Chp1（王树禾图论） 2

USTC, CHINA ADSLAB

2. 证明$|E(G)|\leqslant\binom{\nu}{2}$，其中 G 是单图.

G是**单图**(无环无重边)，给定点数ν则每两点间最多连一条边

那么图G最多有$\binom{\nu}{2}$条边，即$|E(G)|\leq\binom{\nu}{2}$

Chp1（王树禾图论） 2

2. 证明 $|E(G)| \leqslant \binom{\nu}{2}$，其中 G 是单图.

G是**单图**(无环无重边)，给定点数ν则每两点间最多连一条边

那么图G最多有$\binom{\nu}{2}$条边，即$|E(G)| \leq \binom{\nu}{2}$

或者用Euler定理 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\epsilon$来证明:

G是单图则$\forall v \in V(G), d(v) \leq \nu - 1$

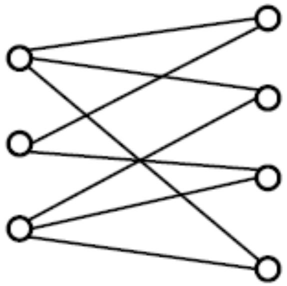
求和，得$2\epsilon = 2|E(G)| \leq \nu(\nu - 1)$

即$|E(G)| \leq \binom{\nu}{2}$

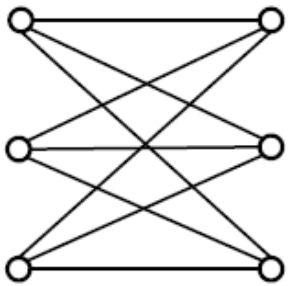
USTC, CHINA ADSLAB

12. 求证(a)$\varepsilon(K_{m,n})=mn$,(b)G 是完全二分图,则 $\varepsilon(G)\leqslant\frac{1}{4}[\nu(G)]^2$.

二分图： 二分图G的顶点集合可以划分为$V(G)=X\cup Y$，其中$X\neq\emptyset$，$Y\neq\emptyset$且$X\cap Y=\emptyset$，使得X内任意两个顶点不相邻，Y内任意两个顶点之间也不相邻。**完全二分图**G是一个简单图，其中X中的任意一个顶点与Y中的任意一个顶点都相邻。完全二分图记为$K_{|X|,|Y|}$。图1.2(c) 为一个二分图，而图1.2(d)则是一个完全二分图$K_{3,3}$。



(c)



(d)

Chp1（王树禾图论） 12

USTC, CHINA ADSLAB

12. 求证(a)$\varepsilon(K_{m,n})=mn$，(b)G是完全二分图，则$\varepsilon(G)\leqslant\frac{1}{4}[\nu(G)]^2$.

(a) $\varepsilon(K_{m,n})$即完全二分图$K_{m,n}$的边数，取上述定义中的顶集X、Y，X中的任一顶与Y中的任一顶 都相邻，即X中的|X|个顶任一顶度数为|Y|，同样Y中|Y|个顶任一顶度数为|X|

由Euler定理可以得到$|\mathrm{X}| * |\mathrm{Y}| + |\mathrm{Y}| * |\mathrm{X}| = 2 * \varepsilon(K_{m,n})$

(b) $\varepsilon(G) \leq \frac{1}{4}[\nu(G)]^2$由(a)结论可以写为$|\mathrm{X}| * |\mathrm{Y}| \leq \frac{1}{4}[\nu(G)]^2$，

即$|\mathrm{X}| * |\mathrm{Y}| \leq \frac{1}{4}[|\mathrm{X}| + |\mathrm{Y}|]^2$

展开整理后得$[|\mathrm{X}| - |\mathrm{Y}|]^2 \geq 0$，成立

Chp3（电子版图论教材） 1

1. G是k-边连通图，E'是G的k条边的集合，则$\omega(G-E')\leq 2$。

定义 3.4. 给定连通简单图$G=(V(G),E(G))$，以及$E'\subseteq E(G)$，若$G-E'$不连通，则称E'是G的**边割集**。若一个边割集中有k条边，则称之为k-**边割集**。含边数最少的边割集称为**最小边割集**，其中的边数记为$\kappa'(G)$，称为G的**边连通度**。若图G不是连通图，就定义$\kappa'(G)=0$。

例如，在图3.1中，$\kappa'(G_1)=1$，$\kappa'(G_2)=2$，$\kappa'(G_3)=3$，$\kappa'(G_4)=4$。若$\kappa'(G)\geq k$，则称图G是k-**边连通的**。对于$k>0$来说，若G是k-边连通的，则是$(k-1)$-边连通的。在图3.1中，所有的图都是1-边连通的，而G_2,G_3,G_4是2-边连通的，只有G_4是4-边连通的。

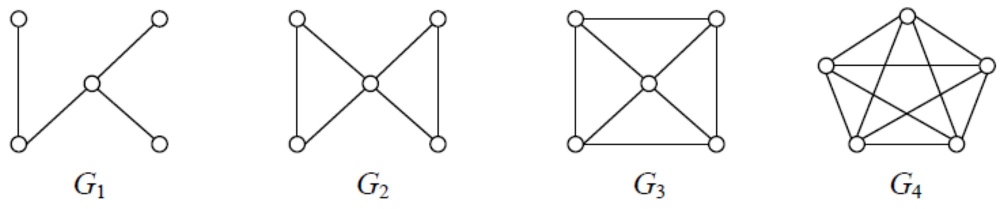


图 3.1: 不同连通程度的图

Chp3（电子版图论教材） 1

1. G是k-边连通图，E'是G的k条边的集合，则$\omega(G-E')\leq 2$。

(1) $\mathrm{k}<\kappa'(G)$，则$G-E'$必然连通，$\omega(G-E')=1\leq 2$

(2) $\mathrm{k}=\kappa'(G)$，取边e得到$\mathrm{G}'=G-(E'-e)$，$e\in E'$，$\omega(G')=1$，
记G'中边e的两顶a, b，取a b外的任一顶v，
删除e后，v不可能同时与a和b不连通(证明见后)
即删除e后必有v与a或b中至少一个在同一连通片上，
根据与a或b的连通性做划分，得$G-E'$至多有两个连通片

综上，$\omega(G-E')\leq 2$

Chp3（电子版图论教材） 1

1. G是k-边连通图，E'是G的k条边的集合，则$\omega(G-E') \leq 2$。

删除e后，v不可能同时与a和b不连通：

设删除e之前v到a的轨为P_a， v到b的轨为P_b
若在删除e后v同时不与a和b连通
则e必然同时存在于P_a和P_b上
且注意到e必然存在于P_a和P_b的最后一段上
即$P_a = vv_1v_2 \ldots v_i ba$ 且$P_\mathrm{b} = vv'_1v'_2 \ldots v'_i ab$
但这里可以发现P_a和P_b在删去e后，最后一个点变为b和a
即删除e后v会同时与a和b连通，与同时不连通矛盾

Chp3（电子版图论教材） 2

2. 给出一个k-连通图G以及k个顶点的集合V'，使得$\omega(G-V')>2$。

先构造一个k顶完全图K_k，然后添加三个顶a b c，每个顶都与完全图的所有顶相连，得到k-连通图G
取V’为完全图的k个顶，得到的G-V‘满足条件

Chp3（电子版图论教材） 7

7. 任给三个非负整数$l \le m \le n$，都存在简单图G，满足$\kappa(G) = l$，$\kappa'(G) = m$，$\delta(G) = n$。

题意中要求证明对任给整数的存在性
只要构造出满足条件的图即可

边界情形：l=n时，取完全图K_{n+1}即满足要求

l<n时，取两个完全图K_{n+1}，分别记作K_1和K_2，
取K_1中l个顶记为X，K_2中m个点记为Y，
Y中每个顶向X中的顶连一条边，使得一共有m条边，
且X中每个顶都有边被连，即得到满足条件的图

13. 证明定理3.4。

定理 3.4. *(Menger定理边版本)* 给定图G中两个顶点u, v，G中两两无公共边的uv-轨道的最大数量等于最小uv-边割集中的边数，即：

$$p'(u, v) = c'(u, v).$$

USTC, CHINA ADSLAB

13. 证明定理3.4。

首先若uv相邻，可以取去掉uv边的图G-uv记为G’，
则有$p'_G(u,v) = p'_{G'}(u,v) + 1$， $c'_G(u,v) = c'_{G'}(u,v) + 1$
则证明G’中结论成立即可证明G中成立
对G’做辅助图，使用Menger定理顶版本证明边版本：
设G中与u、v相邻的边集分别为X、Y，做G的边图L(G)，使得G中任一边e_i，存在一个L(G)中的顶v_i与之对应，且若e_i和e_j相邻(有一公共顶)，则对应v_i与v_j相邻(有一边相连)，记L(G)中与X、Y对应的顶集为X’和Y’
然后，取两点u’和v’，分别与X’和Y’中的所有顶相连，得到图H
然后证明两图的映射关系，就可以在H中使用Menger定理顶版本
即要证明存在$p'_G(u,v) = p_H(u,v)$ 和$c'_G(u,v) = c_H(u,v)$：

USTC, CHINA ADSLAB

13. 证明定理3.4。

$p'_G(u,v) = p_H(u,v)$:
设G中u v间最多有k条两两无公共边的轨，记为Pi(i=1,2,3,…,k)
设H中u’ v’间最多有k’条两两无公共内顶的轨，记为Qi(i=1,2,3,…,k’)
则每个Pi可以对应H中的Q’i，得到一组k条两两无公共内顶的轨
得到$k' \geq k$
同样的可知每个Qi可以找到G中对应的H’i，得一组k’条两两无公共边的顶
得$k \geq k'$
则$p'_G(u,v) = p_H(u,v)$

13. 证明定理3.4。

$c'_G(u,v)=c_H(u,v)$：

由前面证明及Menger定理顶版本可以得到 $p'_G(u,v)=p_H(u,v)=c_H(u,v)=k$

G中的最小边割集L对应H中的顶集V必然是H中的顶割集，否则H在去掉V后连通，即存在一条uv-轨，那么在G中也存在一条u-v轨，与L是顶割集矛盾

则有$c'_G(u,v)\geq k$

同样的，H中的最小顶割集必然是G中的边割集

得到$c'_G(u,v)\leq k$

则$c'_G(u,v)=c_H(u,v)$

USTC, CHINA ADSLAB

22. 证明扇形引理（推论3.3）。

给定简单图G，$x \in V(G)$，$Y \subseteq V(G) - \{x\}$且$|Y| \geq k$，一组k条起点为x、终点在Y中且无公共内顶的轨道称为从x到Y的k-**扇形**。下面的推论3.3给出了k-扇形的性质，其证明与推论3.2类似，故省略作为习题22。

推论 3.3. 假设简单图G是k-连通图，$x \in V(G)$，$Y \subseteq V(G) - \{x\}$且$|Y| \geq k$，则G中存在从x到Y的k-**扇形**。

与证明推论3.2相似的思路，添加一个点y与Y中每一个顶相连，得到图H
H是k-连通图，由Menger定理，H中存在k条无公共内顶的x-y轨道，
删去y得k条G内k条轨道Qi (i=1,2,3,...,k)，且每个Qi中必存在一段x到Y的轨道Pi
则G中存在从x到Y的k-扇形。

Thanks!

USTC, CHINA

ADSLAB

先进数据系统实验室

October 27th, 2019