第四次作业讲解

杨清元

证明μ(q)是L(X)上的一个标准解释

易证$\mu(q)$是良定义的。下面证明它是一个语义解释。

(1) $\mu|_X$是X上的一个$\boxed{\text{指派}}$，即对任何x有$\mu(x)\in\{t,f\}$；

(2) $\mu(q)$是L(X)上的一个$\boxed{\text{标准赋值}}$。

❖ **定义1（指派-命题变元的语义解释）** L(X)的一个指派是一个映射 $v_0: X \rightarrow \{t,f\}$。

◆ **注释** 命题符号被解释为真值。逻辑不考虑一个v_0 “对不对”。

❖ **定义2（赋值-联结词的解释原则）** L(X)的一个赋值v是一个满足下列条件的映射：

1. $v(\neg)$是一个一元函数$\{t,f\}\rightarrow\{t,f\}$；

2. $v(\rightarrow)$是一个二元函数$\{t,f\}\times\{t,f\}\rightarrow\{t,f\}$；

◆ **注释** 联结词被解释为真值函数。

❖ **定义3（标准赋值）** 标准赋值是满足下列条件的赋值v：

1. $v(\neg) =_{df} f_{\neg}$，

   $f_{\neg}(x)$的定义如下

t	f
f	t
x	$f_{\neg}(x)$
	$\neg x$的真值

2. $v(\rightarrow) =_{df} f_{\rightarrow}$，

   $f_{\rightarrow}(x, y)$的定义如下

	t	f	y
t	t	f	
f	t	t	
x	$f_{\rightarrow}(x, y)$ $x \rightarrow y$ 的真值		

μ是X上的一个指派,即对任何x有μ(x)∈{t, f}

- 因为Γ^*极大相容，所以对一切公式p_n，有$\Gamma^* \vdash p_n$或$\Gamma^* \vdash \neg p_n$

Ib 公式

1. 任何命题符号是公式，称为**原子公式；**

- 所以对任意x，有$\Gamma^* \vdash x$或$\Gamma^* \vdash \neg x$，所以有μ(x)∈{t, f}

μ(q)是L(X)上的一个标准赋值

首先证$\mu(\neg q) = \neg\mu(q)$，分以下两种情况：

- $\mu(q) = 1 \Rightarrow \Gamma^* \vdash q \Rightarrow \Gamma^* \vdash \neg\neg q \Rightarrow \mu(\neg q) = 0 = \neg\mu(q)$
- $\mu(q) = 0 \Rightarrow \Gamma^* \vdash \neg q \Rightarrow \mu(\neg q) = 1 = \neg\mu(q)$

然后证$\mu(q \to r) = \mu(q) \to \mu(r)$

情形 1 $\mu(q) \to \mu(r) = 1$. 此时又有两种可能: $\mu(q) = 0$ 或 $\mu(r) = 1$.

$\mu(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^* \vdash \neg q$ (由ν的定义)

$\Rightarrow \quad \Gamma^* \vdash q \to r$ (由否定前件律$\neg q \to (q \to r)$)

$\Rightarrow \quad \mu(q \to r) = 1$, (由ν的定义)

$\mu(r) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^* \vdash r$ (由ν的定义)

$\Rightarrow \quad \Gamma^* \vdash q \to r$ ($r \to (q \to r)$是(L1)型公理)

$\Rightarrow \quad \mu(q \to r) = 1$. (由ν的定义)

μ(q)是L(X)上的一个标准赋值

然后证$\mu(q \to r) = \mu(q) \to \mu(r)$

情形 2 $\mu(q) \to \mu(r) = 0$. 此时有

$\mu(q) = 1$ 且 $\mu(r) = 0$,

$\Gamma^* \vdash q$ 且 $\Gamma^* \vdash \neg r$, (由 v 的定义)

$\Gamma^* \vdash \neg(q \to r)$, (见 1.2.4 例 2)

$\mu(q \to r) = 0$. (由 v 的定义)

总之，不管情形 1 还是情形 2，都有

$$\mu(q \to r) = \mu(q) \to v(r).$$

所以μ(q)是L(X)上的一个标准解释