第六周作业反馈

张俸铭

April 2020

1 作业答案

练习 16

1. 设 x 不在 q 中自由出现，求证:

1° $\vdash (\exists x\ p \to q) \to \forall x(p \to q)$.

证明：即证 $\vdash (\neg\forall x\ \neg p \to q) \to \forall x(p \to q)$

先证 $\{\neg\forall x\ \neg p \to q\} \vdash \forall x\ (p \to q)$

(1)$\neg\forall x \neg p \to q$	假定
(2)$(\neg\forall x\ \neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x\ \neg p)$	永真式
(3)$\neg q \to \neg\neg\forall x\ \neg p$	(1),(2),MP
(4)$\neg\neg\forall x\ \neg p \to \forall x\ \neg p$	双否律
(5)$\neg q \to \forall x\ \neg p$	(3),(4),HS
(6)$\forall x\ \neg p \to \neg p$	K4
(7)$\neg q \to \neg p$	(5),(6)，HS
(8)$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	K3
(9)$p \to q$	(7),(8),MP
(10)$\forall x\ (p \to q)$	(9),Gen

由于 x 不在 $(\neg\forall x\ \neg p \to q)$ 中自由出现 (题设 x 不在 q 中自由出现)，故由演绎定理得：

$$\vdash (\exists x\ p \to q) \to \forall x\ (p \to q)$$

2° $\vdash \exists x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$.
证明：即证 $\vdash \neg\forall x\neg\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$
以下从 $\{\neg\forall x\neg(p \to q), \forall x\ p, \neg q\}$ 可证

(1)$\forall x\ p$	假定
(2)p	K4
(3)$p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$	永真式
(4)$\neg q \to \neg(p \to q)$	(2),(3),MP
(5)$\neg q$	假定
(6)$\neg(p \to q)$	(4),(5),MP
(7)$\forall x\neg(p \to q)$	(6),Gen
(8)$\neg\forall x\neg(p \to q)$	假定

由于 x 不在 q 中自由出现，使用反证律得：$\{\neg\forall x\ \neg(p \to q), \forall x\ p\} \vdash q$
由于 x 不在 $\neg\forall x\ \neg(p \to q)$,$\forall x\ p$ 中自由出现，使用两次演绎定理得：

$$\vdash \neg\forall x\ \neg(p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$$

2. 设 p是定理 2 中定义的 p 的对偶公式，求证：$\vdash (p^*)^* \leftrightarrow p$.

证明：

(1)$p^* \leftrightarrow \neg p$	对偶律
(2)$(p^*)^* \leftrightarrow (\neg p)^*$	子公式等价可替换性
(3)$(\neg p)^* \leftrightarrow \neg\neg p$	对偶律
(4)$(p^*)^* \leftrightarrow \neg\neg p$	(2),(3),HS
(5)$\neg\neg p \leftrightarrow p$	双否律, 第二双否律
(6)$(p^*)^* \leftrightarrow p$	(4),(5),HS

3. 找出与所给公式等价的前束范式

3° $\forall x_1\ (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2\ R_1^1(x_2) \to \exists x_3\ R_1^2(x_2, x_3))$
对约束变元更名：
$q_1 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))$
从 q_1 出发可得等价公式:
$q_2 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3(\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$q_3 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to \exists x_3 \forall x_4(R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3))$
$q_4 = \exists x_3(\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to \forall x_4(R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)))$
$q_5 = \exists x_3 \forall x_4(\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)))$
$q_6 = \exists x_3 \forall x_4 \exists x_1((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)))$
根据使用 2.1.4 节命题 2.2° 的顺序不同, 其它可能出现的正确答案:
$q_7 = \exists x_3 \exists x_1 \forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)))$
$q_8 = \exists x_1 \exists x_3 \forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)))$

练习 17

1. 试把命题甲、乙分别按照以下要求用 K 中的公式表示出来

命题甲:"若数集 E_1 中某数比零大，则数集 E_2 中所有数都比零大."
命题乙:"并非 E_1 中的数都小于或等于 E_2 中的每个数."

(1) 出现全称量词
甲: $\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1,c_1)) \to \forall x_2(R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2,c_1))$
乙: $\neg\forall x_1(R_1^1(x_1) \to \forall x_2(R_2^1(x_2) \to \neg R_1^2(x_1,x_2)))$

(2) 不出现全称量词
甲: $\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1,c_1)) \to \neg\exists x_2 \neg(R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2,c_1))$
乙: $\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge \exists x_2(R_2^1(x_2) \wedge R_1^2(x_1,x_2)))$

(3) 写成前束范式
甲: $\forall x_1 \forall x_2((R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1,c_1)) \to (R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2,c_1)))$
乙: $\exists x_1 \exists x_2(R_1^1(x_1) \wedge R_2^1(x_2) \wedge R_1^2(x_1,x_2))$

3. 设 $t \in T, \varphi, \varphi' \in \Phi_w$，$\varphi'$ 是 φ 的 x 变通，且 $\varphi'(x) = \varphi(t)$，用项 t 代换项 $u(x)$ 中 x 所得的项记为 $u(t)$。求证：$\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$.

证明: 对 $u(x)$ 在 T 中的层数 k 归纳:
$k = 0$ 时，考虑三种情况:
(1) $u(x) = c_i, u(t) = c_i, \varphi'(u(x)) = \varphi'(c_i) = \varphi(c_i) = \varphi(u(t))$
(2) $u(x) = y$ 且 $u(x) \neq x$，则 $u(t) = y$. 由于 φ' 是 φ 的变通，则 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(y) = \varphi(y) = \varphi(u(t))$

(3) $u(x)=x, u(t)=t$, 即 $\varphi'(x)=\varphi(t)$,$\varphi'(u(x))=\varphi'(x)=\varphi(t)=\varphi(u(t))$

下面考虑 $k>0$ 的情况:

记 $u(x)=f_i^n(t_1(x),...,t_n(x))$, 其中 $t_1(x),t_2(x),...,t_n(x)$ 为低层次的项, 故:

$$\begin{aligned}\varphi'(u(x)) &= \varphi'(f_i^n(t_1(x),...,t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi'(t_1(x)),...,\varphi'(t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1(t)),...,\varphi(t_n(t))) \\ &= \varphi(f_i^n(t_1(t),...,t_n(t))) \\ &= \varphi(u(t))\end{aligned}$$

综上所述，对含任意层数项的 $u(x)$，有

$$\varphi'(u(x))=\varphi(u(t))$$

2 问题总结

2.1 关于前束范式

约束变量更名

在求等价前束范式时，由于公式中可能存在重名的约束变元，因此需要对重名的不同变元先更名再做变换.

前束范式中的量词顺序

在前束范式中量词有严格的前后顺序，即全称量词与存在量词不可随意交换顺序 (在一般的公式中当然更是如此)。因为 $\exists x \leftrightarrow \neg\forall x\neg$，改变量词顺序可能会导致否定词的范围改变.

2.2 关于 K 中证明的条件

详见第五周作业反馈，部分同学在这次证明过程中仍未注意演绎定理等的适用范围说明，请在今后多加注意.