第三周作业反馈

罗晏宸

March 6 2020

1 作业答案

练习 7

2. 下面的公式哪些恒为永真式？

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$.

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$.

解

(	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	((	q	$\wedge$	$\neg$	r	)	$\wedge$	(	r	$\wedge$	$\neg$	p	))
	0	0	1	0		0		0	0	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	1	0		0		0	0	0	1		0		1	1	1	0	
	0	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	1	1	0	
	1	1	1	0		1		0	0	1	0		0		0	0	0	1	
	1	1	1	0		1		0	0	0	1		0		1	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	0	0	1	

表 1: 公式 4° 的真值表

4° 由真值表可知，公式 4° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

(	p	$\rightarrow$	(	q	$\rightarrow$	r	))	$\rightarrow$	((	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	r	)
	0	1		0	1	0		0		0	0	1	0		0	0	
	0	1		0	1	1		1		0	0	1	0		1	1	
	0	1		1	0	0		0		0	0	0	1		0	0	
	0	1		1	1	1		1		0	0	0	1		1	1	
	1	1		0	1	0		1		1	1	1	0		1	0	
	1	1		0	1	1		1		1	1	1	0		1	1	
	1	0		1	0	0		1		1	0	0	1		0	0	
	1	1		1	1	1		1		1	0	0	1		1	1	

表 2: 公式 5° 的真值表

5°　由真值表可知，公式 5° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

3. 以下结论是否正确？为什么？

1°　$\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \;\Leftrightarrow\; \vDash (\neg x_1, \cdots, \neg x_n).$

2°　$\vDash (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \;\Rightarrow\; \vDash p \leftrightarrow p'$ 且 $\vDash q \leftrightarrow q'$.

解

1°　结论正确，以下对等价关系 $\Leftrightarrow$ 做两个方向上的 分别证明：⟵ 形式上参考代换定理的证明

证明. "$\Rightarrow$": 由代换定理，取 $p_1, \cdots, p_n$ 分别为 $\neg x_1, \cdots, \neg x_n$，立刻可得：

$$\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \;\Rightarrow\; \vDash (\neg x_1, \cdots, \neg x_n).$$

"$\Leftarrow$": 设 v 是 $L(X)$ 的任一赋值，记

$$u_1 = v(\neg x_1), \cdots, u_n = v(\neg x_n)$$

将 $u_1, \cdots, u_n$ 分别指派给 $x_1, \cdots, x_n$，且将此真值指派扩张成 $L(X_n)$ 的赋值 u。于是 u 满足：

(1) $$u(x_i) = u_i = v(\neg x_i) = \neg v(x_i) \qquad i = 1, \cdots, n$$

现需证明下面的(2)式：

(2) $$v(p(x_1, \cdots, x_n)) = u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))$$

我们有：

$$
\begin{aligned}
u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) &= p(\neg u(x_1), \cdots, \neg u(x_n)) && （u \text{ 的保运算性}）\\
&= p(\neg u_1, \cdots, \neg u_n) \\
&= p(\neg v(\neg x_i), \cdots, \neg v(\neg x_n)) && （由(1)式）\\
&= p(\neg\neg v(x_i), \cdots, \neg\neg v(x_n)) && （v \text{ 的保运算性}）\\
&= p(v(x_i), \cdots, v(x_n)) && （\mathbb{Z}_2 \text{ 中公式}）\\
&= v(p(x_i, \cdots, x_n)) && （v \text{ 的保运算性}）
\end{aligned}
$$

有了(2)便可得：

$$
\begin{aligned}
\vDash (\neg x_1, \cdots, \neg x_n) &\Rightarrow u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) = 1 \\
&\Rightarrow v(p(x_i, \cdots, x_n)) = 1 \\
&\vDash p(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

□

2° 结论不正确，取以下公式为例

$$
p = x_1,\ q = x_1
$$
$$
p' = x_2,\ q' = x_2
$$

我们有

$$
\vDash (x_1 \to x_1) \leftrightarrow (x_2 \to x_2)
$$

但

$$
\nvDash x_1 \to x_2
$$

练习 9

1. 证明以下各对公式是等值的.

3° $(\neg p \vee q) \to r$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee r$.

4° $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 和 $(p \to q) \to r$.

解

3° 下面列出公式 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 的 真值表：

等值的定义：
p 与 q 等值，
是指 $p \leftrightarrow q$ 是永真式

((	$\neg$	p	$\vee$	q	)	$\to$	r	)	$\leftrightarrow$	((	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	r	)
	1	0	1	0		0	0		1		0	0	1	0		0	0	
	1	0	1	0		1	1		1		0	0	1	0		1	1	
	1	0	1	1		0	0		1		0	0	0	1		0	0	
	1	0	1	1		1	1		1		0	0	0	1		1	1	
	0	1	0	0		1	0		1		1	1	1	0		1	0	
	0	1	0	0		1	1		1		1	1	1	0		1	1	
	0	1	1	1		0	0		1		1	0	0	1		0	0	
	0	1	1	1		1	1		1		1	0	0	1		1	1	

表 3: 公式 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 的真值表

因此 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 是永真式，由定义可知 $(\neg p \vee q) \to r$ 与 $(p \wedge \neg q) \vee r$ 等值。

4° 下面列出公式 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 的真值表：

(	$\neg$	(	$\neg$	p	$\vee$	q	)	$\vee$	r	)	$\leftrightarrow$	((	p	$\to$	q	)	$\to$	r	)
	0		1	0	1	0		0	0		1		0	1	0		0	0	
	0		1	0	1	0		1	1		1		0	1	0		1	1	
	0		1	0	1	1		0	0		1		0	1	1		0	0	
	0		1	0	1	1		1	1		1		0	1	1		1	1	
	1		0	1	0	0		1	0		1		1	0	0		1	0	
	1		0	1	0	0		1	1		1		1	0	0		1	1	
	0		0	1	1	1		0	0		1		1	1	1		0	0	
	0		0	1	1	1		1	1		1		1	1	1		1	1	

表 4: 公式 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 的真值表

因此 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 是永真式，由定义可知 $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 与 $(p \to q) \to r$ 等值。

3. **设公式** p **与** q **都已写成只含有命题变元和** $\neg,\vee,\wedge$ **三种运算. 把** p **和** q **中所有** $\vee$ **改为** $\wedge$**，**$\wedge$ **改为** $\vee$**，分别得到** p^d **和** q^d**. 证明**

$$\vDash p \leftrightarrow q \;\Rightarrow\; \vDash p^d \leftrightarrow q^d$$

解

证明. 设 $p = p(x_1, \cdots, x_n)$，$q = q(x_1, \cdots, x_n)$。由代换定理，

$$\begin{aligned}
&\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \cdots, x_n) \\
\Rightarrow &\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \leftrightarrow q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \\
\Rightarrow &\vDash \neg p(\neg x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \neg q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \\
\Rightarrow &\vDash (p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^* \leftrightarrow (q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^* && \text{（由对偶律）} \\
\Rightarrow &\vDash (p(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))^d \leftrightarrow (q(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))^d && \text{（由 } p^* \text{ 和 } p^d \text{ 的定义）} \\
\Rightarrow &\vDash (p(x_1, \cdots, x_n))^d \leftrightarrow (q(x_1, \cdots, x_n))^d
\end{aligned}$$

□

2 问题总结

2.1 真值表格式问题

仍有小部分同学在绘制公式真值表时有格式方面的错误，例如没有按公式顺序绘制、没有用竖线标示出最终真值、竖线过多没有突出最终真值等。一个规范的真值表不仅能帮助快速解决问题，也能够减少在答题和批改两方面可能出现的错漏，希望大家注意。

2.2 证明表述不准确

在本次作业中出现了关于永真式、等值等概念的证明，这些数学证明和此前的形式证明不同，没有严格的格式或内容要求，但准确地完成这些证明依然需要大家理解相关概念的定义。在证明技术的使用上可以参考书上相关小节的例证或例题，例如**按层次归纳**、**扩张赋值**等都是有力的证明手段。