❖ 习题

3.4 p110：3。

3.5 试证明定理2的3：$\vdash_{K^+} u = v \to (v = w \to u = w)$.

3.5 证明：

1.	$u=v \to v=u$	(由定理2的2)
2.	$v=u \to (v=w \to u=w)$	E3
3.	$u=v \to (v=w \to u=w)$	HS 1,2

P110

3. 设项 t, u 都对公式 $p(x)$ 中 x 自由，且不含 x. 求证

$$E \cup \{\exists! x\, p(x), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t,$$

等词　　等词公理系

这里规定

$$\exists! x\, p(x) = \exists x (p(x) \land \forall y (p(y) \to x \approx y)),$$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现.

❖ 等词公设 K^+ 包含以下等词公设：

(E1) $u = u$;　　任意的项(个体)

(E2) $u_k = u \to g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) = g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;　　任意一个函数符号

(E3) $u_k = u \to (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.　　任意一个谓词符号　原子公式　蕴含

证明　先证 $E \cup \{p(t), p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)\} \vdash p(u) \to u \approx t$ ☆

即先证 $E \cup \{p(t), p(u), p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)\} \vdash u \approx t$

1.	$p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)$	前提
2.	$(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)) \to \forall y(p(y) \to x \approx y)$	重言式（书P29 命题2）
3.	$\forall y(p(y) \to x \approx y)$	MP 1,2
4.	$\forall y(p(y) \to x \approx y) \to (p(u) \to x \approx u)$	K4（项u对p(y)中y自由）
5.	$p(u) \to x \approx u$	MP 3,4
6.	$p(u)$	前提
△ 7.	$x \approx u$	MP 5,6
8.	$\forall y(p(y) \to x \approx y) \to (p(t) \to x \approx t)$	K4（项t对p(y)中y自由）
9.	$p(t) \to x \approx t$	MP 3,8
10.	$p(t)$	前提
△ 11.	$x \approx t$	MP 9,10
12.	$x \approx u \to (x \approx t \to u \approx t)$	E3
13.	$x \approx t \to u \approx t$	MP 7,12
14.	$u \approx t$	MP 11,13

∴ 得证.

由于上述形式推理中仅有的概括变元 y 不在 $p(u)$ 中自由出现，由演绎定理知☆式成立.

再由于上述推理中仅有的概括变元 y 不在 $p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)$ 中自由出现，

且 x 不在 $p(u)\to u\approx t$ 中自由出现，由 $\exists_2$ 规则

$\Sigma\cup\{p(t),\exists x(p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y))\}\vdash p(u)\to u\approx t$，即原命题得证.