习 题 3

1. 对 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 试证条件

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$

等价于对所有时刻 n,m 及所有状态 $i_0,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_m$ 有

$$P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m \mid X_0=i_0,\cdots,X_n=i\}$$
$$=P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m \mid X_n=i_n\}.$$

3.1 ~~证明~~

①若 $p(X_{n+1}=j_1,\cdots X_{n+m}=j_m \mid X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)$ 成立

$= p(X_{n+1}=j_1,\cdots X_{n+m}=j_m \mid X_n=i_n)$

令 $m=1$，可得.

$p(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)=p(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$.

② 若 $p(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)=p(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$ 成立，

由 $p(X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m \mid X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)$.

$= p(X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m, X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n) / p(X_0=i_0,\cdots X_n=i_n)$.

$= p(X_0=i_0)P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_nj_1}P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m} / p(X_0=i_0)P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}$

$= P_{i_nj_1}P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}$

$= p(X_{n+1}=j_1 \mid X_n=i_n)\cdot p(X_{n+2}=j_2 \mid X_{n+1}=j_1)\cdots p(X_{n+m}=j_m \mid X_{n+m-1}=j_{m-1})$

$= p(X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m \mid X_n=i_n)$.

2. 考虑状态 0,1,2 上的一个 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 它有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_0=0.3, p_1=0.4, p_2=0.3$, 试求概率 $P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}$.

3.2

$p(X_0=0, X_1=1, X_2=2) = p(X_0=0)p(X_1=1 \mid X_0=0)p(X_2=2 \mid X_1=1)$.

$= 0.3 \times 0.2 \times 0 = 0$

3. 信号传送问题. 信号只有 0, 1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α. $X_0 = 0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00} = P_{11} = 1-\alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha$, $0 < \alpha < 1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.

3.3

(a) $P(X_0=0, X_1=0, X_2=0) = P(X_0=0)P(X_1=0|X_0=0)P(X_2=0|X_1=0) = (1-\alpha)^2$

(b) $P(X_0=0, X_1=1, X_2=0) + P(X_0=0, X_1=0, X_2=0)$

$= (1-\alpha)^2 + \alpha^2$

(c)

转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore P^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^n] & \frac{1}{2}[1-(1-2\alpha)^n] \\ \frac{1}{2}[1-(1-2\alpha)^n] & \frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^n] \end{pmatrix}$$

$$\therefore P(X_n=0 | X_0=0) = \frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^5]$$

4. A, B 两罐总共装各 N 个球. 作如下试验: 在时刻 n 先N个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 q. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

3.4

$$P_{ij} = P(X_{n+1}=j | X_n=i) = \begin{cases} p\frac{i}{N} + q\frac{N-i}{N}, & j=i \\ q\frac{i}{N}, & j=i-1 \\ p\frac{N-i}{N}, & j=i+1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & p(N-2) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 2p & 0 \\ \vdots & \vdots & & & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & qN & pN \end{bmatrix}$$

5. 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

3.5 记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数,

$\{X_n, n\geq 0\}$ 的转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

令 $T=\{$过程进入吸收态 $(X_n=2)\} = \min\{n\geq 0 \mid X_n=2\}$.

则 $ET = E(T|X_1=0)\,p(X_1=0) + E(T|X_1=1)\,p(X_1=1)$.

设 $u = E(T|X_1=0)$, $v = E(T|X_1=1)$.

又 $E(T|X_1=0) = \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=0, X_2=k)\,p(X_2=k|X_1=0)$.

$$= (u+1)\cdot\frac{1}{2} + (v+1)\cdot\frac{1}{2} + 0$$

$$E(T|X_1=1) = \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=1, X_2=k)\,p(X_2=k|X_1=1).$$

$$= (u+1)\cdot\frac{1}{2} + 0 + 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} u = \frac{1}{2}(u+1) + \frac{1}{2}(v+1) \\ v = \frac{1}{2}(u+1) + 1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} u=7 \\ v=5 \end{cases}$ $\quad\therefore ET = \frac{1}{2}(u+v) = 6$

6. 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫中作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食品而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.

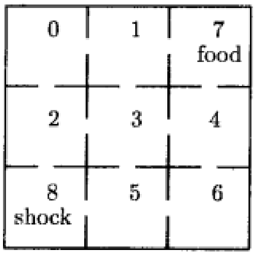

图 3.3 迷宫图

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

设 u_k 为老鼠从 k 出发在遭到电击前找到食物的概率.

则 $u_7=1$, $u_8=0$, 设 T 为进入吸收态 7 的时刻,

则 $k=0,1,2,\cdots 6$ 时.

$$u_k = P(X_T=7 \mid X_0=k) = \sum_{i=0}^{8} P(X_T=7 \mid X_0=k, X_1=i) P(X_1=i \mid X_0=k)$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1+u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0+u_3+u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0+u_3+u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1+u_2+u_4+u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3+u_6+u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3+u_6+u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4+u_5) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{array}$$

7. 记 $Z_i, i=1,2,\cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1=k\}=p_k\geqslant 0, k=0,1,2,\cdots, \sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$. 记 $X_n=Z_n, n=1,2,\cdots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

8. 对第 7 题中的 Z_i, 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}$, $n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1 \cdots Z_n\}, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n, Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore$ $\{X_n\}$ 是 M.C.

$$P_{ij}=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=\begin{cases} 0, & j<i \\ p_j, & j>i \\ \sum_{k=0}^{i}p_k, & j=i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0+p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0+p_1+p_2 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

9. 设$f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

证明：记 $T_j = \min\{n : n \geq 0 \text{ 且 } X_n = j\}$.

$$\therefore P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j, T_j = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(T_j = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid T_j = k, X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(T_j = k \mid X_0 = i) \cdot P_{jj}^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$$

10. 对第 7 题中的 Z_i, 若定义 $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $n = 1, 2, \cdots$, $X_0 = 0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

$\because X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$

$\therefore P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = P(Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$

$$= \begin{cases} p_{i_{n+1} - i_n}, & i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\therefore \{X_n, n \geq 0\}$ 为 M.C.

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

11. 一 Markov 链有状态 0, 1, 2, 3 和转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$, 其中 $f_{ii}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \cdots, n-1 | X_0 = i\}$$

定义.

$f_{00}^{(1)} = P_{00} = 0$

$f_{00}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$

$n \geq 2$时,

$$f_{00}^{(n)} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)}_{\text{先从0转移到}\{1,2,3\}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2}}_{\{1,2,3\}\text{之间相互转移}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{由}\{1,2,3\}\text{转移到}0}.$$

~~这个式子的意思是 先从0转移到~~

$n = 3$时, $f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}$

$n \geq 4$时, $f_{00}^{(n)} = \frac{5}{2^n}$ ($n \geq 4$时才有通项)

12. 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (run), 比如一结果 FSSFFFSF 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p, 失败概率为 $q = 1 - p$. 记 X_n 为 n 次试验后成功游程的长度 (若第 n 次试验失败, 则 $X_n = 0$). 试证 $\{X_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n+1, & 第n+1次成功 \\ 0, & 第n+1次失败 \end{cases}$$

$\therefore \{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为 M.C.

$$p(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=\begin{cases} p, & j=i+1 \\ q, & j=0 \end{cases}$$

$\therefore$ 转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & & p & & \\ q & & & p & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

显然，各个状态都是互达的，所以不可约.

$\because p_{00}=q>0$，$\therefore$ 非周期.

$f_{00}^{(1)}=p_{00}=q$，$f_{00}^{(n)}=p^{n-1}q$

$\because f_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}=q\sum_{n=1}^{\infty}p^{n-1}=\frac{q}{1-p}=1$

$\therefore$ 常返

$p(T=k)=p^{k-1}q$，$k=1,2,\cdots$

$ET=\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}q=\frac{1}{q}<\infty$

$\therefore$ 正常返

15. 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的,

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

(a). 反证法：设所有状态均为瞬过或零常返。

则 对 ~~[illegible]~~ $\forall$ 状态 i，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$

由 $P_{ij}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$ （第9题结论），可得

$$\sum_{k=1}^{L} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \le P_{ij}^{(n)} \le \sum_{k=1}^{L} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=L}^{+\infty} f_{ij}^{(k)}$$

固定 L，令 $n\to\infty$ 可得

$$0 \le \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} \le 0 + \sum_{k=L}^{+\infty} f_{ij}^{(k)}$$

~~[illegible]~~ $\because \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \le 1$

$\therefore$ 令 $L\to+\infty$ 时，$\sum\limits_{k=L}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \to 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$，

设该链有 N 个状态，则

$\sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 1$，令 $n\to\infty$ 可得 $\sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 0$ 矛盾。

$\therefore$ 至少有一个状态为正常返（加强结论）

(b). 设状态 i 为零常返，考虑所有与 i 互达的状态，$C(i)=\{j \mid i\Leftrightarrow j\}$

则 $C(i)$ 为一有限状态子 M.C. 由(a)中结论 $C(i)$ 中至少有一个状态正常返，从而 $C(i)$ 中所有状态正常返与 i 零常返矛盾。

16. 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0,1,2,\cdots$, 当过程处于状态 i 时它即可能以概率 p_i 转移到 $i+1$(生长) 也能以概率 $q_i = 1 - p_i$ 落回到状态 0(灾害). 而从状态 "0" 又必然 "无中" 生有. 即 $P_{01} \equiv 1$.

(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n\to\infty}(p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

(b) 若此链为常返的, 试求其为零常返的条件.

16.

(a) 转移概率矩阵为

$$
P=\begin{array}{c|l} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}
$$

该 M.C. 不可约，只需考虑状态0常返性，

$f_{00}^{(0)}=f_{00}^{(1)}=0$, $f_{00}^{(2)}=q_1$

$$
f_{00}^{(n)}=(1,0,0,\cdots)\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

$$= p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1}$$

$$\therefore f_{00}=q_1+\sum_{n=3}^{+\infty}p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1}$$

$$=1-p_1+\sum_{n=3}^{+\infty}(p_1\cdots p_{n-2}-p_1\cdots p_{n-2}p_{n-1})$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}p_1p_2\cdots p_n$$

$\therefore$ 状态0常返 $\Leftrightarrow f_{00}=1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}p_1\cdots p_n=0$.

(b) $$\mu_0=\sum_{n=0}^{+\infty}nf_{00}^{(n)}$$

$$=2(1-p_1)+\sum_{n=3}^{+\infty}n(p_1\cdots p_{n-2}-p_1\cdots p_{n-1})$$

$$=2+p_1+p_1p_2+p_1p_2p_3+\cdots$$

$$=2+\sum_{n=1}^{+\infty}p_1\cdots p_n$$

$\therefore$ 状态0零常返 $\Leftrightarrow \mu_0=\infty$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}p_1\cdots p_n$ 发散.

17. 试计算转移概率阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

的极限分布.

设π为平稳分布，$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$.

$$
\begin{cases} \pi_i\geq 0, & i=0,1,2. \\ \sum_{i=0}^{2}\pi_i=1 \\ \pi P=\pi \end{cases} \Rightarrow \pi=\left(\frac{5}{14},\frac{3}{7},\frac{3}{14}\right).
$$

18. 假定在逐日的天气变化模型中，每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链：接连两晴天，一晴一阴，一阴一晴，以及接连两阴天，分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S)$和(C,C). 该链的转移概率阵为

$$\begin{array}{c|c} & (S,S)(S,C)(C,S)(C,C) \\ \begin{array}{c}(S,S)\\(S,C)\\(C,S)\\(C,C)\end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

设其平稳分布为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$.

$$\begin{cases} \pi_i \geq 0, \quad i=0,1,2,3. \\ \sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Longrightarrow \pi = \left(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right).$$

$\therefore$ 一年中晴朗天数 $\frac{365}{2} \times \left(\frac{3}{11}\times 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) = 132.7$ 天.

19. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家)，不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p，试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

记 X_n 为身边伞数目.

则 $P_{0,M}=1$， $P_{i,M-i}=1-p$， $P_{i,M-i+1}=p$.

$$P = \begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1-p & p \\ & & & & 1-p & p & \\ & & & \cdots & & & \\ & & 1-p & p & & & \\ 1-p & p & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i = \dfrac{1}{M+1-p} \quad (i=1,2,\cdots,M) \end{cases}$$

$$\therefore P_{淋雨} = p\pi_0 = \frac{p(1-p)}{M+1-p}$$

20. 血液培养在时刻 0 从一个红细胞开始, 一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况: 以 1/4 再生 2 个红细胞, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率再生 1 个红细胞和一个白细胞, 也有 $\frac{1}{4}$ 的概率产生 2 个白细胞. 再过一分钟后每个红细胞以同样的规律再生下一代而白细胞则不再生, 并假定每个细胞的行为是独立的.

(a) 从培养开始 $n+1$ 分钟不出现白细胞的概率是多少?

(b) 整个培养过程停止的概率是多少?

(a)

$p(n+1\text{分钟内无白细胞}) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdots\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\cdots+2^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-1}$

(b) 设 Z_i 为第 n 代中第 i 个红细胞生成的红细胞数.

则 $p(Z_i=2)=\frac{1}{4}$, $p(Z_i=1)=\frac{1}{2}$, $p(Z_i=0)=\frac{1}{4}$

$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n} Z_i$ 为 n+1 分钟后红细胞个数. (分支过程)

$\phi(s)=\sum_{j=0}^{2} p_j s^j = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s^2 = s.$

解得 $s=1$

∴ 培养过程停止的概率为 1 (或者由 $EZ_i=1$, 定理 3.5 直接可得消亡概率为 1).

22. 若单一个体产生后代的分布为 $p_0=q$, $p_1=p$ $(p+q=1)$, 并假定过程开始时的祖先数为 1, 试求分支过程第 3 代总数的分布.

22.

~~$p(X_3$~~

$p(X_3=1) = p_1^3 = p^3.$

$p(X_3=0) = 1-p^3.$