第七周作业反馈

张倖铭

April 2020

1 作业答案

练习 18

1. 设 K 中的 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}, R = \{R_1^2\}$，它的一个解释域是 $N = \{0, 1, 2, ...\}, \overline{c_1} = 0, \overline{f_1^1}$ 是后继函数,$\overline{f_1^2}$ 是 +,$\overline{f_2^2}$ 是 ×,$\overline{R_1^2}$ 是 =. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_N$，使得 $|p|(\varphi) = 1, |p|(\psi) = 0$，其中 p 是：

3° $\neg R_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$.
使上式为真的指派满足：$x_1 \times x_2 \neq x_2 \times x_3$
故取项解释 φ 满足：$\varphi(x_1) = 1, \varphi(x_2) = 1, \varphi(x_3) = 2$
取项解释 ψ 满足：$\psi(x_1) = 1, \psi(x_2) = 2, \psi(x_3) = 1$
(注：答案不唯一)

5° $\forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$.
由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3, c_1), x_3) \to R_1^2(x_1, x_2)$.
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_3, x_3 = 0$ 且 $x_1 \neq x_2$
因此，不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

2. 已知 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^2\}, R = \{R_1^2\}$，还已知 K 的解释域 Z(整数集),$\overline{c_1} = 0, \overline{f_1^2}$ 是减法,$\overline{R_1^2}$ 是 $'<'$. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_N$，使得 $|p|(\varphi) = 1, |p|(\psi) = 0$，其中 p 是：

5° $\forall x_1\ R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$

由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_3\ R_1^2(f_1^2(x_3, c_1), x_3) \to R_1^2(x_1, x_2)$
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_3, x_3 - 0 < x_3$ 且 $x_1 \geq x_2$
而不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

$6°\quad \forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), c_1) \to R_1^2(x_1, x_2))$
由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), c_1) \to R_1^2(x_3, x_4))$
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_1, x_2\ x_1 - x_2 < 0$ 且 $x_3 \geq x_4$
而不存在对 x_3, x_4 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

练习 19

1. 对 2.2.1 例 1 中的 K, N 计算 $|p|_N$，其中 p 为：

$3°\quad \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3\ R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$
对一切 $\varphi \in \Phi_N$, 由 $\varphi(x_1) + \varphi(x_1) \in N$, 必有 $\exists x_3\ \varphi(x_3) = \varphi(x_1) + \varphi(x_1)$
故 $|p|_N = 1$

3. 设 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^2\}, R = \{R_1^2\}$. 试给出 K 的两个解释域 M_1, M_2 使得 $|p|_{M_1} = 1, |p|_{M_2} = 0$，其中 p 为：

$1°\quad \forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), c_1) \to R_1^2(x_1, x_2))$
取 M_1 : 解释域为 $N; \overline{c_1} = 0; \overline{f_1^2} : -; \overline{R_1^2} :=$
M_2 : 解释域为 $N; \overline{c_1} = 0; \overline{f_1^2} : +; \overline{R_1^2} : \geq$

$2°\quad \forall x_1\ (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_2, x_1))$
取 M_1 : 解释域为 $\mathrm{N}; \overline{R_1^2} :=$
M_2 : 解释域为 $\mathrm{N}; \overline{R_1^2} :>$

4. 证明 $|p|_M = 1 \Rightarrow |\exists x\ p|_M = 1$. 反向是否成立？说明理由.

证明：
$\because |p|_M = 1$

$\therefore \forall\varphi \in \Phi_M$, 有 $|p|(\phi) = 1$

故对 $\forall\varphi \in \Phi_M, |\neg p|(\varphi) = 0$, 即 $|\neg p|_M = 0$

$\therefore |\forall x \ \neg p|_M = 0$

$\therefore |\exists x \ p|_M = 1$, 证毕.

反向不成立。可以举出反例：如对于 2.2.1 节例 1 定义的 K 和 N，有 $|\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_N = 1$, 但 $|R_1^2(x_1, x_2)|_N = 0$

练习 20

1.4° **证明:** $\models \forall x \forall y \ p \to \forall y \forall x \ p$

证明：用反证法

假设 $\forall x \forall y \ p \to \forall y \forall x \ p$ 不是有效式，则 $\exists M$, $\exists\varphi \in \Phi_M$, 有 $|\forall x \forall y \ p \to \forall y \forall x \ p|(\varphi) = 0$

即 $|\forall x \forall y \ p|(\varphi) = 1$ 且 $|\forall y \forall x \ p|(\varphi) = 0$

由 $|\forall y \forall x \ p|(\varphi) = 0$, 存在 φ 的 y 变通 φ_1, 使得 $|\forall x \ p|(\varphi_1) = 0$, 进而存在 φ_1 的 x 变通 φ_2, 使得 $|p|(\varphi_2) = 0$.

由于 φ_1, φ_2 是 φ_1 的变通，故由赋值函数的性质知：$|\forall y \ p|(\varphi_1) = 0$, 进一步 $|\forall x \forall y \ p|(\varphi) = 0$, 这与假设推得的 $|\forall x \forall y \ p|(\varphi) = 1$ 矛盾!

故假设不成立. 故 $\forall x \forall y \ p \to \forall y \forall x \ p$ 是有效式，即:

$$\models \forall x \forall y \ p \to \forall y \forall x \ p$$

3. 证明 K 中以下公式都不是有效式

4° $\forall x_1 \ R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$

取 M : 解释域为 $N; \overline{R_1^2} = ' > '$, 则 $|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)|_N = 1$ 而 $|\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_N = 0$

故原公式不是有效式.

5° $\exists x_1 \ R_1^1(x_1) \to R_1^1(x_1)$

取 M : 解释域为 $N, \overline{R_1^1}$ 为' 是质数'

则当 $\varphi(x_1) = 4$ 时,$|\exists x_1 \ R_1^1(x_1)|(\varphi) = 1$ 而 $|R_1^1(x_1)|(\varphi) = 0$

故原公式不是有效式.

2 问题总结

2.1 关于项解释与公式真值

项解释是与公式中出现的变元有关，而公式的真值只与出现的自由变元有关. 因此当计算公式赋值时，注意将自由变元和约束变元分开讨论 (特别是当出现重名变元时，为避免出错可以先做更名处理再计算). 如练习 18 的 1.5° 有不少同学出错，此处同时还需要注意全称量词的作用范围是前件而不是整个蕴含式.