

第十六次作业反馈

刘硕

June 3 2020

1 作业答案

练习23

2. 在例1的K的解释域N中, 若等词 \approx 改为解释成“有不同的奇偶性”, 那么等词公理在N中是否都恒真? 是否都恒假?

解

E1型公理恒假, E3型公理非恒真非恒假。证明如下:

首先考虑E1公理, 对任意的项解释 ϕ , 对任意的项 x , 有 $|x \approx x|(\phi) = 0$, 因此E1型公理恒假。

再考虑E3型公理 $x \approx y \rightarrow (x \approx z \rightarrow y \approx z)$, 取俩个项解释 φ_1, φ_2 。满足 $\varphi_1(x), \varphi_1(z), \varphi_2(x)$ 为偶数, $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_2(z)$ 为奇数, 于是有:

$$|x \approx y \rightarrow (x \approx z \rightarrow y \approx z)|(\varphi_1) = 1 \quad (1)$$

$$|x \approx y \rightarrow (x \approx z \rightarrow y \approx z)|(\varphi_2) = 0 \quad (2)$$

3. 设项 t, u 都对公式 $p(x)$ 中的 x 自由, 且不含 x . 求证

$$E \cup \{\exists! x p(x), p(t)\} \vdash p(u) \rightarrow u \approx t$$

这里规定

$$\exists! x p(x) = \exists x(p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow x \approx y))$$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现.

解 先证明 $E \cup \{p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow x \approx y), p(t)\} \vdash p(u) \rightarrow u \approx t$

证明.

- | | | |
|------|---|------------------|
| (1) | $p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow x \approx y)$ | 假设 |
| (2) | $\forall y(p(y) \rightarrow x \approx y)$ | |
| (3) | $\forall y(p(y) \rightarrow x \approx y) \rightarrow (p(t) \rightarrow x \approx t)$ | (K4) |
| (4) | $p(t) \rightarrow x \approx t$ | (2),(3) MP |
| (5) | $p(t)$ | 假设 |
| (6) | $x \approx t$ | (4),(5) MP |
| (7) | $\forall y(p(y) \rightarrow x \approx y) \rightarrow (p(u) \rightarrow x \approx u)$ | (K4) |
| (8) | $p(u) \rightarrow x \approx u$ | (2),(7) MP |
| (9) | $x \approx u \rightarrow u \approx x$ | 命题2.2° |
| (10) | $p(u) \rightarrow u \approx x$ | (8),(9) HS |
| (11) | $x \approx t \rightarrow ((p(u) \rightarrow u \approx x) \rightarrow (p(u) \rightarrow u \approx t))$ | (E3) |
| (12) | $p(u) \rightarrow u \approx t$ | (6),(10),(11) MP |

证明中使用K4型公理的依据是, t 对 $p(x)$ 中的 x 自由。

□

由 \exists_2 规则, 并且 x 不在 $p(u) \rightarrow u \approx t$ 中自由出现, 于是有
 $E \cup \{\exists x(p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow x \approx y)), p(t)\} \vdash p(u) \rightarrow u \approx t$
 证毕。

2 问题总结

2.1 练习23的T2要求在例1的解释域中判定等词公理的恒真恒假

同学们这个题被扣分的原因主要是忽略了课本P105的例1的解释域 N 中,
 $F = \emptyset$, 所以在这个解释域中不会有E2型的公理。

2.2 T3在使用K4型谓词演算公理以及 \exists_2 规则时注意

如用如上所述的俩种公理以及其它设计到Gen变元以及实例化变元的情况，一定要进行合理的变元自由情况的说明。