011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

3.3 形式算术K_N

陈小平（中国科学技术大学）

回顾：初等数论形式化

语法: 谓词 相应关联到一定数集；表现：让Peano5条理论写成一阶公式中

◆Peano定义的形式化理论：

(P1) $N(\mathbf{0})$;

(P2) $\forall x(N(x) \rightarrow \exists y!(y = x' \wedge N(y)))$;

(P3) $\forall x((N(x) \rightarrow \neg(\mathbf{0} = x'))$;

(P4) $\forall x \forall y((x' = y' \rightarrow x = y))$;

(P5) $p(\mathbf{0}) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(x')) \rightarrow \forall x p(x)$, 其中$p$是任意一阶公式。

其中，$\exists y!$代表“存在唯一的y”。

$0 \in \mathbf{N}$. 5条

若 $x \in \mathbf{N}$, 则 x 有且只有一个后继 $x' \in \mathbf{N}$.

对任意 $x \in \mathbf{N}, x' \neq 0$.

对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $x_1' \neq x_2'$.

设 $M \subseteq \mathbf{N}$. 若 $0 \in M$, 且当 $x \in M$ 时也有 $x' \in M$, 则 $M = \mathbf{N}$.

◆**观察** 以上尝试中使用了等词=，代表自然数上的相等关系，=尚未形式化。

回顾：初等数论形式化

❖ 等词公设E：

(E1) $u = u$;

(E2) $u_k = u \rightarrow g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) = g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;

(E3) $u_k = u \rightarrow (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \rightarrow P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.

❖ 等词公式E的效果 等词公设E严格刻画了数学中相等关系的两条基本性质——等价性和等项可替换性。

❖ 定理(非正规模型存在性) 设$E^* \subseteq K^+(Y)$是E的任何相容扩张：$E \subseteq E^*$且E^*相容，则E^*有非正规K^+模型。(最终目标：将等词完全形式化：但实际上无法实现)

❖ 观察 综合以上结果，初等数论形式化将立足于等词公设E。→有根有据

(即再加至E*，意义不大)

说明数学中相等关系总有一些性质无法写入E*，即使E*无穷集合

3.3 形式算术K_N

❖ 形式算术K_N 初等数论一个片段的应用谓词演算/一阶形式化理论。

(一组公设)

❖ K_N构成

1. 一阶语言$K_N(Y)$：

- 逻辑符号：同K^+；(个体变元，联结词，量词)

- 非逻辑符号：个体常元**0**，一元后继函数符号**′**，二元函数符号**+**、**×**，二元常谓词符号**=**；

- 项和公式的形成规则：同K^+；

3.3 形式算术K_N

2. 公理模式：(K1) ~ (K5)；

3. 推理规则：(MP)、(UG)；

4. 公设：

- 等词公设

(E1) $u \doteq u$;

(E2) $u_k \doteq u \to g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \doteq g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;

(E3) $u_k \doteq u \to (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.

3.3 形式算术K_N

- 算术公设：（K_N 逐项增加的）

(N1) $\neg(u' = \mathbf{0})$; （u的后继不等于0） (P3) → Peano 第3条公设

(N2) $u' = v' \to u = v$; (P4)

(N3) $u + \mathbf{0} = u$ 函数符号 加法递归定义

(N4) $u + v' = (u + v)'$ 加法递归定义 → 对后继函数符号递归

(N5) $u \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ 乘法递归定义

(N6) $u \times v' = (u \times v) + u$ 乘法递归定义

(N7) $(p(\mathbf{0}) \wedge \forall x(p(x) \to p(x'))) \to \forall x p(x)$ (P5)归纳公设（P为任意K_N公式）

5.形式推理/形式证明：公设与公理同样使用，其余同K;

6. 定义：同K.

3.3 形式算术K_N

❖ K_N的标准模型N 预期K_N是初等数论一个片段的形式化，使得该片段是一个正规K_N模型N=(**N**, **F**, **P**)，称为K_N的标准模型，其中**N**是自然数集，**F**包含自然数集上的后继函数+1、加法函数+和乘法函数×，**P**包含自然数集上的相等关系=，满足：

$$\mathbf{0}^N\text{是}0;\quad {}'^N\text{是}+1;\quad \mathbf{+}^N\text{是}+;\quad \mathbf{\times}^N\text{是}\times;\quad \mathbf{=}^N\text{是}=。$$

❖ 定理1 N是K_N的一个模型。

→ E1、E2、E3有效，且 $=^N$ 的解释 ... 中的相等关系（第2节上的P7，定理1）

◆证明 由于N是一个正规K^+模型，只需验证K_N的所有算术公设p在N上是有效的：N⊨p（自修）。

3. 3 形式算术K_N

不记成上划线(参见书)

❖ 简写记号 $K_N(Y)$中的下列符号简写称为K_N数字：

　0简写为$\underline{0}$； 0′简写为$\underline{1}$； 0″简写为$\underline{2}$； …； 0′…′简写为$\underline{n}$。

❖ 注释 数字是K_N的简写符号，解释为N中的自然数。数字中可以出现自然数的加法和乘法运算，代表0的后继函数′的多次连续复合运算，例如数字$\underline{1+3}$、$\underline{2+2}$、$\underline{3+1}$和$\underline{4}$都代表K_N项0′′′′。

❖ 定理2 $\vdash_{K_N} \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$。 (由N3 - N4)

二个K_N项

K_N中的 项.

◆证明 自修。

◆注释 $\underline{n}$+$\underline{m}$是两个K_N数字的加法运算，其中+是K_N的加法函数符号；$\underline{n+m}$是一个K_N数字，其中+是自然数的加法运算。

3.3 形式算术K_N

❖ 定理3 $\vdash_{K_N} \underline{n} \times \underline{m} = \underline{n \times m}$。

◆ 证明 自修。

❖ 注释 定理2、3表明，自然数的加法和乘法运算可以在K_N中通过推理实现。

❖ 定理4 $\vdash_{K_N} u + v = v + u$。

❖ 定理5 $\vdash_{K_N} u \times v = v \times u$。

◆ 注释 定理4、5表明，K_N中的加法和乘法运算满足交换律。

3.3 形式算术K_N

初等数论中的

❖ **定理6** 如果m=n，则$\vdash_{K_N} \underline{m} = \underline{n}$；如果m≠n，则$\vdash_{K_N} \neg(\underline{m} = \underline{n})$。

◆ **注释** 以上定理表明，自然数运算可以通过K_N中的形式证明实现。

❖ **注释** 经过一系列K_N内定理的证明发现，自然数加法和乘法运算的主要性质（交换律、结合律、分配律、消去率…）在K_N中全部满足。

减法、除法均由此推导出.

❖ **观察** 对比K^+用等词公设形式化相等关系的主要性质，K_N用等词公设和算术公设形式化了初等数论一个片段的主要性质。

∴利用这些性质的推理均能在K_N中完成

3.3 形式算术K_N

❖ **讨论** 由于K_N形式化了初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)的主要性质，这个片段中数学命题的证明可以在K_N中完成，K_N形式证明的每一步骤都是形式化的，只使用K_N的公理、公设和推理规则；而这些命题在数学中的证明和猜想可能使用了直觉。(也可能用了K_N之外的命题)

❖ **讨论** 初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)是K_N的模型，如果证明了K_N的相容性，即不存在p使得$\vdash_{K_N} p$和$\vdash_{K_N} \neg p$同时成立，是否就证明了初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)的无矛盾性？

?