HW11

P110 3

3. 设项 t,u 都对公式 $p(x)$ 中 x 自由，且不含 x. 求证

$$E \cup \{\exists!\, x\, p(x), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t,$$

这里规定

$$\exists!\, x\, p(x) = \exists x (p(x) \land \forall y (p(y) \to x \approx y)),$$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现.

证明：

结论一：由于y不在$p(x)$中出现，且t、u都对公式$p(x)$中的x自由，所以项t、u都对公式$p(y)$中的y自由

由演绎定理，即证$E \cup \{\exists x(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)), p(t), p(u)\} \vdash u \approx t$

下面是$u \approx t$在K中从$E \cup \{p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y), p(t), p(u)\} \vdash u \approx t$的一个证明：

1. $p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)$ 假定
2. $p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y) \to \forall y(p(y) \to x \approx y$ 永真式
3. $\forall y(p(y) \to x \approx y$ MP1,2
4. $\forall y(p(y) \to x \approx y) \to (p(u) \to x \approx u)$ K_4 (条件依据结论一)
5. $\forall y(p(y) \to x \approx y) \to (p(t) \to x \approx t)$ K_4 (条件依据结论一)
6. $p(u) \to x \approx u$ MP3,4
7. $p(t) \to x \approx t$ MP3,5
8. $p(u)$ 假定
9. $p(t)$ 假定
10. $x \approx u$ MP8,6
11. $x \approx t$ MP9,7
12. $x \approx u \to (x \approx t \to u \approx t)$ E3
13. $x \approx t \to u \approx t$ MP10,12
14. $u \approx t$ MP11,13

结论二：在上面的证明中没有使用任何Gen变元，所以根据演绎定理，不需要任何Gen变元就可得到$E \cup \{(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t$

结论三：由于项t、u都不含x，所以根据$\exists_2$规则，可得$E \cup \{\exists x(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t$

结论一没有写且在K_4使用中没有注明条件的，一个-0,5；

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$, 其中项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的；

结论二使用演绎定理没有解释没有使用Gen变元的，-1；

定理 2 (演绎定理)

1° 若 $\Gamma \vdash p \to q$, 则 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$;

2° 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 且证明中所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 Gen 变元就可得 $\Gamma \vdash p \to q$.

结论三没有写使用$\exists_2$的条件的，-1；

命题 4 ($\exists_2$ 规则) 设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 其证明中 Gen 变元不在 p 中自由出现，且 x 不在 q 中自由出现，那么有 $\Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash q$, 且除了 x 不增加其他 Gen 变元.

定理2的3 $\vdash_k u = v \to (v = w \to u = w)$

证明：

1. $u = v \to v = u$ 定理2的2
2. $v = u \to (v = w \to u = w)$ E3
3. $u = v \to (v = w \to u = w)$ HS 1,2

解：证明：先证 $E \cup \{u \approx v\} \vdash v \approx u$

(1) $u \approx v \to (u \approx u \to v \approx u)$ E3

(2) $u \approx v$ 前提

(3) $u \approx u \to v \approx u$ Mp (1)(2)

(4) $u \approx u$ E1

(5) $v \approx u$ Mp (3)(4)

由演绎定理 $E \vdash u \approx v \to v \approx u$

(6) $u \approx v \to v \approx u$ 演绎定理

(7) $v \approx u \to (v \approx w \to u \approx w)$ E3

(8) $u \approx v \to (v \approx w \to u \approx w)$ HS (6)(7)

证毕

本次作业出现的问题

1. 假定是如何来的？

$\exists! x p(x) = \exists x(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y))$. y 不在 $p(x)$ 中出现

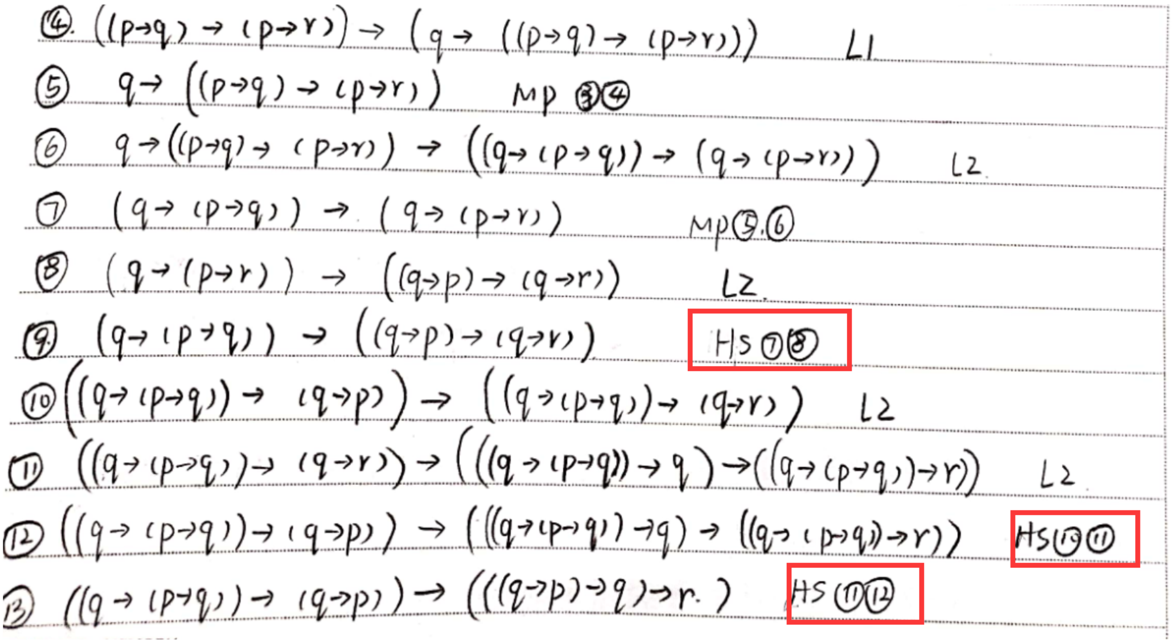
由演绎定理，只需证 $E \cup \{\exists! x p(x), p(t), p(u)\} \vdash u \approx t$.

(1). 令 $p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)$ 假定.

(2). $(p(x) \land \forall y(p(y) \to x \approx y)) \to \forall y(p(y) \to x \approx y)$ 永真式.

小测中批改出现的问题

直接证明中的HS



④ $((p\to q)\to(p\to r))\to(q\to((p\to q)\to(p\to r)))$ L1

⑤ $q\to((p\to q)\to(p\to r))$ MP ③④

⑥ $(q\to((p\to q)\to(p\to r)))\to((q\to(p\to q))\to(q\to(p\to r)))$ L2

⑦ $(q\to(p\to q))\to(q\to(p\to r))$ MP ⑤,⑥

⑧ $(q\to(p\to r))\to((q\to p)\to(q\to r))$ L2.

⑨ $(q\to(p\to q))\to((q\to p)\to(q\to r))$ $\boxed{\text{HS ⑦⑧}}$

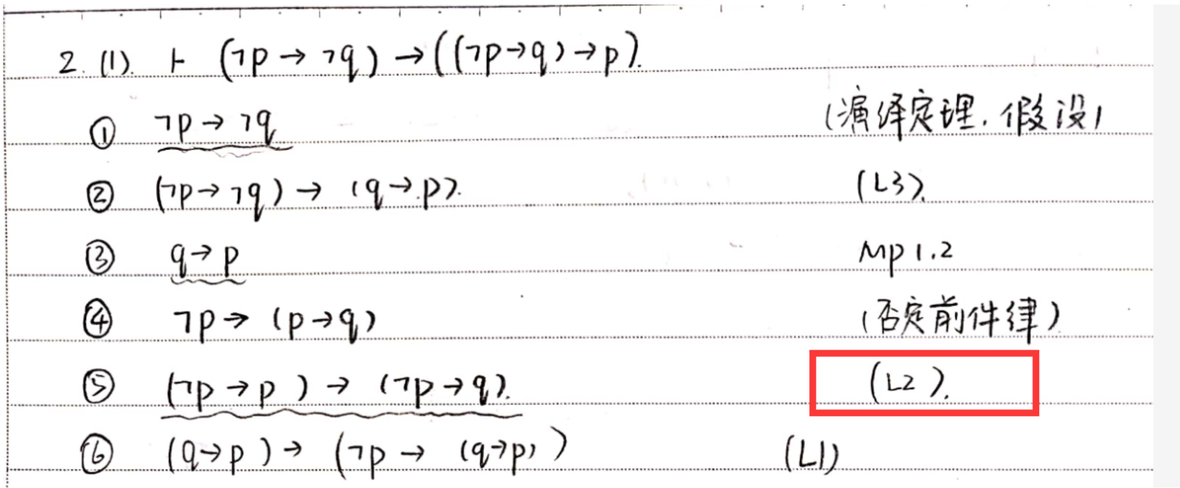
⑩ $((q\to(p\to q))\to(q\to p))\to((q\to(p\to q))\to(q\to r))$ L2

⑪ $((q\to(p\to q))\to(q\to r))\to(((q\to(p\to q))\to q)\to((q\to(p\to q))\to r))$ L2

⑫ $((q\to(p\to q))\to(q\to p))\to(((q\to(p\to q))\to q)\to((q\to(p\to q))\to r))$ $\boxed{\text{HS ⑩⑪}}$

⑬ $((q\to(p\to q))\to(q\to p))\to(((q\to p)\to q)\to r)$ $\boxed{\text{HS ⑪⑫}}$

L2的使用



2. (1) $\vdash(\neg p\to\neg q)\to((\neg p\to q)\to p)$.

① $\neg p\to\neg q$ (演绎定理, 假设)

② $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$. (L3)

③ $q\to p$ MP 1,2

④ $\neg p\to(p\to q)$ (否定前件律)

⑤ $(\neg p\to p)\to(\neg p\to q)$. $\boxed{\text{(L2)}}$.

⑥ $(q\to p)\to(\neg p\to(q\to p))$ (L1)