第四周作业反馈

罗晏宸

March 21 2020

1 作业答案

练习 10

1. 求以下公式的等值主析取范式.

3° $(x_1 \land x_3) \lor (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$.

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$.

解

3° 根据如下的真值表

(	x_1	$\land$	x_3	)	$\lor$	(	$\neg$	x_2	$\leftrightarrow$	x_3	)
	0	0	0		0		1	0	0	0	
	0	0	1		1		1	0	1	1	
	0	0	0		1		0	1	1	0	
	0	0	1		0		0	1	0	1	
	1	0	0		0		1	0	0	0	
	1	1	1		1		1	0	1	1	
	1	0	0		1		0	1	1	0	
	1	1	1		1		0	1	0	1	

表 1: 公式 3° 的真值表

得到公式 3° 的成真指派是 $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 0)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$。写出与这 5 个成真指派相对应的基本合取式：$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$，$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_3$，$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$，然后以它们为析取支构成析取范式，便得所求：

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$$

4° 根据如下的真值表

	$\neg$	((	x_1	$\rightarrow$	$\neg$	x_2	)	$\rightarrow$	x_3	)
	1		0	1	1	0		0	0	
	0		0	1	1	0		1	1	
	1		0	1	0	1		0	0	
	0		0	1	0	1		1	1	
	1		1	1	1	0		0	0	
	0		1	1	1	0		1	1	
	0		1	0	0	1		1	0	
	0		1	0	0	1		1	1	

表 2: 公式 4° 的真值表

得到公式 4° 的成真指派是 $(0, 0, 0)$,$(0, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$。写出与这 3 个成真指派相对应的基本合取式：$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$，$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$，然后以它们为析取支构成析取范式，便得所求：

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$$

2. 求以下公式的等值主合取范式.

4° $((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4$.

解

4° 根据如下的真值表

((	x_1	$\to$	x_2	)	$\to$	x_3	)	$\to$	x_4
	0	1	0		0	0		1	0
	0	1	0		0	0		1	1
	0	1	0		1	1		0	0
	0	1	0		1	1		1	1
	0	1	1		0	0		1	0
	0	1	1		0	0		1	1
	0	1	1		1	1		0	0
	0	1	1		1	1		1	1
	1	0	0		1	0		0	0
	1	0	0		1	0		1	1
	1	0	0		1	1		0	0
	1	0	0		1	1		1	1
	1	1	1		0	0		1	0
	1	1	1		0	0		1	1
	1	1	1		1	1		0	0
	1	1	1		1	1		1	1

表 3: 公式 4° 的真值表

得到公式 $\neg(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4)$ 的成真指派是

$$(0, 0, 1, 0),\ (0, 1, 1, 0),\ (1, 0, 0, 0),\ (1, 0, 1, 0),\ (1, 1, 1, 0)$$

则 $\neg(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4)$ 的等值主析取范式是

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$$
$$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$$

由此得 $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$ 的等值主合取范式是

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

练习 11

2. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\wedge$ 的公式，使之与以下个公式等值：

3° $(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$.

解

3°

$$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$$

与

$u \leftrightarrow v = (u \to v) \wedge (v \to u)$

$$((x_1 \to \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \to x_1)) \leftrightarrow x_3$$

等值，又与

$u \to v = \neg(u \wedge \neg v)$

$$(\neg(x_1 \wedge \neg\neg x_2) \wedge \neg(\neg x_2 \wedge \neg x_1)) \leftrightarrow x_3$$

即

$$\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg(x_3 \wedge \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)))$$

等值。

练习 12

把以下论证形式化，并判断是否合理。

2. A,B,C,D 为四个事件. 已知：A 和 B 不同时发生；若 A 发生，则 C 不发生而 D 发生；若 D 发生，则 B 不发生. 结论：B 和 C 不同时发生.

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示事件 A,B,C,D 发生，于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1 \wedge x_2),\ x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4),\ x_4 \to \neg x_2\} \vdash \neg(x_2 \wedge x_3)$$

从语义上检查它的正确性：检查 $\neg(x_1 \wedge x_2)$，$x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4)$ 和 $x_4 \to \neg x_2$ 这三个公式的所有公共成真指派是否都是 $\neg(x_2 \wedge x_3)$ 的成真指派。为此，只用检查是否存在使这三个公式为真而使 $\neg(x_2 \wedge x_3)$ 为假的指派——如果存

在这种指派，那么原结论不成立。问题归结为下面的真值方程组(1)∼(4)是否有解：

$$\begin{cases} \neg(v_1 \wedge v_2) = 1 & (1) \\ v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 1 & (2) \\ v_4 \to \neg v_2 = 1 & (3) \\ \neg(v_2 \wedge v_3) = 0 & (4) \end{cases}$$

由(4)式可得

$$v_2 = 1 \tag{5}$$

且

$$v_3 = 1 \tag{6}$$

由(1)式与(5)式得

$$v_1 = 0 \tag{7}$$

由(3)式与(5)式得

$$v_4 = 0 \tag{8}$$

将(6)、(7)、(8)代入(2)式的左边，得由(3)式与(5)式得

$$v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 0 \to (\neg 1 \wedge 0) = 1 \tag{9}$$

所得结果说明：$(0, 1, 1, 0)$ 是(1)∼(4)的解。它是前三个公式（“前提”）的公共成真指派，但却是 $\neg(x_2 \wedge x_3)$（“结论”）的成假指派，所以题中的论证不能成立。

3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是：“a,b,c 三人中至少有一人未作案”，判断是否正确？

例 3 一案案情涉及 a,b,c,d 四人. 根据已有线索，知

1° 若 a,b 均未作案，则 c,d 也均未作案；

2° 若 c,d 均未作案，则 a,b 也均未作案；

3° 若 a 与 b 同时作案，则 c 与 d 有一人且只有一人作案；

4° 若 b 与 c 同时作案，则 a 与 d 同时作案或同未作案.

办案人员由此得出结论：a 是作案者，这个结论是否正确？

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示 a,b,c,d 各自作案，于是题中的论证可形式化为

$$\begin{aligned}&\{(\neg x_1\wedge\neg x_2)\to(\neg x_3\wedge\neg x_4),\ (\neg x_3\wedge\neg x_4)\to(\neg x_1\wedge\neg x_2),\\&(x_1\wedge x_2)\to((x_3\wedge\neg x_4)\vee(\neg x_3\wedge x_4)),\\&(x_3\wedge x_4)\to((x_1\wedge\neg x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_4))\}\vdash\neg(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\end{aligned}$$

解真值方程组：

$$\begin{cases}(\neg v_1\wedge\neg v_2)\to(\neg v_3\wedge\neg v_4)=1 & (1)\\(\neg v_3\wedge\neg v_4)\to(\neg v_1\wedge\neg v_2)=1 & (2)\\(v_1\wedge v_2)\to((v_3\wedge\neg v_4)\vee(\neg v_3\wedge v_4))=1 & (3)\\(v_2\wedge v_3)\to((v_1\wedge v_4)\vee(\neg v_1\wedge\neg v_4))=1 & (4)\\\neg(v_1\wedge v_2\wedge v_3)=0 & (5)\end{cases}$$

由(5)式可得

$$v_1=1 \tag{6}$$

$$v_2=1 \tag{7}$$

$$v_3=1 \tag{8}$$

以上三式代入(1)式与(2)式可得不论 v_4 取何值，两式均成立。代入(3)式可得

$$v_4=0 \tag{9}$$

代入(4)式可得

$$\begin{aligned}&(v_2\wedge v_3)\to((v_1\wedge v_4)\vee(\neg v_1\wedge\neg v_4))\\=&(1\wedge 1)\to((1\wedge 0)\vee(\neg 1\wedge\neg 0))\\=&0\end{aligned} \tag{10}$$

(4)式与(10)式矛盾，所以方程组(1)~(5)无解。这说明题中原结论成立。

2 问题总结

2.1 主析取/合取范式的概念理解错误

一个公式的可能有很多个与之等值的析取范式，而**主**析取范式是一种特殊的析取范式，在它的每个析取支中，公式中的**每个命题变元都会出现且仅**

出现一次，主合取范式也是相似的。一部分同学在作业中给出的并不是标准的主析取/合取范式，其中的一些析取/合取支中部分变元并未出现。

2.2 公式的成真指派计算错误

尽管真值表是本课程开始时的知识内容，但在此前的作业反馈中我们已反复强调这一工具在后续内容中的必要性和有效性。在本次作业中通过公式成真指派确定主析取范式的内容中，部分同学得出了错误的成真指派进而导致答案错误。虽然在很多题目的解答中，公式的真值表并不是必要的书面过程，但是在求完整的成真/成假指派时，一个格式标准的真值表依然可以快速准确地得出结果。

2.3 对实际问题的形式化错误

本课程中命题逻辑的内容暂时告一段落，在第一章的末尾，我们谈到了命题逻辑在实际问题中的应用，这一部分内容是很直观的，求解方式也比较多样：对于简单问题可以列真值表，复杂一些的可以求解真值方程组。但是在此之前，一个很重要的步骤是对实际问题的形式化。

和概率论中的部分内容很相似，我们需要明确地用命题变元来代指（二元）事件的发生，这里部分同学的表述并不清晰，例如没有表达 x_i 到底是描述嫌疑人 i 作案还是未作案，另外直接使用题目中的字母作为命题变元也是不可取的，同样会产生歧义。

一个小的细节是很多同学对于事件 A 与 C 不同时发生这一描述的形式化是 $x_1 \leftrightarrow \neg x_3$（其中 x_1,x_3 分别表示事件 A 发生和事件 C 发生）。这是不正确的，这样的形式化实际上描述的是“A 与 C 有且仅有一个发生”。正确的形式化应当是 $\neg(x_1 \wedge x_3)$，实际上这正是逻辑**与非**的表达。另外以此为例，我们希望大家对于实际问题的形式化是直觉的，比如同样的描述，另一种形式化 $\neg x_1 \vee \neg x_3$ 就在直观性上欠缺一些。