1.6 命题演算的可靠性和完全性

打开思路，搞清楚推论。

2（从Γ^*构造语义解释I） 定义映射μ: L(X) →{t, f}使得对任何公式q有：

∵ L(X)中q是完备的（∵Γ^*是极大相容集），任取q，必有$\Gamma^*\vdash q$或$\Gamma^*\vdash\neg q$，即 $\mu(q)$总有唯一值

$$\mu(q)=\begin{cases} t, & \text{如果}\Gamma^*\vdash q; \\ f, & \text{如果}\Gamma^*\vdash\neg q; \end{cases}$$

Γ^*是极大相容集：有且仅一成立（$\Gamma^*\vdash q$和$\Gamma^*\vdash\neg q$）

易证$\mu(q)$是良定义（1.4的性质）的。下面证明它是一个语义解释。⇒需证明(1)(2)

(1) $\mu|_X$是X（命题变元）上的一个指派，即对任何x有$\mu(x)\in\{t, f\}$；

(2) $\mu(q)$（q含联结词）是L(X)上的一个标准赋值。

依μ定义及Γ^*性质知$\mu(\Gamma)=t$并且$\mu(p)=f$，即$\Gamma\models p$不成立。

∵$\Gamma\subseteq\Gamma^*$　　$\Gamma^*\vdash\neg p$

习题

1.8 证明$\mu(q)$是L(X)上的一个语义解释。

证明：(1) 命题变元均为原子公式，属于L(X)，任取一个命题变元x，根据Γ^*的构造可知，不妨设x为L(X)公式序列 $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots$ 中的p_k。

则若$\Gamma_k\vdash p_k$，由$\Gamma_k\subseteq\Gamma^*$，知$\Gamma^*\vdash p_k$

若$\Gamma_k\vdash p_k$不成立，则$\Gamma_{k+1}\vdash\neg p_k$，而$\Gamma_{k+1}\subseteq\Gamma^*$，∴$\Gamma^*\vdash\neg p_k$

∴要么有$\Gamma^*\vdash x$，要么有$\Gamma^*\vdash\neg x$　即对任何x有$\mu(x)\in\{t,f\}$，$\mu|_x$是X上一个指派。

(2) I：对公式q：① $\Gamma^*\vdash q$，则$\mu(q)=t$，由Γ^*的相容性，$\Gamma^*\vdash\neg q$不成立，$\mu(\neg q)=f$

② $\Gamma^*\vdash q$不成立，$\mu(q)=f$，而Γ^*为极大相容集，∴$\Gamma^*\vdash\neg q$，有$\mu(\neg q)=t$

} 可知 $\mu(\neg)$是满足标准赋值的一元函数

II：对$p\to q$：若$\mu(p)\to\mu(q)=t$，此时 ① $\Gamma^*\vdash\neg p$ 即$\mu(p)=f$，由否定前件律，$\vdash\neg p\to(p\to q)$，得 $\Gamma^*\vdash p\to q$ 即$\mu(p\to q)=t$

② $\Gamma^*\vdash q$ 即 $\mu(q)=t$，由 $\vdash q\to(p\to q)$（L1公理模式），知 $\Gamma^*\vdash p\to q$（MP规则），即 $\mu(p\to q)=t$

若$\mu(p)\to\mu(q)=f$，此时$\mu(p)=t$且$\mu(q)=f$，即有$\Gamma^*\vdash p$且$\Gamma^*\vdash\neg q$

若此时$\Gamma^*\vdash p\to q$，由MP规则知必有$\Gamma^*\vdash q$，与Γ^*相容矛盾

∴ $\Gamma^*\vdash\neg(p\to q)$　，$\mu(p\to q)=f$

综上 $\mu(p\to q)=\mu(p)\to\mu(q)$

△注：证标准赋值即证 $\mu(\neg q)=\neg\mu(q)$
$\mu(p\to q)=\mu(p)\to\mu(q)$
$\neg$与$\to$是标准非和标准蕴含运算。

由I、II知，$\mu(q)$是L(X)上一个标准赋值

由(1)(2)，$\mu(q)$是一个语义解释，得证。