第四周作业(10.10)

1(习题2第3题)

电报依平均速率为每小时3个的Poisson过程到达电报局,试问:

(i) 从早上八时到中午没收到电报的概率

(ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?

解:(i) 以12时记为中午. 以八时记为起始点, $\lambda=3$. $t=4$.

则 $P(N(4)=0)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

$$=\frac{12^0}{0!}\cdot e^{-12}=e^{-12}$$

注明起始点

(ii) 取中午时刻12点为起始点, 则下午第一份电报到达时间

$$F(t)=P(T\le t)=P(N(t)\ge 1)=\sum_{k\ge 1}P(N(t)=k)$$

$$=1-P(N(t)=0)=1-\frac{(3t)^0}{0!}\cdot e^{-3t}$$

$$=1-e^{-3t}$$

$\therefore f(t)=3e^{-3t}$

即分布为参数为3的指数分布

2(习题2第4题)

$\{N(t),t\ge 0\}$ 为一 $\lambda=2$ 的Poisson过程, 试求:

(i) $P(N(1)\le 2)$;

(ii) $P\{N(1)=1 \text{且} N(2)=3\}$;

(iii) $P\{N(1)\ge 2\mid N(1)\ge 1\}$;

解 (i) $P(N(1)\le 2)$

$= P(N(1)=0)+P(N(1)=1)+P(N(1)=2)$

$= \frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}$

$= e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}$

$= 5e^{-2}$

(ii) $P(N(1)=1 \text{ 且 } N(2)=3)$　独立增量

$= P(N(1)=1 \text{ 且 } N(2)-N(1)=2)$

$= P(N(1)=1)\cdot P(N(2)-N(1)=2)$

$= 2e^{-2}\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2}$

$= 2e^{-2}\cdot 2e^{-2} = 4e^{-4}$

(iii) $P(N(1)\ge 2 \mid N(1)\ge 1)$

$= \frac{P(N(1)\ge 2 \text{ 且 } N(1)\ge 1)}{P(N(1)\ge 1)}$

$= \frac{P(N(1)\ge 2)}{1-P(N(1)=0)}$

$= \frac{1-P(N(1)=0)-P(N(1)=1)}{1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}}$

$= \frac{1-e^{-2}-\frac{2^1}{1!}e^{-2}}{1-e^{-2}} = \frac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}$

3(习题2第10题)

到达某加油站的公路上的卡车服从参数为λ_1的Poisson过程$N_1(t)$，而到达的小汽车服从参数为λ_2的Poisson过程$N_2(t)$，且过程N_1与N_2独立．试问随机过程$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$是什么过程？并计算在总车流数$N(t)$中卡车首先到达的概率

解：服从参数为λ_1的Poisson过程的矩母函数为 $e^{\lambda_1(e^t-1)}$

服从参数为λ_2的Poisson过程的矩母函数为 $e^{\lambda_2(e^t-1)}$

而过程N_1与N_2独立

$$\therefore\ g_{N(t)}(t)=g_{N_1(t)}(t)\cdot g_{N_2(t)}(t)$$

多种解法

$$=e^{\lambda_1(e^t-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^t-1)}$$
$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

由矩母函数与分布的一一对应可得

随机过程$N(t)$是以参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程

记X_1、X_2分别为卡车、小汽车第一次到达时间，则X_1、X_2分别服从参数为λ_1，λ_2的指数分布

$$P(X_1<X_2)=\iint\limits_{x_1<x_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\,dx_1\,dx_2$$
$$=\int_0^{+\infty}dx_1\int_{x_1}^{+\infty}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1}e^{-\lambda_2 x_2}\,dx_2$$
$$=\lambda_1\int_0^{+\infty}e^{-\lambda_1 x_1}\cdot e^{-\lambda_2 x_1}\,dx_1$$
$$=\lambda_1\left[-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\cdot\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\right]_0^{+\infty}$$
$$=\lambda_1\cdot\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

10

Oct.15

即总车流数$N(t)$中卡车首先到达的概率为$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

2.5 Suppose that $\{N_1(t), t \geq 0\}$ and $\{N_2(t), t \geq 0\}$ are independent Poisson process with rates λ_1 and λ_2. Show that $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ is a Poisson process with rate $\lambda_1 + \lambda_2$. Also, show that the probability that the first event of the combined process comes from $\{N_1(t), t \geq 0\}$ is $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, independently of the time of the event.

Let $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, then

$$
\begin{aligned}
&P\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{i=0}^{n} P\{N_1(t) = i\} P\{N_2(t) = n - i\} \\
&= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n t^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-i} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Let X_i denote the waiting time until the first event occur of the i process, then $X_i \sim Exponential(\lambda_i), i = 1, 2$. The probability of first event comes from 1 is,

$$P\{X_1 < X_2\} = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$
