

Chapter 1&2 函数的插值与逼近

给定函数 $f(x)$ 在离散点上的信息 $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n\}$, 和函数空间 Φ , 构造函数 $\phi(x) \in \Phi$, 满足关系式。

函数插值:

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

- Lagrange 插值构造
- Newton 插值构造
- 插值多项式的误差和分析
- (广义) 差商的定义和性质, 构造差商表
- Hermite 插值构造 (给定 $f(x_i), f'(x_i), \dots$)
 - 若给定为 $f(x_i), f''(x_i)$, 无法构造广义差商表
- Runge 现象 -> 分片插值 -> 三次样条函数的构造思路

最小二乘逼近

$$\min_{\phi \in \Phi} \sum_i (\phi(x_i) - f(x_i))^2$$

- $\phi(x) = a_0 \phi_0(x) + \dots + a_m \phi_m(x)$, 定义

$$Q(a_0, \dots, a_m) = \sum_i (a_0 \phi_0(x_i) + \dots + a_m \phi_m(x_i) - f(x_i))^2$$

利用 $\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$, 构建线性方程组, 进行求解。

当给定的 $\phi(x)$ 不是关于基函数的线性组合, 则需要做变形, 考虑

$$\min_{\phi \in \Phi} \sum_i (\tilde{\phi}(x_i) - \tilde{f}(x_i))^2$$

- $\phi(x) = a b^x$, 定义映射 $\tilde{\phi}(x) = \ln \phi(x) = \ln a + x \ln b$
- $\phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p}$, 定义映射 $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\phi(x)} = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$
- $\phi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q}$, 考虑

$$\min \sum_i (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_p x_i^p - f(x_i) (b_0 + b_1 x_i + \dots + b_q x_i^q))^2$$

- 矛盾方程: 求解法方程 $A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$

Chapter3 非线性方程求解

- 二分法
- 不动点迭代: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$, $x_{k+1} = \phi(x_k)$
 - 满足: 1. $x \in [a, b]$, $\phi(x) \in [a, b]$
 - 2. 存在 $0 < L < 1$, 使得 $|\phi'(x)| \leq L, \forall x \in [a, b]$

- 牛顿法/切线法:用切线近似曲线

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

单根: 2 阶收敛; 重根: 1 阶收敛

- 弦截法: 用割线近似曲线

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

- 牛顿法求解方程组

Chapter4 线性方程组的直接法

- Gauss 消元法: 选主元
- 直接分解法: $A = LU$, L 为下三角矩阵, U 为上三角矩阵
Doolittle 分解 / Crout 分解 / LDL^T 分解

Chapter5 线性方程组的迭代方法

$$Ax = b \Leftrightarrow x = N^{-1}(N - A)x + N^{-1}b,$$

迭代格式: $x_{k+1} = N^{-1}(N - A)x_k + N^{-1}b,$

迭代收敛: 矩阵 $M = N^{-1}(N - A)$ 谱半径或者某一范数 < 1

- Jacobi 迭代: $N = D$
- Gauss-Seidel 迭代: $N = L + D$ (迭代格式可写成等价形式)
- 松弛迭代

Chapter 6 数值积分和数值微分

数值积分

- 基于插值的数值积分 ($n+1$ 个点)

$$\int_a^b f(x)dx = I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i), \quad \alpha_i = \int_a^b l_i(x)dx$$

该方法至少有 n 阶代数精度, 不超过 $2n+1$ 阶代数精度

- k 阶代数精度

$$I[x^m] = I_n[x^m], m = 0, \dots, k, \quad I[x^{k+1}] \neq I_n[x^{k+1}],$$

- Newton-Cotes 数值积分

均匀剖分, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i * h$,

具有 n 阶 (n 为奇数) 或 $n+1$ 阶 (n 为偶数) 代数精度

$n=1$: 梯形积分公式

$n=2$: 辛普森积分公式

复化积分公式：分片定义数值积分

- Gauss-Legendre 数值积分
使用 Legendre 多项式零点，具有 $2n+1$ 阶代数精度

数值微分

- 基于插值的数值微分方法

$$f'(\hat{x}) \approx D_n[f] = \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i), \quad \beta_i = l'_i(\hat{x})$$

- 截断误差：在 \hat{x} 处进行 Taylor 展开

$$R(\hat{x}) = f'(\hat{x}) - \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i) = O(h^k) \quad \text{具有 } k \text{ 阶精度}$$

Chapter 7 常微分方程数值解

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Euler 公式
基于数值微分： $f(x_n, y_n) = D_m[y_n] = \sum \beta_i y_i$
基于数值积分： $y_{n+1} - y_n = I_m[f] = \sum \alpha_i f(x_i, y_i)$

- 多步法：

Step1: 在给定区间 $[x_{n-p}, x_{n+1}]$ 上积分

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-p}) = \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Step 2: 利用给定点 $\{x_{n-q}, \dots, x_n\}$ 或 $\{x_{n-q+1}, \dots, x_{n+1}\}$ 近似积分

- Runge-Kutta 方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + \dots c_s h_s) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_j = f(x_n + a_j h, y_n + h(b_{j,1} k_1 + \dots b_{j,j-1} k_{j-1})), \quad j = 2, \dots, s \end{cases}$$

- 局部截断误差

格式为 $y_{n+1} = L(x_{n-p}, \dots, x_n, y_{n-p}, \dots, y_n)$ 带入准确解进行 Taylor 展开

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - L(x_{n-p}, \dots, x_n, y(x_{n-p}), \dots, y(x_n)) = O(h^{k+1})$$

格式具有 k 阶精度

- 整体截断误差

Chapter8 矩阵的特征值和特征向量

方法	格式	计算量
幂法	$x^{(k+1)} = A x^{(k)}$	模最大特征值
幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)} / \ x^{(k)}\ _{\infty} \\ x^{(k+1)} = A y^{(k)} \end{cases}$	
反幂法	$A x^{(k+1)} = x^{(k)}$	模最小特征值
反幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)} / \ x^{(k)}\ _{\infty} \\ A x^{(k+1)} = y^{(k)} \end{cases}$	
位移幂法	$x^{(k+1)} = (A - \mu I) x^{(k)}$	离 μ 最远特征值
位移反幂法	$(A - \mu I) x^{(k+1)} = x^{(k)}$	离 μ 最近特征值

幂法的规范运算：根据序列的收敛性，判断特征值的性质

Jacobi 方法:

n 阶实对称矩阵A的所有特征值。

每步选取 p 和 q, 使得 $|a_{pq}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}|$

$$\text{定义矩阵 } Q(p, q, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos\theta & & \sin\theta & \\ & & & \ddots & & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

使得 $B = Q^T A Q$ 对应的 $b_{pq} = b_{qp} = 0$