

假设检验两类错误

- 第一类错误：以假当真；
- 第二类错误：以真当假；
- 功效：以真当真的概率 (越大越好).

		决 策	
		接受 H_0	拒绝 H_0
真实情形	H_0 成立	正确判断	第一类错误 α (False Positive)
	H_0 不成立	第二类错误 β (False Negative)	正确判断 概率= $1-\beta$ (功效)

参数分布族下的两类错误率

- 零假设 $H_0 : \theta \in \Theta_0$.
- 备择假设 $H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 拒绝域 W
- 第一类错误率: $\alpha(\theta) = P_\theta(X \in W), \theta \in \Theta_0$.
- 第二类错误率: $\beta(\theta) = P_\theta(X \notin W), \theta \in \Theta_1$.



参数功效函数定义

- 定义5.1 (功效函数) 对于假设检验问题,

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \Leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

拒绝域为 W 。则称样本点落入拒绝域的概率为功效函数, 即



$$g(\theta) = Pr_{\theta}(X \in W), \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$$

- 功效函数和两类错误
 - 当 $\theta \in \Theta_0$ 时, $g(\theta)=\alpha(\theta)$, 第一类错误率;
 - 当 $\theta \in \Theta_1$ 时, $g(\theta)=1-\beta(\theta)$, 功效;

参数功效函数计算 (I)

- 对于例1. $H_0 : p \leq 0.05 \Leftrightarrow H_1 : p > 0.05$.

- 概率分布: $Pr(T = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}$.



- 拒绝域: $\{T : T > c\}$

$$\alpha(p) = \sum_{k=c}^N C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}, \quad p \leq p_0$$

$$\beta(p) = 1 - \sum_{k=c}^N C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}, \quad p > p_0$$

参数功效函数计算(II)

- 对于例2. $H_0 : \lambda \leq 1 \Leftrightarrow H_1 : \lambda > 1$.
- 概率分布: $Pr(T = k) = \frac{(N\lambda)^k}{k!} \exp\{-N\lambda\}$
- 拒绝域: $\{x : T > c\}$
- 第一类错误

$$\alpha(\lambda) = Pr(T \geq c) = \sum_{k=c}^{+\infty} \frac{(N\lambda)^k}{k!} \exp\{-N\lambda\}, \quad \lambda \leq 1$$

- 第二类错误

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= Pr(T < c) = \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(N\lambda)^k}{k!} \exp\{-N\lambda\} \\ &= 1 - \sum_{k=c}^{+\infty} \frac{(N\lambda)^k}{k!} \exp\{-N\lambda\}, \quad \lambda > 1 \end{aligned}$$



例子1的功效函数(I)

- 对例1, 若 $N=10$, 拒绝域为 $\{T > 2\}$.

$$g(p) = \sum_{k=3}^{10} C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k}$$
$$= 1 - (1-p)^{10} - 10p(1-p)^9 - 45p^2(1-p)^8$$

- 计算得到下面的表格

p	G(p)	p	G(p)	p	G(p)	p	G(p)
0.00	0.000	0.25	0.4744	0.50	0.9453	0.75	0.9996
0.05	0.0115	0.30	0.6172	0.55	0.9726	0.80	0.9999
0.10	0.0702	0.35	0.7384	0.60	0.9877	0.85	1.0000
0.15	0.1798	0.40	0.8327	0.65	0.9952	0.90	1.0000
0.20	0.3222	0.45	0.9004	0.70	0.9984	1.00	1.0000