第五周作业反馈

张俸铭

March 31 2020

1 作业答案

练习 14

2. 在以下公式中，哪些 x_1 的出现是自由的？哪些 x_1 的出现是约束的？项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的？

注：绿色标识自由出现的 x_1，红色表示约束出现的 x_1

$1°$ $\forall x_2\ (R_1^2(x_1, x_2) \to R_2^2(x_2, c_1))$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

$2°$ $R_1^1(x_3) \to \neg\forall x_1\ \forall x_2\ R_1^3(x_1, x_2, c_1)$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

$3°$ $\forall x_1\ R_1^1(x_1) \to \forall x_2\ R_1^2(x_1, x_2)$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

$4°$ $\forall x_2\ R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to \forall x_1\ R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 不是自由的

3. 设 t 是项 $f_1^2(x_1, x_3)$，$p(x_1)$ 是下面的公式. 确定 t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 是否自由？如果是自由的，写出 $p(t)$.

$1°$ $\forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to R_1^1(x_1)$.
自由. $p(t) = \forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

2°　$\forall x_1\ \forall x_3\ (R_1^1(x_3) \to R_1^1(x_1))$.
自由. $p(t) = p(x_1) = \forall x_1\ \forall x_3\ (R_1^1(x_3) \to R_1^1(x_1))$

3°　$\forall x_2\ R_1^1(f_1^1(x_2)) \to \forall x_3\ R_1^3(x_1, x_2, x_3)$.
不自由

4°　$\forall x_2\ R_1^3(x_1, f_1^1(x1), x_2) \to \forall x_3\ R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$.
不自由

5. 设个体变元 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现，个体变元 y 不在公式 $p(x)$ 中自由出现，试证：如果 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的，那么 x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的

证明:
$\because y$ 在 $p(x)$ 中全部约束出现
$\therefore p(x)$ 中的 y 只可能出现在 $\forall y$ 中或 $\forall y$ 的范围内
$\because y$ 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的
$\therefore p(x)$ 中所有自由出现的 x 都不在 $\forall y$ 的范围内
又 $\because x$ 在 $p(x)$ 中全部自由出现
$\therefore p(x)$ 中所有的 x 都不在 $\forall y$ 的范围内
故用 x 替换 $p(y)$ 中自由出现的 y 时，这些 x 均不在 $\forall y$ 的范围内
因此，x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的

练习 15

2. 试证对任意公式 p,q, 有 $\vdash \forall x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to \forall x\ q)$

证明：先证明 $\{\forall x\ (p \to q), \forall x\ p\} \vdash \forall x\ q)$:

$(1)\forall x\ (p \to q)$	假定
$(2)\forall x\ (p \to q) \to (p \to q)$	K4
$(3)p \to q$	(1),(2),MP
$(4)\forall x\ p$	假定
$(5)\forall x\ p \to p$	K4
$(6)p$	(4),(5),MP
$(7)q$	(3),(6),MP
$(8)\forall x\ q$	(7),Gen

$\because$Gen 变元 x 不在 $\forall x\ (p \to q), \forall x\ p$ 中自由出现
$\therefore$ 使用两次演绎定理可得：

$$\vdash \forall x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to \forall x\ q)$$

4. 设 x 不在 p 中自由出现，求证：

$1°$ $\vdash (p \to \forall x\ q) \to \forall x\ (p \to q)$
证明：先证：$\{p \to \forall x\ q\} \vdash \forall x\ (p \to q)$

$(1)p \to \forall x\ q$	假定
$(2)\forall x\ q \to q$	K4
$(3)p \to q$	(1),(2),HS
$(4)\forall x\ (p \to q)$	(3),Gen

$\because$Gen 变元 x 不在 $p \to \forall x\ q$ 中自由出现
$\therefore$ 使用演绎定理可得：

$$\vdash (p \to \forall x\ q) \to \forall x\ (p \to q)$$

$2°$ $\vdash (p \to \exists x\ q) \to \exists x\ (p \to q)$
证明：根据 $\exists x = \neg\forall x\neg$, 即证 $\vdash (p \to \neg\forall x\neg q) \to \neg\forall x\neg(p \to q)$。

考虑用归谬律和演绎定理。下面的公式从 $\{p \to \neg\forall x \neg q, \forall x \neg(p \to q)\}$ 可证：

$(1)\forall x\ \neg(p \to q)$	假定
$(2)\forall x\ \neg(p \to q) \to \neg(p \to q)$	K4
$(3)\neg(p \to q)$	(1),(2),MP
$(4)\neg(p \to q) \to p$	永真式
$(5)p$	(3),(4),MP
$(6)p \to \neg\forall x\ \neg q$	假定
$(7)\neg\forall x\ \neg q$	(5),(6),MP
$(8)\neg(p \to q) \to \neg q$	永真式
$(9)\neg q$	(3),(8)，MP
$(10)\forall x\ \neg q$	(9),Gen

由 (7),(10) 及归谬律，又 Gen 变元 x 不在 $\forall x \neg(p \to q)$ 中自由出现
故证得：

$$\{p \to \neg\forall x\ \neg q\} \vdash \neg\forall x\ \neg(p \to q)$$

又 $\because$Gen 变元 x 不在 $p \to \neg\forall x\ \neg q$ 中自由出现
$\therefore$ 使用演绎定理可得：

$$\vdash (p \to \neg\forall x\ \neg q) \to \neg\forall x\ \neg(p \to q)$$

故原命题得证.

2 问题总结

2.1 对于变元、项是否自由的理解

课本上对变元 x 自由出现的定义是"x 未出现在 $\forall x$ 或 $\forall x$ 的范围中"，因此在判断一个公式中的 x 是否自由或约束，需要**对每个位置出现的 x 分别分析** (注意这里不要漏了)。而在项对公式中的变元是否自由进行判断时，作业中出现了" 用项 t 替换自由出现的个体变元 x 后，这个变元 x 就不再在公式 p 中出现"、" 项 t 中不存在自由出现的个体变元 x 故无法替换" 的情况，根据定义，只要新公式中 t 的变元都是自由的，即说明 t 对 p 中 x

自由。考试时碰到这种奇奇怪怪的情况，只要动手翻翻书，严格套定义分析就不会出错了。

2.2 关于 K 中的证明

思路

K 中的证明与 L 中最主要的区别就在于引入了全称量词，而当待证公式的**前项或后项出现全称量词**是没办法处理的，这时候就该考虑通过演绎定理拆分前项或后项，然后再在证明时通过 K4、K5、Gen 规则进行处理。

注意事项

通过上面的分析和做作业的感受，相信大家也能发现其实 K 中的证明会大量用到 K4、K5、演绎定理、反证律、归谬律、$\exists_1$ 、$\exists_2$ 规则等等，而它们在 K 中使用时都是十分需要注意使用条件的 (**项、变元是否自由出现**)，所以证明过程中一定要注意该条件下能否使用相应的规则，同时**必须在证明过程中说明** (因为在 L 和 K 中它们是不同的定理和规则)。

比如这次的作业中，很多同学在用演绎定理和归谬律时没有说明 Gen 变元 x 没有在对应式中自由出现就直接使用了，这样在考试评卷时会被扣分。