二. (12分) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0, \\ A(1-x), & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求常数 A.

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$.

(3) 问 $P(-\frac{\pi}{4}<X<\frac{1}{2})$.

(1). 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ 知 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} A\cos x\,dx+\int_0^1 A(1-x)\,dx=1$

即 $A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+A(x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=1$

$A+\frac{1}{2}A=1$

$\therefore A=\frac{2}{3}$

(2). $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ \frac{2}{3}(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$\because$ ① $x<-\frac{\pi}{2}$: $F(x)=0$

② $-\frac{\pi}{2}\le x<0$: $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{2}{3}\cos t\,dt=\frac{2}{3}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{2}{3}(\sin x+1)$

③. $0\le x\le 1$: $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2}{3}\cos t\,dt+\int_0^x A(1-t)\,dt$

$=\frac{2}{3}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac{2}{3}(t-\frac{t^2}{2})\Big|_0^x$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(x-\frac{x^2}{2})=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

④. $x>1$: $F(x)=1$

综上: $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

(3). $P\left(-\frac{\pi}{4}<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{2}{3}\cos x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}(1-x)\,dx$

$=\frac{2}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4\sqrt{2}+3}{12}$

三. (20分) 设随机变量 X 和 Y 均服从参数为 λ 的指数分布且相互独立, 记

$$Z=\frac{X}{X+Y},\quad U=\min\{X,Y\},\quad V=\max\{X,Y\}-\min\{X,Y\}.$$

(1) 求 Z 的密度函数;

(2) 给定 $U=u$ 时, 求 V 的条件密度函数;

(3) 证明 U 和 V 相互独立.

$X\sim\mathcal{E}(\lambda)$, $Y\sim\mathcal{E}(\lambda)$, 有 $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$, $f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y}, y>0$.

$\because$ X,Y独立, $\therefore f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$, $x>0, y>0$

(1). 令 $\begin{cases} Z=\frac{X}{X+Y} \\ W=X+Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=ZW \\ Y=W(1-Z) \end{cases}$ $\quad J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}\right|=\begin{vmatrix} w & z \\ -w & 1-z \end{vmatrix}=w$

$\therefore P(Z=z,W=w)=P\left(\frac{X}{X+Y}=z, X+Y=w\right)=P(X=zw, Y=w(1-z))$

$=f(zw, w-wz)\,|J|\,dw\,dz=\lambda^2 e^{-\lambda w} w\,dw\,dz$

$\therefore g(z,w)=\lambda^2 e^{-\lambda w}\cdot w$, $z>0, w>0$.

$\therefore f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z,w)\,dw=\int_0^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda w} w\,dw \overset{t=\lambda w}{=\!=\!=} \int_0^{\infty} t e^{-t}\,dt=\Gamma(2)$

$=1$

$(z>0)$

(2) $P(U>u)=P(X>u,Y>u)=P(X>u)\cdot P(Y>u)=[1-F_X(u)]^2$ ($F_X(x)$为$\varepsilon(\lambda)$的分布函数)

即 $F_U(u)=1-[1+F_X^2(u)-2F_X(u)]=-F_X^2(u)+2F_X(u)$

$\therefore f_U(u)=-2F_X(u)\cdot f_X(u)+2f_X(u)$

$=-2\cdot\lambda e^{-\lambda u}\cdot\int_0^u\lambda e^{-\lambda t}dt+2\lambda e^{-\lambda u}$

$=-2\lambda e^{-\lambda u}\cdot -e^{-t}\Big|_0^{\lambda u}+2\lambda e^{-\lambda u}=2\lambda e^{-2\lambda u}$, $u>0$.

令$D=\{(u,v)\mid u>0,v>0\}$，则$P((u,v)\in D)=1$，且D为开集.

$P(U=u,V=v)=P(\min\{X,Y\}=u,\ \max\{X,Y\}-\min\{X,Y\}=v)$

$=P(X=u,\ Y=u+v)+P(Y=u,\ X=u+v)$

$=f(u,u+v)\cdot\left\|\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}\right\|dudv+f(u+v,u)\left\|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}\right\|dudv$

$=[f(u,u+v)+f(u+v,u)]dudv$

$\therefore$ U,V的联合密度 $g(u,v)=f(u,u+v)+f(u+v,u)$

$=2\lambda^2\cdot e^{-\lambda(2u+v)}$, $u,v>0$

$\therefore f_{V|U}(v|u)=\dfrac{g(u,v)}{f_U(u)}=\dfrac{2\lambda^2e^{-\lambda(2u+v)}}{2\lambda e^{-2\lambda u}}=\lambda e^{-\lambda v}$, $v>0$.

(3) 证明: $P(V=v)=P(\max\{X,Y\}-\min\{X,Y\}=v)=P(X-Y=v)+P(Y-X=v)$ ①

考虑 $\begin{cases}V=X-Y\\W=X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=W\\Y=W-V\end{cases}$ $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(w,v)}\right|=\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}=-1$

$\therefore P(V=v, W=w) = P(X=w, Y=w-v)$

$$= f(w, w-v) \cdot |-1|\, dw dv$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda(2w-v)}\, dw dv$$

$\therefore$ V,W的联合密度为 $h(v,w) = \lambda^2 e^{-\lambda(2w-v)}$, $w>v>0$

$\therefore g_{1V}(v) = \int_v^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(2w-v)}\, dw = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v}$

同理考虑 $\begin{cases} V = Y-X \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = W-V \\ Y = W \end{cases}$

由对称性得 $P(V=v, W=w) = \lambda^2 e^{-\lambda(2w-v)} dw dv$, $w>v>0$

$\therefore$ 仍有 $g_{2V}(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v}$

$\therefore$ ①式中 $P(V=v) = \lambda e^{-\lambda v} dv$, $v>0$

即 $V = \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$f_V(v) = \lambda e^{-\lambda v} = f_{V|U}(v|u) \quad (v>0)$$

$\therefore$ U和V独立，得证.