1. 设 K 中 $C=\{c_1\}$, $F=\varnothing$, $R=\{R_1^1, R_2^1, R_1^2\}$. 已知 E_1, $E_2 \subseteq \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$ 为有理数集. 令 $\overline{c_1}=0$, $\mathbf{Q}$ 上一元关系 $\overline{R_1^1}$ 为 E_1, $\overline{R_2^1}$ 为 E_2, 二元关系 $\overline{R_1^2}$ 为 “$>$”. 这样, $\mathbf{Q}$ 便成了 K 的解释域. 现已知关于 $\mathbf{Q}$ 中元素的两个命题:

命题甲: “若数集 E_1 中某数比零大, 则数集 E_2 中所有数都比零大.”

命题乙: “并非 E_1 中的数都小于或等于 E_2 中的每个数.” ⇒∃ E_1中数大于 E_2 中某数.

试把命题甲, 乙分别按以下要求用 K 中公式表示出来:

(1) 出现全称量词.

(2) 不出现全称量词.

(3) 写成前束范式.

$\exists x\left(R_1^1(x)\to\neg\forall y\neg\left(R_2^1(y)\to R_1^2(x,y)\right)\right)$

$\exists x\left(R_1^1(x)\to \exists y\left(R_2^1(y)\to R_1^2(x,y)\right)\right)$

$\Rightarrow \exists x\left(R_1^1(x)\to \exists y\left(R_2^1(y)\to R_1^2(x,y)\right)\right)$

$\Rightarrow \exists x\exists y\left(R_1^1(x)\to\left(R_2^1(y)\to R_1^2(x,y)\right)\right)$ (y不在 $R_1^1(x)$中自由出现)

(1) 甲: $\exists x\left(R_1^1(x)\wedge R_1^2(x,c_1)\right)\to\forall y\left(R_2^1(y)\to R_1^2(y,c_1)\right)$

乙: $\neg\forall x\left(R_1^1(x)\to\forall y\left(R_2^1(y)\to\neg R_1^2(x,y)\right)\right)$

(2).

甲: $\exists x\left(R_1^1(x)\wedge R_1^2(x,c_1)\right)\to\neg\exists y\neg\left(R_2^1(y)\to R_1^2(y,c_1)\right)$ (由 $\vdash\neg\forall x p\Leftrightarrow\exists x\neg p$ 及 $\vdash\neg\neg p\Leftrightarrow p$)

乙: $\exists x\neg\left(R_1^1(x)\to\neg\exists y\neg\left(R_2^1(y)\to\neg R_1^2(x,y)\right)\right)$

(3). 由(1): 甲: $\Rightarrow \forall y\left(\exists x\left(R_1^1(x)\to R_1^2(x,c_1)\right)\to\left(R_2^1(y)\to R_1^2(y,c_1)\right)\right)$ (y不在 $\exists x\left(R_1^1(x)\to R_1^2(x,c_1)\right)$ 中自由出现)

$\Rightarrow \forall y\forall x\left(\left(R_1^1(x)\wedge R_1^2(x,c_1)\right)\to\left(R_2^1(y)\to R_1^2(y,c_1)\right)\right)$ (x不在 $R_2^1(y)\to R_1^2(y,c_1)$ 中自由出现)

乙: 由(2)中: $\Rightarrow \exists x\left(R_1^1(x)\wedge\exists y\neg\left(R_2^1(y)\to\neg R_1^2(x,y)\right)\right)$

$\Rightarrow \exists x\left(R_1^1(x)\wedge\exists y\left(R_2^1(y)\wedge R_1^2(x,y)\right)\right)$

$\Rightarrow \exists x\exists y\left(R_1^1(x)\wedge\left(R_2^1(y)\wedge R_1^2(x,y)\right)\right)$ (y不在$R_1^1(x)$中自由出现)