计算方法（B）

2020-2021年度第一学期

课程信息

课程名称: 计算方法

课程时间: 周五(1，2)

课程地点: 5202

课程教材: 数值计算方法与算法（第三版）， 科学出版社，
张韵华、王新茂、陈效群、张瑞（著）

课外参考： Numerical Analysis 数值分析，机械工业出版社，
David Kincaid，Ward Cheney（著）

教师: 蒋琰

邮箱: jiangy@ustc.edu.cn

办公室: 管理理科研楼1631

助教: 王恺鹏 wangkp@mail.ustc.edu.cn
刘泽蓬 lzp0375@mail.ustc.edu.cn
徐中恕 xzs1600@mail.ustc.edu.cn

办公室: 管理理科研楼1212

869742921

2020秋计算方法B

群号：869742921

扫一扫二维码，加入群聊。

QQ

课程考核

平时作业： **占总成绩20%～30%，两周一次或说明**

周五上课时间交(100%)

晚于这一时间(50%)

期末考前(20%)

期末考后(0%)

随堂测试： **占总成绩10%**

时间不定，不可补考，除非有假条

期末考试： **占总成绩60%～70%**

课程目标

实际问题 ——> 物理模型 ——> 数学模型 ——> 计算机数值求解

计算方法是一种研究并求解数学问题的数值近似解的方法。

介绍常用的数值计算方法

- 函数的近似与拟合：离散点构造近似函数
- 方程（组）数值求解
- 数值积分，数值微分
- 常微分方程的近似求解
- 矩阵性质的求解

掌握数值计算方法的基本原理

- 数学原理
- 收敛性分析
- 误差分析
- 稳定性分析

编写数值计算方法的程序 （C/C++语言，Matlab，Python...）

https://www.bilibili.com/video/BV1o4411s7U9/?spm_id_from=333.788.videocard.1

Chapter 0 绪论

误差

<u>**Def**</u>：设x^*为精确解，x为x^*的一个近似值，则

- **(绝对)误差** = 精确值 - 近似值 $e = x^* - x$
- **相对误差** = 绝对误差 / 精确解(或近似解) $e_r = \dfrac{e}{x^*}$ or $\dfrac{e}{x}$

<u>**Example**</u>：相对误差是相同的，但是绝对误差有一个较大的变化范围。

相对误差考虑了值本身的大小，更具有意义，但是绝对误差更方便。

x^*	x	e	e_r
0.3000×10^1	0.3100×10^1	-0.1×10^0	$-0.0\bar{3}$
0.3000×10^{-3}	0.3100×10^{-3}	-0.1×10^{-4}	$-0.0\bar{3}$
0.3000×10^4	0.3100×10^4	-0.1×10^3	$-0.0\bar{3}$

有效位数

- **Def**：当 x^* 的误差限为某一位的半个单位，则这一位到第一个 非零位的位数称为 x^* 的**有效位数** 。

$$|x^* - x| < 0.5 * 10^{-p}, \text{最大非负整数} p$$

- **Example 1**：
$\pi \approx 3.14, \quad |\pi - 3.14| = 0.00159... < 0.5 \times 10^{-2},$　3位有效数字

- **Example 2**:　若x^*，经过四舍五入后得到其近似值

$$x = \pm x_1 . x_2 \cdots x_n \times 10^m,$$

其中，$x_1 \neq 0$，$x_2, \cdots, x_n$分别为0到9中的一位数，m为整数，则x的有效位数就是从最后一位到第一位非0的位数，即n位有效数字。

- **Example 3:** x 为准确值，若其近似值 $\tilde{x}$ 具有 n 位有效位数，估计其相对误差。

解. 设

$$\tilde{x} = \pm x_1.x_2 \cdots x_n \times 10^m \tag{1}$$

则$|x| > (x_1.x_2 - 0.1) \times 10^m$，因而

$$|R(x)| = |\frac{E(x)}{x}| \leq \frac{0.5 \times 10^{-(n-1)} \times 10^m}{(x_1.x_2 - 0.1) \times 10^m}$$

简单点，可以用

$$|R(x)| = \leq \frac{0.5 \times 10^{-(n-1)} \times 10^m}{x_1 \times 10^m}$$

来估计相对误差

误差限

- **Def**： 如果 x^* 或者 e 的值不易得到，可以用限制 e 的范围描述和控制误差的范围：

ε 称为**绝对误差限**，如果 $|e| = |x^* - x| \le \varepsilon$

ε_r 称为**相对误差限**，如果 $|e_r| = |\dfrac{e}{x^*}| \le \varepsilon_r$

误差

- **原始误差**：模型误差，是建模过程中产生的误差
- **舍入误差**：有限位数字保存或运算，是由于计算机表达数据产生的误差

$$\pi = 3.14159265358979323... \approx 3.14$$

$$\sqrt{3} = 1.732050807568877... \approx 1.732$$

- **截断误差**：有限项近似无限项，是数值方法产生的误差

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

- 数值分析的主题很大程度上关注理解和控制各种类型的误差。这里，我们将处理一种典型的误差，其常常是由粗心的程序设计引起的。

- **Example**：在5位有效数字的计算机上，考虑两个相近数相减：

$$x^* = 0.3721748693, \qquad x = 0.37215$$
$$y^* = 0.3720230572, \qquad y = 0.37202$$
$$x^* - y^* = 0.0001248121, \qquad x - y = 0.00013$$

相对误差 $\left|\dfrac{x^* - y^* - (x - y)}{x^* - y^*}\right| \approx 0.04$ 非常大。

- 避免两个相近的数字相减。可换成其他等价形式或使用近似公示：

$$\sqrt{x^2+1}-1=(\sqrt{x^2+1}-1)\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}f''(x_2)(x_1-x_2)^2+\cdots$$

- 避免除以一个绝对值很小的数。例如：h 很小时，计算 $\left(\frac{1}{h}\right)^3$ 而不是 $\frac{1}{h^3}$。

稳定性

- **Example**：

$$p_n = \frac{13}{3}p_{n-1} - \frac{4}{3}p_{n-2},\ n = 2,3,\ldots \quad p_0 = 1,\ p_1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

数值：$x_0 = 1.0000000$，$x_1 = 0.3333333$，$x_2 = 0.1111112$, …

$x_{15} = 3.657493$ (相对误差10^8)

- x_n 中的任何误差在计算 x_{n+1} 时被乘以 13/3。因此，存在这种可能性：x_1 的误差乘上因子 $(13/3)^{14}$ 后传给了 x_{15}。在计算 $x_2, x_3, \ldots$中的每一项，产生的额外的舍入误差都乘上具有形式为 $(13/3)^k$ 的因子后传给了 x_{15}。

稳定性

- 若一个数值过程某个阶段所产生的小误差，在随后的阶段中被放大，从而严重降低了全部计算的精确度，则我们说这个数值算法**不稳定**。
- 使用更高精度的计算机，可以减少舍入误差，但舍入误差的增长只是推后，但未消失。

- 有时候模型就是病态的:

例 9. 解线性方程组

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 0 \end{cases}$$

解. 可以看到,

- 当$a = 0.99$时，真解为$x = 50.25$。
- 当$a = 0.991$时，真解为$x = 55.81$。

a的变化只有大概0.1%，但解的变化达到了10%。解本身对输入参数很敏感。

- 如果模型的参数发生很小的变化，会导致他的解产生很大的扰动，这样的模型称为病态的。

- 对于一个病态问题：需要更高精度浮点数的计算机程序来计算，或者，转化为等价的、非病态的问题。