Processamento Inteligente de Sinais – Semana 3 – Transformada de Fourier

Michel Batistin Fiório – Matrícula: 48376
Departamento de Engenharia Elétrica,
Universidade Federal de Viçosa, Viçosa – MG, E-mail: mbfiorio@gmail.com

Resumo – Nesse trabalho apresentaremos um breve resumo teórico da Transformada de Fourier e demonstraremos com exemplos práticos a aplicação dessa ferramenta na análise de sinais e suas propriedades.

I. INTRODUÇÃO

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico Francês e viveu entre os séculos 18 e 19. Durante os estudos que realizou sobre a condução de calor e distribuição de temperatura em corpos, Fourier introduziu os conceitos matemáticos que executava a decomposição de sinais em séries infinitas de funções trigonométricas [1]. À essas séries foi dada posteriormente o nome de série de Fourier, aplicada à sinais periódicos, e transformada de Fourier para o caso de sinais não periódicos.

Essa abordagem proposta por Fourier apareceu como um método alternativo à técnica de convolução e trouxe sucesso aos seus experimentos.

Trazendo em mais detalhes, a Análise de Fourier explica que um sinal qualquer pode ser reconstruído a partir da soma ponderada de funções seno, cosseno ou exponenciais complexas de diferentes frequências [1].

Em um exemplo simplificado, utilizando apenas funções cosseno, podemos observar na “Figura 1” a construção de uma onda quadrada a partir da soma de funções cossenoides de diferentes amplitudes e frequências. A função desenhada na parte inferior da “Figura 1” representa a soma das três funções da imagem central e se assemelha à função onda quadrada original. As diferenças entre o sinal reconstruído e o sinal original tendem a ficar cada vez menores quanto mais cossenoides diferentes forem somadas. Quando o número de termos tende ao infinito o sinal reconstruído tende ao sinal original.

Existem diferentes formas de se expressar a equação da Análise de Fourier. Vale ressaltar que em todas as formas estão presentes somatórios de funções oscilatórias [1]. A Equação (1) mostra a forma trigonométrica da série de Fourier. Nessa equação, A_0, A_k e B_k são chamados de coeficientes de Fourier.

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \quad (1)$$

Ao criar esse método, Fourier apresentou novas possibilidades de analisar o conteúdo de sinais.

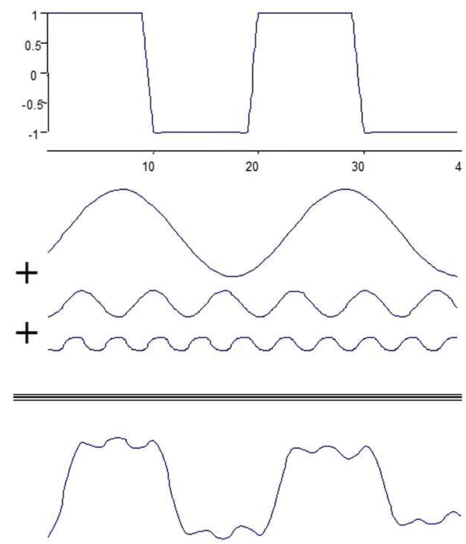

Fig. 1. Decomposição da onda quadrada em soma de cossenoides

A forma de onda de um sinal qualquer é conhecida como a representação do sinal no domínio do tempo. A decomposição desse sinal em uma somatória de funções oscilatórias permite analisar o mesmo sinal a partir das frequências e amplitudes dos sinais que compõem a série de Fourier. A representação do conteúdo das frequências contidas no sinal chama-se representação no domínio da frequência. Podemos dizer que a transformada de Fourier permite analisar uma função em outro domínio. Tal técnica transforma o sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A representação do conteúdo de frequências contidas em um sinal também é conhecido como espectro. Este é um gráfico que relaciona amplitude em função da frequência dos componentes do sinal.[1]

Na “Figura 2” podemos encontrar a representação no domínio do tempo e o espectro de frequências de uma onda quadrada.

A análise espectral permite observarmos o comportamento do sinal em determinadas faixas de frequência. É possível inferir quais são as frequências de maior energia, por exemplo. No caso da onda quadrada da “Figura 2”, fica perceptível no seu espectro que a maior parte da distribuição de energia do sinal é em frequências mais baixas.

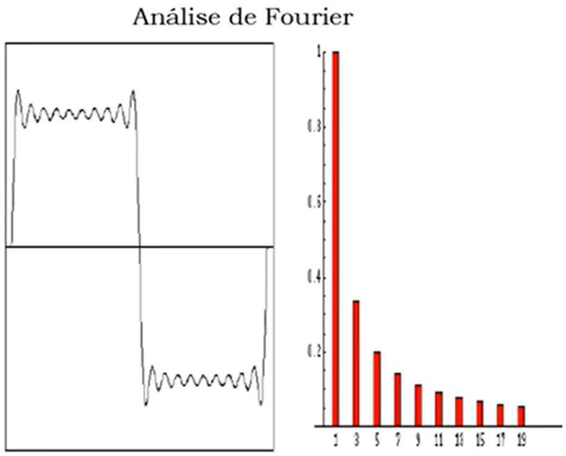

Fig. 2. Análise de Fourier de uma onda quadrada

A análise do espectro apresenta muitas utilidades para a ciência e é hoje uma das ferramentas mais importantes na análise e processamento de sinais.

II. Objetivos

Iremos usar a Transformada de Fourier para obter o espectro de alguns sinais. Dentre eles, analisaremos os sons emitidos por baleias. Também apresentaremos o conceito de esteganografia e daremos um exemplo.

No primeiro experimento iremos analisar o espectro de um sinal senoidal com duas componentes de frequência principais somado a um ruído.

Na sequência iremos aplicar a transformada de Fourier de curta duração para criar o espectograma de um sinal cuja distribuição de frequência no tempo não é estacionária.

No terceiro exercício iremos criar o espectograma de um sinal de áudio para mostrar a técnica de esteganografia.

Por último, analisaremos o espectograma de sons reais de chamados de baleias e procuraremos por algum padrão nesses sinais.

III. Materiais e Métodos

Utilizaremos neste trabalho o software de código livre Octave para realização das operações matemáticas propostas.

Também utilizaremos um arquivo de áudio chamado *lena.wav* e outro arquivo denominado *whalecalls.mat* que contêm uma biblioteca de gravações de chamados de baleias.

IV. Resultados e Discussões

Na primeira atividade nos propomos a construir um sinal que seria a soma de uma senoide, uma cossenoide e um sinal aleatório (ruído). A "Figura 3" mostra o sinal no domínio do tempo, que é representado por (2).

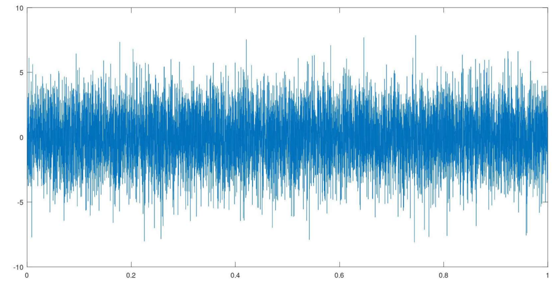

Fig. 3. Resposta no tempo do sinal da "Equação 2".

$$x(t) = 0,7 \times \sin(2\pi \times 1500 \times t) + \cos(2\pi \times 3000 \times t) + 2 \times randn(1, 8000) \quad (2)$$

Utilizamos a função *fft* do software Octave e calculamos a transformada de Fourier do sinal de (2). Fizemos então o gráfico da função no domínio da frequência conforme pode ser visto na "Figura 4". Observe na figura que o espectro indica a predominância de energia nas frequências 1500 hz e 3000 hz. As demais frequências possuem amplitude muito baixa e são relativas ao ruído que adicionamos propositalmente na equação.

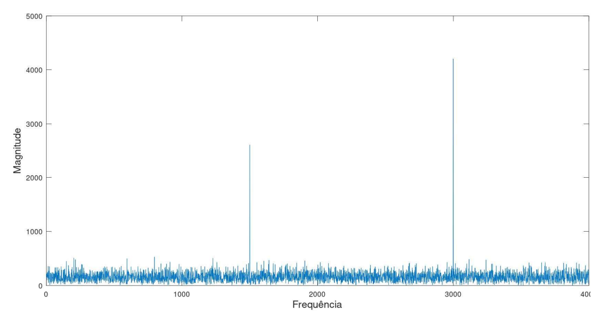

Fig. 4. Resposta na frequência do sinal da "Equação 2".

A "Equação (2)" é definida como função estacionária visto que ela possui componentes de frequência que são constantes durante todo o tempo. Entretanto, existem na natureza muitos sinais que não se enquadram nessa definição. Os sinais não-estacionários, aqueles em que a frequência varia com o tempo, tem como exemplos sinais de voz, sinais biomédicos, etc.

Nesses casos, a análise de espectro tradicional vai indicar quais são as faixas de frequência que esse sinal possui, mas não vai mostrar a informação temporal da variação de frequência. Para obter essa informação é necessário construir um espectograma com a utilização da chamada transformada de Fourier de curta duração. O espectograma é, portanto, um gráfico da relação tempo x frequência do sinal.

$$y(t) = \cos\left(2\pi \times (150 \times t + 50 \times t^2)\right) \quad (3)$$

A "Figura 5" ilustra um sinal onde ocorre a variação de frequência com o tempo. A equação desse sinal é representada por (3). O espectro desse sinal indica todas as frequências contidas nele, mas sem a relação temporal conforme já comentado. Essa relação temporal pode ser vista no espectograma dessa função, conforme mostra a "Figura 6".

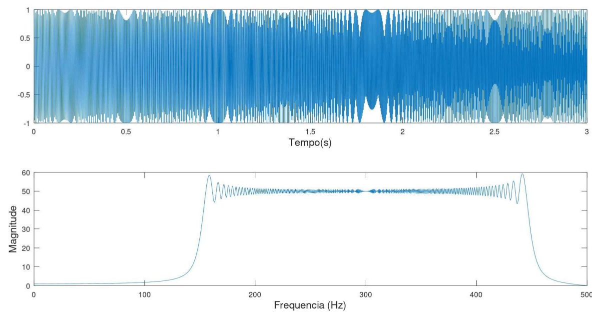

Fig. 5. Resposta no tempo e na frequência do sinal da "Equação 3".

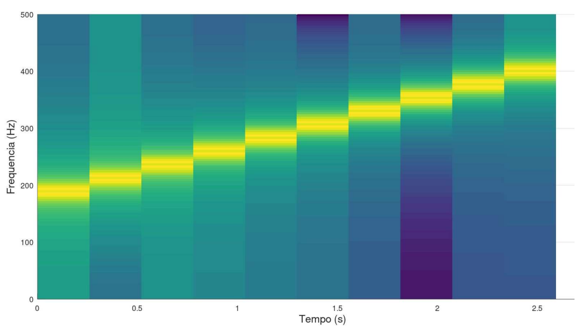

Fig. 6. Espectograma da "Equação 3".

Dada a definição de espectograma e o resultado obtido na "Figura 6", percebemos que cada pixel da imagem representa a amplitude e frequência do sinal em determinado tempo. Dessa forma, utilizando da manipulação criteriosa do espectro de um sinal é possível fazer com que o espectograma desse sinal gere uma imagem de qualquer formato desejado.

Viu-se então a possibilidade da utilização de sinais unidimensionais, como sinais sonoros, para a atividade de esteganografia. A esteganografia é definida pelas técnicas de se esconder mensagens dentro de outras mídias, como fotos, áudios ou vídeos. É uma técnica utilizada de muitas formas diferentes para comunicação secreta ao longo da história.

Vamos dar um exemplo da aplicação da esteganografia através da manipulação espectral de um sinal de áudio. Quando se ouve esse áudio nada se consegue obter do mesmo, tratando-se aparentemente de um ruído aleatório. A "Figura 7" mostra o áudio no domínio do tempo.

Ao se desenhar o espectograma desse áudio obtém-se a imagem da "Figura 8". Pode-se perceber que a fotografia de uma mulher estava oculta no espectro de frequência desse áudio.

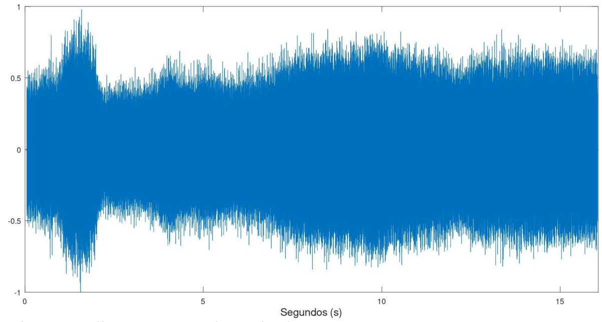

Fig. 7. Audio "Lena" no domínio do tempo.

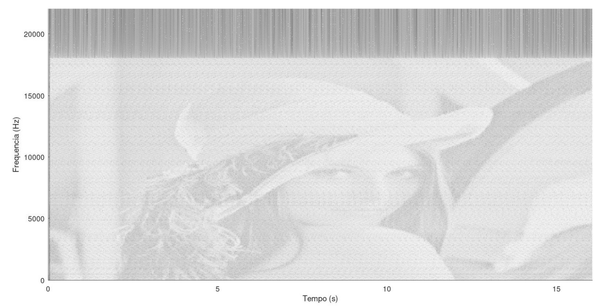

Fig. 8. Espectograma do arquivo de áudio "Lena".

Na última atividade de utilização prática da Transformada de Fourier iremos analisar o espectograma de arquivos de áudio contendo cantos de baleias. A muito tempo se estuda a forma de comunicação entre as baleias. Por viverem em meio aquático, onde a visão e olfato são limitados pelas características do ambiente, esses animais utilizam o som emitido para se comunicarem e para criação de percepção do meio onde estão. O som emitido é chamado de canto devido ao padrão de som muito particular emitidos por algumas espécies, que se assemelha a regras rítmicas de composições musicais.

Na "Figura 9" e "Figura 10" a seguir estão apresentados os espectogramas de dois grupos distintos de chamados de baleias.

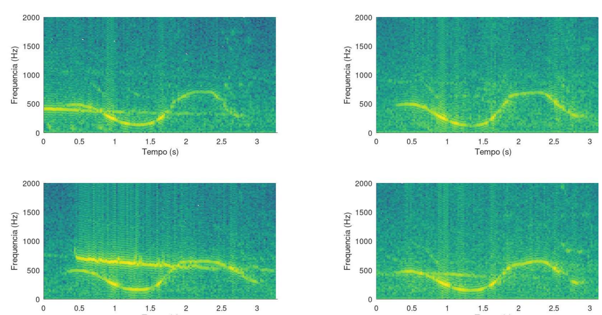

Fig. 9. Espectograma de cantos de baleias

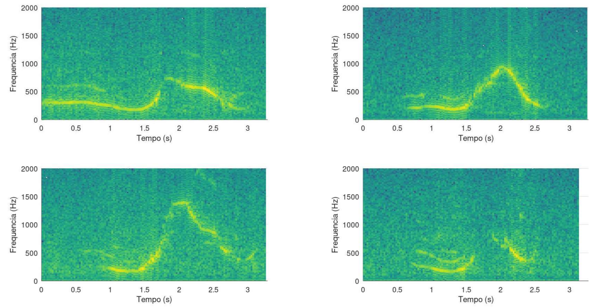

Fig. 10. Espectograma de cantos de baleias

Podemos observar em ambas as imagens a presença de um padrão bem característico na distribuição de frequência dos sons emitidos por esses animais. Na “Figura 9” percebemos um padrão contendo dois picos com frequências mais elevadas. Já na “Figura 10” vemos a presença de apenas um pico de frequências mais elevadas e com amplitude mais alta em relação a “Figura 9”.

V. Considerações Finais

Foi apresentado nesse trabalho um resumo da base teórica da operação da Transformada de Fourier e exemplos da aplicação dessa ferramenta em diferentes sinais.

Vimos que em certas situações torna-se muito mais simples e esclarecedor trabalharmos com sinais no domínio da frequência, que é conseguido a partir da Transformada de Fourier.

Referências Bibliográficas

[1] Felix, Leonardo B., Apostila do curso ELT576 – Processamento Inteligente de Sinais, não publicado.