Notes de cours

5 novembre 2019

1 Exemples pour le calcul de matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \implies \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Inertie : changement de point de repère

On cherche à comparer $I_{\mathbf{g}}$ et $I_{\mathbf{a}}$, pour un vecteur $\mathbf{a}$ quelconque.

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{a}} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{e}_i - \mathbf{a}\|_{\mathbf{M}}^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{e}_i - \mathbf{g} + \mathbf{g} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{M}}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{e}_i - \mathbf{g}\|_{\mathbf{M}}^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{g} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{M}}^2 + 2 \times \left\langle \sum_{i=1}^{n} p_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{g}), \mathbf{g} - \mathbf{a} \right\rangle_{\mathbf{M}} \\
&= I_{\mathbf{g}} + \|\mathbf{g} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{M}}^2 + 2 \times \langle 0, \mathbf{g} - \mathbf{a} \rangle_{\mathbf{M}} = I_{\mathbf{g}} + \|\mathbf{g} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{M}}^2.
\end{aligned}$$

On voit donc que $I_{\mathbf{a}}$ n'est différent de $I_{\mathbf{g}}$que par une valeur fixe. Il ne présente pas d'intérêt.

3 Seconde forme de l'inertie

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|_{\mathbf{M}}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j \left[\|\mathbf{e}_i - \mathbf{g}\|_{\mathbf{M}}^2 + \|\mathbf{g} - \mathbf{e}_j\|_{\mathbf{M}}^2 - 2\langle \mathbf{e}_i - \mathbf{g}, \mathbf{e}_j - \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{M}} \right] \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{e}_i - \mathbf{g}\|_{\mathbf{M}}^2 - 2 \langle \sum_{i=1}^{n} p_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{g}), \sum_{j=1}^{n} p_j (\mathbf{e}_j - \mathbf{g}) \rangle_{\mathbf{M}} \\
&= 2 I_{\mathbf{g}} - 2 \times \langle 0, 0 \rangle_{\mathbf{M}}.
\end{aligned}$$

4 Inertie et trace

$$I_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \|\mathbf{e}_i - \mathbf{g}\|_{\mathbf{M}}^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{g})'\mathbf{M}(\mathbf{e}_i - \mathbf{g}).$$

D'autre part, comme $I_{\mathbf{g}}$ est un nombre,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{g}} = \mathrm{Tr}(I_{\mathbf{g}}) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{Tr}\Big[(\mathbf{e}_i - \mathbf{g})'\mathbf{M}(\mathbf{e}_i - \mathbf{g})\Big] = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{Tr}\Big[(\mathbf{e}_i - \mathbf{g})(\mathbf{e}_i - \mathbf{g})'\mathbf{M}\Big] \\ &= \mathrm{Tr}\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{g})(\mathbf{e}_i - \mathbf{g})'\Big]\mathbf{M}\Big\} = \mathrm{Tr}(\mathbf{VM}). \end{aligned}$$

5 Les valeurs propres de VM sont réelles

Sautez ça si vous ne comprenez pas les complexes.

Par défaut, les vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice sont complexes. Ici cela marche mieux. Soit$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre de $\mathbf{VM}$. On note $\bar{\mathbf{a}}$ le conjugué complexe de $\mathbf{a}$ (idem pour $\bar{\lambda}$).

$$\bar{\lambda}\bar{\mathbf{a}}'\mathbf{a} = (\overline{\mathbf{VMa}})'\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}'(\mathbf{VM})'\mathbf{a} = \bar{\mathbf{v}}'\mathbf{VMv} = \lambda\bar{\mathbf{a}}'\mathbf{a}$$

Comme $\bar{\mathbf{a}}'\mathbf{a}$ est non nul, λ est réel.

6 Les vecteurs propres de VM sont M-orthogonaux

Soient $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ deux vecteurs propres de $\mathbf{VM}$ associés à λ_1 et λ_2. On a

$$\mathbf{a}_1'\mathbf{MVM}a_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1'\mathbf{M}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_{\mathbf{M}} = \ldots = \lambda_1\langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_{\mathbf{M}}.$$

On a donc soit $\lambda_1 = \lambda_2$, soit $\langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_{\mathbf{M}} = 0$. On peut montrer que dans le cas de valeurs propres multiples, cela marche toujours.

7 Les valeurs propres de VM sont positives

$$\mathbf{VMa} = \lambda\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{MVMa} = \lambda\mathbf{a}'\mathbf{Ma}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{MY}'\mathbf{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{YMa} = \lambda\mathbf{a}'\mathbf{Ma}$$

$$(\mathbf{YMa})'\mathbf{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{YMa}) = \lambda\mathbf{a}'\mathbf{Ma}$$

Les deux produits scalaires sont positifs (matrices définie positives), donc $\lambda > 0$.

8 Variables liées et valeurs propres

On cherche à montrer qu'à chaque fois que des variables sont liées par une relation linéaire, l'analyse en composante principale des données correspondantes produit un vecteur $\mathbf{u}$ associé une valeur propre nulle. On considère pour cela une table $\mathbf{X} = (x_i^j)$ de données avec n individus et p variables, ainsi que sa version centrée réduite $\mathbf{Z} = (z_i^j)$, où comme d'habitude $z_i^j = (x_i^j - \bar{x}^j)/\sigma_j$, $\bar{x}^j$ est la moyenne arithmétique de la variable j et σ_j son écart type. Pour simplifier, on supposera que toutes les variables ont le même poids $1/n$. Dans ce cas, on rappelle que la matrice de corrélation de $\mathbf{X}$ s'écrit $\mathbf{R} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$.

Dans la suite, on suppose qu'il existe des coefficients non tous nuls $v_1, \ldots, v_p$ et v_0 tels que, pour tout i,

$$v_1 x_i^1 + v_2 x_i^2 + \ldots + v_p x_i^p = v_0.$$

Les moyennes arithmétiques des variables vérifient alors

$$\begin{aligned} v_1\bar{x}^1 + v_2\bar{x}^2 + \ldots + v_p\bar{x}^p &= v_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^1 + \ldots + v_p\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(v_1 x_i^1 + \ldots + v_p x_i^p\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v_0 = v_0. \end{aligned}$$

Les variables centrées vérifient pour chaque individu i

$$v_1(x_i^1 - \bar{x}^1) + v_2(\bar{x}^2 - x_i^2) + \ldots + v_p(\bar{x}^p - x_i^p) = v_0 - v_0 = 0,$$

et comme $x_i^j - \bar{x}^j = \sigma_j z_i^j$, pour les variables centrées réduites on obtient

$$v_1 s_1 z_i^1 + v_2 s_2 z_i^2 + \ldots + v_p s_p z_i^p = 0.$$

Un facteur propre non nul $\mathbf{u}$ associé à la valeur propre nulle est tel que $\mathbf{Ru} = \mathbf{0}$, puisque les facteurs propres sont des vecteurs propres de la matrice de corrélation. On considère le vecteur $\mathbf{u} = (v_1\sigma_1, \ldots, v_p\sigma_p)'$. Le vecteur est évidemment non nul et on peut réécrire matriciellement la relation trouvée précédemment comme $\mathbf{Zu} = \mathbf{0}$.

On a donc $\mathbf{Ru} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}'\mathbf{Zu} = \frac{1}{n}\mathbf{Z}'\mathbf{0} = \mathbf{0}$, ce qui répond à la question posée.