



**Visiter notre Forum :** <http://prepa-book.forummaroc.net/>

**Visiter notre page :**

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>

**PCSI  
MPSI  
PTSI**

# | Électrocinétique |

**Tout le cours**

**Bernard Gendreau**

Professeur de chaire supérieure  
en classes préparatoires à l'École nationale  
de Chimie, Physique, Biologie (ENCPB) à Paris

**Christophe Gripon**

Professeur en classes préparatoires  
à l'École nationale de Chimie,  
Physique, Biologie (ENCPB) à Paris

|   |   |    |
|---|---|----|
| <b>1</b>  | <b>Circuit électrique en régime stationnaire</b>                    |    |
| 1 - Définitions .....   |   | 4  |
| 2 - Courant électrique – Intensité – Loi des nœuds .....  |   | 5  |
| 3 - Tension aux bornes d'un dipôle – Loi des mailles .....  |   | 6  |
| 4 - Conventions d'orientation pour un dipôle – Dipôle actif, dipôle passif ...                          |   | 6  |
| 5 - Conducteur ohmique – Loi d'Ohm .....  |   | 7  |
| 6 - Sources d'énergie électrique – Modélisation d'un dipôle actif .....                                 |   | 8  |
| 7 - Point de fonctionnement d'un circuit .....  |   | 9  |
| 8 - Voltmètre et ampèremètre .....  |   | 10 |
| savoir résoudre les exercices .....   |   | 11 |
| <b>2</b>  | <b>Puissance en régime stationnaire</b>                             |    |
| 1 - Puissance électrocinétique reçue par un dipôle .....  |   | 18 |
| 2 - Caractéristiques d'un conducteur ohmique .....  |   | 19 |
| savoir résoudre les exercices .....   |   | 20 |
| <b>3</b>  | <b>Méthodes d'étude d'un circuit électrique en régime permanent</b> |    |
| 1 - Association en série .....  |   | 24 |
| 2 - Association en parallèle .....  |   | 27 |
| 3 - Équivalence des représentations de Thévenin<br>et de Norton d'un générateur .....                   |   | 29 |
| 4 - Potentiel et loi des nœuds en termes de potentiels .....  |   | 30 |
| 5 - Méthodes d'étude d'un circuit .....   |   | 31 |
| savoir résoudre les exercices .....   |   | 33 |
| <b>4</b>  | <b>Circuits RC, RL, RLC série soumis à un échelon de tension</b>    |    |
| 1 - Circuit RC série .....  |   | 39 |
| 2 - Circuit RL série .....  |   | 44 |
| 3 - Circuit RLC série .....   |   | 47 |
| 4 - Établissement d'un régime périodique forcé<br>dans un circuit soumis à une tension périodique ..... |   | 52 |
| 5 - Approximation des régimes quasi permanents (ARQP) .....   |   | 53 |
| savoir résoudre les exercices .....   |   | 54 |
| <b>5</b>  | <b>Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé</b>                |    |
| 1 - Introduction .....  |   | 63 |
| 2 - Utilisation des nombres complexes .....   |   | 66 |
| 3 - Impédances complexes .....  |   | 66 |
| 4 - Théorèmes généraux .....  |   | 69 |
| 5 - Lois d'association .....  |   | 72 |
| 6 - Étude d'un circuit RLC, résonances .....  |   | 75 |
| savoir résoudre les exercices .....   |   | 81 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| <b>6</b> | <b>Puissance en régime sinusoïdal forcé</b>  |     |
| 1 -      | Puissance instantanée et puissance moyenne .....   | 89  |
| 2 -      | Aspects énergétiques de l'étude du circuit RLC série .....                                   | 92  |
|          | savoir résoudre les exercices .....  | 95  |
| <b>7</b> | <b>Transfert d'un système linéaire – Filtres du premier ordre</b>                            |     |
| 1 -      | Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire Filtre .....                                  | 99  |
| 2 -      | Diagramme de Bode d'un filtre .....  | 101 |
| 3 -      | Filtre passe-bas du premier ordre .....  | 102 |
| 4 -      | Filtre passe-haut du premier ordre .....   | 105 |
| 5 -      | Prévision des comportements asymptotiques<br>à basse et à haute fréquences d'un filtre ..... | 108 |
| 6 -      | Équation différentielle d'un système du premier ordre – Stabilité .....                      | 109 |
| 7 -      | Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre .....  | 110 |
|          | savoir résoudre les exercices .....  | 112 |
| <b>8</b> | <b>Filtres du deuxième ordre</b>   |     |
| 1 -      | Filtre passe-bas du deuxième ordre .....   | 126 |
| 2 -      | Filtre passe-bande du deuxième ordre .....   | 129 |
| 3 -      | Filtre passe-haut du deuxième ordre .....  | 132 |
| 4 -      | Prévision des comportements asymptotiques<br>à basse et à haute fréquences d'un filtre ..... | 134 |
| 5 -      | Équation différentielle d'un système du deuxième ordre – Stabilité .....                     | 134 |
|          | savoir résoudre les exercices .....  | 137 |
|          | <b>Index</b> .....   | 149 |

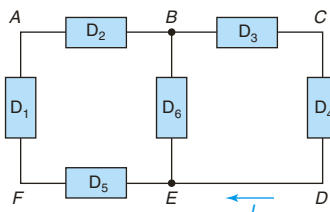
# Circuit électrique en régime stationnaire

Un système est en régime stationnaire quand les grandeurs physiques qui le décrivent sont indépendantes du temps.

## 1 Définitions

- Un **circuit électrique** est un ensemble de conducteurs reliés entre eux par des fils de jonction et dans lequel circule un courant électrique.
- Un **dipôle** est un composant électrique limité par deux bornes.
- Un **nœud** est un point commun à plus de deux dipôles.
- Une **maille** est une partie d'un circuit électrique formant un contour fermé.
- Une **branche** est une suite de dipôles entre deux nœuds consécutifs.

Fig. 1



Le circuit est constitué des dipôles  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  et  $D_6$  reliés par des fils de jonction.

### Remarque

L'orientation arbitraire de la branche  $BCDE$  est donnée par la flèche. L'intensité  $I$  est positive si les porteurs de charge positive se déplacent dans le sens choisi arbitrairement.

Par exemple dans la figure 1 :

- $B$  et  $E$  sont des nœuds du circuit.
- La maille  $ABEFA$  est constituée des dipôles  $D_2$ ,  $D_6$ ,  $D_5$ , et  $D_1$ . Les contours fermés  $ABCDEFA$  et  $BCDEB$  sont les deux autres mailles du circuit.
- $BCDE$ ,  $EFAB$  et  $EB$  sont les branches du circuit.



## 2 Courant électrique – Intensité – Loi des nœuds

### 2.1. Courant électrique

Le courant électrique est un déplacement de porteurs de charge (électrons, ions) dans un conducteur.

Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement des porteurs de charge positive. C'est donc aussi le sens opposé au déplacement des porteurs de charge négative.

### 2.2. Orientation d'une branche – Relation entre charge et intensité

• Avant d'étudier un réseau électrique, chaque branche doit être orientée arbitrairement (voir figure 1) en plaçant une flèche sur le trait représentant le fil de jonction surmontée de la lettre  $I$  pour l'intensité.

L'intensité  $I$  du courant qui traverse un conducteur est un débit de charge. C'est une grandeur algébrique. Elle est mesurée à l'aide d'un ampèremètre.

• Soit  $dq$  la charge qui traverse dans le sens positif choisi arbitrairement une section de conducteur pendant une durée élémentaire  $dt$ . L'intensité s'écrit :

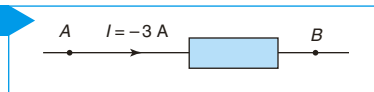
$$I = \frac{dq}{dt} \quad \begin{array}{l} I \text{ en ampère (A)} \\ q \text{ en coulomb (C)} \\ t \text{ en seconde (s)} \end{array}$$

Après calcul, c'est le signe de la valeur de l'intensité  $I$  qui donne le sens réel du courant :

•  $I > 0$  signifie que les porteurs positifs se déplacent dans le sens choisi arbitrairement ;

•  $I < 0$  signifie que les porteurs positifs se déplacent dans le sens inverse du sens choisi.

Fig. 2



Ici, le sens réel du courant est de B vers A.

### 2.3. Loi des nœuds

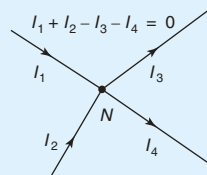
En régime stationnaire, il n'y a ni accumulation ni disparition de charge ; il y a conservation de la charge. La loi des nœuds traduit la loi de conservation de la charge.

#### Loi des nœuds

La somme des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent :

$$\sum \varepsilon_k I_k = 0.$$

- $\varepsilon_k = +1$ , si l'intensité est orientée vers le nœud ;
- $\varepsilon_k = -1$ , si l'intensité est orientée à partir du nœud.

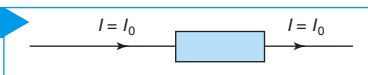


Attention

L'intensité en amont d'un dipôle est égale à sa valeur en aval ; le courant « ne s'use pas » dans un dipôle.

**Conséquence :** l'intensité est la même en tout point d'une branche car elle ne contient pas de nœud.

Fig. 3

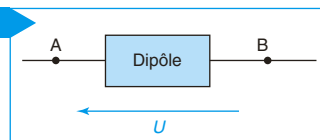


## 3 Tension aux bornes d'un dipôle – Loi des mailles

### 3.1. Tension aux bornes d'un dipôle

La tension entre deux points d'un dipôle est la grandeur électrique mesurée entre ces deux points par un voltmètre. Elle est représentée par une flèche. C'est une grandeur algébrique et elle s'exprime en volt (symbole V).

Fig. 4



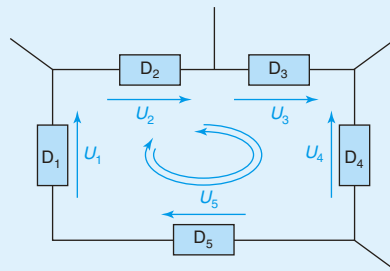
### 3.2. Loi des mailles

On choisit arbitrairement un sens de parcours (sens horaire ou anti-horaire).

La somme des tensions aux bornes des dipôles d'une maille est nulle :

$$\sum_{\text{le long d'une maille}} \varepsilon_k U_k = 0.$$

- $\varepsilon_k = +1$ , si la flèche tension  $U_k$  est dans le sens du parcours ;
- $\varepsilon_k = -1$ , si la flèche tension  $U_k$  est dans le sens opposé à celui du parcours.



Attention

Les résultats obtenus en appliquant la loi des mailles sont indépendants du sens de parcours choisi.

Sur la figure ci-dessus :

- maille parcourue dans le sens horaire :  $U_1 + U_2 + U_3 - U_4 + U_5 = 0$  ;
- maille parcourue dans le sens anti-horaire :  $-U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$ .

© Nathan, classe prépa

## 4 Conventions d'orientation pour un dipôle – Dipôle actif, dipôle passif

### 4.1. Convention récepteur et convention générateur

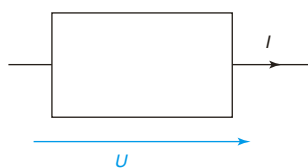
Le circuit étant orienté (sens du courant  $I$  défini), on peut choisir arbitrairement pour la tension  $U$  :

- le même sens que celui de  $I$  (flèches dans le même sens) ; c'est la **convention générateur** ;
- ou le sens opposé (flèches de sens opposé) ; c'est la **convention récepteur**.

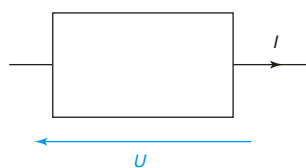
Fig. 5

Conventions d'orientation d'un dipôle

• Convention générateur



• Convention récepteur



Conseil

Il faut systématiquement représenter sur les schémas électriques les sens d'orientation des branches (sens de l'intensité) et les sens choisis pour les flèches tension.

## 4.2. Dipôle actif, dipôle passif

La caractéristique d'un dipôle est la courbe  $U = f(I)$  donnant la tension  $U$  à ses bornes en fonction de l'intensité  $I$  du courant qui le traverse, ou la courbe  $I = g(U)$ .

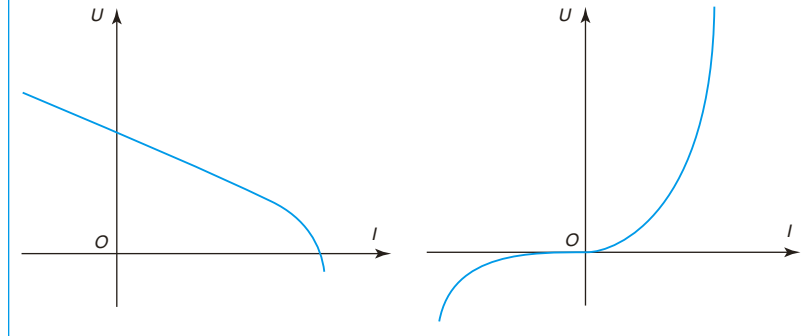
Un **dipôle passif** est un dipôle dont la caractéristique passe par l'origine.

Un **dipôle actif** est un dipôle dont la caractéristique ne passe pas par l'origine.

Fig. 6

a) Caractéristique d'un dipôle actif.

b) Caractéristique d'un dipôle passif.



## 5 Conducteur ohmique – Loi d'Ohm

### 5.1. Conducteur ohmique

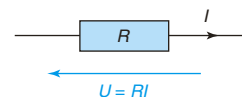
Un **conducteur ohmique** est un dipôle dans lequel le passage d'un courant provoque un effet thermique appelé effet Joule. On lui donne souvent le nom de **résistor**.

### 5.2. Loi d'Ohm

Un conducteur ohmique est caractérisé par sa résistance et satisfait à la loi d'Ohm.

Loi d'Ohm pour un conducteur ohmique en convention récepteur :

$$U = RI \quad \begin{cases} U \text{ tension aux bornes d'un conducteur ohmique (V)} \\ R \text{ résistance d'un conducteur ohmique en ohm } (\Omega) \\ I \text{ intensité du courant qui traverse le conducteur (A)} \end{cases}$$

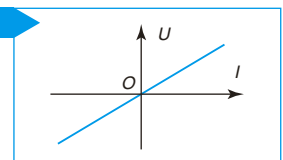


**Conseil**  
Orienter de préférence un conducteur ohmique en convention récepteur et appliquer la loi  $U = RI$ . Si le conducteur ohmique est orienté en convention générateur, la relation devient  $U = -RI$ .

La caractéristique d'un conducteur ohmique est une droite. C'est un dipôle passif.

La **conductance**  $G$  est l'inverse de la résistance ; elle s'exprime en siemens (symbole S).

Fig. 7





## 6 Sources d'énergie électrique – Modélisation d'un dipôle actif

### 6.1. Sources idéales d'énergie

#### 6.1.1. Source ou générateur idéal de tension

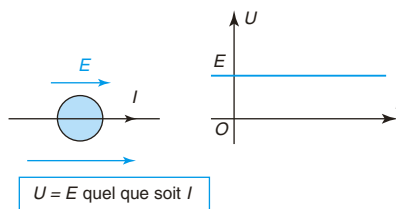
C'est un dipôle actif qui impose une tension constante  $E$ , appelée **force électromotrice** (noté f.é.m.), entre ses bornes.

#### 6.1.2. Source ou générateur idéal de courant

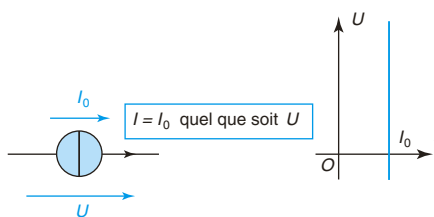
C'est un dipôle actif qui impose un courant constant d'intensité  $I_0$ , appelé **courant électromoteur** (noté c.é.m.), dans la branche dans laquelle il est placé.

Fig. 8

a) Générateur idéal de tension en convention générateur



b) Générateur idéal de courant en convention générateur



### 6.2. Modélisation linéaire de Thévenin et de Norton d'un dipôle actif

Dans de nombreuses applications l'expérience montre qu'on peut modéliser un générateur réel par l'association :

- d'un générateur idéal de tension et d'un conducteur ohmique en série dont la résistance est appelée résistance interne du générateur ; c'est le modèle linéaire de Thévenin.
- ou d'un générateur idéal de courant et d'un conducteur ohmique en parallèle dont la conductance est appelée conductance interne du générateur ; c'est le modèle linéaire de Norton.

Fig. 9

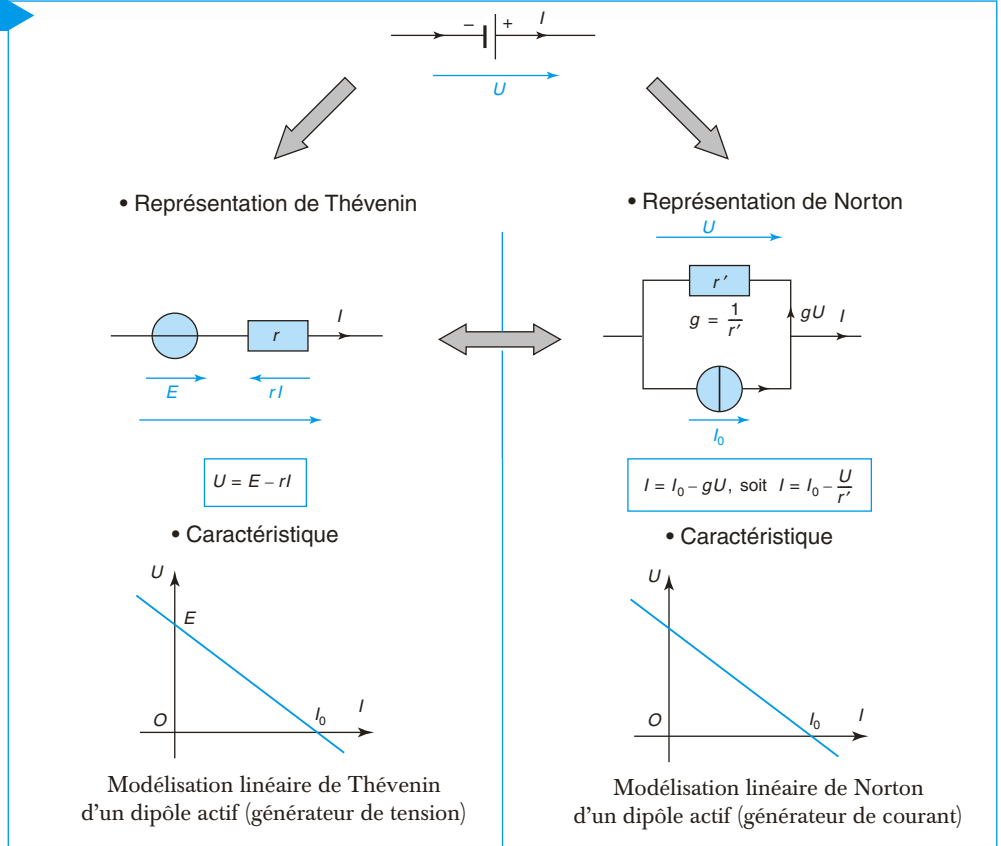
Conseil

Pour la modélisation de Thévenin, la flèche tension correspondant à la f.é.m. doit être orientée du pôle - du générateur vers le pôle +.

Pour la modélisation de Norton, la flèche courant correspondant au c.é.m. doit être orientée du pôle - du générateur vers le pôle +.

Remarque

Les deux représentations sont équivalentes, ce qui impose :  $r' = r$  et  $E = rI_0$ . (voir chapitre 3.)



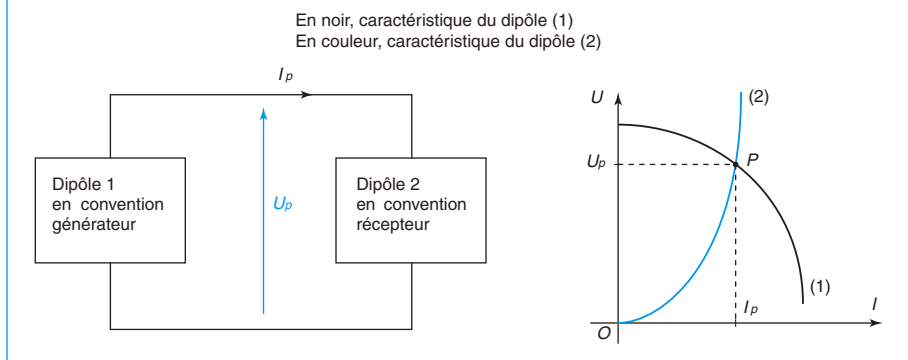
© Nathan, classe prépa

## 7 Point de fonctionnement d'un circuit

Le point de fonctionnement d'un circuit comportant deux dipôles est le point d'intersection des caractéristiques de ces deux dipôles.

Fig. 10

Point de fonctionnement d'un circuit





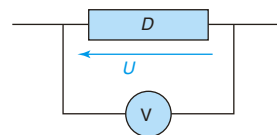
## 8 Voltmètre et ampèremètre

### 8.1. Mesure des tensions

La tension  $U$  aux bornes d'un dipôle  $D$  se mesure en plaçant un voltmètre en parallèle.

Un voltmètre est idéal si son branchement ne modifie pas la tension aux bornes du dipôle dont il mesure la tension.

Un voltmètre idéal n'est traversé par aucun courant ; sa résistance est infinie.

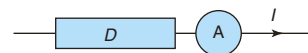


### 8.2. Mesure des intensités

L'intensité  $I$  qui traverse un dipôle  $D$  se mesure en plaçant un ampèremètre en série avec le dipôle.

Un ampèremètre est idéal si son introduction ne modifie pas l'intensité du courant qui traverse le dipôle.

La tension aux bornes d'un ampèremètre idéal est nulle ; sa résistance est nulle.

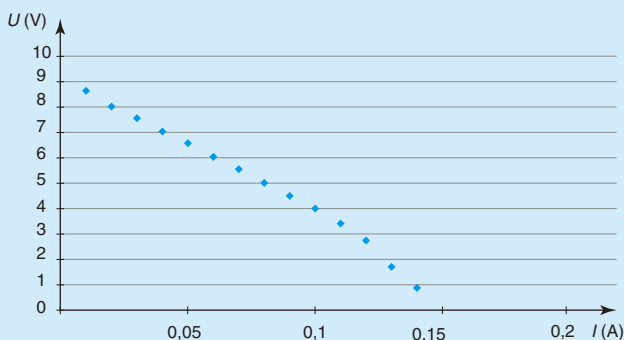
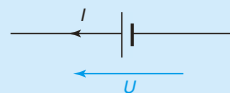


Attention

Les voltmètres et ampèremètres sont toujours considérés comme idéaux dans les exercices, sauf indication contraire. On ne doit pas tenir compte de leur présence dans les calculs.

## 1 – Caractéristique d'un générateur non linéaire

On considère le générateur ci-contre. En faisant débiter un générateur dans des résistances réglables, on a obtenu la caractéristique ci-dessous.



Caractéristique du générateur

On considère que la caractéristique est linéaire tant que l'intensité du courant est inférieure à 0,10 A.

- **1** En précisant son domaine de validité en intensité, déduire des mesures les modèles linéaires du générateur :
  - a. modèle linéaire de Thévenin ; calculer la force électromotrice  $E$  et la résistance interne  $r$  ;
  - b. modèle linéaire de Norton ; calculer le courant électromoteur  $I_0$  et la résistance interne  $r'$ .
- **2** Ce générateur alimente un résistor de résistance  $R$ . Déterminer la valeur limite  $R_{\text{lim}}$  du domaine linéaire.
- **3** Déterminer graphiquement le point de fonctionnement quand le générateur alimente un résistor de résistance  $R' = 10 \, \Omega$ .

### résolution méthodique

- **1** On lit sur la courbe caractéristique du générateur (page suivante) les coordonnées du point limite de linéarité :

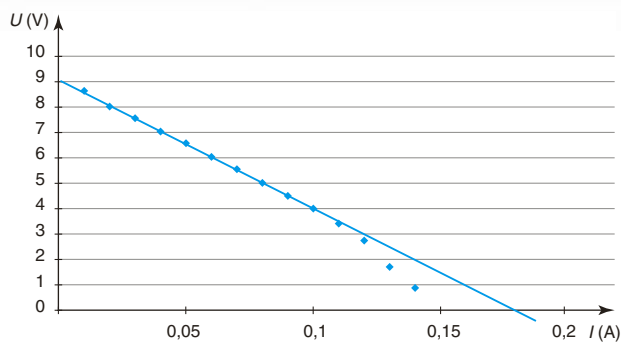
(0,10 A ; 4,0 V)

Le générateur peut donc être considéré comme linéaire tant que la tension  $U$  est supérieure à 4,0 V.

- a. En respectant les pôles du générateur, la modélisation linéaire de Thévenin donne :

$$U = E - U_r = E - rI \quad (1)$$

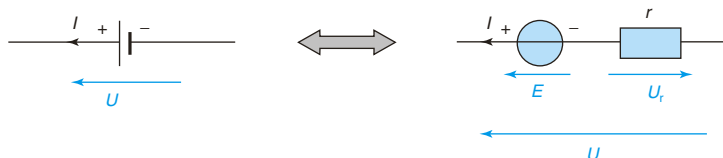
$U = E$  pour  $I = 0$  ; on obtient par lecture graphique sur la figure suivante :  $E = 9,0 \, \text{V}$ .



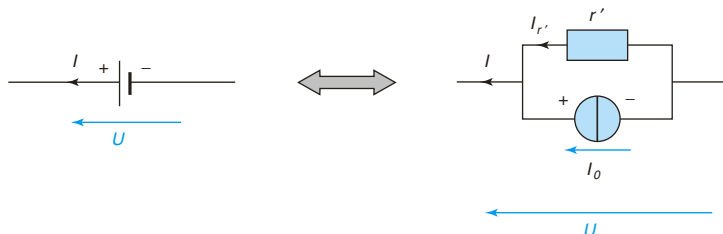
Caractéristique du générateur

$r$  est l'opposé de la pente de la droite ; pour la calculer on considère les points  $(0 ; 9,0 \text{ V})$  et  $(0,18 \text{ A} ; 4,0 \text{ V})$ . Il vient  $r = \frac{9 - 4}{0,18}$ , soit :

$$r = 50 \, \Omega$$



b. En respectant les pôles du générateur, la modélisation de Norton donne :



Faire attention aux sens d'orientation des f.é.m. et c.é.m. : les flèches correspondantes doivent être dirigées du pôle négatif du générateur vers le pôle positif.

L'application de la loi des nœuds conduit à  $I = I_{r'} + I_0$

$$U = -r'I \text{ donc } I = -\frac{U}{r'} + I_0 \Rightarrow U = r'I_0 - r'I \quad (2)$$

$r'$  étant l'opposé de la pente de la droite, sa valeur est celle de  $r$  calculée plus haut.

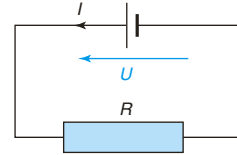
Cherchons à retrouver ce résultat d'une autre manière :

- $U = r'I_0$  pour  $I = 0$ , on en déduit graphiquement que  $r'I_0 = 9,0 \text{ V}$ .
- $I = I_0$  pour  $U = 0$ . On obtient en prolongeant la droite correspondant à la partie linéaire de la caractéristique la valeur  $I_0 = 0,18 \text{ A}$ .
- $r'I_0 = 9,0 \text{ V}$  et  $I_0 = 0,18 \text{ A} \Rightarrow r' = 50 \, \Omega$ .

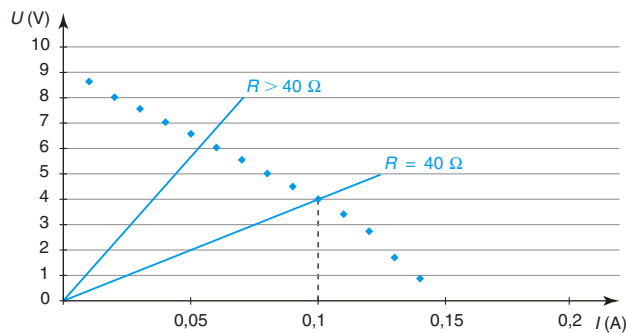
*Remarque :* En comparant les relations (1) et (2) on constate que  $r = r'$  et  $r'I_0 = E$ , ces relations sont générales et seront utilisées au chapitre 3.

Les modélisations linéaires de Thévenin et de Norton des générateurs réels ne sont que des approximations. Selon la précision recherchée dans la détermination des valeurs de fonctionnement, ces approximations sont valables dans un domaine plus ou moins étendu.

➤ **2** Ajoutons sur le graphe la caractéristique du résistor (convention récepteur sur le schéma ci-contre) à celle du générateur (figure ci-dessous).



Le tracé d'une caractéristique n'a de sens que si les grandeurs correspondantes,  $U$  et  $I$ , sont définies sur un schéma.



La caractéristique du générateur n'est plus linéaire pour  $I > I_{\text{lim}} = 0,10 \text{ A}$  et  $U < U_{\text{lim}} = 4,0 \text{ V}$ . À la limite,  $R_{\text{lim}} = \frac{U_{\text{lim}}}{I_{\text{lim}}} = 40 \Omega$ . Il faut donc que :

$$R > R_{\text{lim}} = 40 \Omega$$

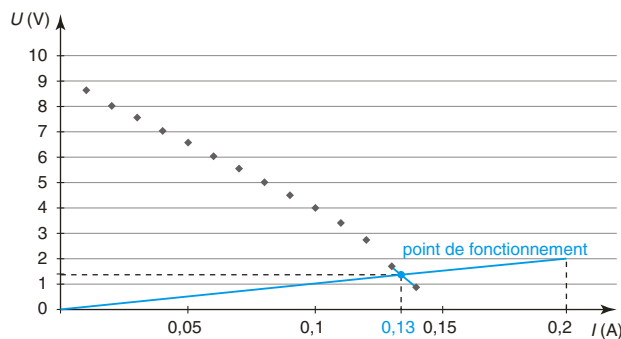
➤ **3** La résistance étant inférieure à  $R_{\text{lim}}$ , on est en dehors du domaine linéaire ; il faut donc utiliser la méthode graphique de résolution.

Ajoutons sur le graphe la caractéristique du résistor à celle du générateur (figure suivante). Elle passe par le point  $(0,20 \text{ A} ; 2,0 \text{ V})$  et entre deux points de la caractéristique du générateur. Le point de fonctionnement est le point d'intersection du segment qui relie ces deux points avec la caractéristique du résistor. On lit directement ses coordonnées sur les axes :

$$0,13 \text{ A} \text{ et } 1,4 \text{ V}$$

La détermination graphique est toujours entachée d'erreurs, ici de l'ordre de 10 %.

La résolution graphique s'impose quand le comportement d'un ou de plusieurs dipôles d'un circuit est non linéaire.



Caractéristique du générateur

## en conclusion

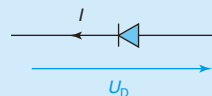
- La flèche tension correspondant à la f.é.m. d'un générateur, ou la flèche courant correspondant au c.é.m., doit être orientée du pôle négatif vers le pôle positif du générateur.
- Les modélisations linéaires de Thévenin et de Norton des générateurs réels ne sont que des approximations. Selon la précision recherchée dans la détermination des valeurs de fonctionnement, ces approximations sont valables dans un domaine plus ou moins étendu.
- La résolution graphique s'impose quand le comportement d'un ou de plusieurs dipôles d'un circuit est non linéaire.

© Nathan, classe prépa

## 2 – Modélisation d'une diode

Soit  $U_D$  la tension aux bornes d'une diode à jonction et  $I$  l'intensité du courant qui la traverse selon les conventions de la figure ci-contre. En unités légales :

- $I = 0$  si  $U_D < 0,60$  V (on dit que la diode est bloquante) ;
- $U_D = 10I + 0,60$  si  $I > 0$  (on dit que la diode est passante).



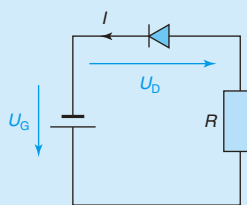
Le domaine d'utilisation de la diode est

$$U_D > U_{D\min} = -3,0 \text{ V et } I < I_{\max} = 0,10 \text{ A.}$$

- 1 Montrer que, selon les valeurs de la tension  $U_D$ , la diode est équivalente à un interrupteur ouvert ou à un résistor en série avec un générateur idéal de tension.
- 2 Tracer la caractéristique  $I = f(U_D)$ .

- 3 La diode est insérée dans le circuit ci-contre, qui comprend un générateur réel, de résistance interne  $r = 5,0 \Omega$  et de f.é.m.  $E$  ajustable, et un résistor de résistance  $R = 15 \Omega$ .

Quand on ajuste la f.é.m. à la valeur  $E = 10,0 \text{ V}$ , on constate qu'un courant traverse le circuit. Calculer l'intensité  $I$ , la tension  $U_D$  et la tension  $U_G$  aux bornes du générateur.



- 4 Calculer la valeur  $E_{\min}$  en deçà de laquelle la diode est bloquante.
- 5 Exprimer la relation simple entre les tensions  $U_D$  et  $U_G$  quand la diode est bloquante.
- 6 Tracer la courbe  $U_D = f(U_G)$ .

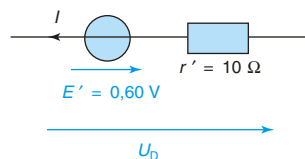
## résolution méthodique

- 1 Pour  $U_D < 0,60 \text{ V}$ , l'intensité qui traverse la diode est nulle. **La diode est équivalente à un interrupteur ouvert.**

Pour  $I > 0$ , on peut écrire la tension  $U_D$  sous la forme  $U_D = r'I + E'$ . Par identification, on a :

$$E' = 0,60 \text{ V} \text{ et } r' = 10 \Omega$$

La diode est équivalente à l'association série d'un générateur idéal de tension et d'un résistor (figure ci-contre).

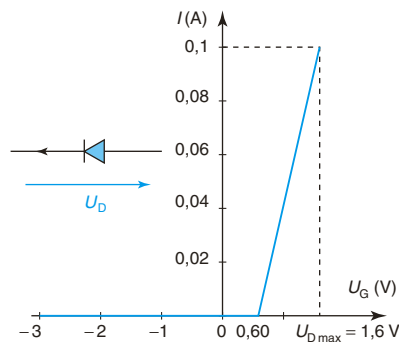


Il faut faire attention à l'orientation du circuit et aux sens respectifs des flèches représentant la force électromotrice  $E'$  et la tension  $U_D$ .

- 2 • Pour  $I = 0$ , la caractéristique est le segment compris entre les points  $(-3,0 \text{ V} ; 0)$  et  $(0,60 \text{ V} ; 0)$ .
- Pour  $I > 0$ , la caractéristique est le segment d'équation  $I = \frac{U_D}{10} - 0,060$ , de pente  $0,10 \Omega^{-1}$  compris entre les points  $(0,60 \text{ V} ; 0)$  et  $(1,6 \text{ V} ; 0,10 \text{ A})$ . Elle est limitée au point :

$$(U_{D\max} = 0,60 + 10 \times 0,1 = 1,6 \text{ V} ; 0,10 \text{ A}).$$

La caractéristique est une courbe continue (figure ci-contre).

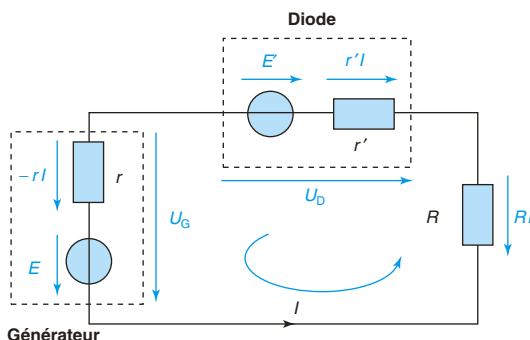


- 3 Un courant traverse le circuit, la diode est donc passante ; la diode est modélisable par l'association série du générateur idéal de tension  $E'$  et du résistor  $r'$ . Représentons le circuit équivalent.



Orientons le circuit (flèche indiquant le sens arbitraire choisi pour  $I$ ) et choisissons la convention récepteur pour chacun des résistors.

Il faut systématiquement représenter sur les schémas électriques les sens d'orientation des branches (sens de l'intensité) et les sens choisis pour les flèches tension avant d'appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds.



En choisissant le sens de parcours indiqué sur la figure ci-dessus pour appliquer la loi des mailles, il vient :

$$E - RI - r'I - E' - rI = 0 \Rightarrow E - E' = (R + r + r')I \Rightarrow I = \frac{9,4}{30} = 0,3133.$$

$$I = 0,31 \text{ A}$$

D'où  $U_D = E' + r'I = 0,60 + 10 \frac{9,4}{30} = 3,7333.$

$$U_D = 3,7 \text{ V} \text{ et } U_G = E - rI = 8,4 \text{ V}$$

Les calculs intermédiaires doivent être conduits sans être arrondis. Ainsi le calcul précédent de la tension doit-il être conduit avec la valeur fractionnaire de  $I$ .

- 4 Le modèle utilisé est valide tant que la diode est passante ; la valeur  $E_{\min}$  de la f.é.m. est celle pour laquelle l'intensité s'annule. D'après la relation  $E - E' = (R + r + r')I$ , il vient immédiatement :

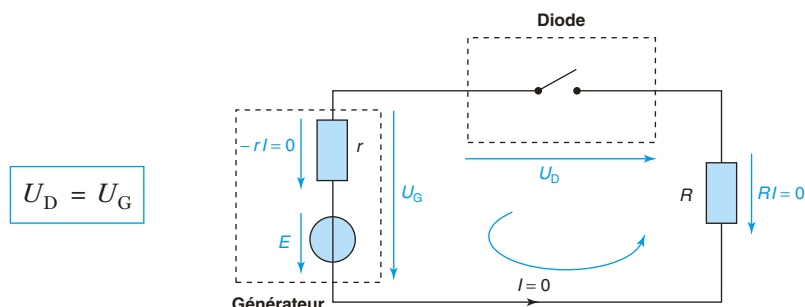
$$E_{\min} = E' \text{ et } U_{G\min} = E_{\min} = 0,60 \text{ V}$$

En deçà de cette valeur la diode est bloquante.

Une application de la relation  $E - E' = (R + r + r')I$  avec  $E < E'$  conduirait à une valeur négative de l'intensité, en dehors du domaine de validité du modèle de la diode.

La valeur de l'intensité (ou de la tension) obtenue par l'utilisation d'un modèle de dipôle doit appartenir au domaine des intensités (ou des tensions) dans lequel ce modèle est valide.

- 5 La diode est équivalente à un interrupteur ouvert quand elle est bloquante, ce qui est le cas quand  $U_G < U_{Gmin} = 0,60 \text{ V}$ . Représentons le circuit équivalent (ci-dessous). Les tensions aux bornes des résistors sont nulles ; il vient immédiatement :



- 6 Calculons les valeurs extrêmes  $E_{min}$  et  $E_{max}$  de la tension  $E$  imposée par les conditions aux limites de fonctionnement de la diode :

- $U_{Gmin} = U_{Dmin} = -3,0 \text{ V}$  ;
- $U_{Gmax} = E' + (R + r')I_{max}$ , soit  $U_{Gmax} = 3,1 \text{ V}$ .

Quand la diode est bloquante  $U_D = U_G$ . Pour ce régime, la courbe  $U_D = f(U_G)$  est le segment de pente unitaire compris entre les points  $(-3,0 \text{ V} ; -3,0 \text{ V})$  et  $(0,60 \text{ V} ; 0,60 \text{ V})$

Quand la diode est passante, on peut écrire :

$$U_G - RI - U_D = 0 \text{ et } U_D = E' + r'I,$$

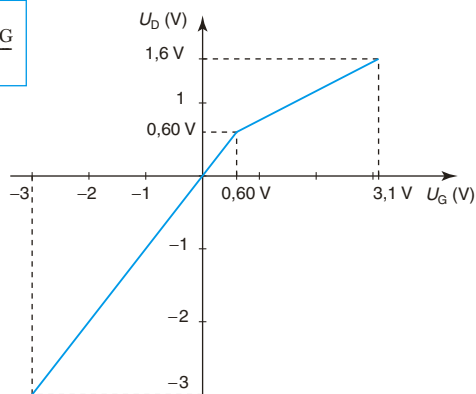
d'où :

$$U_D \left( 1 + \frac{r'}{R} \right) = E' + \frac{r'}{R} U_G \Rightarrow U_D = \frac{RE' + r'U_G}{R + r'}$$

$$\text{A.N. : } U_D = \frac{9 + 10U_G}{25}.$$

Pour ce régime, la courbe  $U_D = f(U_G)$  est le segment de pente 0,40 compris entre les points  $(0,60 \text{ V} ; 0,60 \text{ V})$  et  $(3,1 \text{ V} ; 1,6 \text{ V})$ .

La courbe complète est tracée ci-contre. C'est une courbe continue qui présente une rupture de pente quand la diode passe du régime bloquant au régime passant.



### en conclusion

- Il faut systématiquement représenter sur les schémas électriques les sens d'orientation des branches (sens de l'intensité) et les sens choisis pour les flèches tension avant d'appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds.
- La valeur de l'intensité (ou de la tension) obtenue par l'utilisation d'un modèle de dipôle doit appartenir au domaine des intensités (ou des tensions) dans lequel ce modèle est valide.

# Puissance en régime stationnaire

## 1 Puissance électrocinétique reçue par un dipôle

La puissance électrocinétique reçue par un dipôle en convention récepteur est :

$$\mathcal{P} = UI \quad \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ puissance du dipôle en watt (W)} \\ U \text{ tension aux bornes du dipôle (V)} \\ I \text{ intensité du courant qui traverse le dipôle (A)} \end{array}$$

### • Conséquences

La puissance reçue par un dipôle en convention générateur est :

$$\mathcal{P} = -UI.$$

La puissance fournie par un dipôle est égale à l'opposée de la puissance reçue.

### 1.1. Signe de la puissance reçue et caractère d'un dipôle

La puissance reçue par un dipôle est une grandeur algébrique. Son signe indique le caractère générateur ou récepteur du dipôle.

Un dipôle a un caractère **récepteur** si la puissance qu'il reçoit est positive. Il transforme l'énergie qu'il reçoit en une autre forme d'énergie (thermique, mécanique, lumineuse...)

Un dipôle a un caractère **générateur** si la puissance qu'il reçoit est négative. Il transforme en énergie électrique une autre forme d'énergie.

Il est équivalent d'écrire :

- (i) un dipôle a un caractère générateur si la puissance qu'il fournit est positive ;
- (ii) un dipôle a un caractère récepteur si la puissance qu'il reçoit est négative.

Attention

La relation  $\mathcal{P} = UI$  n'est applicable qu'en convention récepteur.

Conseil

Choisir de préférence la convention générateur pour un dipôle de caractère générateur et la convention récepteur pour un dipôle de caractère récepteur.

## 1.2. Bilan de puissance dans un circuit

La puissance reçue est l'énergie reçue par unité de temps.  
Comme l'énergie, la puissance se conserve.

La somme des puissances fournies par les dipôles générateurs d'un circuit est égale à la somme des puissances reçues par les dipôles récepteurs de ce circuit.

On peut aussi écrire : la somme des puissances reçues par les dipôles d'un circuit est nulle.

## 2 Caractéristiques d'un conducteur ohmique

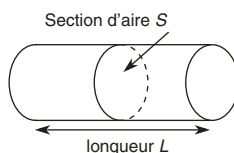
### 2.1. Résistance d'un conducteur ohmique homogène et de section constante

La résistance d'un conducteur ohmique homogène et de section constante (fig. 1) est :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

|   |
|---|
| $R$ : résistance d'un conducteur ohmique en ohm ( $\Omega$ )            |
| $\rho$ : résistivité du matériau conducteur ( $\Omega \cdot \text{m}$ ) |
| $L$ : longueur du conducteur (m)  |
| $S$ : section du conducteur ( $\text{m}^2$ )                            |

Fig. 1



La résistivité  $\rho$  est une caractéristique du matériau conducteur. Elle dépend de la température.

### 2.2. Effet Joule dans un conducteur ohmique

Le passage du courant dans un résistor provoque une dissipation d'énergie thermique dans ce dernier ; c'est l'effet Joule.

La puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique est (convention récepteur) :

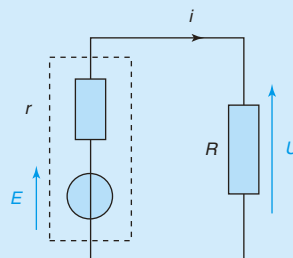
$$\mathcal{P} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

|                                      |
|--------------------------------------|
| $R$ : résistance en ohm ( $\Omega$ ) |
| $I$ : intensité en ampère (A)        |
| $U$ : tension aux bornes en volt (V) |

## 1 – Transfert de puissance

On considère un générateur de f.é.m.  $E = 10 \text{ V}$  et de résistance interne  $r = 5,0 \Omega$  alimentant un résistor de résistance  $R = 5,0 \Omega$ .

- 1 Déterminer la tension  $U$  aux bornes du résistor  $R$  et l'intensité  $I$  du courant qui le traverse.
- 2 Calculer les puissances dissipées par effet Joule.
- 3 Calculer la puissance reçue par le générateur idéal de tension.
- 4 Faire un bilan de puissance pour l'ensemble du circuit.



### résolution méthodique

- 1 Orientons le circuit et la tension  $U$  comme l'indique le schéma de l'énoncé. Le générateur est en convention générateur et le résistor est en convention récepteur.

Ce choix des orientations est « naturel » car nous « devinons » qu'il conduira à des valeurs positives de l'intensité  $I$  et de la tension  $U$ . Nous pourrions aussi en choisir d'autres, les résultats seraient les mêmes.

La tension  $U$  s'écrit de deux manières :  $U = RI$  et  $U = E - rI$ .

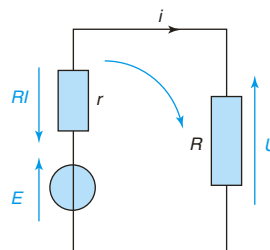
D'où  $10 - 5I = 5I$ . Ce qui conduit à :

$$I = 1,0 \text{ A et } U = 5,0 \text{ V}$$

On peut aussi appliquer la loi des mailles pour un sens de parcours donné (voir figure) :

$$E - rI - U = 0, \text{ avec } U = RI.$$

On arrive au même résultat.



- 2 Il y a effet Joule dans les deux résistors  $R$  et  $r$ .

Le résistor étant en convention récepteur, il reçoit la puissance  $\mathcal{P}_R = UI = RI^2$ . D'où :

$$\mathcal{P}_R = 5,0 \text{ W}$$

Le résistor  $r$  étant en convention récepteur, il reçoit la puissance :

$$\mathcal{P}_r = U_r I = rI^2 = 5,0 \text{ W}$$

Vérifier que les dipôles sont en convention récepteur avant d'appliquer la relation  $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = UI$  ;  $U$  et  $I$  sont orientés en sens opposés.

- **3** Le générateur idéal de tension est en convention générateur ; il reçoit la puissance :

$$\mathcal{P}_E = -EI = -10 \text{ W.}$$

Il fournit donc la puissance + 10 W, résultat attendu puisque c'est la source d'énergie.

Pour les calculs de puissance, il faut faire attention au dipôle considéré.

On calcule ici la puissance reçue par le générateur idéal de tension, à ne pas confondre avec la puissance reçue par le générateur qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{gén}} = -UI = -(E - RI)I = -5,0 \text{ W.}$$

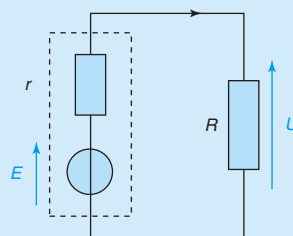
- **4** La puissance fournie par le générateur idéal (10 W) est entièrement dissipée par effet Joule pour moitié dans le résistor  $r$  (5,0 W) et pour moitié dans le résistor  $R$  (5,0 W).

### en conclusion

La relation  $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = UI$  ne s'applique que si  $U$  et  $I$  sont orientés en sens opposés (convention récepteur).

## 2 – Adaptation d'impédance

On considère un générateur de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $r$  qui alimente un radiateur électrique modélisable par un dipôle résistif de résistance  $R$ . L'effet du passage du courant est thermique ; c'est l'effet Joule.



- **1** Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_R$  reçue par le radiateur en fonction de  $E$ , de  $r$  et de  $R$ .
- **2** Quelle est la valeur de la puissance quand  $R = 0$  ? Quelle est la valeur de la puissance quand la résistance est très grande ? Que peut-on en déduire ?
- **3** Déterminer la valeur  $R_0$  de  $R$  pour laquelle la puissance dissipée  $\mathcal{P}_R$  dans le radiateur est maximale ? Représenter l'allure de la courbe donnant la puissance  $\mathcal{P}_R$  en fonction de  $R$ .

- 4 Dans le cas où le radiateur a la résistance  $R_0$ , exprimer la puissance thermique  $\mathcal{P}_{R_0}$  dissipée dans le radiateur et la puissance thermique  $\mathcal{P}_{r_0}$  dissipée dans le générateur en fonction de  $E$  et de  $R_0$  ? Faire un bilan de puissance.
- 5 Pour quelle valeur de  $r$  le rendement est-il maximal ? En déduire le type de générateur qu'il faut utiliser pour alimenter un radiateur électrique.

## résolution méthodique

- 1 On choisit les sens d'orientation définis sur le schéma ci-contre. La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$U_r = rI \text{ et } U = RI.$$

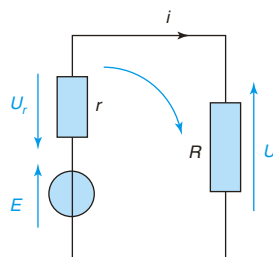
Avec le sens de parcours choisi, la loi des mailles s'écrit :

$$U + E - U_r = 0, \text{ d'où } I = \frac{E}{r + R}.$$

Le résistor étant en convention récepteur, la puissance  $\mathcal{P}$  qu'il reçoit est :

$$\mathcal{P}_R = UI \Rightarrow \mathcal{P}_R = RI^2$$

$$\mathcal{P}_R = \frac{RE^2}{(r + R)^2}$$



- 2  $\mathcal{P}_{(R=0)} = 0$

La résistance  $r$  est négligeable devant  $R$  quand  $R$  est très grand, d'où :

$$\mathcal{P}_{(R \gg r)} \approx \frac{RE^2}{R^2} = \frac{E^2}{R} \approx 0$$

$\mathcal{P}_R$  est toujours positive, nulle pour  $R = 0$  et  $R$  infini ; il existe donc (au moins) un maximum de la puissance.

Prendre l'habitude de confronter ses résultats à une analyse physique élémentaire. Une analyse trop rapide, faite à partir de l'expression  $\mathcal{P}_R = RI^2$  conduirait à proposer que  $\mathcal{P}_R$  est maximale quand  $R$  est infini ! Ce serait oublier que  $I$  dépend également de  $R$ .

- 3

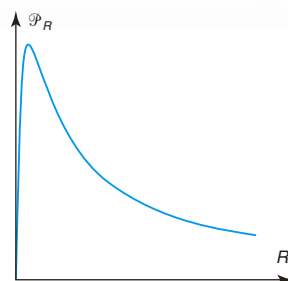
**Point Maths.** Une fonction  $f(x)$  de la variable est extrême (minimale ou maximale) quand la dérivée  $\frac{df}{dx}$  par rapport à  $x$  est nulle.

$\mathcal{P}_R$  étant une fonction de  $R$ , sa valeur est extrémale (minimale ou maximale) quand sa dérivée par rapport à  $R$  est nulle.

$$\frac{d\mathcal{P}_R}{dR} = E^2 \frac{(r+R) - 2R(r+R)}{(r+R)^2}$$

$$\frac{d\mathcal{P}_R}{dR} = 0 \text{ si } r+R-2R=0 \Rightarrow \boxed{R_0 = r}$$

Cette condition est appelée « adaptation d'impédance ». Il n'existe qu'un extremum ; c'est un maximum.



**Point Maths.** Une fonction  $f(x)$  est maximale quand la dérivée seconde  $\frac{d^2f}{dx^2}$  par rapport à  $x$  est négative au point où elle est extrémale.

Vérifions qu'il en est bien ainsi pour la puissance :  $\left(\frac{d^2\mathcal{P}_R}{dR^2}\right)_{R_0} = -\frac{E^2}{8R_0^3} < 0$ .

➤ **4**  $\mathcal{P}_{R_0} = R_0 I^2 = \frac{E^2}{4R_0}$  et  $\mathcal{P}_r = r I^2 = R_0 I^2 = \frac{E^2}{4R_0}$  ; donc :  $\boxed{\mathcal{P}_{R_0} = \mathcal{P}_r = \frac{E^2}{4R_0}}$

La puissance reçue par le générateur de tension s'écrit  $\mathcal{P}_E = -EI = -\frac{E^2}{2R_0}$ .

**Bilan :**  $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_E = 0$  ou  $-\mathcal{P}_E = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r$ . La puissance fournie par le générateur de tension est dissipée par effet Joule, pour moitié dans le générateur réel et pour l'autre moitié dans le radiateur.

➤ **5** De façon générale le rendement  $\eta$  est le rapport entre ce que l'on récupère (ce qui nous « intéresse ») et ce que l'on fournit (ce que l'on « dépense »). Ici, il s'agit de transférer de l'énergie électrique du générateur au radiateur. Le rendement s'écrit donc :

$$\boxed{\eta = -\frac{\mathcal{P}_{R_0}}{\mathcal{P}_E} = \frac{1}{2} = 50 \%}$$

$\eta = -\frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_E} = \frac{RI^2}{EI} = \frac{RI}{E} = \frac{R}{R+r}$ . Le rendement est une fonction décroissante de  $r$  ; il est maximal quand  $r = 0$  ! **Le rendement est alors égal à 100 %.**

On voit, et le résultat était attendu, que pour obtenir un bon rendement, on doit alimenter un radiateur avec un générateur de faible résistance interne.

### en conclusion

- En général, quand on cherche la valeur d'un paramètre pour laquelle une grandeur physique est extrémale, il faut calculer la dérivée de la grandeur par rapport au paramètre.
- Prendre l'habitude de confronter ses résultats à une analyse physique élémentaire.



# Méthodes d'étude d'un circuit électrique en régime permanent

En complément de la loi des nœuds et de la loi mailles, l'étude d'un circuit électrique en régime permanent se fait à l'aide « d'outils » dont le choix facilite la résolution de problèmes.

## 1 Association en série

Conseil

Pour savoir si des dipôles sont en série, toujours se poser la question : sont-ils tous parcourus par le même courant ?

Des dipôles voisins sont en série quand ils ont une seule borne en commun. Ils sont traversés par le même courant.

### 1.1. Association de résistors en série

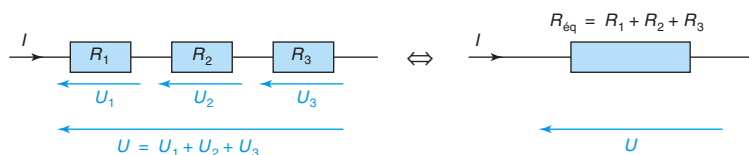
#### 1.1.1. Loi d'association

$N$  résistors de résistance  $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  associés en série sont équivalents à un seul résistor de résistance  $R_{\text{eq}}$  égale à la somme des résistances de chacun d'eux :

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (1)$$

Fig. 1

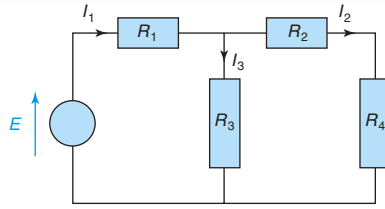
Association série de trois résistors



**Démonstration :**  $U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I = R_{\text{eq}} I$ .

L'intensité du courant étant la même en tout point de la branche, rien n'est modifié si l'on permute les positions des résistors.

Fig. 2



- $R_1$  et  $R_2$  ne sont pas en série ( $I_1 \neq I_2$ ).
- $R_1$  et  $R_3$  ne sont pas en série ( $I_1 \neq I_3$ ).
- Seuls  $R_2$  et  $R_4$  sont en série (le courant  $I_2$  qui traverse  $R_2$  est le même que celui qui traverse  $R_4$ ). On peut appliquer  $R_{\text{eq}} = R_2 + R_4$ .

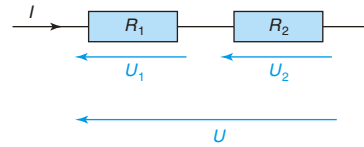
### 1.1.2. Diviseur de tension

La figure 3 représente un diviseur de tension : deux résistors en série sont soumis à une tension  $U$ . On cherche les tensions  $U_1$  et  $U_2$  aux bornes de chacun d'eux.

Fig. 3

Diviseur de tension

$$U_1 = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2}$$



Attention

• Si les flèches correspondant à  $U_1$  ou  $U_2$  ne sont pas dans le même sens que celle correspondant à  $U$ , il faut mettre un signe - dans leurs expressions.

• Il ne faut pas appliquer ces relations lorsque les deux résistors ne sont pas en série.

Par exemple sur le schéma de la figure 2,  $R_1$  et  $R_2$  (ou  $R_1$  et  $R_3$ ) ne forment pas un diviseur de tension. Seuls  $R_2$  et  $R_4$  forment un diviseur de tension.

**Démonstration :**  $U = (R_1 + R_2)I \Rightarrow I = \frac{U}{R_1 + R_2}$

$$U_1 = R_1 I \Rightarrow U_1 = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad U_2 = R_2 I \Rightarrow U_2 = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2}$$

## 1.2. Association de générateurs en série

On considère  $N$  générateurs associés en série, caractérisés par leurs f.é.m. et résistances internes  $(E_1 ; r_1)$ ,  $(E_2 ; r_2)$ , ...,  $(E_N ; r_N)$ . Ces  $N$  générateurs sont équivalents à un seul générateur de f.é.m.  $E_{\text{eq}}$  et de résistance interne  $r_{\text{eq}}$ .

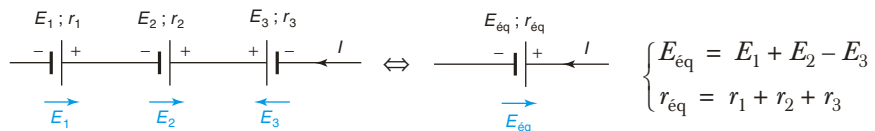
$$\begin{cases} E_{\text{eq}} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2 + \dots + \varepsilon_k E_k + \dots + \varepsilon_N E_N \\ r_{\text{eq}} = r_1 + r_2 + \dots + r_N \end{cases}$$

- $\varepsilon_k = +1$  si les pôles du générateur  $(E_k ; r_k)$  sont placés dans le même sens que les pôles du générateur  $(E_{\text{eq}} ; r_{\text{eq}})$  (la flèche correspondant à  $E_p$  est dans le même sens que celle de  $E_{\text{eq}}$ ) ;
- $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

**Remarque :** les résistances s'associent comme énoncé au § 1.1.1.

Fig. 4

Association série de trois générateurs

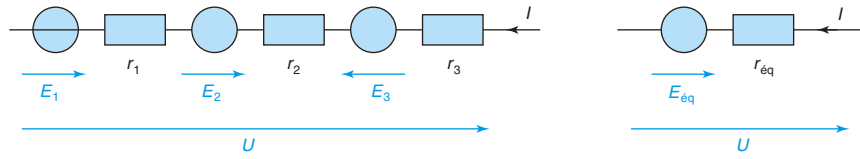


**Démonstration :**

Pour les associer, on les modélise en utilisant la représentation de Thévenin (fig. 5) :

**Fig. 5**

Modélisation de générateurs en série



$$\begin{cases} U = E_1 + r_1 I + E_2 + r_2 I + r_3 I - E_3 \\ U = E_{\text{eq}} + r_{\text{eq}} I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{\text{eq}} = E_1 + E_2 - E_3 \\ r_{\text{eq}} = r_1 + r_2 + r_3 \end{cases}$$

## 1.3. Loi de Pouillet

Conseil

Pour un circuit à une maille, utiliser directement la loi de Pouillet pour calculer l'intensité du courant qui y circule. Trouver le résultat en appliquant la loi des mailles fait perdre du temps.

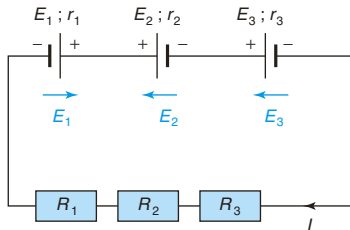
Cette loi permet d'obtenir l'intensité circulant dans une maille constituée de  $N$  résistors ( $R_1, R_2, \dots, R_N$ ) et  $N$  générateurs caractérisés par leurs f.é.m. et résistances internes ( $E_1 ; r_1$ ), ( $E_2 ; r_2$ ), ..., ( $E_N ; r_N$ ).

$$I = \frac{\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2 + \dots + \varepsilon_k E_k + \dots + \varepsilon_N E_N}{r_1 + r_2 + \dots + r_N + R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$

- $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspondant à  $E_k$  est dans le même sens que celle correspondant à l'orientation de  $I$  ;
- $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

**Fig. 6**

Maille constituée de trois générateurs et de trois résistors



Attention

Ne pas appliquer ces relations pour un circuit constitué de plusieurs mailles. Il est erroné d'écrire pour la figure 2 que :

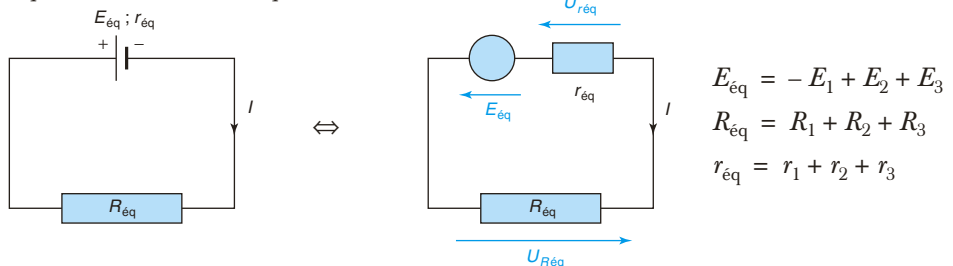
$$I_3 = \frac{E}{R_1 + R_3}$$

Pour la figure 6, on obtient  $I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 + R_3}$ .

**Démonstration :** On utilise la représentation de Thévenin pour les générateurs. Les lois d'association série pour les générateurs et résistors conduisent au circuit équivalent de la figure 7 :

**Fig. 7**

Représentation d'un circuit équivalent



Par exemple, en appliquant la loi des mailles dans le sens anti-horaire, on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} U_{R_{\text{eq}}} + U_{r_{\text{eq}}} + E_{\text{eq}} = 0 \\ U_{r_{\text{eq}}} = r_{\text{eq}} I \text{ et } U_{R_{\text{eq}}} = R_{\text{eq}} I \end{array} \right\} \Rightarrow I = -\frac{E_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}} + R_{\text{eq}}} = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 + R_3}.$$

## 2 Association en parallèle

Conseil

Pour savoir si des dipôles sont en parallèle, toujours se poser la question : sont-ils tous soumis à la même tension ?

Des dipôles sont en parallèle (ou en dérivation) quand tous les dipôles ont leurs deux bornes en commun. Ils sont soumis à la même tension.

### 2.1. Association de résistors en parallèle

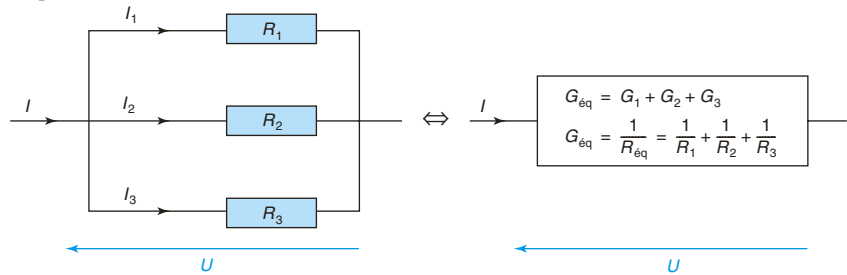
#### 2.1.1. Loi d'association

$N$  résistors de conductance ( $G_1, G_2, \dots, G_N$ ) associés en parallèles sont équivalents à un seul résistor de conductance  $G_{\text{eq}}$  égale à la somme des conductances de chacun d'eux :

$$\begin{aligned} G_{\text{eq}} &= G_1 + G_2 + \dots + G_N \\ G_{\text{eq}} &= \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \end{aligned} \quad (2)$$

Fig. 8

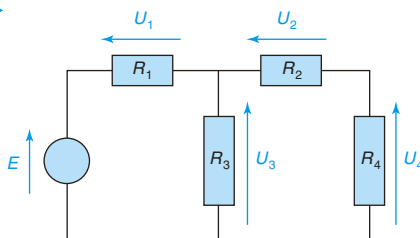
Association parallèle de trois résistors



**Démonstration :**  $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = (G_1 + G_2 + G_3)U = G_{\text{eq}}U.$

La tension  $U$  étant la même aux bornes de chaque résistor, rien n'est modifié si l'on permutte les positions des résistors

Fig. 9



- $R_1$  n'est pas en parallèle avec  $R_3$  ( $U_1 \neq U_3$ )
- $R_3$  n'est pas en parallèle avec  $R_4$  ( $U_3 \neq U_4$ )
- Seuls  $R_3$  et l'ensemble ( $R_2 + R_4$ ) sont en parallèle ( $U_3 = U_2 + U_4$ )

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{(R_2 + R_4)}$$

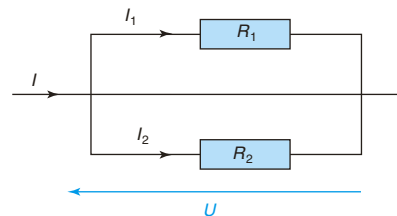
## 2.1.2. Diviseur de courant

La figure 10 représente un diviseur de courant : deux résistors en parallèle sont soumis à un courant d'intensité totale  $I$ . On cherche les intensités  $I_1$  et  $I_2$  parcourant chacun d'entre eux.

**Fig. 10** Diviseur de courant

$$I_1 = \frac{G_1 I}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{G_2 I}{G_1 + G_2} = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}$$



Attention

- Si  $I_1$  ou  $I_2$  ne sont pas dans le sens de  $I$ , il faut faire intervenir un signe – dans leurs expressions.
  - Il ne faut pas appliquer ces relations lorsque les deux résistors ne sont pas en parallèle.
- Par exemple sur la figure 9, où  $R_2$  et  $R_3$  ne forment pas un diviseur de courant, seuls  $R_3$  et l'ensemble  $(R_2 + R_1)$  forment un diviseur de courant.

**Démonstration :**

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad \text{et} \quad I = I_1 + I_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 (I - I_1) \Rightarrow I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad R_1 (I - I_2) = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}$$

## 2.2. Association de générateurs en parallèle

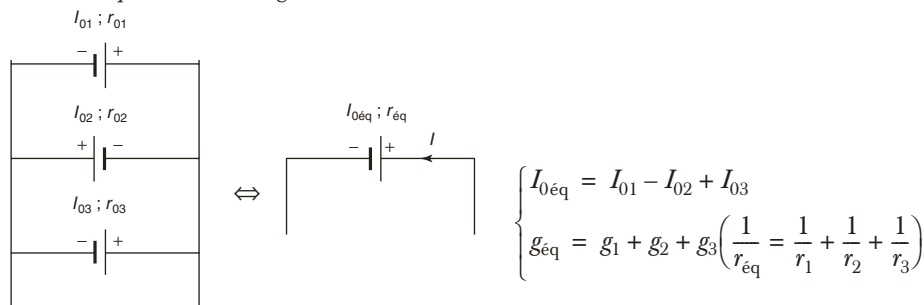
On considère  $N$  générateurs associés en parallèle, caractérisés par leurs courants électromoteurs c.é.m. et conductances internes  $(I_{01} ; g_1)$ ,  $(I_{02} ; g_2)$ , ...,  $(I_{0N} ; g_N)$ . Ces  $N$  générateurs sont équivalents à un seul générateur de c.é.m.  $I_{\text{éq}}$  et de conductance interne  $g_{\text{éq}}$ .

$$\begin{cases} I_{\text{éq}} = \varepsilon_1 I_{01} + \varepsilon_2 I_{02} + \dots + \varepsilon_k I_{0k} + \dots + \varepsilon_N I_{0N} \\ g_{\text{éq}} = g_1 + g_2 + \dots + g_N \left( \frac{1}{r_{\text{éq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_N} \right) \end{cases}$$

- $\varepsilon_k = +1$  si les pôles du générateur  $(E_k ; r_k)$  sont placés dans le même sens que les pôles du générateur  $(E_{\text{éq}} ; r_{\text{éq}})$  (la flèche correspondant à  $I_{0k}$  est dans le même sens que celle de  $I_{0\text{éq}}$ ) ;
- $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

*Remarque :* les conductances s'associent comme énoncé au § 2.1.1.

**Fig. 11** Association parallèle de trois générateurs



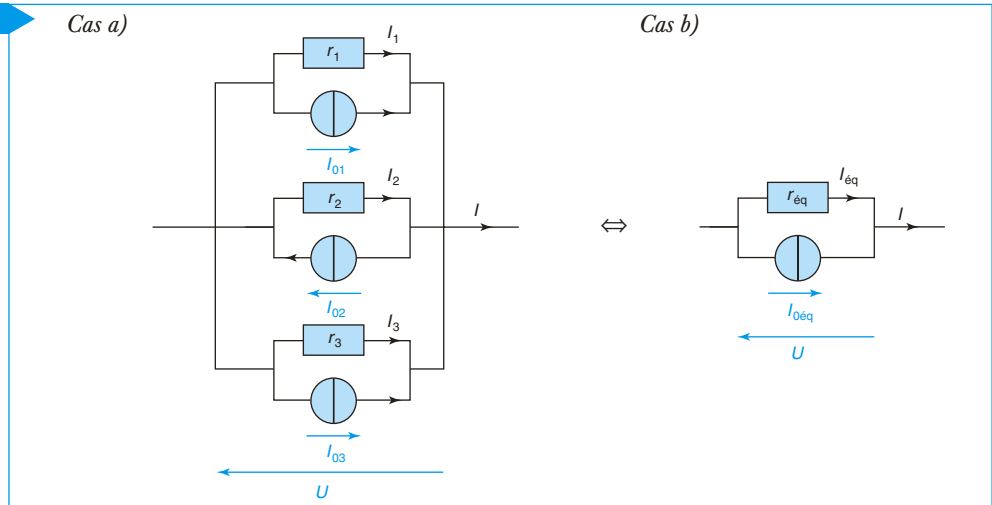
### Démonstration :

Pour les associer, on les modélise en utilisant la représentation de Norton (fig. 12) :

Fig. 12

Conseil

Pour associer des générateurs en parallèle, commencer par modéliser tous les générateurs en représentation de Norton.



### Démonstration :

• Cas a)  $\begin{cases} U = r_1 I_1 = r_2 I_2 = r_3 I_3 \\ I = I_1 + I_{01} + I_2 - I_{02} + I_3 + I_{03} \end{cases}$

• Cas b)  $\begin{cases} U = r_{eq} I_{eq} \\ I = I_{eq} + I_{0eq} \end{cases}$

$$I_{eq} + I_{0eq} = I_1 + I_{01} + I_2 - I_{02} + I_3 + I_{03} \Rightarrow \frac{U}{r_{eq}} + I_{0eq} = \frac{U}{r_1} + I_{01} + \frac{U}{r_2} - I_{02} + \frac{U}{r_3} + I_{03}$$

Par identification entre les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\begin{cases} I_{0eq} = +I_{01} - I_{02} + I_{03} \\ \frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} (g_{eq} = g_1 + g_2 + g_3) \end{cases}$$

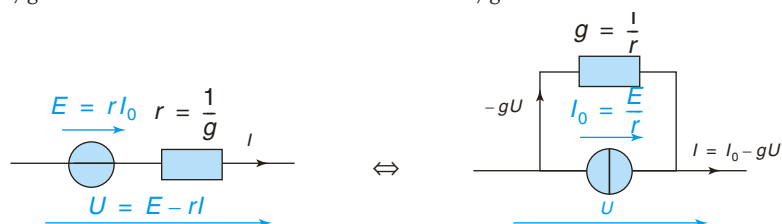
## 3 Équivalence des représentations de Thévenin et de Norton d'un générateur

Un générateur de tension de Thévenin ( $E ; r$ ) est équivalent à un générateur de courant de Norton ( $I_0 ; g$ ) où  $I_0 = \frac{E}{r}$  et  $g = \frac{1}{r}$ .

Fig. 13

a) générateur de tension de Thévenin

b) générateur de courant de Norton



## Démonstration :

Figure 13 a) :  $U = E - rI \Rightarrow I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$ .

Or figure 13 b) :  $I = I_0 - gU$ .

Par identification entre les deux expressions de  $I$ , on obtient :

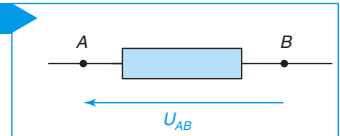
$$I_0 = \frac{E}{r} \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{r}.$$

## 4 Potentiel et loi des nœuds en termes de potentiels

### 4.1. Tension et potentiel

Entre deux points  $A$  et  $B$  quelconques d'un circuit la tension  $U_{AB}$  s'écrit sous la forme de la différence des potentiels en  $A$  et en  $B$  :  $U_{AB} = V_A - V_B$ . La flèche est dirigée du point  $B$  vers le point  $A$  (fig. 14).

Fig. 14



- Si  $U_{AB}$  est positif,  $V_A > V_B$  et la flèche tension est dans le sens des potentiels croissants.
- Les potentiels  $V$  sont définis à une constante près, seule la tension ou différence de potentiel, que l'on mesure avec un voltmètre, a un sens physique.

### 4.2. Masse d'un circuit

En électronique, la masse est un point d'un circuit à laquelle on attribue arbitrairement un potentiel nul. Il sert de référence des potentiels.

Le symbole est :



*Remarque :* on appelle aussi « masse » la carcasse métallique d'un appareil électrique qui a vocation à être reliée à la terre par l'intermédiaire de la prise de terre. La Terre étant conventionnellement au potentiel nul, cette carcasse électrique peut servir de référence de potentiel.

### 4.3. Loi des nœuds en termes de potentiels - Théorème de Millman

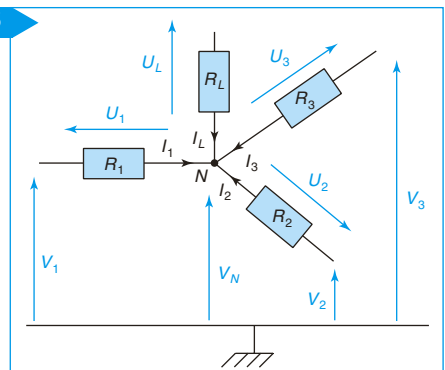
Considérons  $L$  résistors de résistance ( $R_1, R_2, \dots, R_L$ ) ayant un nœud commun  $N$ . Soit ( $I_1, I_2, \dots, I_L$ ) les intensités circulant dans chacun des résistors et orientés vers le point  $N$  (fig. 15).

Soit  $V_N$  le potentiel du nœud  $N$  et  $V_1, V_2, \dots, V_L$  les potentiels de l'autre borne du dipôle considéré.

La loi des nœuds s'exprime alors par :

$$I_1 + I_2 + \dots + I_L = 0,$$

Fig. 15



et peut s'écrire sous la forme :  $\frac{V_1 - V_N}{R_1} + \frac{V_2 - V_N}{R_2} + \dots + \frac{V_L - V_N}{R_L} = 0$ ,

ou  $G_1(V_1 - V_N) + G_2(V_2 - V_N) + \dots + G_L(V_L - V_N) = 0$  (3)

*Remarque :* la relation (3) est indépendante des sens d'orientation choisis pour les différentes intensités.

La relation (3) conduit à l'expression du théorème de Millman :

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_L}{R_L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_L}} \quad \text{ou} \quad V_N = \frac{G_1 V_1 + G_2 V_2 + \dots + G_L V_L}{G_1 + G_2 + \dots + G_L}$$

*Remarque :*

Si certaines branches arrivant en  $N$  contiennent des sources de courant, il suffit de tenir compte de leurs c.é.m. dans l'expression de la loi des nœuds.

#### Conseil

Il est souvent très utile pour simplifier les calculs, quand aucune masse n'apparaît sur un circuit, d'en choisir une, placée de façon pertinente, en un point donné du circuit. Cela ne pose aucun problème car le potentiel est défini à une constante près.

## 5 Méthodes d'étude d'un circuit

On considère un circuit comportant plusieurs mailles. Que valent les intensités des courants et tensions dans une ou plusieurs branches ?

### 5.1. Loi des nœuds en termes de potentiels

Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs branches partant de points de potentiel imposé (par exemple une ligne de masse) et aboutissant à un même nœud  $N$ , la loi des nœuds en terme de potentiel (ou le théorème de Millman) permet d'obtenir très rapidement le potentiel de  $N$ . On peut alors facilement en déduire l'intensité circulant dans chacune des branches.

### 5.2. Réduction du circuit

La méthode, décrite ci-dessous étape par étape, est particulièrement performante si on cherche uniquement l'intensité du courant qui circule dans une branche particulière du circuit (ou la tension à ses bornes).

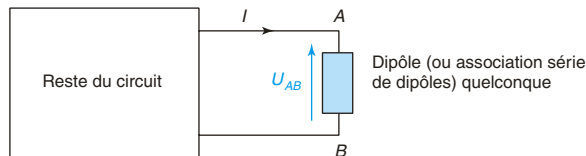
Si l'on doit calculer des intensités ou des tensions correspondant à d'autres branches, il faut à nouveau appliquer la méthode, branche par branche.

#### Conseil

Inclure la branche  $AB$  dans les associations de dipôles est une erreur fréquente. Il faut absolument distinguer formellement cette branche du reste du circuit.

**1<sup>re</sup> étape.** Isoler sur le schéma électrique la branche à travers laquelle circule l'intensité que l'on veut calculer, par exemple en la repérant entre des points  $A$  et  $B$  et en entourant tout le reste du circuit. Si le sens de  $I$  n'est pas imposé, le choisir de façon arbitraire.

Fig. 16





**2<sup>e</sup> étape.** Associer l'ensemble des générateurs et/ou résistors situés dans le « reste du circuit » (lois d'associations série et/ou parallèle des générateurs et/ou résistors) afin de se ramener à un circuit simple (par exemple un résistor ou un générateur en représentation de Norton ou de Thévenin). On dit qu'on a « réduit le circuit ».

**3<sup>e</sup> étape.** Si le circuit simple obtenu est :

- un générateur en représentation de Norton, alors il suffit d'appliquer la relation du diviseur de courant pour obtenir l'intensité  $I$  ;
- un résistor ou bien un générateur en représentation de Thévenin, alors on a un circuit équivalent à une seule maille et il suffit d'appliquer la loi de Pouillet pour obtenir l'intensité  $I$ .

Ayant  $I$  on peut alors facilement en déduire la tension  $U_{AB}$ .

## 5.3. Utilisation directe des lois de Kirchhoff

On englobe sous le nom de lois de Kirchhoff la loi des nœuds et la loi des mailles.

Cette méthode conduit à des calculs lourds et ne doit être appliquée que si les méthodes précédentes ne sont pas applicables.

**1<sup>re</sup> étape.** Représenter tous les générateurs en représentation de Thévenin : on a alors un circuit à  $N$  mailles indépendantes.

**2<sup>e</sup> étape.** À chaque maille, associer un courant  $I_k$  orienté de façon arbitraire. On a ainsi  $N$  inconnues.

**3<sup>e</sup> étape.** Appliquer la loi des nœuds à chaque nœud. On obtient l'intensité qui circule dans chaque branche en fonction des  $N$  différents  $I_k$ .

**4<sup>e</sup> étape.** Appliquer la loi des mailles pour chaque maille. On obtient  $N$  équations.

**5<sup>e</sup> étape.** Résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues.

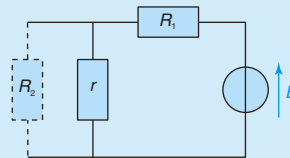
### Remarques

• Si  $N = 1$  cette méthode aboutissant à une inconnue et une équation donne la loi de Pouillet.

• Cette méthode conduit à des calculs assez lourds dès que  $N > 2$ . En pratique, elle est surtout utile lorsque l'on cherche l'ensemble des intensités et tensions de chaque branche.

## 1 – Étude d'un circuit simple par trois méthodes

On considère le circuit suivant. Déterminer l'intensité du courant qui circule dans les diverses branches en utilisant d'abord la loi des nœuds en terme de potentiel, la méthode de réduction du circuit et enfin la méthode d'utilisation directe des lois de Kirchhoff. Conclure.



### résolution méthodique

On choisit un sens arbitraire pour les différentes intensités circulant dans les trois branches, mais les choix retenus ici sont assez « naturels », c'est-à-dire que l'on s'attend, lorsque  $E > 0$ , à des valeurs positives pour  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_r$ .

#### • Méthode 1 : loi des nœuds en termes de potentiels

Aucune masse n'apparaît sur le schéma de l'énoncé, il faut en placer une en un point donné afin de simplifier les calculs. Il va de soi que le résultat obtenu est indépendant du point choisi.

On peut prendre comme référence le potentiel du fil représenté par la ligne inférieure du schéma (masse) :

$$V_M = 0 \text{ et } E = V_A - V_M = V_A.$$

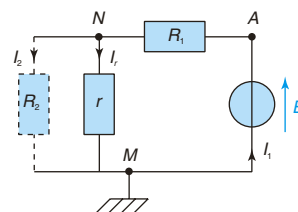
Le théorème de Millman donne directement  $V_N$  :

$$V_N = \frac{\frac{V_M}{R_2} + \frac{V_M}{r} + \frac{V_A}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R_1}} = \frac{E(rR_2)}{R_2r + R_1r + R_2R_1}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} I_2 = \frac{V_N}{R_2} = \frac{Er}{R_2r + R_1r + R_2R_1} \\ I_r = \frac{V_N}{r} = \frac{ER_2}{R_2r + R_1r + R_2R_1} \\ I_1 = -\left(\frac{V_N - E}{R_1}\right) = \left(\frac{E(r + R_2)}{rR_1 + R_2r + R_2R_1}\right) \end{cases}$$

Prendre l'habitude de vérifier, quand on a une expression sous la forme d'une fraction, que le dénominateur ne contient pas de différences. En effet, dans ce cas, pour des valeurs particulières de résistances, on pourrait aboutir à une valeur infinie, ce qui n'a pas de sens physique.



## • Méthode 2 : réduction du circuit

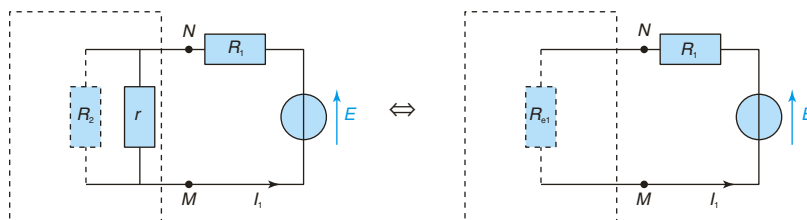
### • Calcul de $I_1$

On isole la branche  $NM$  dans laquelle circule  $I_1$  (voir schéma ci-dessous).

On cherche à transformer la partie du circuit encadrée en une seule branche.

On reconnaît l'association parallèle de deux résistors.

En introduisant  $R_{e1} = \frac{rR_2}{r+R_2}$ , on a l'équivalence ci-dessous entre les deux circuits.



Il suffit alors d'appliquer la loi de Pouillet et on obtient :

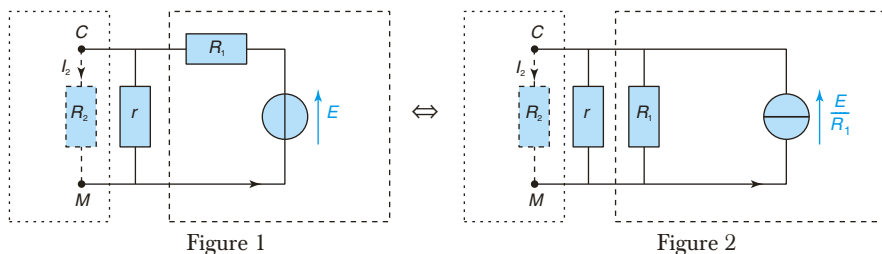
$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{e1}} \Rightarrow I_1 = \frac{E(r + R_2)}{R_1(r + R_2) + rR_2}$$

En réduisant le circuit, on a perdu l'information concernant  $I_2$ , il faut donc le réduire différemment pour avoir  $I_2$ .

Quand on réduit un circuit, il faut toujours se poser la question : en associant tel ou tel dipôle, quelle est l'information perdue ? En ai-je besoin ?

### • Calcul de $I_2$

On isole donc la branche  $CM$  dans laquelle circule  $I_2$  :



On reconnaît (fig. 1) dans la partie du circuit qui alimente le dipôle  $CM$  un générateur de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $R_1$  (représentation de Thévenin encadrée en pointillés) en parallèle avec le résistor  $r$ . Puisqu'ils sont en parallèle, il faut utiliser la représentation de Norton du générateur pour les associer. C'est sous cette forme que ce dernier apparaît sur la fig. 2 dans le cadre en pointillés.

Quand un générateur est en parallèle avec un autre dipôle, il faut utiliser la représentation de Norton.

On associe les deux résistors en parallèle (fig. 3),

$$\text{soit } R_{e2} = \frac{rR_1}{r + R_1}.$$

Il y a alors deux possibilités.

- Première possibilité : on applique la formule du diviseur de courant, ce qui conduit à :

$$I_2 = \left( \frac{E}{R_1} \right) \frac{G_2}{G_{e2} + G_2} = \left( \frac{E}{R_1} \right) \frac{R_{e2}}{R_{e2} + R_2} \text{ avec } R_{e2} = \frac{rR_1}{r + R_1}$$

$$I_2 = \frac{Er}{rR_1 + R_2R_1 + R_2r}.$$

- Deuxième possibilité : on poursuit la réduction du circuit à une seule maille en transformant la représentation de Norton du générateur encadré en pointillés sur la figure 3 en représentation de Thévenin (fig. 4).

Il suffit alors d'appliquer la loi de Pouillet :

$$I_2 = \left( \frac{ER_{e2}}{R_1} \right) \frac{1}{R_{e2} + R_2}, \text{ avec } R_{e2} = \frac{rR_1}{r + R_1}.$$

$$I_2 = \frac{Er}{rR_1 + R_2R_1 + R_2r}$$

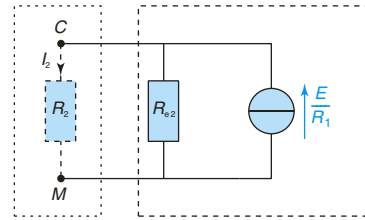


Figure 3

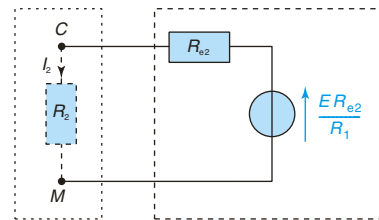


Figure 4

#### • Calcul de $I_r$

Il ne faut pas reprendre la méthode générale utilisée pour  $I_1$  et pour  $I_2$ , pour ce circuit à deux mailles indépendantes. La simple application de la loi des nœuds en  $N$  donne :

$$I_r = I_1 - I_2 = \frac{ER_2}{R_2r + R_1r + R_2R_1}$$

#### • Méthode 3 : utilisation directe des lois de Kirchhoff

Le circuit est composé de deux mailles indépendantes, par exemple  $(R_2 ; r)$  et  $(r ; R_1 ; E)$ .

On pourrait penser à tort que le circuit est constitué de trois mailles en considérant aussi la maille  $(R_2 ; R_1 ; E)$  mais cette dernière n'est pas indépendante des deux autres.

En revanche, au lieu de choisir les deux mailles  $(R_2 ; r)$  et  $(r ; R_1 ; E)$ , on pourrait tout aussi bien choisir  $(R_2 ; r)$  et  $(R_2 ; R_1 ; E)$  ou encore  $(r ; R_1 ; E)$  et  $(R_2 ; R_1 ; E)$ , cela ne changerait rien au résultat.

Méthode :

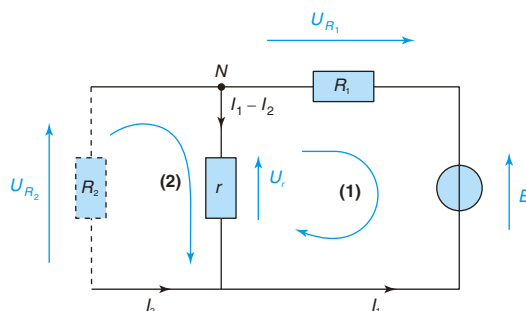
1<sup>re</sup> étape. La représentation de Thévenin est déjà utilisée pour le générateur  $(E ; R_1)$

2<sup>e</sup> étape. Les sens arbitraires pour les intensités ont été choisis précédemment.

3<sup>e</sup> étape. Appliquer la loi des nœuds au point  $N$ , ce qui donne l'intensité du courant  $I_r$  dans la branche contenant  $r$ .

4<sup>e</sup> étape. Choisir un sens pour les flèches de tensions, un sens de parcours pour chacune des deux mailles et appliquer la loi des mailles.

$$U_{R_2} = R_2 I_2; \quad U_{R_1} = R_1 I_1; \quad U_r = r(I_1 - I_2)$$



Maille (1) :  $U_{R_1} - E + U_r = 0$

$$R_1 I_1 + r(I_1 - I_2) - E = 0 \quad (1)$$

Maille (2) :  $U_{R_2} - U_r = 0$

$$R_2 I_2 - r(I_1 - I_2) = 0 \quad (2)$$

5<sup>e</sup> étape. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues.

$$(1) \Rightarrow I_1 = \frac{r I_2 + E}{R_1 + r}.$$

En injectant cette expression de  $I_1$  dans l'expression (2), on arrive à :

$$I_2 = \frac{Er}{rR_1 + R_2R_1 + R_2r}$$

Et on en déduit :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{E(r+R_2)}{R_2R_1 + rR_1 + R_2r} \\ I_r = I_1 - I_2 = \frac{ER_2}{R_2r + R_1r + R_2R_1} \end{cases}$$

Remarque : Les trois méthodes conduisent aux mêmes résultats.

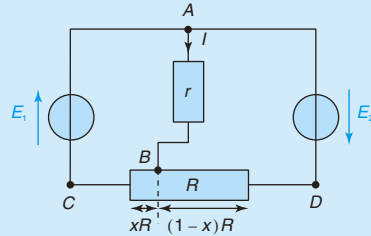
## en conclusion

- Vérifier, quand on a une expression sous la forme d'une fraction, que le dénominateur ne contient pas de différences.
- Quand on réduit un circuit, il faut toujours se poser la question : en associant tel ou tel dipôle, quelle est l'information perdue ? En ai-je besoin ?
- La loi des nœuds en terme de potentiel est bien adaptée ici pour trouver rapidement l'ensemble des intensités recherchées.
- La réduction du circuit est une méthode lourde ici car on cherche  $I_1$  et  $I_2$ . Toutefois si l'on ne cherchait que l'une ou l'autre de ces valeurs, cette méthode nécessite moins de calculs que l'utilisation directe des lois de Kirchhoff.

## 2 – Étude d'un circuit comportant un potentiomètre

Considérons un réseau constitué de 2 générateurs idéaux de f.é.m.  $E_1$  et  $E_2$  alimentant une même résistance  $r$ . Le circuit est fermé par l'intermédiaire d'un potentiomètre  $CD$  et muni d'un curseur  $B$  réalisant un contact mobile dont la position est caractérisée par un paramètre réel  $x \in [0 ; 1]$ . La résistance totale de la branche  $C$  et  $D$  est  $R$ , le curseur sépare la partie  $CB$  (résistance  $xR$ ), de la partie  $BD$  (résistance  $(1-x)R$ ).

Calculer l'intensité  $I$  du courant circulant dans la branche centrale du circuit.



### résolution méthodique

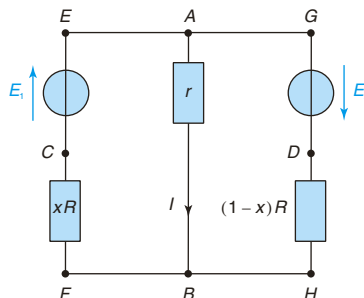
On ne cherche que la valeur d'une seule intensité, la méthode de réduction du circuit est donc bien adaptée. On pourrait aussi utiliser la loi des nœuds en terme de potentiel mais nous ne la traitons pas dans cette correction.

On isole tout d'abord la branche  $AB$  à travers laquelle circule l'intensité que l'on veut calculer. Pour cela, on retrace le circuit en mettant clairement en évidence les associations en parallèle et en série. On reconnaît en effet les associations suivantes :

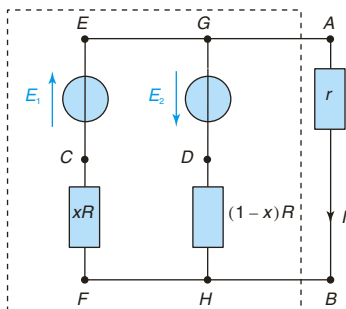
- le générateur de f.é.m.  $E_1$  et le résistor  $xR$  sont en série ;
- le générateur de f.é.m.  $E_2$  et le résistor  $(1-x)R$  sont en série ;
- les générateurs de Thévenin  $(E_1 ; xR)$  et  $(E_2 ; (1-x)R)$  sont en parallèle.

Prendre l'habitude de refaire les schémas pour :

- faire apparaître clairement les associations série et parallèle ;
- distinguer clairement la branche  $AB$  du réseau qui l'alimente.



Pour mieux séparer la branche  $AB$  du reste du circuit, on permute les positions des branches  $AB$  et  $GH$ , cela facilite le travail de réduction à un générateur équivalent du réseau alimentant  $AB$ .



On peut positionner les trois branches en parallèle  $EF$ ,  $AB$  et  $GH$  dans n'importe quel ordre car cela ne modifie pas les propriétés du circuit. En effet, les points  $E$ ,  $A$  et  $G$  sont tous les trois au même potentiel, de même que  $F$ ,  $B$  et  $H$ . Il est souvent utile de le faire.

Puisque les générateurs de Thévenin  $(E_1 ; xR)$  et  $(E_2 ; (1-x)R)$  sont en parallèle, on peut directement les associer en utilisant les formules vues en cours ; ces deux générateurs sont équivalents à un seul générateur de c.é.m :

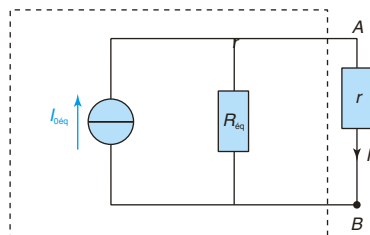
$$I_{0\text{eq}} = \frac{E_1}{xR} - \frac{E_2}{(1-x)R},$$

et de résistance interne :

$$R_{\text{eq}} = \frac{(xR)(1-x)R}{xR + (1-x)R} = x(1-x)R.$$

On reconnaît un diviseur de courant, d'où :

$$I = \frac{I_{0\text{eq}} R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + r} \Rightarrow I = \frac{E_1(1-x) - xE_2}{Rx(1-x) + r}$$



## en conclusion

• Représenter différemment un schéma électrique pour faciliter les associations de dipôles.

(1) Quand un générateur est en série avec un autre dipôle, il faut utiliser la représentation de Thévenin du générateur pour les associer.

(2) Quand un générateur est en parallèle avec un autre dipôle, il faut utiliser la représentation de Norton du générateur pour les associer.

# Circuits $RC$ , $RL$ , $RLC$ série soumis à un échelon de tension

Quand on connecte les différents éléments d'un circuit, les grandeurs électriques telles que l'intensité et la tension évoluent au cours du temps. On dit que le régime est transitoire.

Il dépend des conditions initiales.

Après une durée suffisamment longue, théoriquement infinie, l'évolution est indépendante des conditions initiales ; le régime est permanent.

Un régime permanent continu est un régime indépendant du temps.

Les grandeurs constantes seront notées en lettres majuscules ; les grandeurs variables seront notées en lettres minuscules.

© Nathan, classe prépa

## 1 Circuit $RC$ série

### 1.1. Caractéristiques d'un condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux conducteurs (les armatures) séparés par un matériau isolant.

Les condensateurs sont faiblement conducteurs. Dans les exercices, en l'absence d'indication particulière, un condensateur est considéré comme idéal, c'est-à-dire qu'aucun courant ne traverse le matériau isolant.

La capacité  $C$  d'un condensateur lie la tension aux bornes et la charge des armatures.

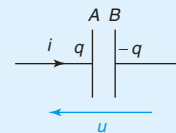


Remarque  
On peut retenir la relation sous la forme  
 $q_A = Cu_{AB}$ , équivalente à  $q_B = Cu_{BA}$ .

$$q = Cu \quad \left| \begin{array}{l} q \text{ charge de l'armature } A \text{ en coulomb (C).} \\ u = v_A - v_B \text{ tension aux bornes en volt (V).} \\ C \text{ capacité du condensateur en farad (F).} \end{array} \right.$$

En convention récepteur :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} q \text{ charge d'une armature en coulomb (C).} \\ i \text{ intensité du courant arrivant sur l'armature portant la charge } q \text{ en ampère (A).} \end{array} \right.$$



Un condensateur stocke de l'énergie électrique entre ses armatures. Le stockage est réversible.

$$w_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \left| \begin{array}{l} u \text{ tension aux bornes du condensateur en volt (V).} \\ w_C \text{ énergie stockée dans le condensateur en joule (J).} \\ C \text{ capacité du condensateur en farad (F).} \end{array} \right.$$

**Démonstration** de l'expression de l'énergie à partir de la puissance  $p$  reçue :

$$p = ui = \frac{dw_C}{dt} \Rightarrow dw_C = u C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} \left( \frac{u^2}{2} \right) \Rightarrow w_C = \frac{1}{2}Cu^2.$$

(L'énergie est nulle quand la tension est nulle.)

Une variation instantanée de l'énergie stockée impliquerait une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

L'énergie, la tension aux bornes et la charge d'un condensateur sont des fonctions continues du temps ; elles ne peuvent pas subir de discontinuité.

## 1.2. Circuit RC série soumis à un échelon de tension

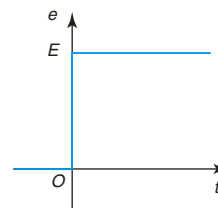
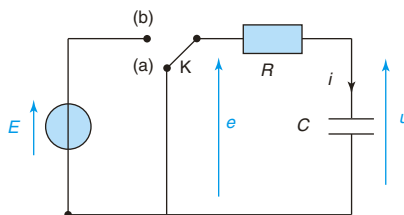
### 1.2.1. Montage d'étude

L'interrupteur K est dans la position (a) (fig. 1). L'intensité du courant et la tension aux bornes du condensateur sont nulles.

Fig. 1

a) Circuit RC soumis à un échelon de tension (interrupteur dans la position (b)).

b) Échelon de tension.



### 1.2.2. Échelon de tension

Quand on bascule l'interrupteur K de la position (a) à la position (b), la tension  $e$  passe instantanément de la valeur nulle à la valeur  $E$ . On dit que le circuit RC est soumis à un échelon de tension (figure b)).

Dans la suite nous supposons que l'interrupteur bascule à la date  $t = 0$ .

À la date  $t = 0^-$ , il est dans la position (a). À la date  $t = 0^+$ , il est dans la position (b).

### 1.2.3. Équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur. Constante de temps

Quand le circuit est fermé, la loi des mailles s'écrit :  $Ri + u = E$ .

L'équation différentielle de la tension  $u$  aux bornes du condensateur d'un circuit  $RC$  série soumis à un échelon de tension  $E$  est :  $\tau \frac{du}{dt} + u = E$ .  
 $\tau = RC$  est la constante de temps du circuit  $RC$ .

### 1.2.4. Résolution de l'équation différentielle. Évolution de la tension

L'équation différentielle de la tension est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre non nul.

**Point méthode 1.** Résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre en introduisant une constante.
2. Rechercher la solution particulière de l'équation différentielle complète.
3. Écrire la solution générale de l'équation différentielle complète avec la constante.
4. Déterminer la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir :
  - continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ;
  - continuité de l'intensité du courant qui traverse une bobine.

APPLICATION DE LA MÉTHODE

1. Résolution de l'équation différentielle sans second membre  $\tau \frac{du}{dt} + u = 0$ .

**Point maths.**

- Écrire l'équation caractéristique de l'équation différentielle :  $\tau r + 1 = 0$ .
- Exprimer la solution  $r$  de l'équation caractéristique :  $r = -\frac{1}{\tau}$ .
- Exprimer la solution  $u_{\text{ssm}}$  en introduisant une constante :

$$u_{\text{ssm}} = Ae^{rt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } A = \text{constante.}$$

2. Solution particulière  $u_p$  de l'équation différentielle complète :  $u_p = E$ .
3. Solution générale  $u = u_{\text{ssm}} + u_p$  de l'équation différentielle complète :

$$u = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E.$$

4. Détermination de la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de la tension aux bornes du condensateur :  $u_{t=0^+} = u_{t=0^-}$ .

Il vient :  $A + E = 0 \Rightarrow A = -E$ .

La solution de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$u = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

### 1.2.5. Courbe normalisée de l'évolution de la tension

Introduisons les variables réduites (sans dimension)  $x = \frac{t}{\tau}$  et  $y = \frac{u}{E}$  ; on dit qu'on effectue une réduction canonique, ou que les grandeurs sont normalisées.

Remarque

La constante  $\tau$  est aussi appelée temps de relaxation, ou durée (ou temps) caractéristique.

Attention

Il faut d'abord écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer la constante.

L'équation différentielle normalisée est  $\frac{dy}{dx} + y = 1$ . La solution normalisée est  $y = 1 - e^{-x}$ .

La courbe normalisée donnant  $y$  en fonction de  $x$  est donnée (figure 2a).

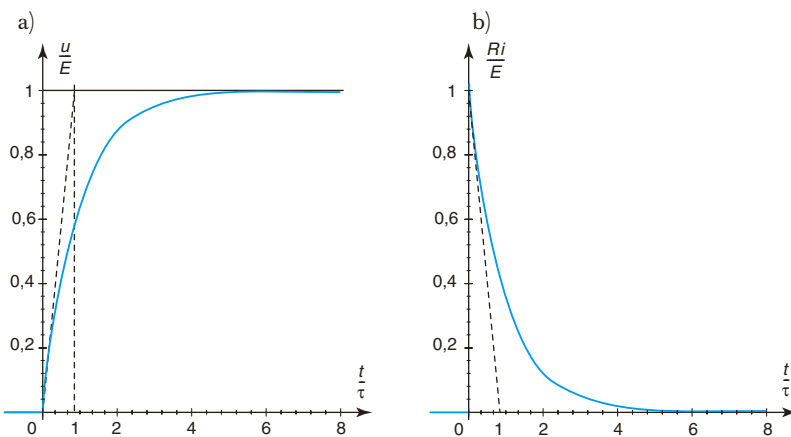
Pente à l'origine de la courbe normalisée :  $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 = 1$ .

## 1.2.6. Courbe normalisée de l'évolution de l'intensité

$i = C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . La courbe normalisée est celle de  $\frac{Ri}{E}$  en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  (figure 3b).

**Fig. 2**

*Courbes normalisées des évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) pour un circuit RC soumis à un échelon de tension.*



- a) Remarquer la continuité de la tension à  $t = 0$ .  
b) Remarquer la discontinuité de l'intensité à  $t = 0$ .

© Nathan, classe prépa

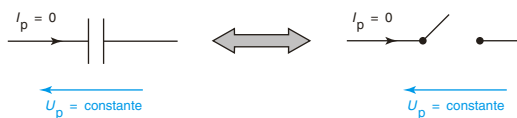
## 1.2.7. Régime permanent continu

Le régime permanent continu est atteint au bout d'une durée infinie. En réalité il est pratiquement atteint, à 1 % près, au bout d'une durée  $5\tau$  puisque  $\frac{u(5\tau)}{E} = 0,99$ . La constante de temps caractérise l'évolution du régime transitoire.

En régime permanent continu :  $U_p = E$  ;  $I_p = 0$  ;  $Q_p = CE$ .

Du point de vue des courants et des tensions, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent continu (figure 3).

**Fig. 3**



Un condensateur en régime permanent continu est équivalent à un interrupteur ouvert.

### 1.2.8. Bilan énergétique

Énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire :

$$W_C = \frac{1}{2}CU_p^2 - \frac{1}{2}Cu_{t=0}^2 = \frac{1}{2}CE^2.$$

Énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_E = \int_0^\infty Ei dt = EQ_p = CE^2.$$

Énergie dissipée par effet Joule dans le résistor pendant le régime transitoire :

$$W_R = W_E - W_C = \frac{1}{2}CE^2.$$

En régime permanent continu, le courant est nul donc la puissance reçue par le circuit  $RC$  est nulle.

### 1.3. Régime libre du circuit $RC$

Le régime permanent continu étant atteint, la tension  $e$  passe instantanément de la valeur  $E$  à la valeur nulle quand on bascule brutalement l'interrupteur  $K$  de la position (b) à la position (a). On dit que le circuit  $RC$  est en régime libre (fig. 4).

Soit  $t' = 0$  la date du basculement.

L'équation différentielle de la tension  $u$  se réduit à :

$$\tau \frac{du}{dt'} + u = 0,$$

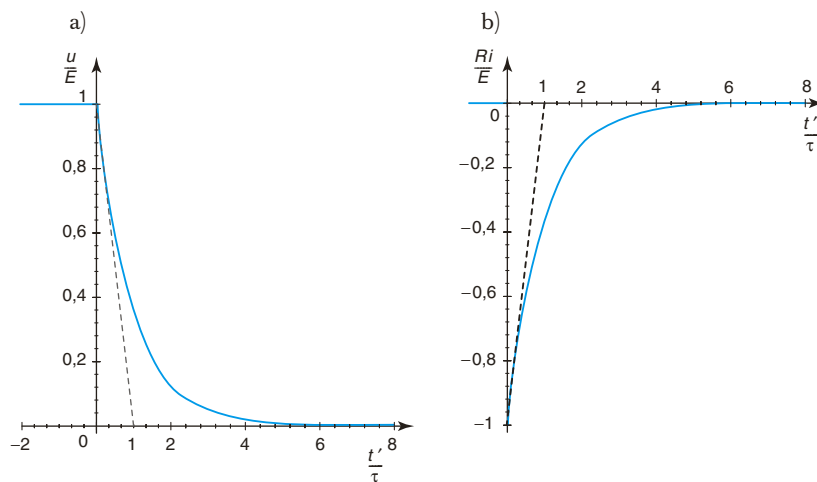
dont la solution est  $u = Ee^{-\frac{t'}{\tau}}$ . L'intensité est  $i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t'}{\tau}}$ .

En régime permanent continu :  $U'_p = 0$  ;  $I'_p = 0$  ;  $Q'_p = 0$ .

Toute l'énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire a été dissipée par effet Joule dans le résistor.

Fig. 4

Courbes normalisées des évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) d'un circuit  $RC$  en régime libre.



- a) Remarquer la continuité de la tension à  $t' = 0$ .  
b) Remarquer la discontinuité de l'intensité à  $t' = 0$ .

## 2 Circuit RL série

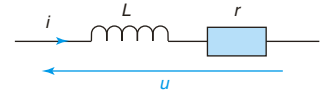
### 2.1. Caractéristiques d'une bobine

Une bobine est un dipôle constitué d'un enroulement de fil conducteur autour d'un matériau magnétique.

Elle a toujours une résistance, celle du fil. Une bobine idéale est une bobine dont on peut négliger la résistance ; elle est caractérisée par son inductance propre.

Une bobine réelle d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  peut être considérée comme l'association en série d'une bobine idéale d'inductance  $L$  et d'un résistor de résistance  $r$ .

En l'absence d'indication dans un exercice sur la valeur de sa résistance, une bobine est considérée comme idéale.



*En convention récepteur :*

$$u = ri + L \frac{di}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} i \text{ intensité du courant traversant la bobine en ampère (A).} \\ u \text{ tension aux bornes en volt (V).} \\ L \text{ inductance propre de la bobine en henry (H).} \\ r \text{ résistance de la bobine en ohm } (\Omega). \end{array} \right.$$

Le passage du courant provoque le stockage d'énergie magnétique dans la bobine. Le stockage est réversible.

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 \quad \left| \begin{array}{l} i \text{ intensité du courant traversant la bobine en ampère (A).} \\ w_L \text{ énergie stockée dans la bobine en joule (J).} \\ L \text{ inductance propre de la bobine en henry (H).} \end{array} \right.$$

**Démonstration** de l'expression de l'énergie à partir de la puissance  $p$  reçue :

$$p = ui = \frac{dw_L}{dt} \Rightarrow dw_L = Li \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left( \frac{i^2}{2} \right) \Rightarrow w_L = \frac{1}{2} Li^2.$$

(L'énergie est nulle quand le courant est nul.)

Une variation instantanée de l'énergie stockée impliquerait une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

L'énergie et l'intensité du courant qui traverse une bobine sont des fonctions continues du temps ; elles ne peuvent pas subir de discontinuité.

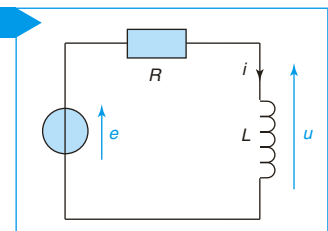
### 2.2. Circuit RL série soumis à un échelon de tension

#### 2.2.1. Équation différentielle de l'intensité. Constante de temps

Supposons qu'à date  $t = 0$ , la tension  $e$  passe de la valeur nulle à la valeur  $E$ . Le circuit RL (figure 5) est alors soumis à un échelon de tension. Quand le circuit est fermé, la loi des mailles s'écrit :

$$Ri + u = E, \text{ d'où } L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

**Fig. 5**



L'équation différentielle de l'intensité du courant qui traverse la bobine d'un circuit  $RL$  série soumis à un échelon de tension  $E$  est :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

$\tau = \frac{L}{R}$  est la constante de temps du circuit  $LC$ .

### 2.2.2. Évolution de l'intensité qui traverse la bobine idéale

Appliquons la méthode de résolution de l'équation différentielle donnée au paragraphe 1.2.4. (point méthode 1).

1. Solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$i_{\text{ssm}} = Be^{rt} = Be^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } B = \text{cte.}$$

2. Solution particulière de l'équation différentielle complète :

$$i_p = \frac{E}{R}.$$

3. Solution générale de l'équation différentielle complète :

$$i = Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}.$$

4. Détermination de la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine :

$$i_{t=0^+} = i_{t=0^-} \Rightarrow B + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow B = -\frac{E}{R}.$$

La solution de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

### 2.2.3. Évolution de la tension aux bornes de la bobine idéale

L'évolution de la tension aux bornes est :

$$u = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### 2.2.4. Courbes normalisées

La courbe normalisée de l'intensité est celle donnant  $\frac{Ri}{E}$  en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  :

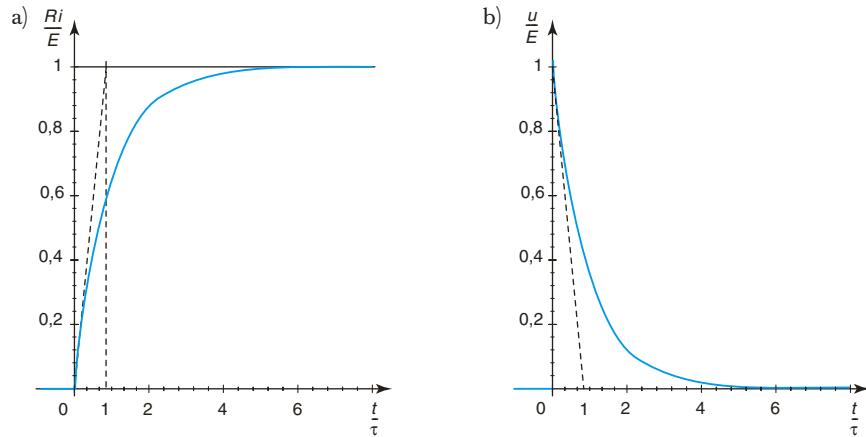
$$\frac{Ri}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La courbe normalisée de la tension est celle donnant  $\frac{u}{E}$  en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  :

$$\frac{u}{E} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

**Fig. 6**

Évolutions de l'intensité (a) et de la tension (b) pour un circuit LC soumis à un échelon de tension.



- a) Remarquer la continuité de l'intensité à la date  $t = 0$ .  
b) Remarquer la discontinuité de la tension à la date  $t = 0$ .

## 2.2.5. Régime permanent continu

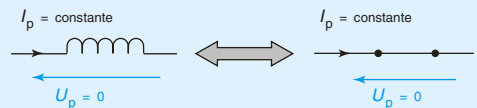
Le régime permanent continu est atteint au bout d'une durée infinie.

En réalité, il est pratiquement atteint au bout d'une durée  $5\tau$  puisque  $\frac{Ri_{(5\tau)}}{E} = 0,99$ .

Le temps de relaxation  $\tau = \frac{L}{R}$  donne un ordre de grandeur de la durée réelle du régime transitoire du circuit  $RL$  soumis à un échelon de tension.

En régime permanent continu :  $U_p = 0$  et  $I_p = \frac{E}{R}$ .

Du point de vue des courants et des tensions, une bobine idéale est équivalente à un interrupteur fermé en régime permanent continu.



## 2.2.6. Bilan énergétique

Énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire s'écrit :

$$W_L = \frac{1}{2}LI_p^2 - \frac{1}{2}Li_{t=0^+}^2 = \frac{1}{2}LI_p^2.$$

En régime permanent continu :

- la puissance reçue par la bobine est nulle :  $P_{Lp} = U_p I_p = 0$  ;
- la puissance  $P_{Ep} = EI_p$  fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le résistor :

$$P_{Rp} = RI_p^2 = RI_p \frac{E}{R} = EI_p.$$

## 2.3. Régime libre du circuit RL

Le régime permanent continu étant atteint, la tension  $e$  passe instantanément de la valeur  $E$  à la valeur nulle quand on éteint la source ; le circuit est en régime libre. Soit  $t' = 0$  la date de l'extinction.

L'équation différentielle de l'intensité se réduit à :

$$\tau \frac{di}{dt'} + i = 0,$$

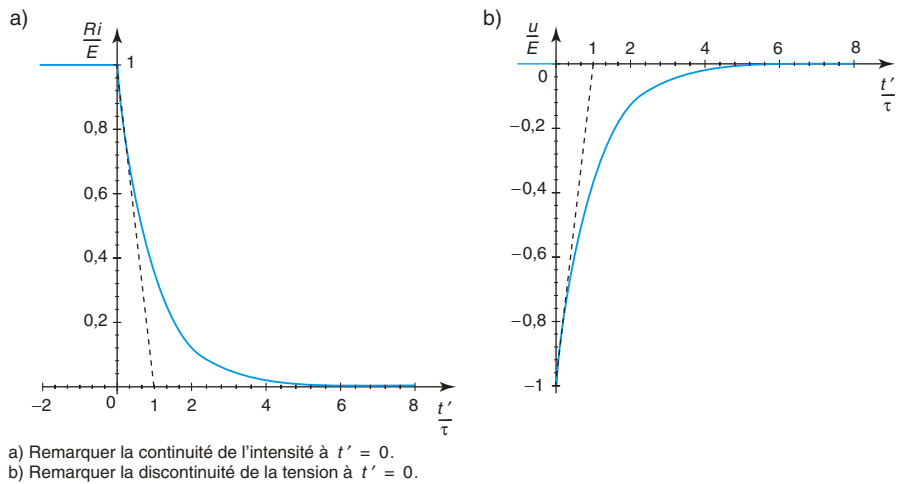
dont la solution est  $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$ . La tension est  $u = L \frac{di}{dt} = -E e^{-\frac{t'}{\tau}}$ .

En régime permanent continu :  $U'_p = 0$  et  $I'_p = 0$ .

Toute l'énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire a été dissipée par effet Joule dans le résistor.

**Fig. 7**

Courbes normalisées des évolutions de l'intensité (a) et de la tension (b) d'un circuit RL en régime libre.



© Nathan, classe prépa

## 3 Circuit RLC série

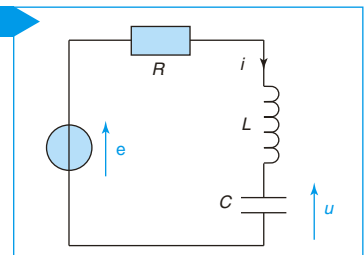
### 3.1. Équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur

Supposons qu'à date  $t = 0$ , la tension  $e$  passe de la valeur nulle à la valeur  $E$ . Le circuit RLC (Fig. 8) est alors soumis à un échelon de tension. Quand le circuit est fermé, la loi des mailles s'écrit :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = E, \text{ avec } i = C \frac{du}{dt}.$$

$$\text{D'où } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

**Fig. 8**





L'équation différentielle de la tension  $u$  aux bornes du condensateur d'un circuit  $RLC$  série soumis à un échelon de tension  $E$  est :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E.$$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  est la pulsation propre du circuit  $RLC$ . Elle s'exprime en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  est la période propre du circuit  $RLC$ . Elle s'exprime en s.
- $\sigma = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$  est le coefficient d'amortissement du circuit  $RLC$ . C'est un paramètre sans dimension (nombre).
- On définit aussi le facteur de qualité  $Q$  par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\sigma}.$$

## 3.2. Résolution l'équation différentielle réduite

*Réduction canonique de l'équation différentielle*

- En posant  $x = \omega_0 t$ , il vient :  $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \omega_0 \frac{du}{dx}$  et  $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \omega_0 \frac{du}{dx} \right) = \omega_0^2 \frac{d^2u}{dx^2}$ .
- En posant aussi  $y = \frac{u}{E}$ , la réduction de l'équation différentielle conduit à :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma \frac{dy}{dx} + y = 1.$$

L'équation différentielle obtenue est une équation différentielle normalisée ;  $x$  et  $y$  sont des variables sans dimension.

**Point méthode 2.** *Résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre non nul.*

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre en introduisant deux constantes.
2. Rechercher la solution particulière de l'équation différentielle complète.
3. Écrire la solution générale de l'équation différentielle complète avec les constantes.
4. Déterminer les constantes en écrivant les conditions initiales imposées au circuit, à savoir :
  - continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ;
  - continuité de l'intensité du courant qui traverse une bobine.

APPLICATION DE LA MÉTHODE

**1. Résolution de l'équation différentielle réduite sans second membre**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

**Point maths.**

- Écrire l'équation caractéristique de l'équation différentielle :

$$r^2 + 2\sigma r + 1 = 0.$$

- Écrire le discriminant réduit de l'équation caractéristique :

$$\Delta = (\sigma^2 - 1).$$

Remarque  
Le régime critique est un cas limite sans réalité physique car la valeur de  $\sigma$  ne peut être exactement égale à 1.

Si  $\sigma > 1$  ( $Q < \frac{1}{2}$ ), le discriminant est positif ; le régime est **apériodique**.

Si  $\sigma < 1$  ( $Q > \frac{1}{2}$ ), le discriminant est négatif ; le régime est **pseudo-périodique**.

Si  $\sigma = 1$  ( $Q = \frac{1}{2}$ ), le discriminant est nul ; le régime est **critique**.

• Exprimer la solution de l'équation caractéristique.

Si  $\sigma > 1$ , les solutions sont réelles :  $r_1 = -\sigma + \sqrt{\Delta}$  et  $r_2 = -\sigma - \sqrt{\Delta}$ .

Si  $\sigma < 1$ , les solutions sont complexes. On pose :  $\Delta = j^2 \sqrt{-\Delta}$  avec  $j^2 = -1$ .

D'où :  $r_1 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$  et  $r_2 = -\sigma - j\sqrt{-\Delta}$

Si  $\sigma = 1$ , la solution est double :  $r_1 = r_2 = -1$ .

• Exprimer la solution de l'équation différentielle sans second membre.

Si  $\sigma > 1$ , alors  $y_{ssm} = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$  avec  $A_1$  et  $A_2$  constantes réelles.

Si  $\sigma < 1$ , alors  $y_{ssm} = e^{-\sigma x} [B_1 \cos(\sqrt{-\Delta} x) + B_2 \sin(\sqrt{-\Delta} x)]$  avec  $B_1$  et  $B_2$  constantes réelles, ou  $y_{ssm} = B' e^{-\sigma x} \cos(\sqrt{-\Delta} x + \varphi)$  avec  $B'$  et  $\varphi$  constantes réelles.

Si  $\sigma = 1$ , alors  $y_{ssm} = e^{-x} [C_1 x + C_2]$  avec  $C_1$  et  $C_2$  constantes réelles.

**2. Solution particulière** de l'équation différentielle complète :  $y_p = 1$ .

**3. Solution générale** de l'équation complète.

**a. Régime apériodique ( $\sigma > 1$ )**

$$y = 1 + A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}.$$

**b. Régime pseudo-périodique ( $\sigma < 1$ )**

$$y = 1 + e^{-\sigma x} [B_1 \cos(\sqrt{-\Delta} x) + B_2 \sin(\sqrt{-\Delta} x)] \text{ ou } y = 1 + B' e^{-\sigma x} \cos(\sqrt{-\Delta} x + \varphi).$$

**c. Régime critique ( $\sigma = 1$ )**

$$y = 1 + e^{-x} [C_1 x + C_2].$$

**4. Conditions initiales** imposées au circuit

À la fermeture de l'interrupteur (date  $t = 0^+$ ) :

• la tension aux bornes du condensateur ne subit pas de discontinuité. S'il est initialement déchargé, alors :  $u_{(0)} = 0$ . D'où :  $y_{(0)} = 0$ .

• l'intensité du courant qui traverse la bobine ne subit pas de discontinuité donc :

$$i_{(0)} = C \left[ \frac{du}{dt} \right]_{(0)} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{(0)} = 0.$$

On en déduit les valeurs des constantes dans chacun des cas.

**a. Régime apériodique**

$$y_{(0)} = 1 + A_1 + A_2 = 0 ; \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{(0)} = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} ; A_2 = -\frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

## b. Régime pseudo-périodique

$$y_{(0)} = 1 + B_1 = 0; \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{(0)} = -\sigma B_1 + \sqrt{1 - \sigma^2}; B_2 = 0$$

$$\Rightarrow B_1 = -1; B_2 = -\frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

## c. Régime critique

$$y_{(0)} = 1 + C_2 = 0; \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{(0)} = -C_2 + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = C_1 = -1.$$

La solution complète de l'équation différentielle s'écrit :

## a. Régime apériodique

$$y = 1 - \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})x} - \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1})x}.$$

## b. Régime pseudo-périodique

$$y = 1 - e^{-\sigma x} \left[ \cos(\sqrt{1 - \sigma^2} x) + \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \sin(\sqrt{1 - \sigma^2} x) \right].$$

## c. Régime critique

$$y = 1 - e^{-x} [x + 1].$$

## 3.3. Évolution de la tension et de l'intensité

Il suffit de remplacer, dans les équations précédentes,  $x$  par  $\omega_0 t$  et  $y$  par  $\frac{u}{E}$ .

## a. Régime apériodique

$$\sigma > 1 \left( Q < \frac{1}{2} \right); \frac{u}{E} = 1 + \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0 t}.$$

## b. Régime pseudo-périodique

$$\sigma < 1 \left( Q > \frac{1}{2} \right); \frac{u}{E} = 1 - e^{-\sigma \omega_0 t} \left[ \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t) + \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t) \right]$$

L'expression fait apparaître la pseudo-pulsation :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}.$$

Pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

## c. Régime critique

$$\sigma = 1 \left( Q = \frac{1}{2} \right); \frac{u}{E} = 1 - e^{-\omega_0 t} [\omega_0 t + 1].$$

L'expression de l'intensité se déduit de celle de la tension par la relation  $i = C \frac{du}{dt}$ .

### 3.4. Résistance critique

La valeur limite  $\sigma = 1$  correspond à la valeur critique  $R_C$  de  $R$  :

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- Le régime est apériodique si  $R > R_C$  (amortissement important).
- Le régime est pseudo-périodique si  $R < R_C$  (faible amortissement).
- Le régime est critique si  $R = R_C$  (amortissement critique, cas limite sans réalité physique).

### 3.5. Durée du régime transitoire

- En régime apériodique, le terme  $e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0 t}$  dont la décroissance est la plus lente donne la durée caractéristique du régime apériodique :  $\tau = \frac{1}{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})\omega_0}$ .
- En régime pseudo-périodique et en régime critique, c'est l'enveloppe exponentielle  $e^{-\sigma\omega_0 t}$  qui donne la durée caractéristique du régime :  $\tau = \frac{1}{\sigma\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

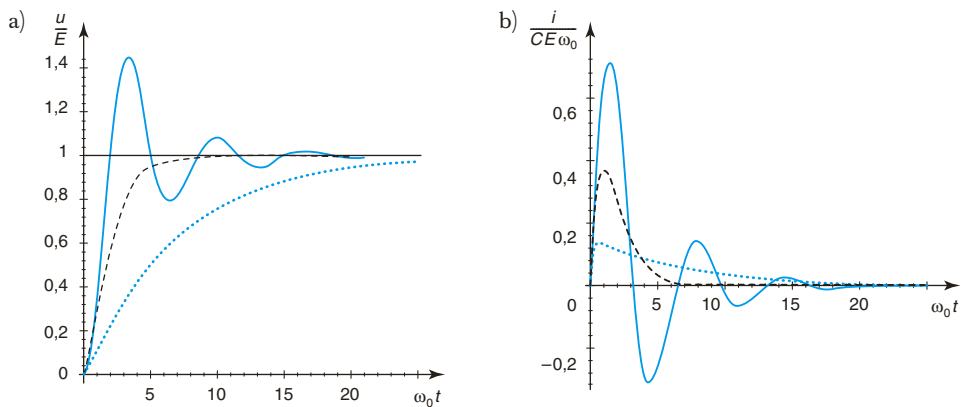
### 3.6. Régime permanent continu

En régime permanent continu :  $U_{Cp} = E$  ;  $U_{Lp} = 0$  ;  $I_p = 0$ .

### 3.7. Courbes normalisées

Fig. 9

Évolutions de la tension (a) et de l'intensité (b) pour un circuit RLC soumis à un échelon de tension.



En trait fin,  $\sigma = 0,25$  (régime pseudo-périodique) ; en points,  $\sigma = 3,5$  (régime apériodique) ; en pointillés,  $\sigma = 1$  (régime critique).

### 3.8. Bilan énergétique

- Énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire :

$$W_C = \frac{1}{2}CU_p^2 - \frac{1}{2}Cu_{t=0}^2 = \frac{1}{2}CE^2.$$

- Énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire :

$$W_L = \frac{1}{2}LI_p^2 - \frac{1}{2}Li_{t=0}^2 = 0.$$

- Énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_E = \int_0^{\infty} E i \, dt = E \int_0^{\infty} i \, dt = EC \int_0^{\infty} du = CE^2.$$

- Énergie dissipée par effet Joule dans le résistor pendant le régime transitoire :

$$W_R = W_E - W_C - W_L = \frac{1}{2}CE^2.$$

En régime permanent continu, le courant est nul, donc la puissance reçue par le circuit  $RLC$  est nulle.



## 4 Établissement d'un régime périodique forcé dans un circuit soumis à une tension périodique

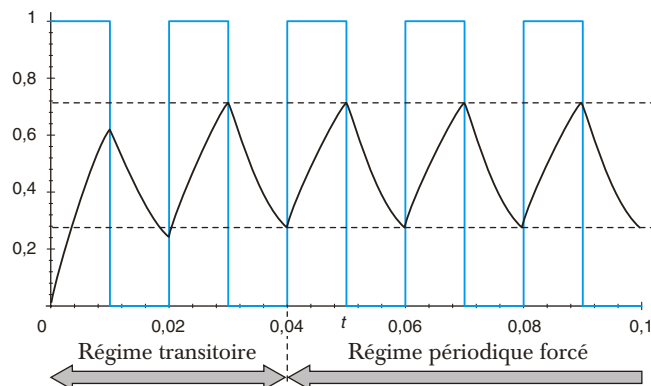
Lorsqu'on soumet un circuit  $RC$ ,  $RL$ , ou  $RLC$  à une tension périodique de période  $T$ , un régime permanent périodique de même période  $T$  apparaît, après un régime transitoire de durée caractéristique du circuit ; on dit que c'est un **régime périodique forcé**.

### 4.1. Circuit $RC$ soumis à une tension en crêteaux

Une tension en crêteaux est une tension périodique qui prend une valeur constante pendant la première demi-période puis une valeur nulle pendant la seconde (courbe en couleur sur la figure 10). La figure montre qu'après un régime transitoire, un régime permanent périodique de même période que celle de la tension en crêteaux est établi. On dit qu'il s'agit d'un régime périodique forcé car la source impose sa période au circuit. Le régime est établi quand lorsque les tensions extrêmes sont constantes ; la frontière entre les deux régimes n'est pas nettement marquée.

**Fig. 10**

Tension (en noir) aux bornes du condensateur d'un circuit  $RC$  soumis à une tension en crêteaux (en couleur).

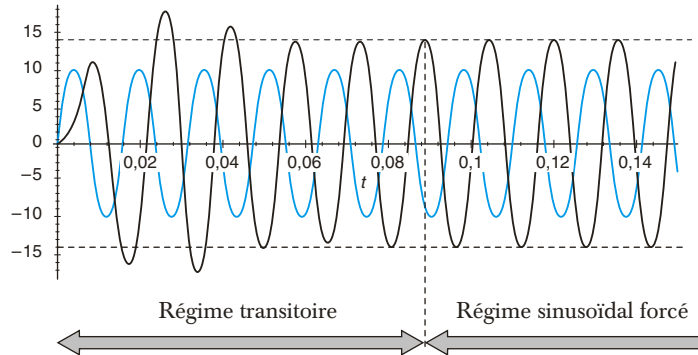


### 4.2. Circuit $RLC$ soumis à une tension alternative sinusoïdale

La figure 11 montre qu'après le régime transitoire le régime permanent périodique est établi. Il est alternatif sinusoïdal, de même période que celle de la tension source. On dit que le régime est sinusoïdal forcé ; son étude sera faite au prochain chapitre.

**Fig. 11**

Tension (en noir) aux bornes du condensateur d'un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale (en couleur).



## 5 Approximation des régimes quasi permanents (ARQP)

Considérons le circuit de la figure 12. Le condensateur  $C$  est initialement déchargé.

Après la fermeture de l'interrupteur  $K$ , les ampèremètres indiquent-ils, à chaque instant, la même valeur de l'intensité ?

L'expérience montre que l'intensité  $i_Q(t)$  est en retard sur l'intensité  $i_P(t)$  :  $i_Q(t) = i_P(t - \theta)$ . On dit que le courant se propage dans le circuit.

Le retard  $\theta$  est lié à la distance  $PQ$  et à célérité  $c$  des ondes électromagnétiques dans le vide par la relation :

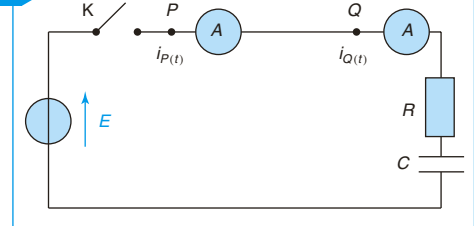
$$\theta \approx \frac{PQ}{c}, \text{ avec } c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Une étude complète doit être menée dans le cadre de l'électromagnétisme ; elle sera abordée en deuxième année.

La durée de propagation est négligeable si elle est très petite devant les durées caractéristiques d'un régime (temps de relaxation, période) ; on dit alors que le régime est quasi permanent, ou quasi stationnaire.

L'approximation des régimes quasi permanents (ARQP), ou approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) consiste à négliger les effets liés à la propagation des courants et des tensions ; l'intensité est la même en tous les points d'une branche d'un circuit.

L'approximation est justifiée pour tous les circuits étudiés en électrocinétique.

**Fig. 12**

## 1 – Régime libre d'un circuit RC

On considère un condensateur de capacité  $C = 1,0 \mu\text{F}$ , dont l'armature supérieure porte la charge  $Q_0 = 10 \mu\text{C}$ , placée dans le circuit suivant. Le résistor a une résistance  $R = 10 \text{ k}\Omega$ .

➤ 1 Quelle est la charge portée l'armature inférieure ?

➤ 2 Quelle est la tension  $U_0$  aux bornes du condensateur ?

➤ 3 Quelle est l'énergie  $W_C$  stockée par le condensateur ?

À la date  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K.

➤ 4 Quelles sont les valeurs  $u_{t=0^+}$  de la tension et  $i_{t=0^+}$  de l'intensité ?

➤ 5 Quelles sont les valeurs  $U_p$  de la tension et  $I_p$  de l'intensité en régime permanent ?

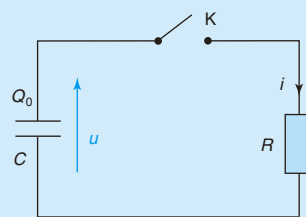
➤ 6 Calculer la constante de temps  $\tau$  du circuit.

➤ 7 Établir l'équation différentielle de la tension  $u$  aux bornes du condensateur.

➤ 8 Résoudre l'équation différentielle. En déduire les expressions  $u(t)$  et  $i(t)$  de la tension et du courant.

➤ 9 Tracer la courbe donnant la tension  $u(t)$  en fonction du temps.

➤ 10 Déterminer la date  $\theta$  à laquelle la tension est égale à 1 % de la tension initiale. Exprimer le rapport  $\frac{\theta}{\tau}$  et conclure.



### résolution méthodique

➤ 1 Un condensateur déchargé est neutre. Quand on le charge, des charges opposées s'accumulent sur les armatures ; le condensateur reste neutre. Une des armatures porte la charge  $Q_0 = 10 \mu\text{C}$ , l'autre porte la charge :  $Q_0 = -10 \mu\text{C}$

➤ 2 Avec l'orientation imposée par le schéma, la tension est positive :

$$Q_0 = CU_0 \Rightarrow U_0 = 10 \text{ V}$$

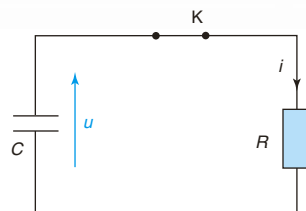
➤ 3  $W_C = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}Q_0U_0 = 50 \mu\text{J}$

➤ **4** La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc :

$$u_{t=0^+} = u_{t=0^-} = U_0 = 10 \text{ V}$$

Appliquons la loi d'Ohm au résistor  $R$  :

$$i_{t=0^+} = \frac{u_{t=0^+}}{R} = 1,0 \text{ mA}$$



➤ **5** Le condensateur se décharge dans le résistor ; son énergie y est dissipée par effet Joule.

En régime permanent :  $U_p = 0$  (car  $W_{Cp}$  est nulle) et  $I_p = \frac{U_p}{R} = 0$

➤ **6**  $\tau = RC = 10 \text{ ms}$

➤ **7** Appliquons la loi d'Ohm au résistor  $R$  :  $u = Ri$ .

Soit  $dq$  la variation de la charge de l'armature supérieure pendant la durée  $dt$ . Il vient :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du}{dt}, \text{ d'où : } \tau \frac{du}{dt} + u = 0$$

La relation  $i = C \frac{du}{dt}$  ne s'applique que si le condensateur est en convention récepteur. En convention générateur il faut écrire :  $i = -C \frac{du}{dt}$ .

➤ **8** L'équation précédente est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre nul.

Appliquons la méthode donnée au § 1.2 de « Retenir l'essentiel » (point méthode 1).

a. Solution de l'équation différentielle :  $u = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $A = \text{cte}$ .

b. Détermination de la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de la tension :  $u_{t=0^+} = u_{t=0^-} = U_0 \Rightarrow U_0 = Ae^0 = A$ .

c. Solution complète de l'équation différentielle :

$$u = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} ; u(t) = 10e^{-100t} \text{ (V)}$$

La résolution d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre impose l'introduction d'une constante.

Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer la constante.

La constante est déterminée en écrivant la continuité, selon le cas :

- de la tension aux bornes des condensateurs ;
- ou de l'intensité du courant qui traverse les bobines.



On en déduit l'intensité en appliquant la loi d'Ohm :

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A.N. :  $i(t) = 1,0e^{-100t}$  (mA).

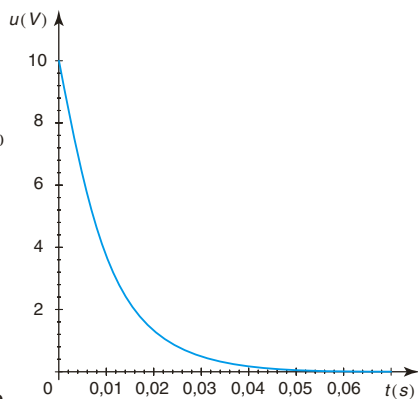
➤ **9** La courbe est celle tracée ci-contre.

➤ **10** La date  $\theta$  à laquelle la tension est égale à 1 % de la tension initiale est telle que :

$$\begin{aligned} u_\theta &= 10e^{-100\theta} = 10^{-1} \Rightarrow e^{100\theta} = 10^2 \\ \Rightarrow \theta &= 10^{-2} \ln(10^2) = 2 \cdot 10^{-2} \ln(10) \\ &= 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ s} \end{aligned}$$

$$\frac{\theta}{\tau} \approx 5$$

La décharge est pratiquement terminée à la date  $\theta = 5\tau$ .



La constante de temps donne un ordre de grandeur de la durée réelle d'un régime transitoire du premier ordre.

Considérons les valeurs suivantes :

$$\left[ \frac{u}{U_0} \right]_{t=\tau} = 37 \% ; \quad \left[ \frac{u}{U_0} \right]_{t=2\tau} = 13 \% ; \quad \left[ \frac{u}{U_0} \right]_{t=3\tau} = 5 \%$$

On voit que la décharge est pratiquement terminée à la date  $t = 3\tau$ .

## en conclusion

- **Faire attention aux conventions d'orientation des dipôles.**
- La relation  $i = C \frac{du}{dt}$  pour le condensateur, et la relation  $u = L \frac{di}{dt}$  pour la bobine ne s'appliquent que si ces dipôles sont en convention récepteur.
- En convention générateur il faut écrire :  $i = -C \frac{du}{dt}$  et  $u = -L \frac{di}{dt}$ .
- La résolution d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre impose l'introduction d'une constante.  
Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer la constante.  
La constante est déterminée en écrivant la continuité, selon le cas :
  - de la tension aux bornes des condensateurs ;
  - ou de l'intensité du courant qui traverse les bobines.
- La constante de temps  $\tau$  donne un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire du premier ordre. Le régime permanent est atteint à 1 % près au bout d'une durée égale à  $5\tau$ .

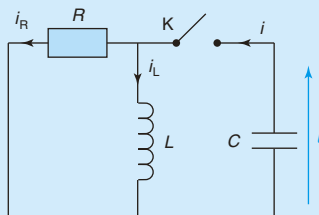
## 2 – Circuit RLC parallèle

On considère le circuit suivant.

Données :  $C = 1,0 \mu\text{F}$  ;  $L = 0,10 \text{ H}$  ;  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ .

L'armature supérieure porte la charge  $Q_0 = 20 \mu\text{C}$ .

À la date  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur K.



- 1 Quelle est la tension  $U_0$  aux bornes du condensateur avant la fermeture de l'interrupteur ?
- 2 Quelles sont les valeurs  $u_{0+}$ ,  $i_{0+}$ ,  $i_{L0+}$  et  $i_{R0+}$  de la tension et des intensités après fermeture de l'interrupteur ?
- 3 Établir l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur.
- 4 Mettre l'équation différentielle sous la forme  $\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ . Calculer la pulsation propre  $\omega_0$ , le coefficient d'amortissement  $\sigma$  et le facteur de qualité  $Q$  du circuit. En déduire la nature du régime.
- 5 Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\sigma \frac{dy}{dx} + y = 0$  en posant  $x = \omega_0 t$  et  $y = \frac{u}{U_0}$  et résoudre l'équation différentielle. En déduire les expressions  $u(t)$  et  $i(t)$  de la tension et de l'intensité.
- 6 Tracer les courbes correspondantes.

### résolution méthodique

➤ 1  $Q_0 = CU_0 \Rightarrow U_0 = 20 \text{ V}$

- 2 Le circuit  $RL$  ne comporte pas de générateur et l'interrupteur K est ouvert ; tous les courants sont nuls avant la fermeture de l'interrupteur.

L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction continue donc :

$$i_{L0+} = i_{L0-} = 0$$

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc :

$$u_{0+} = u_{0-} = U_0 = 20 \text{ (V)}$$

La loi d'Ohm aux bornes du résistor s'écrit :  $u = Ri_R$  (il est en convention récepteur), d'où :

$$i_{R0+} = \frac{u_{0+}}{R} = \frac{U_0}{R} = 20 \text{ (mA)}$$

La loi des nœuds permet d'écrire :

$$i_{0+} = i_{R0+} + i_{L0+} = i_{R0+} = 20 \text{ (mA)}$$

3 Écrivons les différentes relations entre les grandeurs qui vont nous servir :

$$i = i_L + i_R \text{ (loi des nœuds)}, i = -C \frac{du}{dt}, u = L \frac{di_L}{dt}, \text{ et } u = Ri_R \text{ (loi d'Ohm)}.$$

Il faut mettre un signe moins car le condensateur est en convention générateur.

$$\text{Il vient : } u = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{d}{dt} [i - i_R] = L \frac{d}{dt} \left[ -C \frac{du}{dt} - \frac{u}{R} \right] = L \left[ -C \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{R} \frac{du}{dt} \right].$$

$$\text{Ce qui conduit à : } LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = 0$$

4 Divisons l'équation par  $LC$  :  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$ .

On peut alors identifier les termes recherchés :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } 2\omega_0\sigma = \frac{1}{RC} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2R\sqrt{LC}} = 0,16 \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2\sigma} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 3,16$$

Les expressions de  $\sigma$  et de  $Q$  ne sont pas celles du circuit  $RLC$  série car les trois composants sont en parallèle. En série,  $Q_{\text{série}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R\sqrt{LC}}$ , alors que,  $Q_{\text{parallèle}} = \frac{1}{Q_{\text{série}}} = \frac{R}{L\omega_0}$ .

*Remarque* : Un circuit  $RLC$  série devient idéal quand  $R = 0$  ; il se réduit alors à un circuit  $LC$ .

Pour réduire à un circuit  $LC$  un circuit  $RLC$  parallèle il faut que  $R = \infty$ . On comprend alors que les expressions du facteur de qualité de chacun des circuits soient inverses l'une de l'autre.

Le régime est **pseudo-périodique** car l'amortissement est inférieur à 1 (facteur de qualité supérieur à 0,5).

5 Voir § 3.2 de « Retenir l'essentiel » pour établir l'équation différentielle réduite.

Une équation différentielle réduite (sous forme canonique) ne contient que des termes sans dimensions. Cela simplifie sa résolution.

Appliquons la méthode donnée dans « Retenir l'essentiel » (point méthode 2) pour résoudre l'équation différentielle.

a. Solution générale.

• Équation caractéristique :  $r^2 + 2\sigma r + 1 = 0$ .

Discriminant réduit :  $\Delta = \sigma^2 - 1 = -0,98$  ? Moi

• Solutions :  $r_1 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$  et  $r_2 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$ , avec  $\Delta = j^2\sqrt{-\Delta}$  et  $j^2 = -1$ .

Les solutions sont complexes, le régime est pseudopériodique.

• Solution de l'équation différentielle :

$$y = e^{-\sigma x} [A \cos(\sqrt{-\Delta} x) + B \sin(\sqrt{-\Delta} x)], \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles.}$$

b. Détermination des constantes en écrivant les conditions initiales imposées au circuit, à savoir :

• Continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$$u_{t=0^+} = u_{t=0^-} = U_0 \Rightarrow y_{x=0} = 1 \Rightarrow A = 1.$$

• Continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine :  $i_{L0^+} = 0$ .

Il faut chercher  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{0^+}$ . D'après la deuxième question, la condition  $i_{L0^+} = 0$  implique

$$i_{0^+} = i_{R0^+} = \frac{u_{0^+}}{R} = \frac{U_0}{R}. \text{ Par ailleurs } i_{0^+} = -C \left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} \text{ et } \frac{du}{dt} = \frac{d(U_0 y)}{d\left(\frac{x}{\omega_0}\right)} = U_0 \omega_0 \frac{dy}{dx};$$

$$\text{donc } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{0^+} = -\frac{1}{C\omega_0} \left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = -\frac{i_{0^+}}{C\omega_0 U_0} = -\frac{1}{RC\omega_0} = -2\sigma. \text{ D'où :}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\sigma A + B\sqrt{-\Delta} = -2\sigma \Rightarrow B = \frac{-\sigma}{\sqrt{-\Delta}}.$$

C'est bien en écrivant la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine que l'on détermine la constante  $B$ . Mais ici, comme parfois, la détermination de la relation entre les constantes est indirecte.

c. Solution de l'équation différentielle  $y = e^{-\sigma x} \left[ \cos(\sqrt{-\Delta} x) - \frac{\sigma}{\sqrt{-\Delta}} \sin(\sqrt{-\Delta} x) \right]$ .

La résolution d'une équation différentielle du second ordre sans second membre impose l'introduction de deux constantes :

Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer les constantes.

Les constantes sont déterminées en écrivant les continuités :

- de la tension aux bornes des condensateurs,
- et de l'intensité du courant qui traverse les bobines.

A.N. :  $y = e^{-0,158x}[\cos(0,987x) - 0,16 \sin(0,987x)]$ .

Il faut maintenant revenir à la fonction  $u(t)$  en utilisant les relations  $x = \omega_0 t$  et  $u = U_0 y$ .

Sachant que  $\omega_0 = 3,1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et que  $U_0 = 20 \text{ V}$ , il vient :

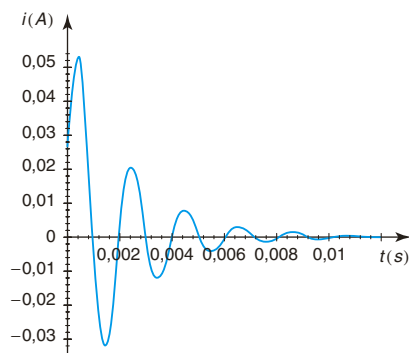
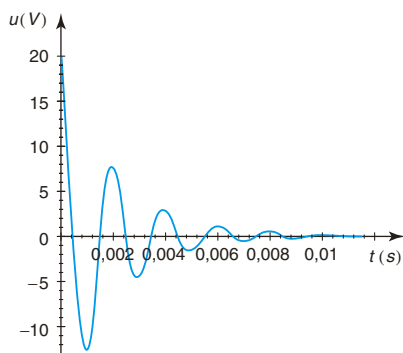
$$u(t) = 20e^{-5,0 \cdot 10^2 t}[\cos(3,1 \cdot 10^3 t) - 0,16 \sin(3,1 \cdot 10^3 t)] \text{ (V)}$$

L'expression de l'intensité se déduit de la relation  $i = -C \frac{du}{dt}$ .

$$i(t) = e^{-5,0 \cdot 10^2 t}[20 \cos(3,1 \cdot 10^3 t) + 60 \sin(3,1 \cdot 10^3 t)] \text{ (mA)}$$

On vérifie qu'à la date  $t = 0$  l'intensité est égale à 20 mA.

➤ 6 Les courbes sont tracées ci-dessous.



© Nathan, classe prépa

## en conclusion

- Une équation différentielle réduite (sous forme canonique) ne contient que des termes sans dimension. Cela simplifie sa résolution.
  - La résolution d'une équation différentielle du second ordre sans second membre impose l'introduction de deux constantes.
- Il faut écrire la solution complète de l'équation différentielle avant de déterminer les constantes.

Les constantes sont déterminées en écrivant les continuités :

- de la tension aux bornes des condensateurs,
- et de l'intensité du courant qui traverse les bobines.

- Le facteur de qualité  $Q$  d'un circuit  $RLC$  parallèle s'écrit  $Q = \frac{R}{L\omega_0}$ .

### 3 – Circuit LC

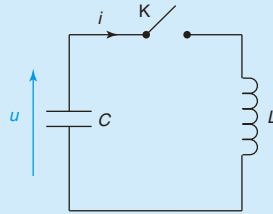
On considère le circuit ci-dessous.

Données :  $C = 1,0 \mu\text{F}$  et  $L = 10 \text{ mH}$ .

Le condensateur est chargé ; la tension à ses bornes est  $U_0 = 20 \text{ V}$ .

À la date  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K.

- 1 Calculer la pulsation propre  $\omega_0$  est du circuit. Quelle est la valeur du coefficient d'amortissement  $\sigma$  du circuit ? Quelle est la valeur du facteur de qualité  $Q$  ?
- 2 Montrer que l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur s'écrit :  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$
- 3 Résoudre l'équation différentielle. En déduire les expressions  $u(t)$  et  $i(t)$  de la tension et de l'intensité.
- 4 Calculer l'énergie totale du circuit. Conclure.



#### résolution méthodique

- 1 La pulsation propre du circuit LC est :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La résistance du circuit est nulle , donc :

$$\sigma = 0 \text{ et } Q = \infty$$

On peut dire que la « qualité » du circuit LC est infinie. Le circuit LC est un circuit idéal, car dans la réalité la résistance d'une bobine n'est jamais nulle.

- 2 Quand le circuit est fermé, la loi des mailles s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} - u = 0, \text{ avec } i = -C \frac{du}{dt}.$$

Il faut mettre un signe moins car le condensateur est en convention générateur.

Il vient  $LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0$ . D'où :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

➤ **3** Appliquons la méthode donnée dans « Retenir l'essentiel » (point méthode 2) pour résoudre l'équation différentielle.

a. Solution générale de l'équation différentielle.

• Équation caractéristique :  $r^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\omega_0^2$ .

• Posons  $r^2 = j^2 \omega_0^2$  avec  $j^2 = -1$ . Les solutions sont complexes :

$$r_1 = j\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = -j\omega_0.$$

• Solution de l'équation différentielle :

$$u = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles.}$$

b. Détermination des constantes en écrivant les conditions initiales imposées au circuit, à savoir :

• Continuité de la tension bornes du condensateur :  $u_{t=0^+} = u_{t=0^-} = U_0 \Rightarrow A = U_0$ .

• Continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine :  $i_{0^+} = i_{0^-} = 0$ .

$$i_{0^+} = -C \left( \frac{du}{dt} \right)_{0^+} = 0 \Rightarrow \left( \frac{du}{dt} \right)_0 = \omega_0 B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

c. Solution de l'équation différentielle :  $u = U_0 \cos(\omega_0 t)$  ;

A.N. :  $u(t) = 20 \cos(1,0 \cdot 10^4 t) \text{ (V)}$

L'expression de l'intensité se déduit de la relation  $i = -C \frac{du}{dt}$ . En effet :

$$i = -C \frac{du}{dt} = CU_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

A.N. :  $i(t) = 0,20 \sin(1,0 \cdot 10^4 t) \text{ (A)}$

Le régime d'un circuit LC est sinusoïdal.

➤ **4** L'énergie du circuit est la somme des énergies des deux composants :

$$w = w_C + w_L = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C [U_0 \cos(\omega_0 t)]^2 + \frac{1}{2} L [CU_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)]^2$$

$$w = \frac{1}{2} C U_0^2 ([\cos(\omega_0 t)]^2 + [\sin(\omega_0 t)]^2)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} C U_0^2 = 0,20 \text{ mJ}$$

L'énergie totale est constante. Elle est égale à l'énergie initialement stockée dans le condensateur.

## en conclusion

Un circuit LC est un oscillateur électrique ; la tension et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales du temps.

L'énergie d'un circuit LC est constante ; elle est alternativement stockée par le condensateur et par la bobine. C'est un circuit idéal, sans réalité physique.

# Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

## 1 Introduction

### 1.1. Signaux sinusoïdaux

#### 1.1.1. Définitions

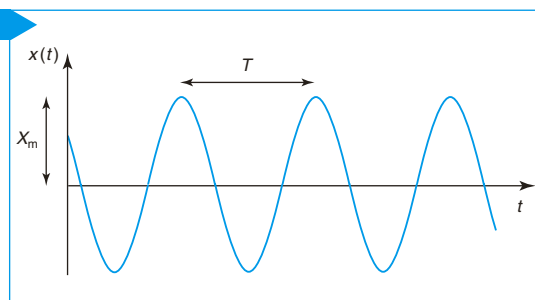
Un signal sinusoïdal fonction du temps s'écrit (fig. 1) :

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , avec

- $X_m$  : amplitude du signal ( $> 0$ ) ;
- $T$  est sa période (en s) :  
 $X(t) = X(t + T)$  ;
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$  : pulsation (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$  : fréquence (en Hz) ;
- $\omega t + \varphi$  : phase à l'instant  $t$  ;
- $\varphi$  : phase à l'instant origine.

*Remarque* : on appelle en général  $\varphi$  tout simplement « la phase » du signal.

Fig. 1



Attention

Les valeurs moyennes sont indépendantes du temps.

**Point maths.** Expression de la valeur moyenne d'une fonction périodique.

Soit  $x(t)$  une grandeur périodique de période  $T$ . On note  $\langle x(t) \rangle$  sa valeur moyenne :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$



Attention  
Les grandeurs efficaces sont indépendantes du temps.

Attention

Le résultat  $X_e = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$  n'est bien entendu valable que pour un signal sinusoïdal, il ne faut pas l'appliquer, par exemple, à un signal créneau ( $-X_m, X_m$ ).

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle (voir *tester ses connaissances*, exercice 1).

**Point maths.** Expression de la valeur efficace d'une fonction périodique  
Soit  $x(t)$  une grandeur périodique de période  $T$ . On note  $X_e$  sa valeur efficace :

$$X_e = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}.$$

la valeur efficace de  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  vaut  $X_e = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$  (voir *tester ses connaissances*, exercice 1).

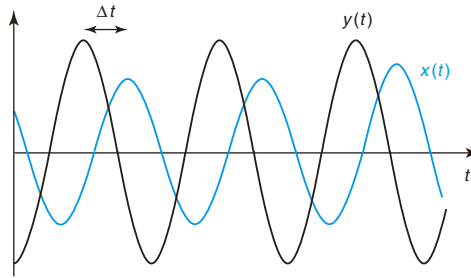
## 1.1.2. Différence de phase entre deux signaux synchrones

Soit deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence (elles sont dites **synchrones**),  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  et  $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$ . La différence de phase (déphasage) entre les deux signaux vaut  $\Delta\varphi = \phi - \varphi$ .

$\Delta\varphi$  est l'avance de phase du signal  $y(t)$  sur le signal  $x(t)$ .

Fig. 2

Signaux sinusoïdaux déphasés



Le décalage temporel  $\Delta t$  entre les deux courbes correspond à un déphasage  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T}$ .

Sur la figure 2, le signal  $y(t)$  est en avance de phase sur  $x(t)$  : il atteint son maximum avant  $x(t)$  (voir exercice 2, rubrique *tester ses connaissances*).

## 1.1.3. Caractéristiques principales de l'instrumentation électrique au laboratoire

### a. Générateur de signaux électriques (GBF)

Il permet de générer des signaux continus ou variables dans le temps, et notamment des signaux sinusoïdaux. La plupart des GBF comportent un fréquencemètre, qui permet de lire la fréquence du signal utilisé (de quelques Hz à quelques MHz). Pour la plupart des appareils – c'est ce que l'on devra considérer dans les exercices, sauf mention contraire, le signal est disponible entre une borne + et une borne – qui est reliée à la carcasse métallique de l'appareil, la masse (notion introduite au chapitre 3, § 3.2).

### b. Multimètre numérique

Cet appareil a trois fonctions :

- fonction ohmmètre : mesure d'une résistance. La fonction ohmmètre s'utilise en connectant les deux bornes de l'appareil à celles du dipôle (seul, sans être inséré dans un circuit) ;
- fonction voltmètre : mesure d'une tension ;
- fonction ampèremètre : mesure d'une intensité.

Attention

Dans une installation électrique, toutes les prises de terre sont reliées entre elles. Les masses du GBF et de l'oscilloscope sont communes. L'oscilloscope et le GBF ayant donc une de leur borne au même potentiel (nul), il faudra en tenir compte lors de leurs branchements : leurs masses devront être reliées au même point du circuit.

Les caractéristiques des fonctions ampèremètre et voltmètre présentées au chapitre 1, § 8.1 dans le cadre du régime stationnaire restent valables. En mode *DC* on mesure la valeur moyenne (utilisée par exemple pour mesurer des grandeurs continues) et en mode *AC* la valeur efficace d'une intensité ou d'une tension.

Aucune des deux bornes de cet appareil n'est reliée à la terre de l'installation électrique.

### c. Oscilloscope

Il permet de visualiser la forme de signaux électriques (oscillogramme). Il se branche comme un voltmètre. Il assure les fonctions de fréquencemètre, phasemètre (mesure du déphasage entre deux signaux) et voltmètre. Pour la plupart des oscilloscopes, une des deux bornes est reliée à la masse de l'appareil – c'est ce que l'on devra considérer dans les exercices, sauf mention contraire.

## 1.2. Introduction au régime sinusoïdal forcé sur l'exemple d'un circuit *RLC*

Étudions le circuit *RLC* (fig. 3), soumis à un générateur idéal de tension, de f.é.m.  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$ .

La loi des mailles dans le sens indiqué donne :

$$e = u_R + u_C + u_L \Rightarrow e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

En utilisant  $i = \frac{dq}{dt}$  et dérivant l'équation obtenue ci-dessus, on a :

$$\frac{de}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}. \quad (E)$$

On a une équation différentielle du deuxième ordre avec deuxième membre sinusoïdal. La solution est de la forme  $i(t) = i_\ell(t) + i_f(t)$ .

- $i_\ell(t)$  est la solution de l'équation différentielle (*E*) sans second membre, c'est le régime libre, ce type de solution a été étudié au chapitre 4. En appelant  $\tau$  le temps de relaxation, ou constante de temps, du circuit, on a  $\lim_{t \gg \tau} i_\ell(t) = 0$ .  $i_\ell(t)$  disparaît donc au bout d'un temps de l'ordre de  $\tau$ .

- $i_f(t)$  est la solution particulière de l'équation différentielle, c'est le régime forcé, que l'on appelle aussi régime permanent ou établi. Compte tenu de la forme de  $e(t)$ ,  $i_f(t)$  est aussi une fonction sinusoïdale, de la forme  $i_f(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ .

$\lim_{t \gg \tau} i(t) = i_f(t)$ .  $i(t)$  se limite donc à  $i_f(t)$  au bout d'un temps de l'ordre de  $\tau$ .

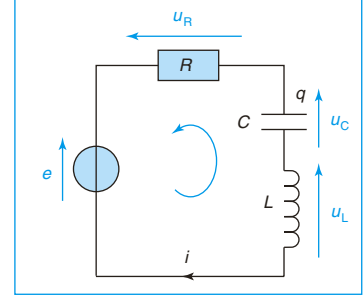
L'objet de ce chapitre est d'étudier le régime sinusoïdal forcé, on se placera donc systématiquement dans le cas où le régime transitoire est amorti et donc négligeable.

En fait, tout signal périodique (créneau, triangulaire...) peut se décomposer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux (analyse de Fourier). L'étude du régime sinusoïdal forcé que nous faisons dans ce chapitre est donc utilisable aussi pour traiter n'importe quel régime périodique forcé.

La méthode la plus générale pour chercher  $i_f(t)$  consiste à remplacer  $i(t)$  par  $I \cos(\omega t + \varphi)$  dans (*E*) et d'en déduire *I* et  $\varphi$ , cela conduit à des calculs fastidieux. L'utilisation des nombres complexes permet de considérablement simplifier cette étude. Les équations différentielles seront en fait remplacées par une équation algébrique sur le corps des complexes.

Fig. 3

Circuit *RLC* série



## 2 Utilisation des nombres complexes

### 2.1. Grandeur complexe associée à un signal sinusoïdal

Conseil

Pour l'étude des régimes sinusoïdaux on aura en permanence besoin de manipuler les nombres complexes. Il est primordial que l'élève ait une bonne maîtrise de ce chapitre du cours de mathématiques pour pouvoir réussir les exercices d'électrocinétique.

À une grandeur réelle :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi),$$

on associe la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m \exp(j(\omega t + \varphi)).$$

On a  $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$ .

On appelle  $\underline{X}_m = X_m \exp(j\varphi)$

l'amplitude complexe de  $\underline{x}(t)$ .

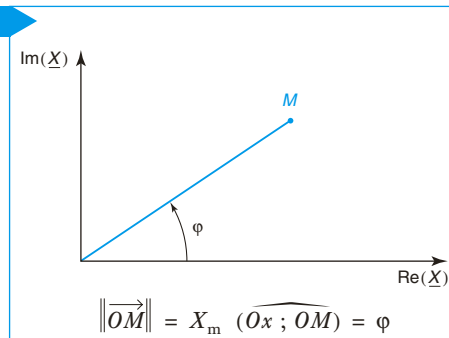
On a  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$ .

On a les relations : 
$$\begin{cases} X_m = |\underline{X}_m| \\ \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases}$$

On peut représenter  $\underline{X}$  dans le plan complexe (fig. 4).

Si une grandeur réelle est solution d'une équation linéaire (différentielle ou non) à coefficient constant, la grandeur complexe associée l'est également.

Fig. 4



### 2.2. Dérivation et intégration

Avec  $\underline{x}(t) = X_m \exp(j(\omega t + \varphi))$ , on obtient :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x} \quad \text{et} \quad \int \underline{x} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}$$

## 3 Impédances complexes

### 3.1. Définitions

Considérons un dipôle linéaire représenté en convention récepteur (fig. 5).

• Soit  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  la tension instantanée.

La tension en notation complexe se note

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m \exp(j\omega t);$$

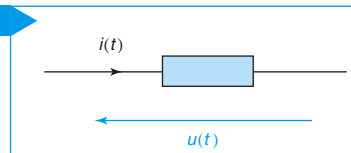
$\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi_u)$  est son amplitude complexe.

• Soit  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  l'intensité instantanée.

L'intensité en notation complexe se note  $\underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp(j\omega t);$

$\underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi_i)$  est son amplitude complexe.

Fig. 5



La loi d'ohm en représentation complexe s'écrit :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t), \text{ soit } \underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m.$$

- Cette relation définit  $\underline{Z}$ , l'amplitude complexe du dipôle  $\underline{Z} = R + jS$ , avec  $R$  la résistance du dipôle et  $S$  sa réactance, ces grandeurs s'expriment en Ohm ( $\Omega$ ).
- $Z = |\underline{Z}|$  est l'impédance ( $\Omega$ )

$$\underline{Z} = Z \exp(j\varphi); \text{ on a donc } \begin{cases} U_m = Z I_m \\ \varphi_u = \varphi + \varphi_i \end{cases}$$

$\varphi$  est donc l'avance de phase de la tension  $u(t)$  sur le courant  $i(t)$ .

L'inverse de l'impédance complexe est l'admittance complexe :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ .

$\underline{Y} = G + jB$ , avec  $G$  la conductance du dipôle et  $B$  sa susceptance, ces grandeurs s'expriment en Siemens (S).

$Y = |\underline{Y}|$  est l'admittance (S).

### 3.2. Résistor

$$u = Ri$$

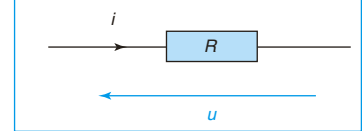
Cette relation linéaire est donc valable aussi pour les grandeurs complexes associées :

$$\underline{u} = R \underline{i} \Rightarrow \underline{U}_m = R \underline{I}_m,$$

$$\text{donc } \underline{Z} = R \begin{cases} U_m = R I_m \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}.$$

Fig. 6

Résistor en représentation récepteur



L'impédance complexe d'un résistor est  $\underline{Z} = R$ .

L'impédance d'un résistor est  $Z = |\underline{Z}| = R$ .

La tension aux bornes d'un résistor est en phase avec l'intensité qui le traverse ( $\varphi = 0$ ).

On retrouve la loi d'ohm en régime continu (chapitre 1) pour les amplitudes des signaux sinusoïdaux

### 3.3. Bobine idéale

$$u = L \frac{di}{dt}$$

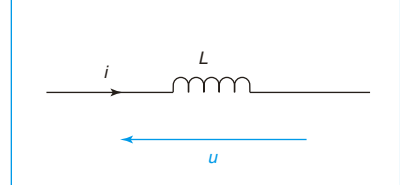
Cette relation linéaire est donc valable aussi pour les grandeurs complexes associées :

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} \Rightarrow \underline{U}_m = jL\omega \underline{I}_m,$$

$$\text{donc } \underline{Z} = jL\omega \Rightarrow \begin{cases} U_m = L\omega I_m \\ \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fig. 7

Bobine idéale en représentation récepteur



L'impédance complexe d'une bobine idéale est  $\underline{Z} = jL\omega$ .

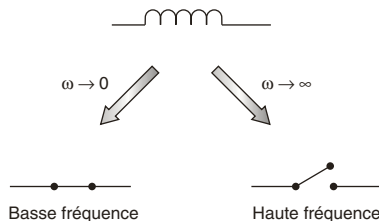
L'impédance d'une bobine idéale est  $Z = |\underline{Z}| = L\omega$ .

La tension aux bornes d'une bobine idéale est en avance de phase de  $\frac{\pi}{2}$  (quadrature avance) avec l'intensité qui la traverse.

- Cas limite haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ) :  
 $Z \rightarrow \infty$  : la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.
- Cas limite basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ) :  
 $Z \rightarrow 0$  : la bobine est équivalente à un interrupteur fermé, donc à un fil.

**Fig. 8**

*Équivalence à basses fréquences et à hautes fréquences d'une bobine idéale*



### 3.4. Condensateur idéal

$$i = C \frac{du}{dt}$$

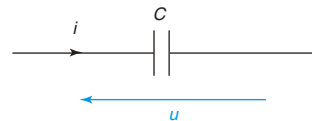
Cette relation linéaire est donc valable aussi pour les grandeurs complexes associées :

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} \Rightarrow \underline{I}_m = jC\omega \underline{U}_m,$$

$$\text{donc } \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \begin{cases} U_m = \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Fig. 9**

*Condensateur en convention récepteur*



L'impédance complexe d'un condensateur idéal est  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ .

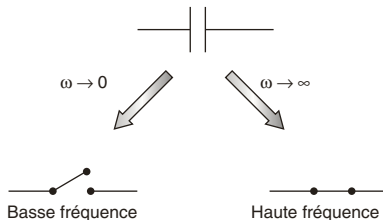
L'impédance d'un condensateur idéal est  $Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$ .

La tension aux bornes d'un condensateur est en retard de phase de  $\frac{\pi}{2}$  (quadrature retard) avec l'intensité qui le traverse.

- Cas limite haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ) :  
 $Z \rightarrow 0$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé, donc à un fil.
- Cas limite basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ) :  
 $Z \rightarrow \infty$  : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

**Fig. 10**

*Équivalence à basses fréquences et à hautes fréquences d'un condensateur*





## 4 Théorèmes généraux

L'ensemble des théorèmes vus aux chapitres 1 et 3 pour le régime continu demeurent valables en régime sinusoïdal forcé, en remplaçant les grandeurs continues (tensions et intensités) par leurs amplitudes complexes et les résistances par des impédances. Les conseils et remarques donnés dans ces chapitres peuvent être transposés à l'identique.

### 4.1. Loi des mailles

La loi des mailles vue au chapitre 1 est valable pour les tensions instantanées  $u(t)$ , puis-que l'on est dans le cadre de l'ARQS.

En notant  $u_k(t) = \underline{U}_k \exp(j\omega t)$  pour un sens de parcours donné de la maille, on a :

$$\sum_{\text{le long d'une maille}} \varepsilon_k u_k = 0 \Rightarrow \sum_{\text{le long d'une maille}} \varepsilon_k \underline{U}_k(t) = 0.$$

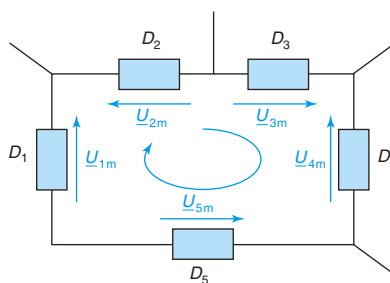
En divisant la relation précédente par  $\exp(j\omega t)$ , on obtient :

$$\text{Loi des mailles en ARQS : } \sum_{\text{le long d'une maille}} \varepsilon_k \underline{U}_{km} = 0.$$

- $\varepsilon_k = +1$  si la flèche tension pour l'amplitude complexe  $\underline{U}_k$  est dans le sens du parcours ;
- $\varepsilon_k = -1$  si la flèche tension  $\underline{U}_k$  est dans le sens opposé à celui du parcours.

Fig. 11

Loi des mailles pour cinq dipôles



Maille parcourue dans le sens horaire  

$$\underline{U}_{1m} - \underline{U}_{2m} + \underline{U}_{3m} - \underline{U}_{4m} - \underline{U}_{5m} = 0$$

### 4.2. Loi des nœuds

La loi des nœuds vue au chapitre 1 est valable pour les intensités instantanées  $i_k(t)$ , puis-que l'on est dans le cadre de l'ARQS.

En notant  $i_k(t) = \underline{I}_{km} \exp(j\omega t)$ , puisque la loi des nœuds est linéaire, on a :

$$\sum \varepsilon_k i_k = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon_k \underline{I}_{km}(t) = 0$$

En divisant la relation précédente par  $\exp(j\omega t)$ , on obtient :

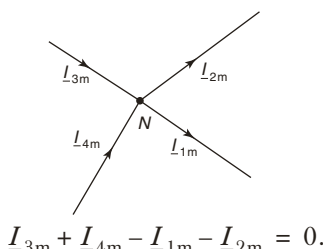
Loi des nœuds en ARQS :  $\sum \varepsilon_k \underline{I}_{km}(t) = 0$ .

- $\varepsilon_k = +1$ , si l'intensité est orientée vers le nœud ;
- $\varepsilon_k = -1$ , si l'intensité est orientée à partir du nœud.

La somme des amplitudes complexes des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des amplitudes complexes des courants qui en partent.

**Fig. 12**

*Loi des nœuds pour quatre branches*



**Attention.** La loi des nœuds ne peut pas être appliquée pour les amplitudes des intensités. En effet :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{km} = 0 \not\Rightarrow \sum_k \varepsilon_k |\underline{I}_{km}| = \sum_k \varepsilon_k I_{km} = 0.$$

En effet, le module d'une somme de nombres complexes n'est pas égal à la somme de leurs modules.

## 4.3. Loi des nœuds en termes de potentiel

Considérons  $L$  dipôles d'impédances ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_L$ ) ayant un nœud commun. Soient ( $\underline{I}_{1m}, \underline{I}_{2m}, \dots, \underline{I}_{Lm}$ ) les amplitudes complexes des intensités de courant circulant dans chacun des dipôles et orientés vers le point  $N$ .

Soit  $\underline{V}_{Nm}$  l'amplitude complexe du potentiel du nœud  $N$  et  $\underline{V}_{1m}, \underline{V}_{2m}, \dots, \underline{V}_{Lm}$  les amplitudes complexes des potentiels de l'autre borne du dipôle considéré.

La loi des nœuds s'exprime alors  $\underline{I}_{1m} + \underline{I}_{2m} + \dots + \underline{I}_{Lm} = 0$  et peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\underline{V}_{1m} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{2m} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{V}_{Lm} - \underline{V}_{Nm}}{\underline{Z}_L} = 0,$$

$$\text{ou } \underline{Y}_1(\underline{V}_{1m} - \underline{V}_{Nm}) + \underline{Y}_2(\underline{V}_{2m} - \underline{V}_{Nm}) + \dots + \underline{Y}_L(\underline{V}_{Lm} - \underline{V}_{Nm}) = 0.$$

*Remarques :*

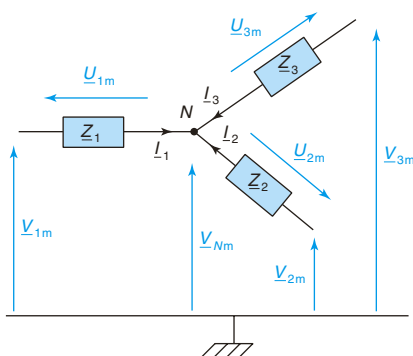
1. Le résultat ci-dessus est bien évidemment indépendant des sens d'orientation choisis pour les différentes intensités
2. En modifiant la position des termes, on arrive à l'expression du théorème de Millman :

$$\underline{V}_{Nm} = \frac{\frac{\underline{V}_{1m}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{2m}}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{V}_{Lm}}{\underline{Z}_L}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_L}} \quad \text{ou} \quad \underline{V}_{Nm} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_{1m} + \underline{Y}_2 \underline{V}_{2m} + \dots + \underline{Y}_L \underline{V}_{Lm}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_L}.$$

On peut remarquer que le potentiel du nœud  $N$  est le barycentre des potentiels des nœuds voisins affectés des admittances correspondantes.

Fig. 13

#### Théorème de Millman pour trois branches



$$\underline{V}_{Nm} = \frac{\frac{V_{1m}}{Z_1} + \frac{V_{2m}}{Z_2} + \frac{V_{3m}}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

$$\text{ou } \underline{V}_{Nm} = \frac{Y_1 V_{1m} + Y_2 V_{2m} + Y_3 V_{3m}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

## 4.4. Modélisation d'un dipôle actif

### 4.4.1. Source ou générateur idéal de tension

C'est un dipôle actif qui impose une tension  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$  entre ses bornes,  $e(t)$  est appelée force électromotrice (f.é.m.).

On note  $\underline{e}(t) = \underline{E}_m \exp(j\omega t)$  avec  $\underline{E}_m = E_m \exp(j\psi)$ .

En général, on choisit  $\psi = 0$ .

### 4.4.2. Source ou générateur idéal de courant

C'est un dipôle actif qui impose un courant d'intensité  $i_0(t) = I_{0m} \cos(\omega t + \phi)$ .

$i_0(t)$  est appelé courant électromoteur (c.é.m.), dans la branche dans laquelle il est placé.

On note  $\underline{i}_0(t) = \underline{I}_{0m} \exp(j\omega t)$  avec  $\underline{I}_{0m} = I_{0m} \exp(j\phi)$ .

En général on choisit  $\phi = 0$ .

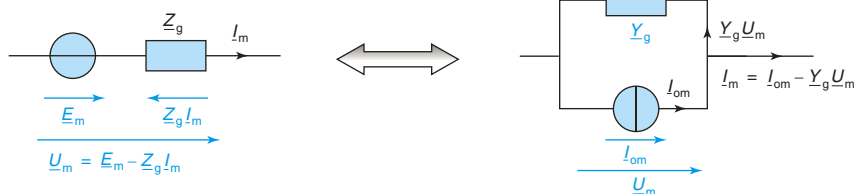
### 4.4.3. Modélisation d'un générateur réel

Dans de nombreuses applications, l'expérience montre qu'on peut modéliser un générateur réel par l'association :

- d'un générateur idéal de tension (f.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{E}_m$ ) et d'un dipôle en série dont l'impédance est appelée impédance interne du générateur ( $\underline{Z}_g$ ).
- ou d'un générateur idéal de courant (c.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{I}_{0m}$ ) et d'un dipôle en parallèle dont l'admittance est appelée admittance interne du générateur ( $\underline{Y}_g$ ).

Ces deux générateurs sont équivalents, les relations qui relient leurs caractéristiques sont établies ci-dessous, elles sont équivalentes à celles obtenues en régime permanent (chapitre 3, § 3).

Fig. 14





$$\underline{U}_m = \underline{E}_m - \underline{Z}_g \underline{I}_m \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} \quad \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_g} = \underline{I}_{om} - \underline{Y}_g \underline{U}_m \Rightarrow$$

$$\underline{I}_{om} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_g}$$

$$\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g}$$

## 5 Lois d'association

### 5.1. Association en série

#### 5.1.1. Loi d'association pour les impédances

$N$  dipôles d'impédances  $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N)$  associés en série sont équivalents à un seul dipôle d'impédance  $\underline{Z}_{eq}$  égale à la somme des impédances de chacun d'eux :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N$$

Fig. 15

Association série de trois dipôles

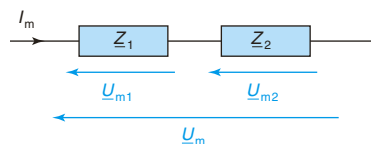


#### 5.1.2. Diviseur de tension

La figure ci-contre représente un diviseur de tension : deux dipôles en série sont soumis à une tension d'amplitude complexe  $\underline{U}_m$  et on cherche la tension aux bornes de l'un d'eux.

Fig. 16

Diviseur de tension



$$\underline{U}_{1m} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{U}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \underline{U}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{U}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

#### 5.1.3. Association de générateurs en série

On considère  $N$  générateurs associés en série, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs f.é.m. et impédances internes  $(\underline{E}_{1m}, \underline{Z}_{g1}), (\underline{E}_{2m}, \underline{Z}_{g2}), \dots, (\underline{E}_{Nm}, \underline{Z}_{gN})$ .

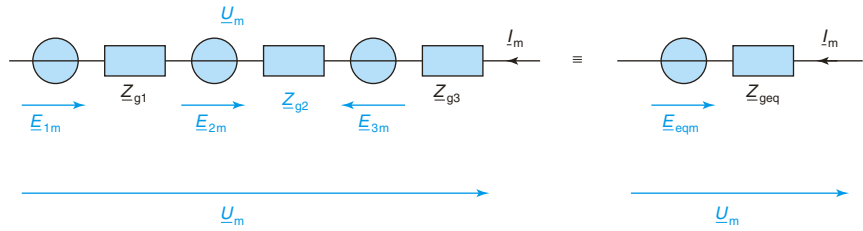
Ces  $N$  générateurs sont équivalents à un seul générateur de f.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{E}_{eqm}$  et d'impédance interne complexe  $\underline{Z}_{eq}$ .

$$\begin{cases} \underline{E}_{\text{eqm}} = \varepsilon_1 \underline{E}_{1m} + \varepsilon_2 \underline{E}_{2m} + \dots + \varepsilon_k \underline{E}_{km} + \dots + \varepsilon_N \underline{E}_{Nm} \\ \underline{Z}_{\text{geq}} = \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \dots + \underline{Z}_{gN} \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspondant à  $\underline{E}_{km}$  est dans le même sens que celle correspondant à  $\underline{E}_{\text{eqm}}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

Fig. 17

Association série de trois générateurs



$$\begin{cases} \underline{E}_{\text{eqm}} = \underline{E}_{1m} + \underline{E}_{2m} - \underline{E}_{3m} \\ \underline{Z}_{\text{geq}} = \underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \underline{Z}_{g3} \end{cases}$$

#### Remarque

Pour associer des générateurs en série, on utilise la représentation de Thévenin.

### 5.1.4. Loi de Pouillet

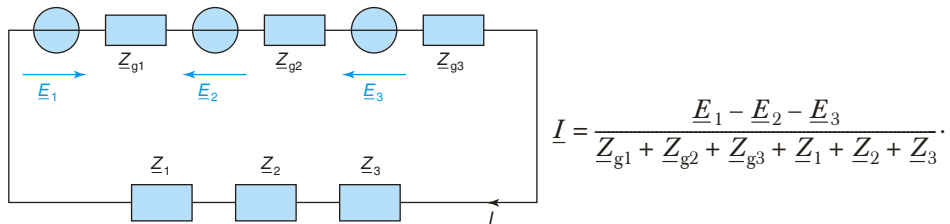
L'intensité circulant dans une maille constituée de  $N$  dipôles d'impédances  $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_N)$  et  $N$  générateurs associés en série, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs f.é.m. et impédances internes  $(\underline{E}_{1m}, \underline{Z}_{g1}), (\underline{E}_{2m}, \underline{Z}_{g2}), \dots, (\underline{E}_{Nm}, \underline{Z}_{gN})$  est :

$$\underline{I}_m = \frac{\varepsilon_1 \underline{E}_{1m} + \varepsilon_2 \underline{E}_{2m} + \dots + \varepsilon_k \underline{E}_{km} + \dots + \varepsilon_N \underline{E}_{Nm}}{\underline{Z}_{g1} + \underline{Z}_{g2} + \dots + \underline{Z}_{gN} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspondant à  $\underline{E}_k$  est dans le même sens que celle correspondant à l'orientation de  $\underline{I}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

Fig. 18

Loi de Pouillet pour trois générateurs et trois dipôles



### 5.2. Association parallèle

Des dipôles sont en parallèle (ou en dérivation) quand tous les dipôles ont leurs deux bornes en commun, ils sont soumis à la même tension.

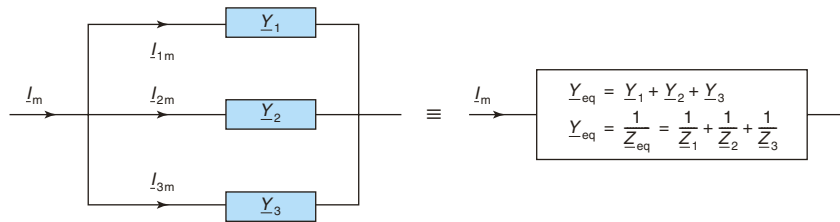
## 5.2.1. Loi d'association pour les admittances

$N$  dipôles d'admittance ( $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_N$ ) associés en parallèles sont équivalents à un seul dipôle d'admittance  $\underline{Y}_{eq}$  égale à la somme des admittances de chacun d'eux :

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N, \text{ soit } \underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Fig. 19

Association parallèle de trois dipôles

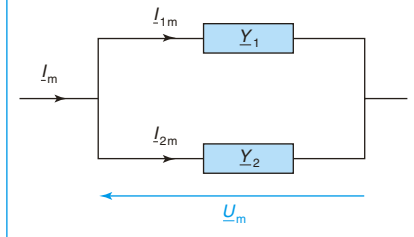


## 5.2.2. Diviseur de courant

La figure ci-contre représente un diviseur de courant : deux résistors en parallèle sont soumis à un courant d'amplitude complexe  $\underline{I}_m$  et on cherche l'intensité parcourant l'un d'entre eux :

Fig. 20

Diviseur de courant



$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_m \quad \text{et} \quad \underline{I}_{2m} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_m = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m$$

## 5.2.3. Association de générateurs en parallèle

On considère  $N$  générateurs associés en parallèle, caractérisés par l'amplitude complexe de leurs c.é.m. et admittances internes ( $\underline{I}_{0m1}, \underline{Y}_{g1}$ ), ( $\underline{I}_{0m2}, \underline{Y}_{g2}$ ), ..., ( $\underline{I}_{0mN}, \underline{Y}_{gN}$ ).

Ces  $N$  générateurs sont équivalents à un seul générateur de c.é.m. d'amplitude complexe  $\underline{I}_{eqm}$  et d'admittance interne  $\underline{Y}_{eq}$ .

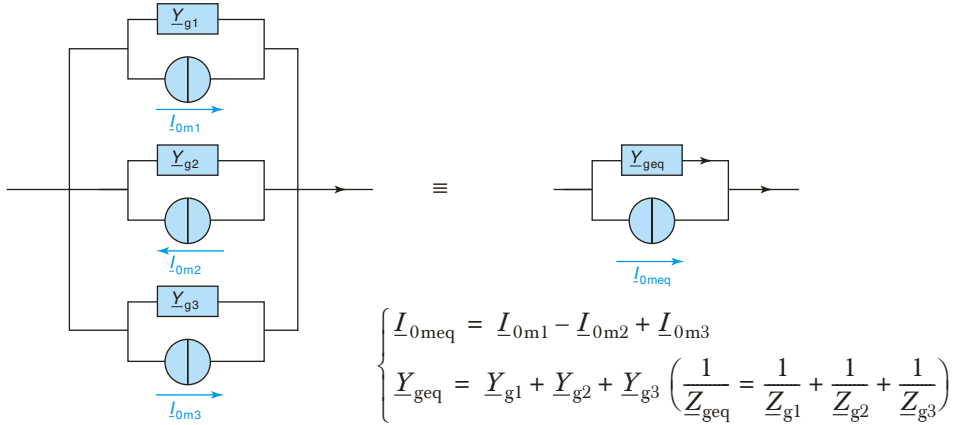
$$\begin{cases} \underline{I}_{eqm} = \varepsilon_1 \underline{I}_{0m1} + \varepsilon_2 \underline{I}_{0m2} + \dots + \varepsilon_k \underline{I}_{0mk} + \dots + \varepsilon_N \underline{I}_{0mN} \\ \underline{Y}_{geq} = \underline{Y}_{g1} + \underline{Y}_{g2} + \dots + \underline{Y}_{gN} \left( \frac{1}{\underline{Z}_{geq}} = \frac{1}{\underline{Z}_{g1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{g2}} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_{gN}} \right) \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche correspondant à  $\underline{I}_{0k}$  est dans le même sens que celle de  $\underline{I}_{0eq}$  et  $\varepsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

*Remarque* : les admittances s'associent comme au § 2.1.1.

Fig. 21

## Association parallèle de trois générateurs



## Remarque

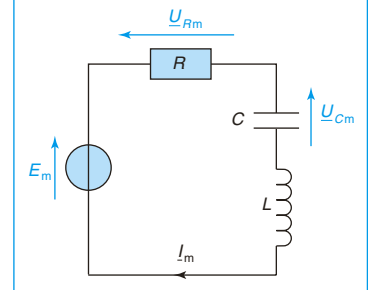
Pour associer des générateurs en parallèle, on utilise la représentation de Norton.

## 6 Étude d'un circuit RLC, résonances

Revenons à l'étude du circuit RLC (fig. 22), soumis à un générateur idéal de tension, de f.é.m.  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

Fig. 22

## Circuit RLC série



© Nathan, classe prépa

### 6.1. Résonance en intensité

Cherchons l'expression de  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . On utilise les amplitudes complexes :

$$\underline{E}_m = E_m \quad \text{et} \quad \underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi).$$

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad \text{et} \quad I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La courbe représentant  $I_m(\omega)$ , l'amplitude de l'intensité du courant, s'appelle courbe de résonance en intensité.

$I_m(0) = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_m = 0$ .  $I_m$  étant positif, cette courbe passe par un maximum pour une valeur de  $\omega$  que l'on appellera  $\omega_r$ , la pulsation de résonance.

Le numérateur étant indépendant de  $\omega$ ,  $I_m$  est maximum lorsque le dénominateur est minimum.

Remarque  
Cette pulsation de résonance  $\omega_0$  correspond à la pulsation propre étudiée au chapitre 4, de même que le facteur de qualité  $Q$ .

$$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ on obtient donc } \omega_r = \omega_0.$$

En utilisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$  et en notant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut écrire :

$$U_{Rm} = RI_m = \frac{E}{D} \text{ avec } D = \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$U_{Rm}$  est l'amplitude de la tension aux bornes du résistor  $R$ .

Il y a donc résonance d'intensité pour toute valeur de  $Q$  et la pulsation de résonance est indépendante de  $Q$ .

$$I_m(\omega_r) = I_{m\max} = \frac{E}{R}.$$

Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  définis par :

$$I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{avec } I_{m\max} = I\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{E}{R}.$$

On caractérise la résonance par la bande passante  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

$$I_m(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

$$R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \pm R = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

$$\omega^2 - \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0 \text{ a pour solution positive } \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

Les solutions négatives n'ont pas de sens physique.

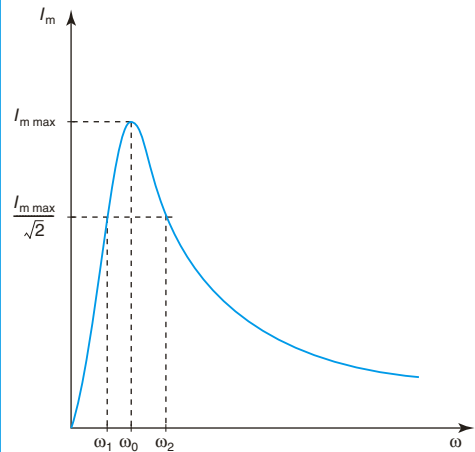
On remarque que  $\omega_2$  et  $\omega_1$  ne sont pas symétriques par rapport à  $\omega_0$ , ce que l'on peut remarquer sur la figure 23.

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ et } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q} \text{ (car } Q = \frac{L\omega_0}{R}\text{), on a donc :}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Fig. 23

Variation de l'amplitude de l'intensité avec la pulsation



### 6.1.1. Étude du déphasage

$$\varphi = \arg \underline{I}_m \Rightarrow \varphi = -\varphi', \text{ avec } \varphi' = \arg\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right).$$

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}; \text{ puisque } \tan(-\varphi) = -\tan \varphi, \text{ on a :}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

**Point maths.** Soit  $\underline{x} = a + jb$ ,  $a$  et  $b$  étant des grandeurs réelles. Alors on a :

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{\underline{x}}\right) = -\arg(\underline{x}).$$

La phase  $\varphi$  est donnée par sa tangente, il y a donc une indétermination sur le domaine de définition de la phase ; étudions le signe de  $\cos \varphi$ .

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (1)$$

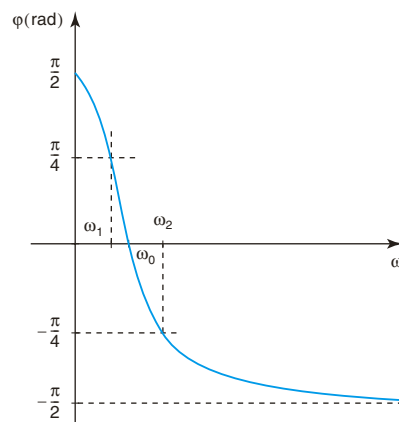
$$\operatorname{Re}(\underline{I}_m) = I_m \cos(\varphi) = \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} > 0, \text{ donc } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

*Remarque :* On peut aussi trouver directement l'expression de  $\tan \varphi$  à partir de l'expression (1) de  $\underline{I}_m$ .

$$\begin{aligned} \tan \varphi(0) &= +\infty \Rightarrow \varphi(0) = \frac{\pi}{2}; \\ \tan \varphi(\omega_1) &= 1 \Rightarrow \varphi(\omega_1) = \frac{\pi}{4}; \\ \tan \varphi(\omega_0) &= 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0; \\ \tan \varphi(\omega_2) &= -1 \Rightarrow \varphi(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}; \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan \varphi &= -\infty \Rightarrow \varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Fig. 24**

Variation de la phase de l'intensité avec la pulsation



### 6.1.2. Comparaison des courbes de résonance pour différentes valeurs de $Q$

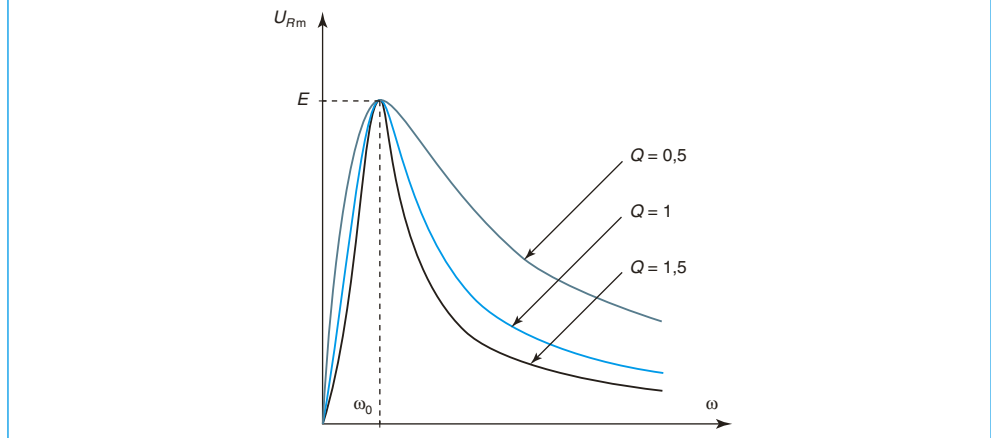
De la relation  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ , on peut déduire que le facteur de qualité  $Q$  caractérise la résonance :

- plus  $Q$  est important, plus  $\Delta\omega$  est petit : plus la résonance est dite « aigüe » ;
- plus  $Q$  est petit, plus  $\Delta\omega$  est grand : plus la résonance est dite « floue ».

On représente souvent  $U_{Rm}$  en fonction de  $\omega$  (fig. 25).

**Fig. 25**

Variation de l'amplitude de la tension aux bornes du résistor avec la pulsation pour  $Q = 0,5$  ; 1 et 1,5



On constate bien sur ce graphique que la pulsation de résonance, égale à  $\omega_0$ , est indépendante de  $Q$ .

## 6.2. Résonance en tension aux bornes du condensateur (ou résonance de charge)

Cherchons l'expression de  $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \phi)$ , soit :

$$\underline{U}_{cm} = U_{cm} \exp(j\phi).$$

L'application du diviseur de tension sur le circuit de la figure 22 conduit à :

$$\bullet \underline{U}_{cm} = \frac{\left(\frac{1}{jC\omega}\right)E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2};$$

$$\bullet U_{cm} = |\underline{U}_{cm}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}};$$

$$\bullet U_{cm}(0) = E \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_{cm}(\omega) = 0.$$

En utilisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , et en notant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut écrire :

$$U_{cm} = \frac{E}{D} \text{ avec } D = \sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}$$

$U_{cm}$  passe par un maximum si  $D$ , et donc  $D^2$ , passe par un minimum.

On doit calculer la dérivée de  $D$ . Il revient au même, et c'est plus simple, de dériver  $D^2$  :

$$\frac{dD^2}{dx} = 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}, \text{ d'où } \frac{dD^2}{dx} = 0 \text{ si } 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2}.$$

$$\text{On obtient donc } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (1)$$

Cette fonction croissante avec  $Q$  n'est définie que si  $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$ , donc si  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Attention

Le dénominateur n'est pas de la forme  $\sqrt{A^2 + B^2(x)}$  avec  $A$  constant, comme c'était le cas pour la résonance d'intensité car ici  $A = \frac{x}{Q}$  dépend de  $x$ . Il est donc inexact d'écrire que  $D$  est minimum si  $1 - x^2 = 0$ .

Conseil

Lorsqu'une fonction  $D$  se présente sous la forme d'une racine il est toujours préférable de dériver  $D^2$ .

Attention  
Les résonances d'intensité et de charge sont très différentes, il ne faut pas les confondre. Une erreur fréquente consiste par exemple à écrire qu'il y a résonance de charge pour  $\omega_r = \omega_0$ .

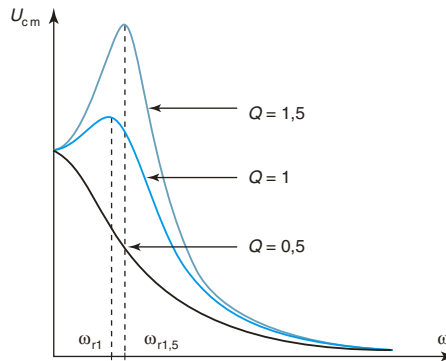
La courbe  $U_{cm}(\omega)$  passe donc par un maximum pour  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On parle de résonance de tension aux bornes du condensateur ou de résonance de charge car la charge du condensateur est proportionnelle à la tension.

Il y a deux différences importantes entre la résonance d'intensité et la résonance de charge : la résonance de charge n'existe que pour des valeurs de  $Q$  suffisamment grandes et quand elle existe, la pulsation de résonance dépend de  $Q$ .

Le calcul conduit à 
$$U_{cm}(\omega_r) = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (2)$$

**Fig. 26**

Variation de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation pour  $Q = 0,5$  ; 1 et 1,5.



On constate bien sûr sur ce graphe qu'il n'y a pas de résonance si  $Q = 0,5$  ( $Q < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ ) et que la pulsation de résonance est d'autant plus grande que  $Q$  est grand ( $\omega_{r1} < \omega_{r1,5}$ ).

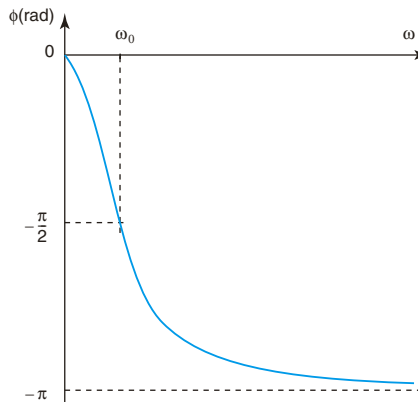
### 6.2.1. Étude du déphasage

$$\underline{U}_{cm} = \left( \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I}_{cm} \Rightarrow \phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

La courbe représentant  $\phi$  en fonction de  $\omega$  se déduit donc de la courbe représentant  $\varphi$  par un simple décalage vers le bas de  $-\frac{\pi}{2}$ , donc  $\phi \in [0 ; -\pi]$ .

**Fig. 27**

Variation de la phase de la tension aux bornes du condensateur avec la pulsation





## 6.2.2. Cas particulier important : $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'expression (1) conduit à  $\omega_r = \omega_0$ .

On peut aussi montrer que  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ ,  $\Delta\omega$  étant la bande passante définie comme au 6.1.

On retrouve donc des résultats similaires à ceux de la résonance d'intensité pour cette limite de valeurs de  $Q$  élevées.

Un autre résultat, propre à la résonance de charge est particulièrement intéressant : de l'expression (2) on arrive à  $U_{cm}(\omega_r) = QE$ . L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur est donc égale à l'amplitude de la tension délivrée par le générateur multipliée par  $Q$ . Elle peut donc atteindre des valeurs considérables pour des valeurs de  $Q$  élevées. On appelle d'ailleurs aussi  $Q$  « facteur de surtension » pour cette raison.

## 1 – Circuits $RC$ , $RL$ et $RLC$ série

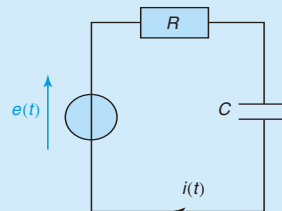
- 1 On étudie le circuit  $RC$  série ci-contre, soumis à un générateur idéal de tension, de f.é.m. :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t).$$

Le régime forcé est supposé établi. Établir l'expression de l'intensité du courant circulant dans ce circuit.

Données :  $E_m = 10 \text{ V}$  ;  $\omega = 63 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

$R = 1,0 \text{ k}\Omega$  ;  $C = 0,16 \text{ }\mu\text{F}$ .



- 2 Même question pour un circuit  $RL$ . On prendra les mêmes valeurs numériques avec  $L = 91 \text{ mH}$ .

- 3 Même question pour un circuit  $RLC$  série : calculer l'expression de  $i(t)$  avec les valeurs numériques données au 1. et au 2. Comment aurait-il été possible d'obtenir les résultats des questions 1. et 2. à partir de celui obtenu pour ce circuit  $RLC$  série ?

### résolution méthodique

- 1 On note  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Pour résoudre le problème, on utilise les grandeurs complexes associées à  $e(t)$  et à  $i(t)$  :

$$\underline{e}(t) = \underline{E}_m \exp(j\omega t) \text{ et } \underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp(j\omega t), \text{ avec } \underline{E}_m = E_m \text{ et } \underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi).$$

Pour étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé, il faut commencer par transformer les grandeurs réelles en grandeurs complexes associées.

Connaissant  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on obtient :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{X}_m = X_m \exp(j\varphi).$$

La loi de Pouillet nous donne alors directement :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R + \frac{1}{jC\omega}}.$$

Seules les grandeurs réelles ont un sens physique, les résultats sont donc fréquemment demandés sous forme réelle. Or les calculs sont menés avec les grandeurs complexes associées. Il faut donc, à la fin du calcul, faire le passage inverse à celui du départ : « projeter » les grandeurs complexes en grandeurs réelles. C'est une difficulté importante pour les élèves, surtout pour ce qui concerne la phase.

## Transformation d'une grandeur complexe en grandeur réelle

Connaissant  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$ , avec  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

- L'amplitude de  $X_m$  de  $x(t)$  est le module de l'amplitude complexe  $\underline{X}_m$ .
- La phase  $\varphi$  de  $x(t)$  est l'argument de  $\underline{X}_m$ .

$$I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\text{et } \varphi = \arg \underline{I}_m \Rightarrow \varphi = -\varphi' \text{ avec } \varphi' = \arg\left(R + \frac{j}{C\omega}\right) = \arg\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)$$

$$\tan \varphi' = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega}; \text{ et puisque } \tan(-\varphi) = -\tan \varphi, \text{ on a :}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega}$$

$$\text{On a donc } i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } \tan \varphi = \frac{1}{RC\omega}.$$

Vérifier l'homogénéité des expressions obtenues.

- $R$  et  $\frac{1}{C\omega}$  sont des impédances ;
- $[I_m] = \frac{[E_m]}{\sqrt{[Z]^2 + [Z]^2}} = \frac{[E_m]}{[Z]}$  ;
- $[\tan(\varphi)] = \frac{[Z]}{[Z]}$ .

L'amplitude de la tension est bien homogène à une tension et  $\tan \varphi$  est sans dimension.

$$\text{A.N. : } I_m = \frac{10}{\sqrt{(1,0 \cdot 10^3)^2 + \left(\frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6} \times 63 \cdot 10^2}\right)^2}} = 7,1 \text{ mA.}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{1,0 \cdot 10^3 \times 0,16 \cdot 10^{-6} \times 63 \cdot 10^2} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4}.$$

Pour connaître la bonne valeur de  $\varphi$ , évaluons  $\cos \varphi$  :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + \frac{j}{C\omega}} = \frac{E_m \left(R + \frac{j}{C\omega}\right)}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = I_m (\cos \varphi + j \sin \varphi);$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} > 0, \text{ donc } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc } i(t) \text{ (mA)} = 7,1 \cos\left(63 \cdot 10^2 t + \frac{\pi}{4}\right).$$

➤ **2** Avec les mêmes notations qu'au **1.**, la loi de Pouillet donne  $\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega}$ , donc :

$$I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{et } \varphi = \arg \underline{I}_m \Rightarrow \varphi = -\varphi' \text{ avec } \varphi' = \arg(R + jL\omega)$$

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega}{R}, \text{ puisque } \tan(-\varphi) = -\tan \varphi, \text{ on a :}$$

$$\tan \varphi = -\frac{L\omega}{R}$$

$$\text{On a donc } i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } \tan \varphi = -\frac{L\omega}{R}.$$

On vérifie l'homogénéité des expressions obtenues.

- $R$  et  $L\omega$  sont des impédances ;
- $[I_m] = \frac{[E_m]}{\sqrt{[Z]^2}} = \frac{[E_m]}{[Z]}$  ;
- $[\tan(\varphi)] = \frac{[Z]}{[Z]}$ .

L'amplitude de l'intensité est bien homogène à une intensité et  $\tan \varphi$  est sans dimension.

$$\text{A.N. : } I_m = \frac{10}{\sqrt{(1,0 \cdot 10^3)^2 + (0,091 \times 63 \cdot 10^2)^2}} = 8,7 \text{ mA}$$

$$\tan \varphi = -\frac{0,091 \times 63 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 10^3} = -0,57 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}.$$

Pour connaître la bonne valeur de  $\varphi$ , évaluons  $\cos \varphi$  :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega} = \frac{E_m(R - jL\omega)}{R^2 + (L\omega)^2} = I_m(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} > 0 \text{ donc } \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc } i(t) \text{ (mA)} = 8,7 \cos\left(63 \cdot 10^2 t - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. La loi de Pouillet donne  $\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$ .

En prenant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on obtient :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

A.N. :

$$I_m = \frac{10}{\sqrt{(1,0 \cdot 10^3)^2 + \left(0,091 \times 63 \cdot 10^2 - \frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6} \times 63 \cdot 10^2}\right)^2}} = 9,2 \text{ mA}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6} \times 63 \cdot 10^2} - 0,091 \times 63 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 10^3} = 0,42$$

$$\Rightarrow \varphi = 0,42 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad 3,6 \text{ rad.}$$

Pour connaître la bonne valeur de  $\varphi$ , évaluons  $\cos \varphi$  :

$$\text{Re}(\underline{I}_m) = I_m \cos(\varphi) = \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} > 0,$$

$$\text{donc } \varphi = 0,42 \text{ rad.}$$

Donc :

$$i(t) \text{ (mA)} = 9,2 \cos(63 \cdot 10^2 t + 0,42)$$

• Pour obtenir les résultats cherchés au 1. pour un circuit  $RC$ , il suffit de faire tendre  $L$  vers zéro dans ces expressions. En effet, l'impédance de la bobine qui vaut  $L\omega$  tend vers zéro si  $L$  tend vers zéro. Une bobine d'inductance nulle est donc équivalente à un interrupteur fermé. Un circuit  $RLC$  série pour lequel  $L$  est nul est donc équivalent à un circuit  $RC$ .

• Pour obtenir les résultats cherchés au 2. pour un circuit  $RL$ , il suffit de faire tendre  $C$  vers l'infini dans ces expressions. En effet, l'impédance du condensateur qui vaut  $\frac{1}{C\omega}$  tend vers zéro si  $C$  tend vers l'infini. Un condensateur de capacité infinie est donc équivalent à un interrupteur fermé. Un circuit  $RLC$  pour lequel  $C$  est infini est donc équivalent à un circuit  $RL$ .

**Attention :** Un condensateur de capacité nulle n'est pas équivalent à un interrupteur fermé, c'est une erreur assez fréquente.

## en conclusion

- Pour étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé, il faut commencer par transformer les grandeurs réelles en grandeurs complexes.

*Transformation d'une grandeur réelle en grandeur complexe associée*

Connaissant  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on obtient  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$

avec  $\underline{X}_m = X_m \exp(j\varphi)$ .

À la fin d'un calcul, on a souvent besoin d'un résultat « physique » et il faut faire la transformation inverse.

*Transformation d'une grandeur complexe en grandeur réelle*

- l'amplitude de  $x(t)$  de  $x(t)$  est le module de l'amplitude complexe  $\underline{X}_m$  ;
- la phase  $\varphi$  de  $x(t)$  est l'argument de  $\underline{X}_m$ .
- Vérifier l'homogénéité des expressions obtenues en repérant les grandeurs homogènes à des impédances et en utilisant le fait que  $RC$  et  $\frac{L}{R}$  sont homogènes à des temps (constantes de temps d'un circuit  $RC$  et d'un circuit  $RL$ ).

## 2 – Circuit $RLC$ parallèle

On considère un circuit composé de trois dipôles linéaires regroupés en parallèle : un résistor de résistance  $R$ , une bobine idéale d'inductance  $L$  et un condensateur idéal de capacité  $C$ . On suppose que le régime permanent est atteint.

- 1 Le circuit est alimenté par un générateur de courant idéal de c.é.m.  
 $i_0 = I_{0m} \cos(\omega t)$ .
  - a. Établir l'expression de la tension aux bornes du résistor, de la bobine et enfin du générateur.
  - b. Donner l'allure de la courbe représentant la variation de l'amplitude  $U_m$  de la tension aux bornes du résistor en fonction de  $\omega$ .  
 Pour quelle valeur de  $\omega$  est-elle maximale ?
  - c. Soit  $U_{\max}$  la valeur maximale de  $U_m$ . On note  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) les deux pulsations pour lesquelles l'amplitude de la tension aux bornes du résistor est égale à  $\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ .  
 Exprimer le facteur de qualité du circuit  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$  en fonction de  $R, L$  et  $\omega_0$ .  
 Cette expression correspond-elle à celle d'un circuit  $RLC$  série ? Commentaires.
- 2 Le circuit est alimenté par un générateur de tension idéal de f.é.m.  $e = E_m \cos(\omega t)$ . Établir l'expression de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité traversant le générateur et donner l'allure de la courbe  $I_m(\omega)$ .

## résolution méthodique

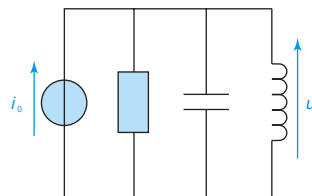
**1 a.** Le générateur, le résistor, le condensateur et la bobine étant en parallèle, la tension  $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  est la même aux bornes de chacun d'eux.

Soit  $\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi)$  et  $\underline{I}_{0m} = I_{0m}$ .

$$\bullet \underline{I}_{0m} = \underline{Y} \underline{U}_m, \text{ avec } \underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega;$$

$$\bullet \underline{U}_m = \frac{\underline{I}_{0m}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{\underline{I}_{0m} R j L \omega}{j L \omega + R - R L C \omega^2} = \frac{\underline{I}_{0m} R L \omega}{L \omega - j R (1 - L C \omega^2)};$$

$$\bullet U_m = |\underline{U}_m| = \frac{I_{0m} R L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2 (1 - L C \omega^2)^2}}.$$



### Vérification de l'homogénéité

$L C \omega^2 = \frac{L \omega}{\left(\frac{1}{C \omega}\right)}$  est le rapport entre l'impédance d'une bobine et celle d'un condensateur,

c'est donc une grandeur sans dimension ;

$$[U_m] = \frac{[I_{0m}][Z]^2}{\sqrt{[Z]^2}} = [I_{0m}][Z];$$

$$[\tan(\varphi)] = \frac{[Z]}{[Z]}.$$

**b.**  $U_m(0) = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} U_m = 0$

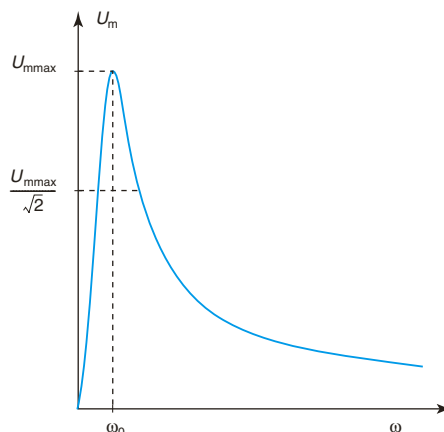
$U_m$ , qui est une grandeur positive, passe donc par un maximum. Cherchons pour quelle valeur de  $\omega$ .

L'expression de  $U_m$  obtenue au **1. a.** comporte le facteur  $\omega$  à la fois au numérateur et au dénominateur, ce qui rend l'étude de la recherche du maximum plus difficile que dans le cas étudié en cours pour le circuit  $RLC$  série. On peut facilement simplifier l'étude en divisant le numérateur et le dénominateur par  $\omega$ . On obtient :

$$U_m = |\underline{U}_m| = \frac{I_{0m} R L}{\sqrt{L^2 + R^2 \left(\frac{1}{\omega} - L C \omega\right)^2}}.$$

Cette fraction est maximale si le dénominateur est minimal, donc si :

$$\frac{1}{\omega} - L C \omega = 0, \text{ soit } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}.$$



- Quand on obtient une fonction comportant  $\omega$  à la fois au numérateur et au dénominateur, on essaye, lorsque c'est possible, de simplifier afin que seul le dénominateur dépende de  $\omega$ . Il est alors plus simple de chercher la valeur de  $\omega$  pour laquelle cette fonction est extrémale.
- Quand le dénominateur se présente sous la forme  $\sqrt{A^2 + B^2(\omega)}$  avec  $A$  constant, cette fonction est minimale quand  $B^2(\omega)$  est minimale. Assez souvent, pour obtenir le minimum, il suffit de chercher la valeur de  $\omega$  pour laquelle  $B(\omega)$  est nul. Si ce n'est pas possible, il faut dériver la fonction.

$$c. U_m(\omega_0) = U_{m\max} = RI_{0m}$$

$$U_m(\omega_1, \omega_2) = \frac{U_{m\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - LC\omega\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2L^2 = L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - LC\omega\right)^2 \Rightarrow \pm L = R\left(\frac{1}{\omega} - LC\omega\right)$$

$$\pm L\omega = R - RLC\omega^2 \Rightarrow RLC\omega^2 \pm L\omega - R = 0.$$

Les solutions positives (seules pertinentes) de ces deux équations sont :

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2RLC} = \frac{1}{2RC} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{L^2\omega_0^2}} \right)$$

$$\text{et } \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2RLC} = \frac{1}{2RC} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{L^2\omega_0^2}} \right).$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{R}{L\omega_0}}$$

**Vérification de l'homogénéité des relations de type :**

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2RLC} = \frac{1}{2RC} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{L^2\omega_0^2}} \right).$$

- le rapport  $\frac{4R^2}{L^2\omega_0^2}$  est bien sans dimension (rapport entre deux impédances au carré).

*Remarque :* On peut aussi vérifier l'homogénéité de cette dernière relation en remarquant que  $\frac{L}{R}$  est homogène à un temps, comme  $\frac{1}{\omega_0}$ . En effet, une pulsation est homogène à l'inverse d'un temps  $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ .

$$\bullet \left[ \frac{1}{C\omega} \right] = [R] \Rightarrow [\omega] = \left[ \frac{1}{2RC} \right].$$

*Remarque :* On peut aussi vérifier l'homogénéité de cette dernière relation directement en remarquant que  $RC$  est homogène à un temps.

On remarque que ce facteur de qualité est l'inverse de celui d'un circuit  $RLC$  série. En fait, dans les deux cas, un facteur de qualité infini correspond à un circuit non amorti, constitué uniquement d'une bobine idéale et d'un condensateur. En effet,



- pour un circuit série, cela correspond à  $R$  très petit,  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$  et donc  $\lim_{R \rightarrow 0} Q = \infty$  ;
- pour un circuit parallèle, cela correspond à  $R$  très grand,  $Q = \frac{R}{L\omega_0}$  et donc  $\lim_{R \rightarrow \infty} Q = \infty$ .

Attention : Le facteur de qualité pour un circuit comportant trois éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  n'est pas toujours égal à  $\frac{L\omega_0}{R}$  (voir chapitre 4 exercice 4 de « Savoir résoudre les exercices »,)

2 Soit  $i = I_m \cos(\omega t + \varphi')$  l'intensité du courant circulant dans le générateur.

Avec les notations du 1. b. et en notant  $\underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi')$  et  $\underline{E}_m = E_m$ , on a :

$$\underline{I}_m = \underline{Y} \underline{E}_m \text{ avec } \underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

$$\underline{I}_m = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right) \underline{E}_m = \frac{\underline{E}_m (jL\omega + R - RLC\omega^2)}{RjL\omega}$$

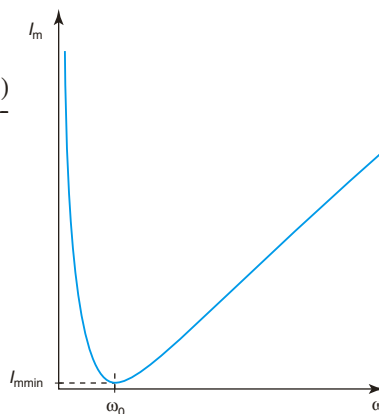
$$= \underline{E}_m \frac{L\omega - jR(1 - LC\omega^2)}{RL\omega}$$

$$I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E_m \sqrt{L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}{RL\omega}$$

$$I_m(0) = \infty \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_m = \infty$$

$$I_m = \frac{I_{0m}}{U} E_m, \text{ donc } I_m \text{ passe par un minimum :}$$

$$I_{m\min} = \frac{E_m}{R}, \text{ pour } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



© Nathan, classe prépa

## en conclusion

- Quand on obtient une fonction comportant  $\omega$  à la fois au numérateur et au dénominateur, on essaye, lorsque c'est possible, de simplifier afin que seul le dénominateur dépende de  $\omega$ . Il est plus simple alors de chercher la valeur de  $\omega$  pour laquelle cette fonction est extremum.
- Quand le dénominateur se présente sous la forme  $\sqrt{A^2 + B^2(\omega)}$  avec  $A$  constant, cette fonction est minimale quand  $B^2(\omega)$  est minimale. Assez souvent, pour obtenir le minimum, il suffit de chercher la valeur de  $\omega$  pour laquelle  $B(\omega)$  est nul. Si ce n'est pas possible, il faut dériver la fonction.
- Le facteur de qualité pour un circuit comportant trois éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  n'est pas toujours égal à  $\frac{L\omega_0}{R}$ .

# Puissance en régime sinusoïdal forcé

## 1 Puissance instantanée et puissance moyenne

### 1.1. Notations utilisées

Considérons un dipôle  $D$  linéaire représenté en convention récepteur (figure 1).

On note  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

et  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ .

$\underline{Z} = R + jS$ , où  $R$  est la résistance du dipôle et  $S$  sa réactance,  $\underline{Z} = Z \exp(j\varphi)$

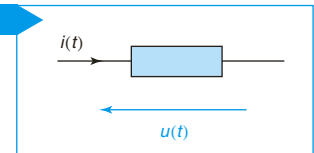
On peut écrire  $R$  et  $S$  en fonction de  $Z$  et  $\varphi$  :  $\begin{cases} R = Z \cos \varphi \\ S = Z \sin \varphi \end{cases}$

En utilisant la loi d'ohm en représentation complexe, on a :

$$\begin{cases} U_m = Z I_m \\ \varphi_u = \varphi + \varphi_i \end{cases}$$

$\varphi$  est l'avance de phase de la tension sur l'intensité (déphasage).

Fig. 1



### 1.2. Puissance instantanée

Le dipôle  $D$  reçoit la puissance instantanée  $p(t) = u(t) i(t)$  (convention récepteur).

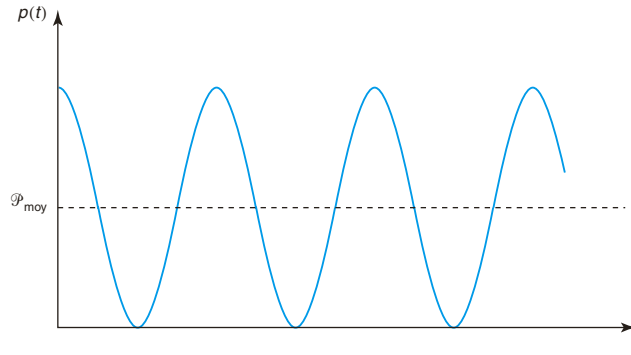
$$\begin{aligned} p(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)] \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi)] \end{aligned} \quad (1)$$

**Point maths.** On a utilisé la formule  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

Cette puissance varie au cours du temps (figure 2) de façon sinusoïdale (pulsation  $2\omega$ ) autour de la valeur  $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi)$ .

**Fig. 2**

Variation de la puissance instantanée  $p(t)$



### 1.3. Puissance moyenne – Facteur de puissance

On verra sur des exemples (exercice 2) que dans de nombreuses applications, la grandeur pertinente n'est pas la puissance instantanée, mais la puissance moyenne  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \langle p(t) \rangle = \frac{U_m I_m}{2} [\langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \rangle + \langle \cos(\varphi) \rangle].$$

La puissance moyenne s'écrit :  $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi)$ .

En effet, la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle (voir exercice 1 de « S'entraîner », chapitre 5) et celle d'un terme constant est évidemment égale à ce terme. Le terme  $\cos(\varphi)$  est appelé **facteur de puissance**.

*Remarque* : La puissance moyenne est aussi appelée puissance active.

### 1.4. Autre expression de la puissance moyenne, valeur efficace

Nous serons parfois amenés à utiliser une autre expression de  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ .

$$U_m = Z I_m \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = \frac{I_m^2}{2} Z \cos(\varphi). \text{ Or } Z \cos(\varphi) = R, \text{ donc :}$$

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{R I_m^2}{2}.$$

Seule la partie réelle  $R$  (la résistance) de l'impédance complexe intervient dans l'expression de la puissance moyenne reçue.

Attention

On ne peut pas directement utiliser les grandeurs complexes  $\underline{u}(t)$  et  $\underline{i}(t)$  pour calculer  $p(t)$ , il faut utiliser les grandeurs réelles  $u(t)$  et  $i(t)$ . Nous développerons cette remarque dans l'exercice 4 de « Tester ses connaissances ».

Cette expression rappelle celle de la puissance dissipée en régime continu par effet joule dans un résistor de résistance  $R$ , au facteur  $\frac{1}{2}$  près. Tout se passe en fait, du point de vue de la puissance moyenne reçue, comme si le dipôle était équivalent à un résistor de résistance  $R$ , le courant étant continu, de valeur  $I_e$  dite efficace. On a donc :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{RI_m^2}{2} = RI_e^2 \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

On retrouve ici la notion de valeur efficace développée au chapitre 5.

On a donc aussi  $U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ . On peut alors écrire :

Autre expression de la puissance moyenne :  $\mathcal{P}_{\text{moy}} = U_e I_e \cos(\varphi) = RI_e^2.$

Remarque :  $U_e = ZI_e \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{RU_e^2}{Z^2} = \frac{RU_e^2}{R^2 + S^2}.$

Cette relation n'est pas la même qu'en régime continu pour un résistor de résistance  $R$  ( $\mathcal{P} = \frac{U^2}{R}$ ).

## 1.5. Puissance moyenne reçue par les dipôles linéaires usuels

### 1.5.1. Résistors

Le déphasage entre la tension et l'intensité  $\varphi$  étant nul, on a :

$$\mathcal{P}_{\text{Rmoy}} = U_e I_e \cos(\varphi) = U_e I_e.$$

Puisque  $U_m = RI_m$ , on a aussi  $U_e = RI_e$  et donc :

$$\mathcal{P}_{\text{Rmoy}} = RI_e^2$$

Cette puissance est irréversiblement dissipée sous forme de transfert thermique (effet joule).

Remarque : pour arriver à l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{Rmoy}}$  on pouvait aussi directement utiliser la formule établie au § 1.4.

### 1.5.2. Bobines idéales et condensateurs idéaux

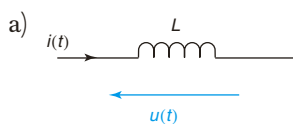
Le déphasage  $\varphi$  entre la tension et l'intensité pour une bobine et un condensateur étant respectivement  $+\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$ , on a :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = U_e I_e \cos(\varphi) = 0.$$

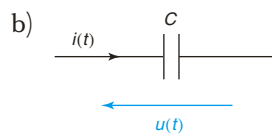
Ces dipôles ne reçoivent donc pas, en moyenne, de puissance : ils en reçoivent autant qu'ils en fournissent. Les bobines et condensateurs échangent réversiblement de l'énergie avec le reste du circuit (figure 3).

**Fig. 3**

Puissance moyenne reçue par une bobine idéale (a) et un condensateur idéal (b)



$$\mathcal{P}_{L\text{moy}} = \langle u(t)i(t) \rangle = 0$$



$$\mathcal{P}_{C\text{moy}} = \langle u(t)i(t) \rangle = 0$$

*Remarque :* pour arriver à l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  on pouvait aussi directement utiliser la formule établie au § 1.4. : la résistance d'une bobine idéale et d'un condensateur idéal est nulle.

PCSI

PTSI

## 2 Aspects énergétiques de l'étude du circuit RLC série

### 2.1. Bilan des puissances instantanées

Considérons un circuit RLC série (figure 4), soumis à un générateur idéal de tension, de f.é.m.  $e = E_m \cos(\omega t)$ .

La loi des mailles dans le sens anti-horaire donne :

$$u_L + u_C + u_R = e,$$

$$\text{soit } L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = e.$$

Pour établir un bilan de puissance, multiplions cette dernière relation par  $i$  :

$$i(t) \left( L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri \right) = ei.$$

En utilisant  $i = \frac{dq}{dt}$ , on obtient :

$$\frac{L}{2} \frac{di^2}{dt} + \frac{1}{2C} \frac{dq^2}{dt} + Ri^2 = ei, \text{ soit } \frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} \right) + Ri^2 = ei.$$

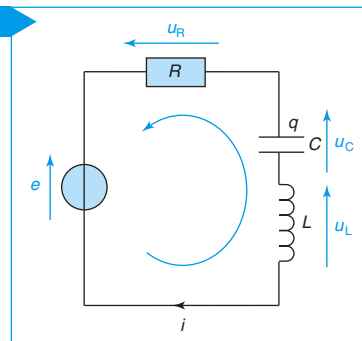
Le terme  $ei$  est la puissance  $p_g$  fournie par le générateur, elle est évidemment égale à la somme des puissances reçues par la bobine  $p_L$ , le condensateur  $p_C$  et le résistor  $p_R$  :

$$p_L + p_C + p_R = p_g.$$

On reconnaît dans cette expression l'énergie emmagasinée  $w_L$  par la bobine et l'énergie  $w_C$  emmagasinée par le condensateur :

$$\frac{d}{dt} w_L + \frac{d}{dt} w_C + p_R = p_g.$$

**Fig. 4**



© Nathan, classe prépa

**Conseil**  
On retiendra que pour établir un bilan de puissance d'un circuit série il suffit d'écrire la loi des mailles et la multiplier par l'intensité parcourant le circuit.

**Attention**  
 $p_g = ei$  est bien la puissance fournie et non pas reçue car le dipôle est en convention générateur.

## 2.2. Bilan des puissances moyennes

En faisant la valeur moyenne du bilan des puissances instantanées, on obtient :

$$\langle p_L \rangle + \langle p_C \rangle + \langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle.$$

Or nous avons vu que les puissances moyennes reçues par une bobine et un condensateur sont nulles, on a donc :  $\langle p_R \rangle = \langle p_g \rangle$ .

Les condensateurs et bobines ne participent donc pas au bilan de puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé.

## 2.3. Résonance en puissance

$\mathcal{P}_{\text{Rmoy}} = \langle p_R \rangle = RI_e^2$ ,  $I_e$  étant la valeur efficace de l'intensité  $i(t)$ .

Cherchons l'expression de  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ . On utilise les amplitudes complexes  $\underline{E}_m = E_m$  et  $\underline{I}_m = I_m \exp(j\phi)$ .

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}.$$

$$\text{Alors } I_m = |\underline{I}_m| \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}};$$

$$\text{et } I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \text{ donc } \mathcal{P}_{\text{Rmoy}} = RI_e^2 = R \frac{E_m^2}{2 \left( R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right)}.$$

En utilisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , on obtient l'expression :

$$\mathcal{P}_{\text{Rmoy}} = \frac{E_m^2}{2R \left( 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)}.$$

La courbe représentant  $\mathcal{P}_{\text{Rmoy}}(\omega)$  (figure 5) s'appelle courbe de résonance en puissance.

Cette courbe est liée à la courbe de résonance en intensité (voir chapitre 5, § 6.1), puisque  $\mathcal{P}_{\text{Rmoy}}$  est proportionnel au carré de l'amplitude de l'intensité de courant.

Les caractéristiques de la résonance de puissance sont les mêmes que celles de résonance en intensité : il y a toujours résonance, pour toute valeur de  $Q$ , pour  $\omega = \omega_0$ .

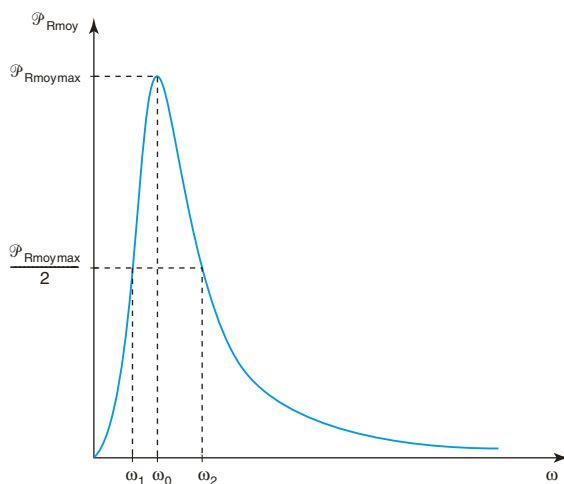
Soit  $\mathcal{P}_{\text{Rmoymax}} = \frac{E_m^2}{2R} = \mathcal{P}_{\text{Rmoy}}(\omega_0)$ . On définit la bande passante par  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ,

avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  tels que  $\mathcal{P}_{\text{Rmoy}}(\omega_1) = \mathcal{P}_{\text{Rmoy}}(\omega_2) = \frac{\mathcal{P}_{\text{Rmoymax}}}{2}$ .

Cela correspond aux relations  $I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{m\text{max}}}{\sqrt{2}}$  pour l'intensité. On retrouve donc la bande passante définie pour l'étude des résonances d'intensité et de charge.

Fig. 5

Résonance de puissance



## 1 – Relèvement du facteur de puissance

Soit un dipôle quelconque  $D$  d'impédance  $\underline{Z} = R + jS$  et consommant une puissance  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ . Ce dipôle est alimenté par le secteur EDF, modélisé par un générateur de tension idéal de f.é.m.  $e(t)$  de pulsation  $\omega$  et de valeur efficace  $E_e$ .

- 1 Donner l'expression de  $I_e$ .
- 2 Montrer que l'on doit choisir un facteur de puissance le plus grand possible pour limiter les pertes Joule dans le réseau électrique EDF alimentant le dipôle.
- 3 En fait, EDF impose que les installations électriques doivent présenter un facteur de puissance supérieur à 0,93. On doit donc parfois modifier le facteur de puissance d'un dipôle. On étudie ici la méthode consistant à placer en parallèle au dipôle un condensateur de capacité  $C$ . Établir en fonction de  $S$ ,  $|\underline{Z}|$  et  $\omega$  l'expression de la valeur de  $C$  qui permette d'obtenir un facteur de puissance égal à un.

### résolution méthodique

$$1 \quad \mathcal{P}_{\text{moy}} = U_e I_e \cos \varphi \Rightarrow I_e = \frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{U_e \cos \varphi}$$

Penser à utiliser la puissance moyenne reçue par un dipôle pour calculer l'intensité du courant qui le traverse.

- 2 Les pertes joules  $P_J$  dans les câbles du réseau électrique EDF proviennent de la résistance non nulle de ces câbles, que l'on appellera  $R_0$  :

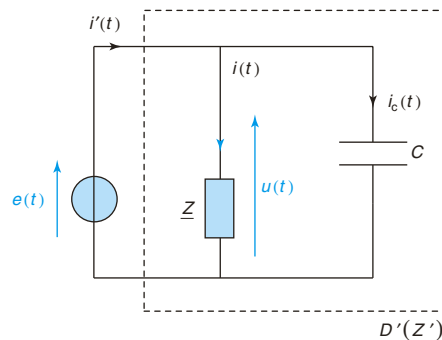
$$P_J = R_0 I_e^2 = R_0 \left( \frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{U_e \cos \varphi} \right)^2.$$

$P_J$  est d'autant plus grand, pour  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  donné, que  $\cos \varphi$  est grand.

- 3 On considère le dipôle  $D'$  constitué de l'ensemble  $\{D + \text{condensateur en parallèle}\}$ , d'impédance  $\underline{Z}'$  alimenté par le générateur de f.é.m.  $e(t)$ .

La puissance moyenne reçue par  $D'$  est la même que celle reçue par  $D$ . En effet le condensateur reçoit, en moyenne, une puissance nulle. En appelant  $I'_e$  l'intensité efficace de  $i'(t)$  et  $\varphi'$  le déphasage entre  $e(t)$  et  $i'(t)$ , on a la relation :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = U_e I'_e \cos \varphi'.$$





On cherche à obtenir un facteur de puissance égal à un, donc  $\varphi' = 0$ , or  $\varphi' = \arg(\underline{Z}') = 0 \Rightarrow \underline{Z}'$  réel.

Si  $\underline{Z}'$  est réel, alors  $\underline{Y}'$  l'est également.

- Un facteur de puissance égal à l'unité correspond à une impédance ou une admittance réelle (partie imaginaire nulle).
- Le montage étant en parallèle, il est plus simple de faire l'étude avec l'admittance.

$$\underline{Y}' = \frac{1}{(R + jS)} + jC\omega = \frac{R - jS}{R^2 + S^2} + jC\omega = \frac{R}{R^2 + S^2} + j\left(\frac{-S}{R^2 + S^2} + C\omega\right)$$

$$\underline{Y}' \text{ réel} \Rightarrow \frac{-S}{R^2 + S^2} + C\omega = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{S}{\omega(R^2 + S^2)} = \frac{S}{\omega Z^2} \text{ en appelant } Z = |\underline{Z}|.$$

*Remarque :* avec ou sans condensateur, le dipôle  $D$  est soumis à la même tension et il est parcouru par le même courant : le branchement en parallèle du condensateur n'altère en rien le fonctionnement de  $D$ .

Même si EDF ne le vérifie que rarement pour les particuliers, en revanche pour les installations industrielles EDF facture des « amendes » relativement importantes si le facteur de puissance est inférieur à 0,93.

## en conclusion

- Penser à utiliser la puissance moyenne reçue par un dipôle pour calculer l'intensité du courant qui le traverse.
- Un facteur de puissance égal à l'unité correspond à une impédance ou une admittance réelle (partie imaginaire nulle).
- Le montage étant en parallèle, il est plus simple de faire l'étude avec l'admittance.

## 2 – Adaptation d'impédance

Soit un générateur de tension sinusoïdal de force électromotrice instantanée  $E_e \sqrt{2} \cos \omega t$ , d'impédance complexe interne  $\underline{Z}_g = R_g + jS_g$  placé en série avec un réseau d'impédance complexe  $\underline{Z} = R + jS$ .

- 1 Déterminer l'impédance  $\underline{Z}_0$  du réseau pour laquelle le générateur lui fournit une puissance moyenne  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  maximale.
- 2 Pour cette question, on considère que l'impédance du réseau est  $\underline{Z}_0$ . Exprimer la puissance reçue par le réseau et la puissance  $\mathcal{P}_{R_g}$  dissipée par effet joule dans la résistance interne du générateur. En déduire le rendement du dispositif. Pour quelle valeur de  $R_g$  le rendement est-il maximal ?

## résolution méthodique

1 Soit  $u(t) = U_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\underline{U}_m \exp(j\omega t))$ ,

avec  $\underline{U}_m = U_e \sqrt{2} \exp(j\phi)$

et  $i(t) = I_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi) = \text{Re}(\underline{I}_m \exp(j\omega t))$ ,

avec  $\underline{I}_m = I_e \sqrt{2} \exp(j\psi)$

La puissance moyenne fournie au réseau est égale à celle reçue par le réseau,  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ .

En posant  $\varphi = \phi - \psi$ , on a  $\mathcal{P}_{\text{moy}} = U_e I_e \cos \varphi = R I_e^2$ .

(Essentiel du cours, § 1.4)

Il faut donc chercher  $I_e$ . Utilisons la loi de Pouillet afin de déterminer  $\underline{I}_m$  :

$$\underline{I}_m = \frac{E_e \sqrt{2}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}} = \frac{E_e \sqrt{2}}{(R_g + R) + j(S_g + S)}.$$

$$\text{Alors } I_e = \frac{|\underline{I}_m|}{\sqrt{2}} = \frac{E_e}{\sqrt{(R_g + R)^2 + (S_g + S)^2}}.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{P}_{\text{moy}} = R I_e^2 = \frac{R E_e^2}{(R_g + R)^2 + (S_g + S)^2}.$$

- Ne pas oublier que les résistances sont des grandeurs toujours positives alors que les réactances peuvent être négatives ou positives.
- Avant de dériver l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  repérer que le dénominateur est minimal pour  $S + S_g = 0$ .

Pour  $R$ ,  $R_g$  et  $S_g$  donné,  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  est maximal si  $S + S_g = 0$ , soit  $S = -S_g$ .

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = R I_e^2 = \frac{R E_e^2}{(R_g + R)^2} \text{ et } \frac{d\mathcal{P}_{\text{moy}}}{dR} = E_e^2 \frac{((R_g + R)^2 - 2R(R_g + R))}{(R_g + R)^2}.$$

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{moy}}}{dR} = 0 \text{ si } R_g + R - 2R = 0.$$

On a donc  $R = R_g$  et  $S = -S_g$ , soit :

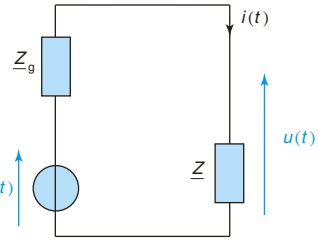
$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^* \text{ (grandeur conjuguée de } \underline{Z}_g \text{)}.$$

Cette condition correspond à ce que l'on appelle l'adaptation d'impédance.

2  $\mathcal{P}_{\text{moy}}(\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^*) = \frac{R E^2}{(2R)^2} = \frac{E^2}{4R}$

$$\mathcal{P}_{R_g}(\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^*) = R_g I_e^2 = \frac{R_g E^2}{(R_g + R)^2} = \frac{R E^2}{(2R)^2}$$

$$\mathcal{P}_{R_g} = \frac{E^2}{4R} = \mathcal{P}_{\text{moy}}(\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^*)$$



De façon générale le rendement  $\eta$  est le rapport entre ce que l'on récupère (ce qui nous « intéresse ») et ce que l'on fournit (ce que l'on « dépense »). Ici, il s'agit de transférer de l'énergie électrique du générateur au réseau électrique.

La puissance  $\mathcal{P}_e$  fournie par le générateur de f.é.m.  $\mathcal{e}(t)$  est égale à la somme des puissances reçues par le circuit électrique, soit  $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_{\text{moy}} + \mathcal{P}_{R_g}$ .

Le rendement s'écrit donc :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{\mathcal{P}_e} = \frac{1}{2} = 50 \%$$

Ce rendement est maximal, égal à un si  $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \mathcal{P}_e$ , donc si  $\mathcal{P}_{R_g} = 0$ .

La condition recherchée est donc

$$R_g = 0$$

La résistance de l'impédance complexe interne du générateur doit être nulle (mais bien entendu l'adaptation d'impédance, dans un tel cas ( $R_g = R = 0$ ), n'a plus d'intérêt).

## en conclusion

- Ne pas oublier que les résistances sont des grandeurs toujours positives alors que les réactances peuvent être négatives ou positives.
- Avant de dériver l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{moy}}$  pour chercher un extremum, repérer d'éventuelles relations simples permettant d'obtenir cet extremum.

# Transfert d'un système linéaire Filtres du premier ordre

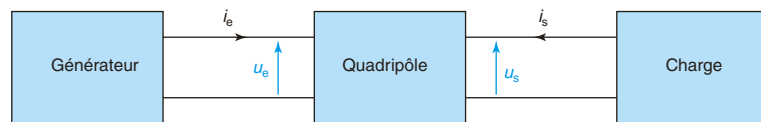
## 1 Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire Filtre

### 1.1. Quadripôle

Un quadripôle comporte quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie (figure 1).

Fig. 1

Tensions et intensités d'entrée et de sortie d'un quadripôle



### 1.2. Quadripôle linéaire

Soit  $u_e = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$  une tension sinusoïdale à l'entrée d'un quadripôle (pulsation  $\omega$ , fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ).

Le quadripôle est linéaire si, en régime forcé (appelé aussi régime harmonique), la tension de sortie est sinusoïdale :  $u_s = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ .

### 1.3. Théorème de superposition

Soit  $u_{e1}$  et  $u_{e2}$  deux tensions d'entrée. Soit  $u_{s1}$  et  $u_{s2}$  les tensions de sortie correspondantes. Alors la tension  $u_s = \lambda_1 u_{s1} + \lambda_2 u_{s2}$  est la tension de sortie correspondant à la tension d'entrée  $u_e = \lambda_1 u_{e1} + \lambda_2 u_{e2}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant des constantes.

## 1.4. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

### 1.4.1. Définition

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

### 1.4.2. Expression

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} = \frac{N_0 + j\omega N_1 + (j\omega)^2 N_2 + \dots + (j\omega)^m N_m}{D_0 + j\omega D_1 + (j\omega)^2 D_2 + \dots + (j\omega)^n D_n}.$$

Les coefficients sont réels et constants.

### 1.4.3. Ordre d'un quadripôle

L'ordre est celui du polynôme de plus haut degré,  $\underline{N}(j\omega)$  ou  $\underline{D}(j\omega)$ .

### 1.4.4. Module et argument

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

- $|\underline{H}(\omega)|$  est le module de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega)$  est la phase de la fonction de transfert.

### 1.4.5. Valeur maximale et phase de la tension de sortie

En notation complexe,  $\underline{u}_e = U_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)}$  et  $\underline{u}_s = U_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)}$ , d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \underline{H} \underline{u}_e \Rightarrow U_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)} = |\underline{H}| e^{j\varphi} U_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)}.$$

- Relations entre la tension d'entrée  $u_e = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$  et la tension de sortie  $u_s = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$  d'un quadripôle linéaire de fonction de transfert  $\underline{H} = |\underline{H}| e^{j\varphi(\omega)}$  :

$$U_{sm} = |\underline{H}| U_{em} \text{ et } \varphi_s = \varphi_e + \varphi.$$

### 1.4.6. Cas d'une tension d'entrée constante

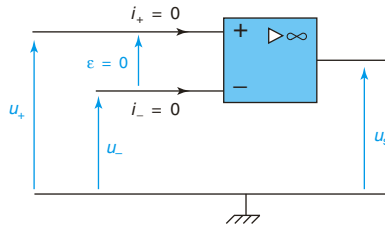
En régime permanent, la réponse  $U_s$  d'un quadripôle à une tension d'entrée constante  $U_e$  peut-être considérée comme celle d'une tension périodique de fréquence nulle (période infinie) :  $U_s = \underline{H}(\omega = 0) U_e$ .

## 1.5. Quadripôle passif, quadripôle actif

Un quadripôle est passif quand il ne comporte que des dipôles passifs comme  $R$ ,  $L$  ou  $C$ . Il est actif s'il contient en plus des sources d'énergie électrique. Dans la pratique il s'agit d'un ou de plusieurs amplificateurs opérationnels fonctionnant en régime linéaire, dont la description est donnée figure 2.

Fig. 2

## Amplificateur opérationnel (AO) en régime linéaire



- Le courant d'entrée inverseuse  $-$  est nul.
  - Le courant d'entrée non inverseuse  $+$  est nul.
  - La tension différentielle  $\epsilon$  est nulle.
- Remarque. L'alimentation en énergie électrique n'est pas représentée.

## 1.6. Filtre

Un filtre idéal est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est nulle dans un domaine de fréquences caractéristique.

Un filtre réel est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est atténuée dans un domaine de fréquences caractéristique.

## 2 Diagramme de Bode d'un filtre

## 2.1. Forme réduite de la fonction de transfert d'un filtre

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = |\underline{H}(x)|e^{j\varphi(x)}$$

- $x$  est la pulsation réduite, ou fréquence réduite, avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ .
- $\omega_0$  est la pulsation caractéristique du filtre,  $f_0$  est la fréquence caractéristique.

## 2.2. Diagramme de Bode d'un filtre

Le diagramme de Bode est la représentation de la fonction de transfert  $\underline{H}(jx)$  d'un filtre. Il est constitué de deux courbes :

- la courbe de réponse en gain, exprimé en décibels,  $G(x) = 20\log|\underline{H}(jx)|$  en fonction de  $\log(x)$  ;
- la courbe de réponse en phase  $\varphi(x)$  en fonction de  $\log(x)$ .

**Point maths.** L'expression «  $\log(x)$  » désigne le logarithme décimal de  $x$ .

On peut aussi tracer les courbes  $G(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega)|$  et  $\varphi(\omega)$  en fonction du logarithme décimal de la valeur numérique de  $\omega$ , noté  $\log(\omega)$ .

**Point maths. L'échelle logarithmique. Décade**

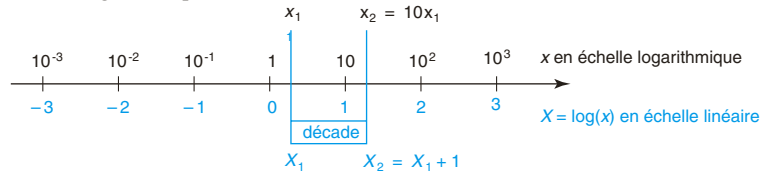
L'axe des abscisses de chacune des courbes  $G(x)$  et  $\varphi(x)$  est gradué en échelle logarithmique (figure 3). Les valeurs de  $x$  sont en général représentées par décades ( $\dots 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ ,  $1$ ,  $10^1$ ,  $10^2$ ,  $10^3 \dots$ ).

Une décade est l'intervalle de fréquence  $[f_1 ; f_2]$  tel que :  $\frac{f_2}{f_1} = 10$ .

Attention  
Le point d'abscisse  
 $x = 0$  n'apparaît pas  
sur le diagramme  
de Bode puisque  
 $\log(0) = -\infty$ .

Fig. 3

Principe de l'échelle logarithmique



## 2.3. Bande passante à -3 dB

La bande passante à -3 dB d'un filtre est la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle :

$$|\underline{H}| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad G \geq G_{\max} - 3 \text{ (dB)}.$$

## 2.4. Multiplication de la fonction de transfert par une constante

Soit  $\underline{T}(jx) = A_0 \underline{H}(jx) = A_0 |\underline{H}(x)| e^{j\varphi(x)} = |\underline{T}(x)| e^{j\theta(x)}$  avec  $A_0$  une constante réelle.

- $G(x) = 20 \log |\underline{T}(jx)| = 20 \log A_0 + 20 \log |\underline{H}(jx)|$ . La courbe de réponse en gain de la fonction de transfert  $\underline{T}(jx)$  se déduit de celle de la fonction de transfert  $\underline{H}(jx)$  par translation  $20 \log A_0$  le long de l'axe des gains.

- $\theta(x) = \varphi(x)$ . La courbe de réponse en phase de la fonction de transfert  $\underline{T}(jx)$  se confond avec celle de la fonction de transfert  $\underline{H}(jx)$ .

# 3 Filtre passe-bas du premier ordre

## 3.1. Fonction de transfert

Fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  et forme réduite  $\underline{H}(jx)$  de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{A_0}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad \text{et} \quad \underline{H}(jx) = A_0 \frac{1}{1 + jx}.$$

- $\omega_c$  est appelée pulsation de coupure et  $f_c$  fréquence de coupure.
- $A_0$  est une constante réelle.
- $x$  est la pulsation réduite avec  $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}$ .

Le terme en  $\frac{\omega}{\omega_c}$ , d'ordre 1, est celui dont l'ordre est le plus élevé d'où le nom de premier ordre donné au filtre.

L'étude menée au § 2.4 nous permet de travailler dans la suite avec la valeur  $A_0 = 1$  car la courbe de réponse en gain se déduit de celle de la fonction de transfert dans laquelle  $A_0 = 1$  par translation  $20 \log A_0$  le long de l'axe des gains et les courbes de réponse en phase sont identiques.

### 3.2. Comportements asymptotiques et expression à la fréquence de coupure

#### 3.2.1. Comportement asymptotique à basse fréquence (BF)

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx 1 \Rightarrow G_{BF} = 20\log(1) = 0 \\ \varphi_{BF} = 0 \end{cases}$$

**Point maths.** Pour déterminer le comportement asymptotique à basse fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence. Pour cela on ne conserve au dénominateur que le terme de plus bas degré en  $x$ , soit ici le terme 1 (degré nul).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence :  $G_{BF} = 0$  et  $\varphi_{BF} = 0$ .

#### 3.2.2. Expression à la fréquence de coupure ( $x = 1$ )

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3 \text{ dB} \\ \varphi_{(x=1)} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; -3 \text{ dB})$ .

La courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; -\frac{\pi}{4})$ .

#### 3.2.3. Comportement asymptotique à haute fréquence (HF)

$$x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx \frac{1}{jx} = \frac{1}{x}e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx \frac{1}{x} \Rightarrow G_{HF} = -20\log(x) \\ \varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Point maths.** Pour déterminer le comportement asymptotique à haute fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence en ne conservant que le terme de plus haut degré en  $x$ , soit ici le terme  $jx$ .

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence :  $G_{HF} = -20\log x$  et  $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$ .

### 3.3. Diagramme asymptotique de Bode

- La courbe asymptotique du gain (en traits noirs sur la figure 4a) est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 0$  et  $G_{HF} = -20\log x$  reliées au point  $(0 ; 0)$ .
- La courbe asymptotique de la phase (en traits noirs sur la figure 4b) est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = 0$  et  $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$  d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.

#### 3.4. Pente de l'asymptote haute fréquence

En posant  $X = \log(x)$ , il vient  $G_{HF} = -20X \Rightarrow \frac{dG_{HF}}{dX} = -20 \text{ dB/décade}$ . Le gain diminue de 20 dB quand la fréquence est multipliée par 10 ( $X$  augmente d'une unité) ; on dit que la pente de l'asymptote haute fréquence est égale à  $-20 \text{ dB par décade}$ .

Rappel

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



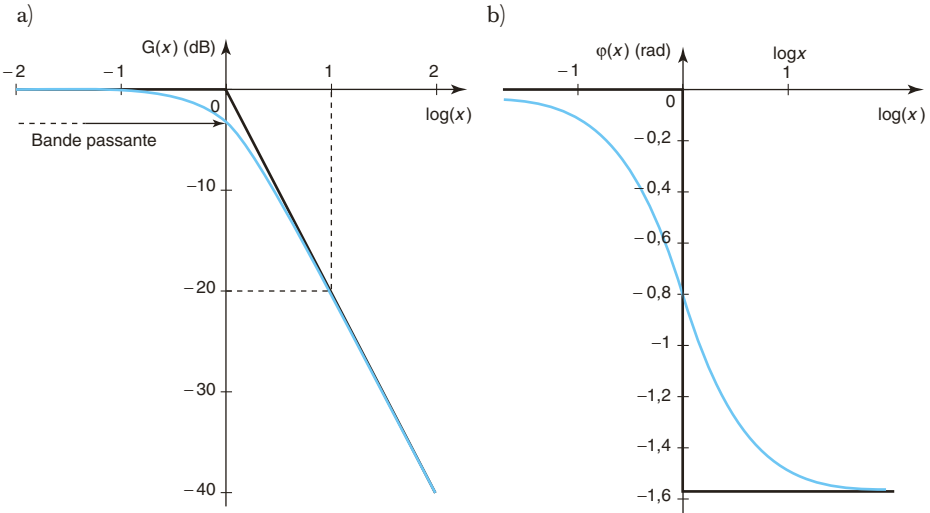
## 3.5. Diagramme de Bode

Les valeurs du gain et de la phase à basse et à haute fréquences et à la fréquence de coupure ( $x = 1$ ) suffisent pour donner l'allure du diagramme de Bode complet. Il peut être aussi tracé à l'aide d'un logiciel de calcul formel (traits en couleur sur la figure 4).

**Fig. 4**

Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$



a) Courbe du gain (en couleur) et courbe asymptotique du gain (en noir).

On a porté  $\log(x)$  en échelle linéaire des abscisses. Le gain est en décibels.

b) Courbe de la phase (en couleur) et courbe asymptotique de la phase (en noir).

On a porté  $\log(x)$  en échelle linéaire des abscisses. La phase est en radians.

### Conseil

Pour tracer l'asymptote haute fréquence du gain, il suffit de remarquer qu'elle passe par les points  $(0 ; 0)$  et  $(+1, -20 \text{ dB})$ .

Filtre passe-bas du premier ordre, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$

- La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 0$  et  $G_{HF} = -20 \log x$  reliées au point  $(0, 0)$ .
- La pente de l'asymptote haute fréquence du gain est égale à  $-20 \text{ dB}$  par décade.
- La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = 0$  et  $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.
- La phase est une fonction décroissante de  $0$  à  $-\frac{\pi}{2}$ .
- Le point  $\left(0 ; -\frac{\pi}{4}\right)$  est le centre de symétrie de la courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$ .

### 3.6. Bande passante à -3 dB

**Point méthode. Détermination de la bande passante à -3 dB d'un filtre**

a) Déterminer la valeur maximale  $|\underline{H}|_{\max}$  du module de la fonction de transfert.

b) Résoudre l'équation  $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$ . Selon le cas, on travaille avec la pulsation, la fréquence ou la fréquence réduite.

• **Autre méthode** : déterminer la valeur maximale  $G_{\max}$  du gain, puis résoudre l'équation  $G = G_{\max} - 3$ .

*Exemple du filtre passe-bas du premier ordre :*

• Détermination de la valeur maximale  $|\underline{H}|_{\max}$  du module de la fonction de transfert :

$$H_{\max} = H_{x=0} = 1.$$

• Résolution de l'équation :

$$|\underline{H}(jx)| = \left| \frac{1}{1+jx} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c.$$

La bande passante à -3 dB d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$  est :

$$\Delta f = [0 ; f_c].$$

© Nathan, classe prépa

## 4 Filtre passe-haut du premier ordre

### 4.1. Fonction de transfert

Fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  et forme réduite  $\underline{H}(jx)$  de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = A_0 \frac{j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}}; \quad \underline{H}(jx) = A_0 \frac{jx}{1 + jx}.$$

- $\omega_c$  est la pulsation de coupure et  $f_c$  est la fréquence de coupure.
- $A_0$  est une constante réelle.

Le terme en  $\frac{\omega}{\omega_c}$ , d'ordre 1, est celui dont l'ordre est le plus élevé d'où le nom de premier ordre donné au filtre. Nous travaillerons dans la suite avec la valeur  $A_0 = 1$ .

## 4.2. Comportements asymptotiques et expression à la fréquence de coupure

### 4.2.1. Comportement asymptotique à basse fréquence (BF)

$$f \ll f_c \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx jx = xe^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx x \Rightarrow G_{BF} = 20\log(x) \\ \varphi_{BF} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Rappel  
 $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ .

**Point maths.** On ne conserve que les termes de plus bas degré en  $x$ , au numérateur ( $jx$ ) et au dénominateur (1).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence :  $G_{BF} = 20\log(x)$  et  $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$ .

### 4.2.2. Expression à la fréquence de coupure ( $x = 1$ )

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = |\underline{H}(j)|e^{j\varphi(1)} = \frac{j}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = |\underline{H}(j)|e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(j)| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3 \text{ dB} \\ \varphi_{(x=1)} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; -3 \text{ dB})$ .
- La courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; \frac{\pi}{4})$ .

### 4.2.3. Comportement asymptotique à haute fréquence (HF)

$$f \gg f_c \Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 = |\underline{H}(jx)|e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx 1 \Rightarrow G_{HF} = 0 \\ \varphi_{HF} = 0 \end{cases}$$

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence :  $G_{HF} = 0$  et  $\varphi_{HF} = 0$ .

## 4.3. Diagramme asymptotique de Bode

- La courbe asymptotique du gain (en traits noirs sur la figure 5a) est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 20\log x$  et  $G_{HF} = 0$  reliées au point  $(0 ; 0)$  ;
- La courbe asymptotique de la phase (en traits noirs sur la figure 5b) est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi_{HF} = 0$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.

### 4.4. Pente de l'asymptote haute fréquence

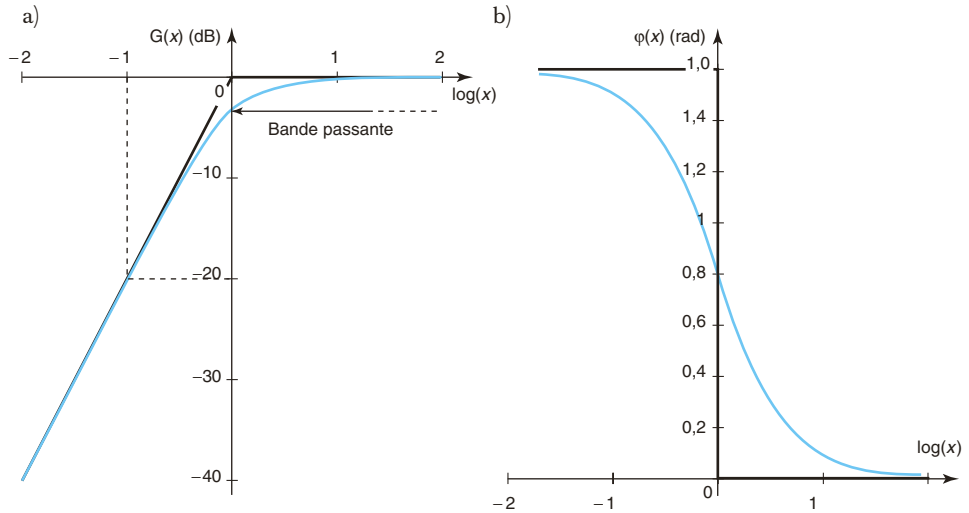
En posant  $X = \log(x)$ , il vient  $G_{HF} = 20X$ , d'où  $\frac{dG_{HF}}{dX} = 20 \text{ dB/décade}$ . Le gain augmente de 20 dB quand la fréquence est multipliée par 10 ( $X$  augmente d'une unité) ; la pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à +20 dB par décade.

## 4.5. Diagramme de Bode

Fig. 5

Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert  $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1+jx}$

**Conseil**  
Pour tracer l'asymptote basse fréquence du gain, il suffit de remarquer qu'elle passe par les points  $(0; 0)$  et  $(-1; -20 \text{ dB})$ .



- a) Courbe du gain (en couleur) et courbe asymptotique du gain (en noir).  
On a porté  $\log(x)$  en échelle linéaire des abscisses. Le gain est en décibels.
- b) Courbe de la phase (en couleur) et courbe asymptotique de la phase (en noir).  
On a porté  $\log(x)$  en échelle linéaire des abscisses. La phase est en radians.

Filtre passe-haut du premier ordre, de fonction de transfert  $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1+jx}$ .

- La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 20\log(x)$  et  $G_{HF} = 0$  reliées au point  $(0; 0)$ .
- La pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à  $+20 \text{ dB}$  par décade.
- La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi_{HF} = 0$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.
- La phase est une fonction décroissante de  $\frac{\pi}{2}$  à  $0$ .
- Le point  $(0; \frac{\pi}{4})$  est le centre de symétrie de la courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$ .

*Remarque :*

$$[\underline{H}(jx)]_{\text{passe haut}} = \frac{jx}{1+jx} = jx \frac{1}{1+jx} = xe^{j\frac{\pi}{2}} [\underline{H}(jx)]_{\text{passe bas}} \Rightarrow [\varphi(x)]_{\text{passe haut}} = \frac{\pi}{2} + [\varphi(x)]_{\text{passe bas}}$$

La courbe de réponse en phase du filtre passe-haut se déduit de celle du filtre passe-bas par translation positive de  $\frac{\pi}{2}$  le long de l'axe des phases.

## 4.6. Bande passante à -3 dB

### Application de la méthode donnée au § 3.6

- Détermination de la valeur maximale  $|\underline{H}|_{\max}$  du module de la fonction de transfert :  $H_{\max} = H_{x \rightarrow \infty} = 1$ .
- Résolution de l'équation :  $|\underline{H}(jx)| = \left| \frac{jx}{1+jx} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c$ .

La bande passante à -3 dB d'un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$  est  $\Delta f = [f_c ; \infty[$ .

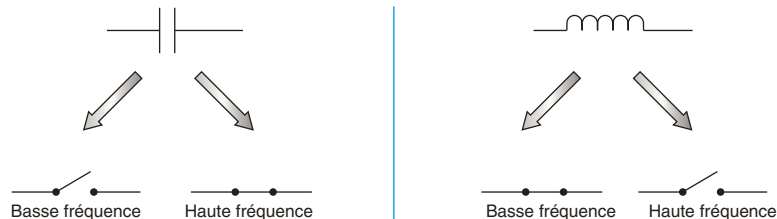


## 5 Prédiction des comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences d'un filtre

Les comportements à basse et à haute fréquences des condensateurs et des bobines idéales (figure 6) permettent de prévoir avant tout calcul les comportements asymptotiques d'un filtre.

Fig. 6

Comportements à basse et à haute fréquences d'un condensateur et d'une bobine



### Point méthode. Comportements asymptotiques d'un filtre

- Faire le schéma équivalent du filtre à basse fréquence en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines idéales par des interrupteurs fermés, et déterminer la tension de sortie.
- Faire le schéma équivalent du filtre à haute fréquence en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs fermés et les bobines idéales par des interrupteurs ouverts, et déterminer la tension de sortie.
- En déduire si le filtre est passe-bas ou passe-haut :
  - c'est un filtre passe-bas si la tension de sortie s'annule seulement à haute fréquence ;
  - c'est un filtre passe-haut si la tension de sortie s'annule seulement à basse fréquence.

### Remarques :

Un filtre dont la tension de sortie s'annule à basse fréquence et à haute fréquence est un filtre passe-bande. Il sera étudié au prochain chapitre.

La tension de sortie de certains quadripôles ne s'annule ni à basse fréquence ni à haute fréquence. Des exemples seront présentés en exercices.

## 6 Équation différentielle d'un système du premier ordre – Stabilité

### 6.1. Équation différentielle déduite de la fonction de transfert

On peut déduire l'équation différentielle d'un système du premier ordre en remplaçant chaque terme  $j\omega$  par l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  dans la fonction de transfert.

La forme générale de la fonction de transfert d'un filtre du premier ordre s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{N_0 + j\omega N_1}{D_0 + j\omega D_1},$$

d'où l'équation différentielle :

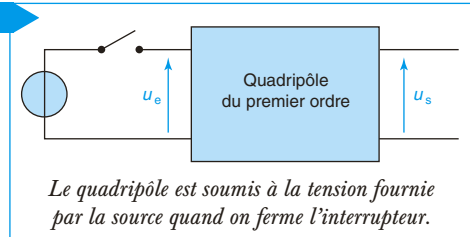
$$D_1 \frac{du_s}{dt} + D_0 u_s = N_1 \frac{du_e}{dt} + N_0 u_e$$

### 6.2. Stabilité du système

Un système est stable lorsque sa réponse à une excitation est bornée, c'est-à-dire qu'elle ne tend pas vers l'infini quand le temps tend vers l'infini.

Analysons la réponse d'un quadripôle du premier ordre (figure 7).

Fig. 7



#### 6.2.1. Régime libre (interrupteur ouvert)

C'est la solution  $u_{sL}$  de l'équation différentielle  $D_1 \frac{du_{sL}}{dt} + D_0 u_{sL} = 0$ .

Elle est de la forme  $u_{sL} = K e^{-\frac{D_1}{D_0} t}$ , avec  $K$  constante *a priori* non nulle. Cette solution converge vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini si  $\frac{D_1}{D_0} > 0$  ; elle n'est pas bornée si  $\frac{D_1}{D_0} < 0$  (elle tend alors vers l'infini). Il faut donc que les coefficients  $D_0$  et  $D_1$  soient du même signe pour que le système soit stable vis-à-vis de la réponse libre.

Sachant que  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , la fonction de transfert s'écrit aussi sous la forme  $\underline{H}(jx) = \frac{N'_0 + N'_1 jx}{D'_0 + D'_1 jx}$ .

Il faut que les coefficients  $D'_0$  et  $D'_1$  soient du même signe pour que le système soit stable.

Un système du premier ordre est stable en régime libre si les coefficients  $D_0$  et  $D_1$  (respectivement  $D'_0$  et  $D'_1$ ) du dénominateur de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N_0 + j\omega N_1}{D_0 + j\omega D_1} \text{ (respectivement } \underline{H}(jx) = \frac{N'_0 + N'_1 jx}{D'_0 + D'_1 jx} \text{)} \text{ sont du même signe.}$$

## 6.2.2. Régime forcé sinusoïdal (interrupteur fermé)

Les amplitudes  $U_{em}$  et  $U_{sm}$  des tensions d'entrée et de sortie sont liées par la relation (voir § 1.3.5) :  $U_{sm} = |\underline{H}(j\omega)|U_{em}$ . L'amplitude de sortie est bornée (non infinie) si le module de la fonction de transfert est borné quelle que soit la fréquence.

Un système du premier ordre est stable en régime forcé si le module de la fonction de transfert est borné quelle que soit la fréquence.

Pour faire l'étude d'un quadripôle nous supposons *a priori* qu'il est stable. Les signes des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert montreront s'il en est bien ainsi. En cas d'instabilité, la réponse du système ne peut pas être sinusoïdale ; le quadripôle n'est pas linéaire.

PCSI

## 7 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

### 7.1. Caractère intégrateur à haute fréquence d'un filtre passe-bas du premier ordre

À haute fréquence ( $\frac{f}{f_c} = \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ ), la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$  d'un filtre passe-bas du premier ordre se simplifie en :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} \approx \frac{A_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow j\frac{\omega}{\omega_c} u_s = A_0 u_e.$$

On en déduit l'équation différentielle :  $\frac{du_s}{dt} = \omega_c A_0 u_e$ .

La tension de sortie est donc de la forme  $u_s = A_0 \omega_c \int u_e dt$ .

Un filtre passe-bas du premier ordre a un caractère intégrateur à haute fréquence.

### 7.2. Caractère dérivateur à basse fréquence d'un filtre passe-haut du premier ordre

À basse fréquence ( $\frac{f}{f_c} = \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$ ), la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = A_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

d'un filtre passe-haut du premier ordre se simplifie en :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = A_0 j \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow \underline{u}_s = A_0 j \frac{\omega}{\omega_c} \underline{u}_e.$$

On en déduit l'équation différentielle :  $u_s = \frac{A_0}{\omega_c} \frac{du_e}{dt}$ .

▶ Un filtre passe-haut du premier ordre a un caractère dérivateur à basse fréquence.



## 1 – Filtre passif passe-bas

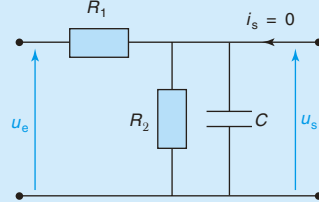
On considère le filtre de la figure suivante. On donne  $C = 1,0 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $R_2 = 3,0 \text{ k}\Omega$ .

➤ 1 Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

➤ 2 Exprimer la fonction de transfert sous la forme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau}$ . Exprimer la constante  $A_0$  et la constante de temps  $\tau$ .

➤ 3 Calculer la durée  $\tau$ , la fréquence de coupure  $f_c$ , et le gain maximal  $G_{\text{max}}$ .

➤ 4 À l'entrée du filtre, on injecte la tension sinusoïdale  $u_e(t) = U_{\text{em}} \cos(2\pi ft)$  d'amplitude  $U_{\text{em}} = 10 \text{ V}$  et de fréquence  $f = \frac{f_c}{10}$ . Déterminer la tension  $u_s(t)$  de sortie.



### résolution méthodique

➤ 1 Appliquons la méthode du cours.

- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (figure a). Les deux résistors sont traversés par le même courant ; ils sont en série. La branche  $R_1$ ,

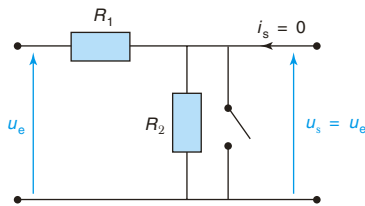
$R_2$  réalise un diviseur de tension :  $\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \neq 0$ .

- À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé (figure b) donc  $u_s = 0$ .

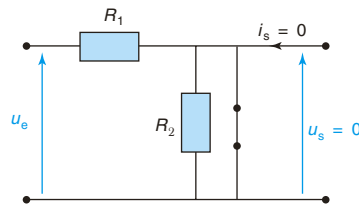
La tension de sortie est nulle seulement à haute fréquence ; le filtre est un **filtre passe-bas**.

L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.

a) Basse fréquence

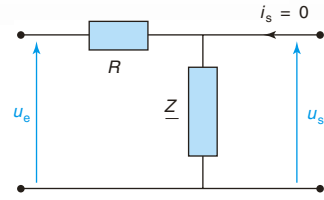


b) Haute fréquence



➤ 2 Soit  $\underline{Z}$  l'impédance de l'association du condensateur et du résistor de résistance  $R_2$ , et  $\underline{Y}$  son admittance.

Le courant de sortie est nul. Le résistor et le dipôle  $\underline{Z}$  sont traversés par le même courant ; ils sont en série. Le circuit (figure ci-contre) réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer facilement la fonction de transfert :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}}$$

$$= \frac{1}{1 + R_1 \left[ \frac{1}{R_2} + jC\omega \right]} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{1 + j \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} C\omega} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

Par identification, on obtient :  $A_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  et  $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$

La fonction de transfert est bien celle d'un filtre passe-bas, en accord avec la détermination rapide de la première question.

Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.

### 3

$$\tau = 0,75 \text{ ms} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 0,21 \text{ kHz}$$

$$|\underline{H}|_{\max} = A_0 \Rightarrow G_{\max} = 20\log(A_0)$$

$$G_{\max} = -2,5 \text{ dB}$$

### 4

Avec les données on a :  $\omega\tau = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c} = \frac{1}{10}$ .

Travaillons en notation complexe pour déterminer la tension de sortie.

• Tension d'entrée en notation complexe :

$$u_e = E_m \cos(2\pi f t) \Rightarrow \underline{u}_e = E_m e^{j2\pi f t}$$

• Tension de sortie en notation complexe à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \underline{H}(j\omega) \underline{u}_e = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} \underline{u}_e = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} e^{j\alpha}} U_{em} e^{j2\pi f t}$$

$$u_s = \frac{A_0 U_{em}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} e^{j(2\pi f t - \alpha)} \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = \omega\tau.$$

- Tension de sortie réelle en prenant la partie réelle de son expression complexe :

$$u_s = \frac{A_0 U_{em}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(2\pi f t - \alpha) = \frac{0,75 \cdot 10}{\sqrt{1 + 10^{-2}}} \cos(2\pi f t - \alpha) \approx 7,5 \cos(2\pi f t - \alpha)$$

$$\tan \alpha = 0,10 \Rightarrow \alpha \approx 0,10 \text{ rad.}$$

Finalement :

$$u_s(t) = 7,5 \cos(1,3 \cdot 10^2 t - 0,10) \text{ (V)}$$

## en conclusion

- L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.
- Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.
- Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

## 2 – Filtre actif passe-haut. Bilan de puissance

On considère le filtre ci-contre. Le dipôle placé en sortie est un résistor de résistance  $R_c$ .

Données :  $C = 0,10 \mu\text{F}$ ,  $R = 5,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_c = 0,50 \text{ k}\Omega$ .

- 1 Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

- 2 Calculer la constante de temps  $\tau$  du circuit  $RC$ .

- 3 Soit  $x$  la pulsation réduite avec

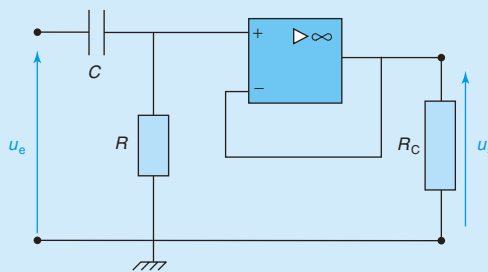
$$x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c} = RC\omega.$$

Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite  $\underline{H}(jx)$ . Dépend-elle de la résistance de charge  $R_c$  ?

- 4 Quels sont la nature et l'ordre du filtre ? Calculer la fréquence de coupure  $f_c$ .

- 5 On place en entrée un générateur idéal de tension  $u_e(t) = E_m \cos(2\pi f t)$  avec  $E_m = 2,0 \text{ V}$  et de fréquence  $f = \frac{f_c}{2}$ . Déterminer la tension  $u_s(t)$  et l'intensité  $i_s(t)$  de sortie.

- 6 Calculer la puissance moyenne  $\mathcal{P}_c$  reçue par la charge ? Quelle est la puissance moyenne  $\mathcal{P}_+$  reçue à l'entrée de l'AO ? Que doit-on en conclure ?



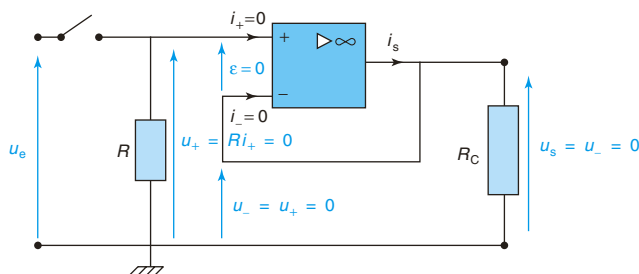
7 Dans la pratique, l'amplitude de l'intensité du courant de sortie est limitée à  $I_{\text{smax}} = 20 \text{ mA}$  et l'amplitude de la tension de sortie est limitée à  $U_{\text{smax}} = 13 \text{ V}$  par un système électronique interne à l'AO. Déterminer :

- la valeur maximale  $U_{e \text{ max}}$  de l'amplitude de la tension d'entrée ;
- la valeur  $R'_c$  de la résistance de charge quand les amplitudes de la tension et de l'intensité sont maximales ;
- la valeur maximale  $\mathcal{P}_{c \text{ max}}$  de la puissance moyenne de sortie de l'AO.

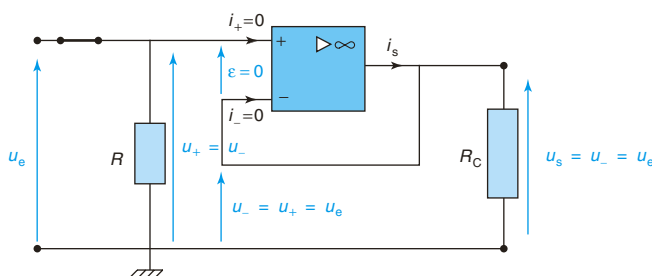
## résolution méthodique

1 Appliquons la méthode du cours.

- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Il n'y a pas de courant dans le résistor  $R$ . L'analyse de la figure 1 conduit à  $u_s = 0$ .



- À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé. L'analyse de la figure 2 conduit à  $u_s = u_e$ .



La tension de sortie est nulle seulement à basse fréquence ; le filtre est un filtre passe-haut.

2  $\tau = RC = 0,50 \text{ ms}$

- 3 Analysons la figure 3. Le courant d'entrée + est nul ( $i_+ = 0$ ).  
En conséquence, le condensateur  $C$  et le résistor  $R$  sont en série. Le circuit réalise un diviseur de tension :

$$\frac{u_+}{u_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jx}{1 + jx} \text{ et}$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \underbrace{\frac{u_s}{u_-}}_{=1} \underbrace{\frac{u_-}{u_+}}_{=1} \frac{u_+}{u_e} = \frac{jx}{1 + jx}.$$

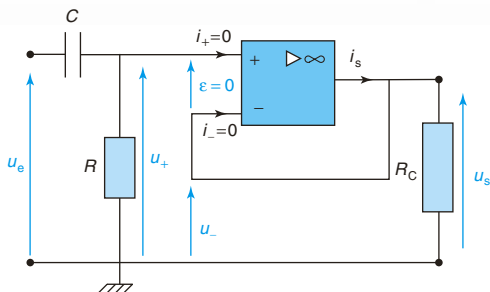


Figure 3

La fonction de transfert ne dépend pas de la valeur de la résistance de charge.

Quand un circuit comporte un AO, mettre en place tout de suite sur le schéma du circuit les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel : les courants d'entrée  $i_+$  et  $i_-$  sont nuls, la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  est nulle.

Dans son domaine normal d'utilisation, la tension de sortie d'un AO ne dépend pas de la charge.

- 4 On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du premier ordre**.

$$f_c = \frac{f}{RC\omega} = \frac{1}{2\pi RC} = 0,32 \text{ kHz}$$

- 5 Travaillons en notation complexe pour déterminer la tension de sortie.

- Tension d'entrée en notation complexe :  $u_e = E_m \cos(2\pi f t) \Rightarrow \underline{u_e} = E_m e^{j2\pi f t}$ .
- Tension complexe de sortie exprimée à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{u_s}{u_e} \Rightarrow u_s = \underline{H}\left(\frac{j}{2}\right) \underline{u_e} = \frac{\frac{j}{2}}{1 + \frac{j}{2}} u_e = \frac{j}{2 + j} E_m e^{j2\pi f t} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\alpha}\sqrt{5}} E_m e^{j2\pi f t} = \frac{E_m}{\sqrt{5}} e^{j\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

avec  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ .

- Tension de sortie en prenant la partie réelle de son expression complexe :

$$u_s = \frac{E_m}{\sqrt{5}} \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Finalement :  $u_s(t) = 0,89 \cos(1,0 \cdot 10^3 t + 1,1) \text{ (V)}$

$u_s = R_C i_s \Rightarrow i_s(t) = 1,8 \cos(1,0 \cdot 10^3 t + 1,1) \text{ (mA)}$

Ne pas oublier que, contrairement aux courants d'entrée, le courant de sortie d'un AO est en général non nul.

## 6 La charge reçoit la puissance :

$$\mathcal{P}_c = \frac{\left(\frac{U_{s \max}}{\sqrt{2}}\right)^2}{R_c} = \frac{\left(\frac{0,89}{\sqrt{2}}\right)^2}{5 \cdot 10^2} \Rightarrow \mathcal{P}_c = 0,80 \text{ mW}.$$

Le courant d'entrée + de l'AO est nul ; la puissance transférée à cette entrée est nulle. C'est donc la source d'alimentation de l'AO (jamais représentée dans les schémas) qui fournit toute l'énergie à la charge.

## 7 • Valeur maximale $U_{\max}$ de l'amplitude de la tension d'entrée :

$$U_{e \max} = U_{s \max} \sqrt{5} = 29 \text{ V}$$

- Valeur  $R'_c$  de la résistance de charge :

$$R'_c = \frac{U_{s \max}}{I_{s \max}} = 0,65 \text{ k}\Omega$$

- Valeur maximale  $\mathcal{P}_{c \max}$  de la puissance moyenne de sortie de l'AO :

$$\mathcal{P}_{c \max} = \frac{1}{2} R'_c I_{s \max}^2 = 0,13 \text{ W}$$

**Rappel.** La puissance moyenne  $\mathcal{P}$  reçue par un résistor de résistance  $R$  traversé par un courant sinusoïdal d'amplitude  $I_{\max}$  et de valeur efficace  $I_e$  s'écrit :  $\mathcal{P} = R I_e^2 = \frac{1}{2} R I_{\max}^2$ .

Le montage de l'AO est appelé « montage en suiveur » car la tension de sortie est égale à la tension d'entrée +. La puissance reçue par la charge est entièrement fournie par la source d'alimentation de l'AO.

Les puissances mises en jeu par un AO sont toujours faibles. Malgré son nom, « amplificateur », il ne peut pas servir d'amplificateur de puissance d'une chaîne « HI-FI » par exemple, qui mettent en jeu des puissances de l'ordre de 10 watts.

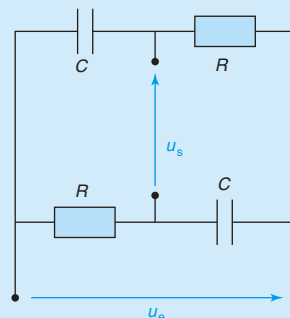
## en conclusion

- Quand un circuit comporte un AO, il faut mettre en place tout de suite sur le schéma du circuit les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel : les courants d'entrée  $i+$  et  $i-$  sont nuls, la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  est nulle.
- Contrairement aux courants d'entrée, le courant de sortie d'un AO est en général non nul.
- Dans son domaine normal d'utilisation, la tension de sortie d'un AO ne dépend pas de la charge.

### 3 – Passe-tout déphaseur du premier ordre

On considère le quadripôle en sortie ouverte ci-contre. Il comprend deux résistors identiques de résistance  $R$ , et deux condensateurs identiques de capacité  $C$ .

Données :  $C = 10\mu\text{F}$ ,  $R = 100\Omega$ .



- 1 Déterminer les comportements asymptotiques du quadripôle. Reconnait-on un filtre ?
- 2 Soit  $x$  la pulsation réduite définie par la relation  $RC\omega = x$ . Exprimer la fonction de transfert sous la forme canonique  $\underline{H}(jx)$ .
- 3 Calculer le gain du quadripôle. Que peut-on en conclure ?
- 4 Tracer l'allure de la courbe de la réponse de la phase  $\varphi(x)$  en fonction de  $\log(x)$ .

#### résolution méthodique

- 1 Appliquons la méthode du cours.

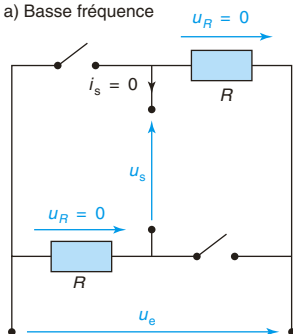
- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (figure a) ; il n'y a pas de courant dans les résistors. Appliquons la loi des mailles (sens trigonométrique) :

$$u_e - u_R - u_s - u_R = 0, \text{ d'où } u_e - 0 - u_s - 0 = 0, \text{ soit } u_s = u_e.$$

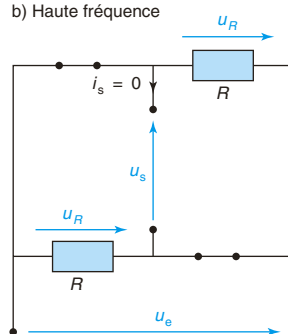
- À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé donc  $u_R = u_e$  (figure b). Appliquons la loi des mailles (sens trigonométrique) :

$$u_e - u_R - u_s - u_R = 0, \text{ d'où } u_e - u_e - u_s - u_e = 0, \text{ soit } u_s = -u_e.$$

a) Basse fréquence



b) Haute fréquence



On peut déduire de ce comportement que ce quadripôle n'est **ni un filtre passe-bas, ni un filtre passe-haut**.

- 2 Dans chacune des branches, le condensateur et le résistor sont en série. Chacun des circuits  $RC$  réalise un diviseur de tension, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{u_R}{u_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{jx}{1 + jx}.$$

Faire apparaître le plus tôt possible la pulsation réduite pour simplifier le calcul de la fonction de transfert.

Appliquons la loi des mailles (sens trigonométrique sur la figure b) :

$$\underline{u}_e = \underline{u}_s + 2\underline{u}_R \text{ d'où :}$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{1-jx}{1+jx}$$

On constate que la fonction de transfert n'est pas celle d'un filtre passe-bas, ni celle d'un filtre passe-haut, en accord avec l'étude rapide faite dans la première question. Le quadripôle est du premier ordre.

Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert est en accord avec l'étude rapide.

➤ 3  $|\underline{H}(jx)| = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^2}} = 1 \Rightarrow G = 20\log|\underline{H}(jx)| = 0$  ! Le quadripôle n'est pas un filtre car le gain ne dépend pas de la pulsation. On dit que c'est un **passe-tout déphaseur du premier ordre** ; seule la phase dépend de la fréquence.

➤ 4  $\underline{H}(jx) = \frac{\sqrt{1+x^2} e^{-j\alpha}}{\sqrt{1+x^2} e^{j\alpha}} = e^{-2j\alpha} \Rightarrow \varphi(x) = -2\alpha$  avec  $\tan \alpha = x$  ;

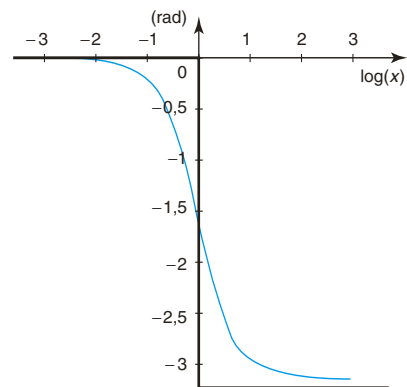
$$\varphi(x) = -2\arctan(x)$$

$$\varphi(x \ll 1) \approx -2\arctan(0) = 0 \text{ d'où } \varphi_{BF} = 0.$$

$$\varphi(x \gg 1) \approx -2\arctan(\infty) = -2 \times \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \varphi_{HF} = -\pi.$$

L'allure de la courbe de la réponse  $\varphi(x)$  en fonction de  $\log(x)$  se trace en plaçant quelques points dans le plan  $(\log(x), \varphi(x))$ . On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel.

|                     |       |                  |      |
|---------------------|-------|------------------|------|
| $x$                 | 0,5   | 1                | 2    |
| $\log(x)$           | -0,30 | 0                | 0,30 |
| $\varphi(x)$ en rad | -0,92 | $-\frac{\pi}{2}$ | -2,2 |



## en conclusion

Faire apparaître le plus tôt possible la pulsation réduite pour simplifier le calcul de la fonction de transfert.

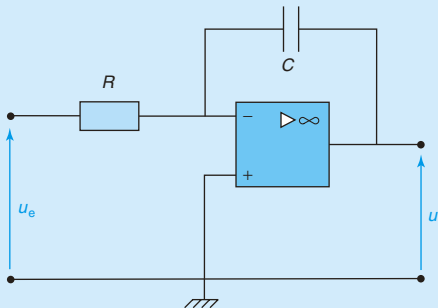


## PCSI 4 – Intégrateur et pseudo-intégrateur à amplificateur opérationnel

Soit le quadripôle actif ci-contre.

Données :  $C = 1,0\mu\text{F}$  et  $R = 10\text{ k}\Omega$ .

- 1 Exprimer la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . On posera  $\tau = RC$ .
- 2 Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée. En déduire que ce montage est un circuit intégrateur.
- 3 À la date  $t = 0$ , on applique en entrée un échelon de tension de valeur  $E = 1,0\text{ mV}$ . Déterminer la tension  $u_s(t)$  de sortie sachant que le condensateur est initialement déchargé.



- 4 Il existe des tensions de saturation en sortie de l'AO, de valeurs  $U_{\text{sat}} = \pm 15\text{ V}$ . Quelle est la valeur de saturation atteinte par la tension de sortie ? À quelle date  $t_{\text{sat}}$  ?
- 5 Dans la pratique, les tensions d'entrée s'écrivent sous la forme  $u_e(t) = \varepsilon + f(t)$ ,  $\varepsilon$  étant une tension constante appelée tension de décalage ; sa valeur peut être faible, mais jamais nulle. Pourquoi dit-on que le montage ne peut pas fonctionner en intégrateur ?

- 6 La saturation de la tension de sortie peut être évitée en plaçant un résistor de résistance  $R'$  en parallèle avec le condensateur, comme indiqué ci-contre.

a. Exprimer la fonction de transfert sous la forme :

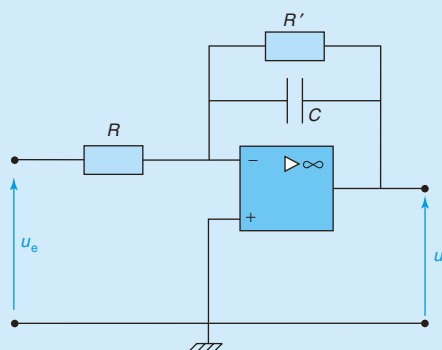
$$T(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau'}, \text{ avec } A_0 \text{ une}$$

constante à exprimer et  $\tau' = R'C$ .

b. À quelle condition sur le produit  $\omega\tau'$  le filtre a-t-il un caractère intégrateur ? On dit alors que c'est un pseudo-intégrateur.

c. On considère que le filtre est intégrateur pour les fréquences supérieures à  $10f_c$ ,  $f_c$  étant la fréquence de coupure du filtre. Quelle valeur de  $R'$  faut-il choisir pour que le filtre soit intégrateur pour des fréquences supérieures à  $100\text{ Hz}$  ?

d. Quel est alors l'effet d'une tension de décalage  $E = 20\text{ mV}$  ? Conclure.



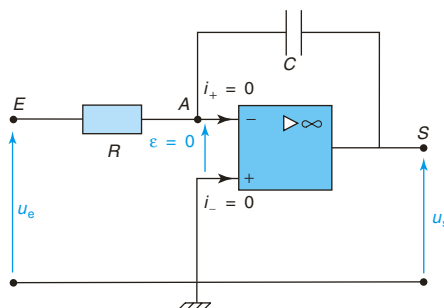
## résolution méthodique

- **1** Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) au point A, de potentiel nul (figure) :

$$\underline{u}_A \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{u_E}{R} + jC\omega \underline{u}_S = 0$$

$$\underline{u}_S = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{u}_E \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_E} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{j\omega\tau}$$



On peut appliquer la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) à l'entrée inverseuse – et à l'entrée non inverseuse d'un AO car les courants d'entrée sont nuls. Il ne faut pas l'appliquer à la sortie d'un AO car le courant de sortie est en général non nul.

- **2** En remplaçant l'expression  $j\omega$  par  $\frac{d}{dt}$ , il vient :  $\underline{u}_E = -j\omega\tau \underline{u}_S \Rightarrow u_e = -\tau \frac{du_s}{dt}$

$$\Rightarrow du_s = -\frac{1}{\tau} u_e dt \Rightarrow \int_{u_s(0)}^{u_s(t)} du_s = -\frac{1}{\tau} \int_0^t u_e dt \Rightarrow$$

$$u_s = u_{s(0)} - \frac{1}{\tau} \int_0^t u_e dt$$

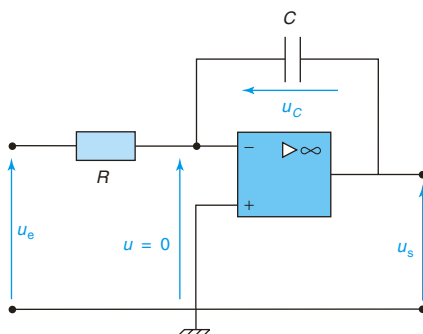
La tension de sortie est une primitive de la tension d'entrée ; le circuit est un circuit intégrateur.

- **3**  $u_s = u_{s(0)} - \frac{1}{\tau} \int_0^t E dt = -E \frac{t}{\tau} + u_{s(0)}$

La continuité de la tension aux bornes du condensateur ( $u_{C(0)} = 0$ ) permet d'écrire (figure ci-contre) :  $u_{s(0)} = -u_{C(0)} = 0$ . Finalement :

$$u_s(t) = -E \frac{t}{\tau}$$

A.N. :  $u_s(t) = -0,10t$  (V).



- **4** La tension de sortie décroît ; elle atteint donc la valeur négative  $-15$  V de saturation de la tension. Il vient :  $u_s(t_{\text{sat}}) = -0,10t_{\text{sat}} = -15$

$$t_{\text{sat}} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ s}$$

5  $u_s = -\frac{1}{\tau} \int_0^t [\varepsilon + f(t)] dt = -\frac{1}{\tau} \int_0^t f(t) dt - \varepsilon \frac{t}{\tau}.$

Aussi petite que soit la valeur de la tension  $\varepsilon$ , le terme  $-\varepsilon \frac{t}{\tau}$  varie de manière monotone ; il y a donc saturation de la sortie ; le montage ne peut pas fonctionner en intégrateur.

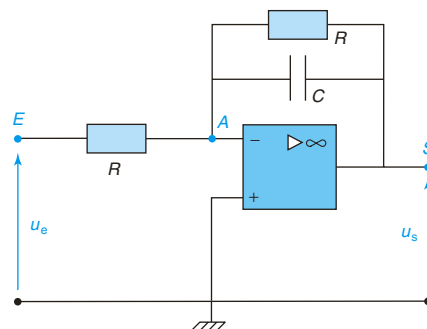
6 a. Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) au point A, de potentiel nul (figure ci-contre) :

$$u_A \left( \frac{1}{R'} + jC\omega + \frac{1}{R} \right) = \frac{u_E}{R} + \left( \frac{1}{R'} + jC\omega \right) u_s = 0$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = -\frac{1}{\frac{R}{R'} + jRC\omega} = -\frac{R'}{R} \frac{1}{1 + j\omega\tau'},$$

avec :

$$A_0 = -\frac{R'}{R}$$



b. Le filtre a un caractère intégrateur si on peut écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R'}{R} \frac{1}{j\omega\tau'} = -\frac{1}{j\omega\tau'},$$

ce qui implique :

$$\omega\tau' \gg 1$$

c. La condition  $\frac{f}{f_c} > 10$  avec  $f = 100$  Hz donne :

$$f'_c < 10 \Rightarrow 2\pi R'C > \frac{1}{10}.$$

A.N. :  $R' > 16 \text{ k}\Omega$ .

d. Une tension de décalage  $E$  en entrée provoque, en régime permanent, une tension de décalage  $U_s$  en sortie d'expression :

$$U_s = \underline{H}(\omega = 0) E = -\frac{R'}{R} E.$$

A.N. :  $U_s = -1,6 \text{ mV}$ .

En régime permanent, une tension  $U_e$  d'entrée constante peut-être considérée comme une tension sinusoïdale de fréquence nulle (période infinie). La tension de sortie  $U_s$  correspondante s'écrit :  $U_s = \underline{H}(\omega = 0) U_e$ .

Il n'y a donc pas de saturation en sortie ; le montage fonctionne en intégrateur pour des fréquences supérieures à 100 Hz.

## en conclusion

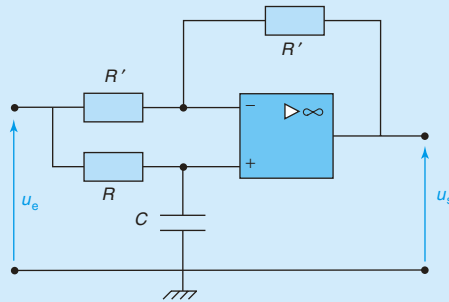
- On peut appliquer la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) à l'entrée inverseuse – et à l'entrée non inverseuse + d'un AO car les courants d'entrée sont nuls.
- Il ne faut pas l'appliquer à la sortie d'un AO car le courant de sortie est en général non nul.
- En régime permanent, une tension  $U_e$  d'entrée constante peut-être considérée comme une tension sinusoïdale de fréquence nulle (période infinie). La tension de sortie  $U_s$  correspondante s'écrit :  $U_s = \underline{H}(\omega = 0) U_e$ .

## 5 – Quadripôle déphaseur

On considère le quadripôle ci-contre.

Données :  $C = 0,22 \mu\text{F}$ ,  $R = 47 \text{ k}\Omega$ .

- 1 Exprimer la fonction de transfert. Le quadripôle est-il stable ?
- 2 Exprimer le gain et la phase du quadripôle. Quelle est la nature de ce quadripôle ?
- 3 Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée. On posera  $\tau = RC$ .
- 4 À la date  $t = 0$  on applique en entrée un échelon de tension de valeur  $E = 1,0 \text{ V}$ . Déterminer la tension  $u_s(t)$  de sortie sachant que le condensateur est initialement déchargé.



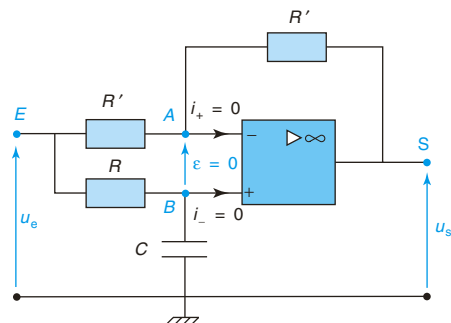
© Nathan, classe prépa

## résolution méthodique

- 1 Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) au point A de la figure.

$$u_A \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) = \frac{u_E}{R'} + \frac{u_S}{R} \Rightarrow 2u_- = u_e + u_s.$$

Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) au point B.



$$\underline{u}_B \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{u_E}{R} + jC\omega \underline{u}_M$$

$$\Rightarrow \underline{u}_+ \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{u_e}{R} + jC\omega 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_+ (1 + jx) = \underline{u}_e \text{ avec } x = RC\omega.$$

• **Autre méthode** : utiliser la propriété du diviseur de tension réalisé par la branche  $RC$  (ils sont en série) :

$$\frac{\underline{u}_+}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jx} \text{ avec } x = RC\omega.$$

Les tensions d'entrée de l'AO sont égales ( $\underline{u}_- = \underline{u}_+$ ) donc :

$$2\underline{u}_- = \underline{u}_e + \underline{u}_s = 2\underline{u}_+ = 2 \frac{\underline{u}_e}{1 + jx}$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$$

Pour le calcul de la fonction de transfert, on utilise :

- la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) ;
- la propriété d'un diviseur de tension ;
- l'égalité des tensions d'entrée de l'AO (tension différentielle d'entrée nulle).

Les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert (1 et 1) étant du même signe, **le quadripôle est stable**.

La fonction de transfert est la même que celle du quadripôle de l'exercice 3. Mais la présence de l'AO rend son expression indépendante d'une charge que l'on placerait en sortie ; au contraire la fonction de transfert de l'exercice 3 serait modifiée, le courant de sortie n'étant alors pas nul.

➤ **2**  $\underline{H}(jx) = \frac{\sqrt{1+x^2} e^{-j\alpha}}{\sqrt{1+x^2} e^{j\alpha}} = e^{-2j\alpha} \Rightarrow |\underline{H}(jx)| = 1 \text{ et } \varphi(x) = -2\alpha \text{ avec } \tan \alpha = x, \text{ d'où :}$

$$G = 20 \log |\underline{H}(jx)| = 0 \text{ et } \varphi(x) = -2 \arctan(x)$$

Le quadripôle n'est pas un filtre, c'est un **passe-tout déphaseur** (voir exercice 3 précédent).

➤ **3**  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow \underline{u}_s(1 + j\omega\tau) = (1 - j\omega\tau)\underline{u}_e \Rightarrow \underline{u}_s + j\omega\tau \underline{u}_s = \underline{u}_e - j\omega\tau \underline{u}_e.$

En remplaçant l'expression  $j\omega$  par  $\frac{d}{dt}$  on obtient :

$$u_s + \tau \frac{du_s}{dt} = u_e - \tau \frac{du_e}{dt}$$

L'équation différentielle d'un système du premier ordre se déduit de la fonction de transfert en remplaçant chaque terme  $j\omega$  par l'opérateur  $\frac{d}{dt}$ .

► **4** L'équation différentielle s'écrit :  $u_s + \tau \frac{du_s}{dt} = E - \tau \frac{dE}{dt} \Rightarrow u_s + \tau \frac{du_s}{dt} = E$ .

Cette équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre non nul.

Appliquons la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre donnée dans « Retenir l'essentiel » du chapitre 4.

• Solution générale de l'équation différentielle :

$$u_s = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E, \text{ avec } A \text{ constante.}$$

• Détermination de la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de la tension aux bornes du condensateur. La relation  $2u_+ = u_e + u_s$  est valable à chaque instant, en particulier à la date  $t = 0$ , d'où :

$$0 = E + u_{s(0)} \Rightarrow u_{s(0)} = A + E = -E \Rightarrow A = -2E.$$

• Solution complète de l'équation différentielle complète :

$$u_s = -2E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

A. N. :  $\tau = RC = 10 \text{ ms}, u_s(t) = -2,0(1 - e^{-1,0 \cdot 10^2 t}) \text{ (V)}.$

### en conclusion

- Pour le calcul de la fonction de transfert, on utilise :
  - la loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millmann)
  - la propriété d'un diviseur de tension
  - l'égalité des tensions d'entrée de l'AO (tension différentielle d'entrée nulle).
- L'équation différentielle d'un système du premier ordre se déduit de la fonction de transfert en remplaçant chaque terme  $j\omega$  par l'opérateur  $\frac{d}{dt}$ .

PCSI

PTSI

# Filtres du deuxième ordre

## 1 Filtre passe-bas du deuxième ordre

### 1.1. Fonction de transfert

La **fonction de transfert** d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{1}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = A_0 \frac{1}{1 + j 2\sigma \frac{f}{f_0} + \left(j \frac{f}{f_0}\right)^2}.$$

- $\omega_0$  est la pulsation caractéristique du filtre et  $f_0$  la fréquence caractéristique.
- $Q$  est le facteur de qualité,  $\sigma$  est l'amortissement avec  $\sigma = \frac{1}{2Q}$ .
- $A_0$  est une constante réelle.

Le terme en  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ , d'ordre 2, est celui dont l'ordre est le plus élevé d'où le nom de deuxième ordre donné au filtre.

La **forme réduite** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(jx) = A_0 \frac{1}{1 + j \frac{x}{Q} + (jx)^2} = A_0 \frac{1}{1 + j 2\sigma x + (jx)^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

*Remarque :* Nous laissons le terme  $(jx)^2$  sans le remplacer par  $-x^2$ , pour conserver à la fonction de transfert une forme analogue à celle utilisée en Sciences de l'Ingénieur :

$$\underline{H}(p) = \frac{A_0}{1 + 2\sigma\tau p + \tau^2 p^2} \text{ avec } \tau p = jx.$$

## 1.2. Comportements asymptotiques et expression à la fréquence caractéristique

Nous travaillerons dans la suite avec la valeur  $A_0 = 1$  puisque les courbes de réponses en gain se déduisent de celle de la fonction de transfert dans laquelle  $A_0 \neq 1$  par simple translation  $20\log(A_0)$  le long de l'axe des gains et que les courbes de réponse en phase sont identiques.

### 1.2.1. Comportement asymptotique à basse fréquence

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx \frac{1}{1} = |\underline{H}| e^{j\varphi} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}| = 1 \Rightarrow G_{BF} = 20\log(1) = 0 \\ \varphi_{BF} = 0 \end{cases}$$

**Point maths.** On ne conserve au dénominateur que le terme de plus bas degré en  $x$ , soit ici 1 (degré nul).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence :  $G_{BF} = 0$  et  $\varphi_{BF} = 0$ .

### 1.2.2. Expression à la fréquence caractéristique ( $x = 1$ )

$$x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q} - 1} = -jQ = Qe^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |\underline{H}(1)| = Q \Rightarrow G_{(x=1)} = 20\log(Q)$$

$$\text{et } \varphi_{(x=1)} = -\frac{\pi}{2}.$$

La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; \log(Q))$ . Si  $Q < 1$ , alors  $G_{(1)} < 0$ ; si  $Q > 1$ , alors  $G_{(1)} > 0$ .

La courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $\left(0 ; -\frac{\pi}{2}\right)$ .

### 1.2.3. Comportement asymptotique à haute fréquence

$$x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx \frac{1}{(jx)^2} = -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} e^{\pm j\pi} \Rightarrow |\underline{H}| \approx \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow G_{BF} = -40\log(x) \quad \text{et} \quad \varphi_{BF} = \pm\pi.$$

**Point maths.** On ne conserve au dénominateur que le terme de plus haut degré en  $x$ , soit ici  $(jx)^2$ .

On en déduit l'équation de l'asymptote haute fréquence du gain :  $G_{HF} = -40\log(x)$ .

Quelle valeur de  $\varphi_{HF}$  choisir ?

Étudions  $\tan \varphi = -\frac{1}{Q} \frac{x}{1 - x^2}$ . C'est une fonction décroissante pour  $x > 1$ , donc la phase décroît de la valeur  $-\frac{\pi}{2}$  à  $-\pi$ .

L'équation de l'asymptote haute fréquence du gain s'écrit :  $\varphi_{HF} = -\pi$ .

## 1.3. Diagramme asymptotique de Bode

La courbe asymptotique du gain (en traits noirs sur la figure 1a) est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{HF} = 0$  et  $G_{BF} = -40\log(x)$  qui se coupent au point de coordonnées  $(0 ; 0)$ .

Rappel

$$\frac{1}{j^2} = -1 = e^{\pm j\pi}.$$



## Pente de l'asymptote basse fréquence

En posant  $X = \log(x)$ , il vient :

$$G_{\text{HF}} = -40X \Rightarrow \frac{dG_{\text{HF}}}{dX} = -40 \text{ dB/décade.}$$

Le gain diminue de 40 dB quand la fréquence est multipliée par 10 ( $X$  augmente d'une unité) ; la pente de l'asymptote basse fréquence est égale à  $-40$  dB par décade.

La courbe asymptotique de la phase (en traits noirs sur la figure 1b) est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{\text{BF}} = 0$  et  $\varphi_{\text{HF}} = -\pi$  d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.

## 1.4. Diagramme de Bode

Les valeurs du gain et de la phase à basse et à haute fréquences et à la fréquence caractéristique ne suffisent pas pour donner l'allure du diagramme de Bode complet. Il faut analyser la courbe selon les valeurs de  $Q$  (ou de  $\sigma$ ).

Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il existe un maximum du gain de coordonnées :

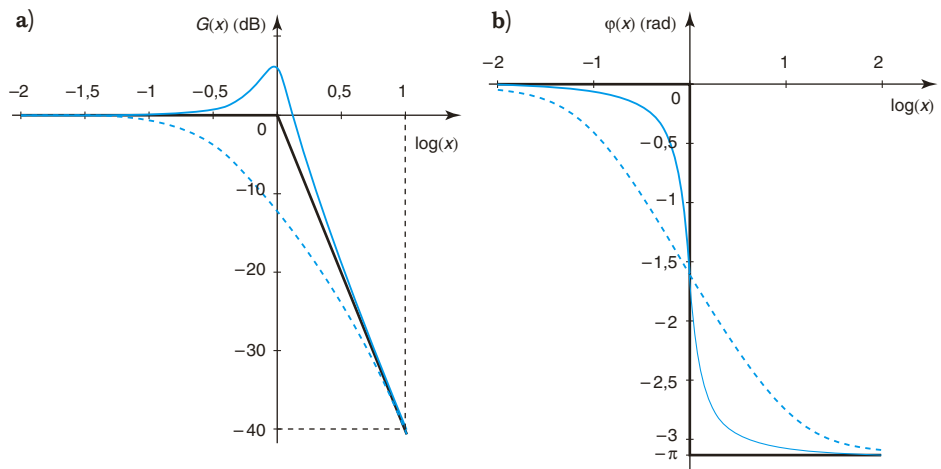
$$\left( \log\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right) ; 20\log\left(\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}\right) \right).$$

On dit qu'il y a **résonance** pour la fréquence correspondante.

Le diagramme de Bode peut-être tracé à l'aide d'un logiciel de calcul formel (en couleur sur la figure 1).

Fig. 1

Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du deuxième ordre



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
Courbes en traits pleins pour  $Q = 2$ , courbes en traits pointillés pour  $Q = 0,25$ .

### Remarque

Pour tracer l'asymptote basse fréquence du gain, il suffit de remarquer qu'elle passe par les points  $(0 ; 0)$  et  $(+1 ; -40 \text{ dB})$ .

**Filtre passe-bas du deuxième ordre**, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

- La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{HF} = 0$  et  $G_{BF} = -40\log(x)$  reliées au point  $(0 ; 0)$ .
- La pente de l'asymptote haute fréquence du gain est égale à  $-40$  dB par décade.
- Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il existe une résonance de pulsation réduite  $x_r < 1$ .
- La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = 0$  et  $\varphi_{HF} = -\pi$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.
- La phase est une fonction décroissante de  $0$  à  $-\pi$ .
- Le point  $\left(0 ; -\frac{\pi}{2}\right)$  est le centre de symétrie de la courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$ .

## 2 Filtre passe-bande du deuxième ordre

### 2.1. Fonction de transfert

La **fonction de transfert** d'un filtre passe-bande du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = A_0 \frac{j2\sigma\frac{f}{f_0}}{1 + j2\sigma\frac{f}{f_0} + \left(j\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

- $\omega_0$  est la pulsation propre (ou pulsation de résonance) du filtre et  $f_0$  la fréquence propre (ou fréquence de résonance).
- $Q$  est le facteur de qualité,  $\sigma$  est l'amortissement, avec  $\sigma = \frac{1}{2Q}$ .
- $A_0$  est une constante réelle.

La **forme réduite de la fonction de transfert** d'un filtre passe-bande du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(jx) = A_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = A_0 \frac{2j\sigma x}{1 + 2j\sigma x + (jx)^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

- Autre forme :  $\underline{H}(jx) = A_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = A_0 \frac{1}{1 + \frac{j}{2\sigma}\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

### 2.2. Courbe de réponse en phase

Nous travaillons dans la suite avec la valeur  $A_0 = 1$ .

$$[\underline{H}(jx)]_{\text{passe bande}} = j\frac{x}{Q} \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{x}{Q} [\underline{H}(jx)]_{\text{passe bas}} \Rightarrow [\varphi(x)]_{\text{passe bande}} = \frac{\pi}{2} + [\varphi(x)]_{\text{passe bas}}$$

La courbe de réponse en phase du filtre passe-bande se déduit de celle du filtre passe-bas du deuxième ordre par translation positive de  $\frac{\pi}{2}$  le long de l'axe des phases.

La courbe asymptotique de la phase (en traits noirs sur la figure 2b) est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$  d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.

## 2.3. Courbe de réponse en gain

### 2.3.1. Comportement asymptotique à basse fréquence

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx j\frac{x}{Q} \Rightarrow |\underline{H}| \approx \frac{x}{Q} \Rightarrow G_{BF} = 20\log(x) - 20\log(Q).$$

Équation de l'asymptote basse fréquence :  $G_{BF} = 20\log(x) - 20\log(Q)$ .

### 2.3.2. Gain à la fréquence propre

$$x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = 1 \Rightarrow |\underline{H}| = 1 \Rightarrow G_{(x=1)} = 0.$$

La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point (0 ; 0).

### 2.3.3. Comportement asymptotique à haute fréquence

$$x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx -\frac{j}{Qx} \Rightarrow |\underline{H}| \approx \frac{1}{Qx} \Rightarrow G_{HF} = -20\log(x) - 20\log(Q).$$

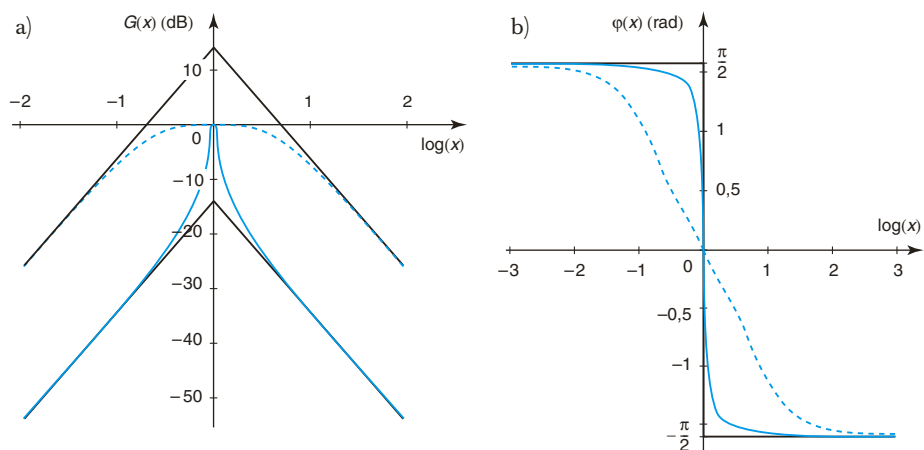
Équation de l'asymptote haute fréquence :  $G_{HF} = -20\log(x) - 20\log(Q)$ .

La courbe asymptotique du gain (en traits noirs sur la figure 2a) est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 20\log(x) - 20\log(Q)$  et  $G_{HF} = -20\log(x) - 20\log(Q)$  qui se coupent au point (0,  $-20\log(Q)$ ).

## 2.4. Diagramme de Bode

Fig. 2

Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du deuxième ordre



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
Courbes en traits pleins pour  $Q = 0,2$  ; courbes en traits pointillés pour  $Q = 5$ .

**Filtre passe-bande du deuxième ordre**, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

- La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations :  
 $G_{BF} = 20\log(x) - 20\log(Q)$  et  $G_{HF} = -20\log(x) - 20\log(Q)$ ,  
 reliées au point  $(0 ; -20\log Q)$ .
- La pente de l'asymptote basse fréquence est égale à 20 dB par décade.
- La pente de l'asymptote haute fréquence est égale à -20 dB par décade.
- Il existe une résonance de pulsation réduite  $x = 1$  (égale à la pulsation propre réduite). Le module de la fonction de transfert est alors maximal, égal à 1.
- La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations  
 $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.
- La phase est une fonction décroissante de  $\frac{\pi}{2}$  à  $-\frac{\pi}{2}$ .
- Le point  $(0 ; 0)$  est centre de symétrie de la courbe de la phase  $\varphi(x)$  en fonction de  $\log(x)$ .

## 2.5. Bande passante à -3 dB

Bande passante  $\Delta f$  d'un filtre passe-bande de fréquence propre  $f_0$  et de facteur de qualité  $Q$  :  $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$  ( $\Delta x = \frac{1}{Q}$ ) (figure 3).

**Démonstration :**

Résolution de l'équation  $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

$$|\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1 + Q^2\left[x - \frac{1}{x}\right]^2}} = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow Q^2\left[x - \frac{1}{x}\right]^2 = 1$$

$$\Rightarrow Q\left[x - \frac{1}{x}\right] = \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

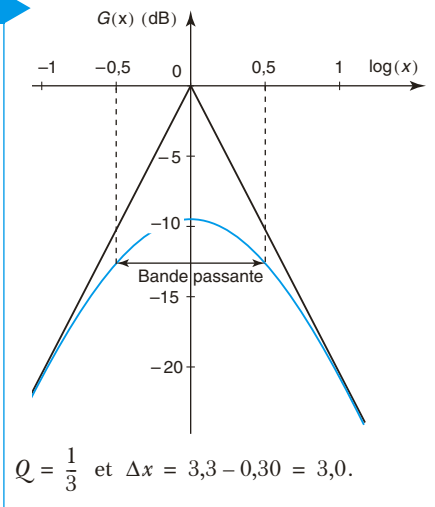
Il faut résoudre l'équation  $x^2 - \frac{\varepsilon}{Q}x - 1 = 0$  ; on a

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta}\right] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta}\right].$$

$$\text{Finalement} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}.$$

**Fig. 3**





## 3 Filtre passe-haut du deuxième ordre

### 3.1. Fonction de transfert et forme réduite

La **fonction de transfert** d'un filtre passe-haut du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = A_0 \frac{\left(j\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 + j2\sigma\frac{f}{f_0} + \left(j\frac{f}{f_0}\right)^2}.$$

- $\omega_0$  est la pulsation caractéristique du filtre et  $f_0$  la fréquence caractéristique.
- $Q$  est le facteur de qualité,  $\sigma$  est l'amortissement, avec  $\sigma = \frac{1}{2Q}$ .
- $A_0$  est une constante réelle.

La **forme réduite** de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du deuxième ordre est :

$$\underline{H}(jx) = A_0 \frac{(jx)^2}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = A_0 \frac{(jx)^2}{1 + j2\sigma x + (jx)^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

### 3.2. Courbe de réponse en phase

Nous travaillons dans la suite avec la valeur  $A_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} [\underline{H}(jx)]_{\text{passe haut}} &= jQx \frac{j^x}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} \\ &= e^{j\frac{\pi}{2}} Qx [\underline{H}(jx)]_{\text{passe bande}} \Rightarrow [\varphi(x)]_{\text{passe haut}} = \frac{\pi}{2} + [\varphi(x)]_{\text{passe bande}} \end{aligned}$$

La courbe de réponse en phase du filtre passe-haut se déduit de celle du filtre passe-bande du deuxième ordre par translation positive de  $\frac{\pi}{2}$  le long de l'axe des phases.

La courbe asymptotique de la phase (en traits noirs sur la figure 4b) est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{\text{BF}} = \pi$  et  $\varphi_{\text{HF}} = 0$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.

### 3.3. Courbe de réponse en gain

#### 3.3.1. Comportement asymptotique à basse fréquence

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx (jx)^2 \Rightarrow |\underline{H}(x)| \approx x^2 \Rightarrow G_{BF} = 40 \log(x).$$

On en déduit l'équation de l'asymptote basse fréquence du gain :

$$G_{BF} = 40 \log(x).$$

#### 3.3.2. Expression à la fréquence caractéristique ( $x = 1$ )

$$x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = jQ \Rightarrow |\underline{H}| = Q \Rightarrow G_{(x=1)} = 20 \log Q.$$

La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; \log Q)$ .

Si  $Q < 1$ , alors  $G_{(1)} < 0$  ;

si  $Q > 1$ , alors  $G_{(1)} > 0$ .

#### 3.3.3. Comportement asymptotique à haute fréquence

$$x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 \Rightarrow |\underline{H}| \approx 1 \Rightarrow G_{HF} = 0.$$

On en déduit l'équation de l'asymptote haute fréquence du gain :  $G_{HF} = 0$ .

La courbe asymptotique du gain (en traits noirs sur la figure 4a) est constituée des deux demi-droites d'équations :

$$G_{BF} = 40 \log(x) \text{ et } G_{HF} = 0,$$

reliées au point  $(0 ; 0)$ .

#### Pente de l'asymptote basse fréquence

En posant  $X = \log(x)$ , il vient :

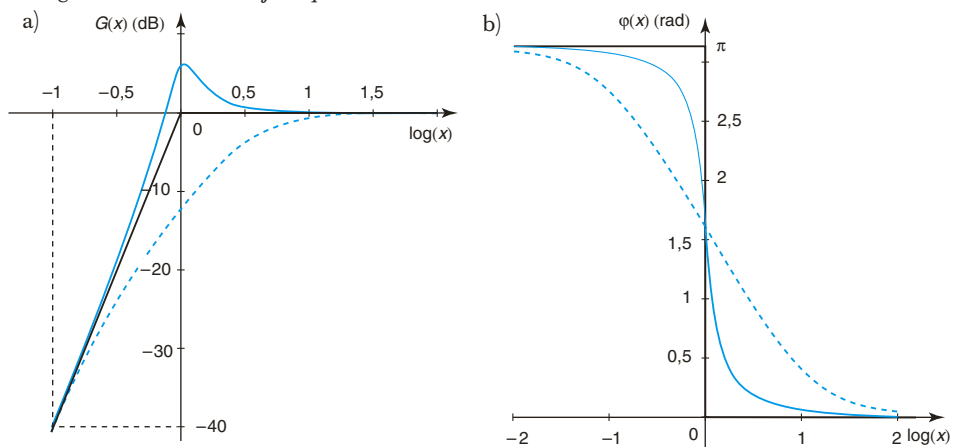
$$G_{BF} = 40X \Rightarrow \frac{dG_{BF}}{dX} = 40 \text{ dB/décade ;}$$

la pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à +40 dB par décade.

### 3.4. Diagramme de Bode

Fig. 4

Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du deuxième ordre



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).  
Courbes en traits pleins pour  $Q = 2$ , courbes en traits pointillés pour  $Q = 0,25$ .

**Filtre passe-haut du deuxième ordre**, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{(jx)^2}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

- La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations  $G_{BF} = 40\log(x)$  et  $G_{HF} = 0$  reliées au point  $(0 ; 0)$ .
- La pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à  $+40$  dB par décade.
- Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il existe une résonance de pulsation réduite  $x_r > 1$ .
- La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations  $\varphi_{BF} = \pi$  et  $\varphi_{HF} = 0$ , d'origine  $\log(x) = 0$ , et du segment vertical qui les relie.
- La phase est une fonction décroissante de  $\pi$  à  $0$ .
- Le point  $\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$  est centre de symétrie de la courbe de la phase  $\varphi(x)$  en fonction de  $\log(x)$ .

## 4 Prédiction des comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences d'un filtre

L'étude des filtres du deuxième ordre permet de compléter le point méthode donné au chapitre précédent.

### Point méthode. *Comportements asymptotiques d'un filtre*

- Faire le schéma équivalent du filtre à basse fréquence en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines idéales par des interrupteurs fermés, et déterminer la tension de sortie.
- Faire le schéma équivalent du filtre à haute fréquence en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs fermés et les bobines idéales par des interrupteurs ouverts, et déterminer la tension de sortie.
- En déduire si le filtre est passe-bas, passe-haut ou passe-bande :
  - c'est un filtre passe-bas si la tension de sortie s'annule seulement à haute fréquence ;
  - c'est un filtre passe-haut si la tension de sortie s'annule seulement à basse fréquence ;
  - c'est un filtre passe-bande si la tension de sortie s'annule à basse et à haute fréquences.

### Remarque

La tension de sortie de certains quadripôles ne s'annule ni à basse ni à haute fréquences, par exemple celle d'un passe-tout déphaseur (voir chapitre précédent) et celle d'un filtre coupe-bande (voir exercice 1 p. 137).

PCSI

## 5 Équation différentielle d'un système du deuxième ordre – Stabilité

### 5.1. Équation différentielle déduite de la fonction de transfert

La forme générale de la fonction de transfert d'un filtre du deuxième ordre s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} = \frac{N_0 + j\omega N_1 + (j\omega)^2 N_2}{D_0 + j\omega D_1 + (j\omega)^2 D_2}$$

d'où l'équation différentielle :

$$D_2 \frac{d^2 u_s}{dt^2} + D_1 \frac{du_s}{dt} + D_0 u_s = N_2 \frac{d^2 u_e}{dt^2} + N_1 \frac{du_e}{dt} + N_0 u_e.$$

## 5.2. Stabilité du système

### 5.2.1. Stabilité du système en régime libre

Le système est stable en régime libre si la solution  $u_{sL}$  de la solution de l'équation différentielle  $D_2 \frac{d^2 u_{sL}}{dt^2} + D_1 \frac{du_{sL}}{dt} + D_0 u_{sL} = 0$  converge vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

Nous l'écrivons sous la forme  $a \frac{d^2 u_{sL}}{dt^2} + b \frac{du_{sL}}{dt} + cu_{sL} = 0$  pour l'étude suivante.

- Équation caractéristique de l'équation différentielle :  $ar^2 + br + c = 0$ .
- Soient  $r_1$  et  $r_2$  les solutions, avec  $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$  et  $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ .
- Discriminant de l'équation caractéristique :  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

#### a. Cas où le discriminant est positif

La solution  $u_{sL} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$  ( $A_1$  et  $A_2$  constantes) de l'équation différentielle converge vers zéro si  $r_1$  et  $r_2$  sont négatives, ce qui impose  $\frac{b}{a} = -r_1 - r_2 > 0$  et  $r_1 r_2 = \frac{c}{a} > 0$ . Les deux inégalités sont satisfaites si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont du même signe.

#### b. Cas où le discriminant est négatif

Dans ce cas  $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4ac > b^2 > 0$  ;  $a$  et  $c$  sont du même signe. Les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} - j\Omega \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + j\Omega, \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La solution  $u_{sL} = e^{-\frac{b}{2a}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$ , avec  $A$  et  $B$  constantes réelles, converge vers zéro si  $\frac{b}{a} > 0$  donc si  $b$  et  $a$  sont du même signe. Au total,  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent être du même signe.

#### c. Cas où le discriminant est nul

Dans ce cas  $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  (relation 1).

La solution de l'équation caractéristique est double :  $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ .

La solution  $u_{sL} = e^{-\frac{b}{2a}t} [A't + B']$ , avec  $A'$  et  $B'$  constantes réelles, converge vers zéro si  $\frac{b}{a} > 0$  (relation 2). Les relations 1 et 2 imposent que  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient du même signe.

Dans les trois cas, la solution  $u_{sL}$  converge vers zéro si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont du même signe.

Un système du second ordre est stable en régime libre si les coefficients  $D_0$ ,  $D_1$  et  $D_2$  (resp.  $D'_0$ ,  $D'_1$  et  $D'_2$ ) du dénominateur de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N_0 + j\omega N_1 + (j\omega)^2 N_2}{D_0 + j\omega D_1 + (j\omega)^2 D_2} \quad (\text{resp.} \quad \underline{H}(jx) = \frac{N'_0 + N'_1 jx + N'_2 (jx)^2}{D'_0 + D'_1 jx + D'_2 (jx)^2})$$

sont du même signe.



## 5.2.2. Réponse du système en régime forcé sinusoïdal

L'étude menée au chapitre VII pour un système du premier ordre est indépendante de l'ordre. Son résultat est applicable à un système du deuxième ordre : un système du second ordre est stable en régime forcé si le module de la fonction de transfert est borné, quelle que soit la fréquence.

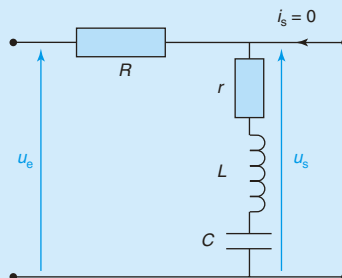
## 1 – Filtre coupe-bande

On considère le quadripôle ci-contre qui comprend un résistor de résistance  $R$ , un condensateur de capacité  $C$  et une bobine réelle d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ .

Données :  $C = 10 \mu\text{F}$  ;  $L = 0,10 \text{ H}$  ;

$r = 100 \Omega$  ;  $R = 100 \Omega$ .

On pose :  $R' = R + r$ .



- 1 Calculer la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit  $R'LC$ , la fréquence propre  $f_0$  et le facteur de qualité  $Q$ .
- 2 Déterminer les comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences. Peut-on en déduire la nature du quadripôle ?
- 3 Quelle est la valeur de l'impédance du dipôle  $LC$  à la fréquence propre ? En déduire le quadripôle équivalent au filtre à cette fréquence.
- 4 Calculer le gain du filtre à la fréquence propre.
- 5 Soit  $x$  la pulsation réduite avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite  $\underline{H}(jx)$ .
- 6 Exprimer le gain  $G(x)$  en décibels.
- 7 Tracer l'allure de la courbe de la réponse  $G(x)$  en fonction de  $\log(x)$ .

### résolution méthodique

- 1 Pulsation propre du circuit  $R'LC$  (voir chapitre 4) :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A.N. :  $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Fréquence propre du circuit  $R'LC$  :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

A.N. :  $f_0 = 0,16 \text{ kHz}$ .

Facteur de qualité  $Q$  :

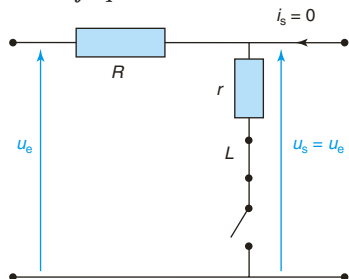
$$Q = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

A.N. :  $Q = 0,50$ .

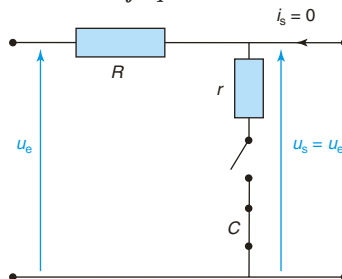
Le facteur de qualité est celui du circuit  $R'LC$ .

La pulsation et la fréquence propres sont indépendantes de la valeur de la résistance ; seul le facteur de qualité en dépend.

## 2 a. Basse fréquence



## b. Haute fréquence



• À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (figure a) ; il n'y a pas de courant dans le résistor, donc  $u_s = u_e$ .

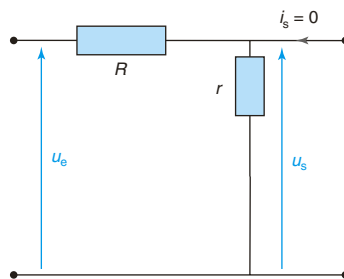
• À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert (figure b), donc  $u_s = u_e$ .

Ce quadripôle n'est **ni un filtre passe-bas, ni un filtre passe-bande, ni un filtre passe-haut**.

## 3

$$\underline{Z} = jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0} = \frac{1 - LC\omega_0^2}{jC\omega_0} = 0.$$

Le circuit se réduit à l'association en série des deux résistors (figure ci-contre).



## 4

Le circuit réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer simplement la fonction de transfert, puis le gain :

$$H = \frac{r}{R + r} = \frac{1}{2} \Rightarrow G = 20 \log(H)$$

A.N. :  $G = -6,0 \text{ dB}$ .

Le gain est négatif dans un domaine de fréquences autour de la fréquence propre, nul à basse et à haute fréquences ; on dit que le quadripôle est un **filtre coupe-bande**.

L'analyse du comportement, à basse et à haute fréquences, permet de déterminer la nature d'un filtre, passe-bas, passe-bande ou passe-haut d'un quadripôle. Elle ne permet pas de reconnaître un filtre coupe-bande ni un passe-tout déphaseur (voir chapitre 7).

5 Le courant de sortie est nul (filtre « en sortie ouverte ») ; le résistor, le condensateur et la bobine sont en série. Le circuit réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{j r C \omega + j^2 L C \omega^2 + 1}{j(R+r)C\omega + j^2 L C \omega^2 + 1} = \frac{1 + j \frac{r}{R+r} \frac{x}{Q} + (jx)^2}{1 + j \frac{x}{Q} + (jx)^2}.$$

Finalement :  $\underline{H}(jx) = \frac{1 + jx + (jx)^2}{1 + 2jx + (jx)^2}$

L'expression de la fonction de transfert doit permettre de retrouver rapidement des résultats déjà établis, à savoir sa valeur à basse et à haute fréquences, et à la fréquence caractéristique.

$$H_{BF} = H_{(x=0)} = \frac{1}{1} = 1 ; \quad H_{HF} = H_{(x \rightarrow \infty)} = \frac{(jx)^2}{(jx)^2} = 1 ;$$

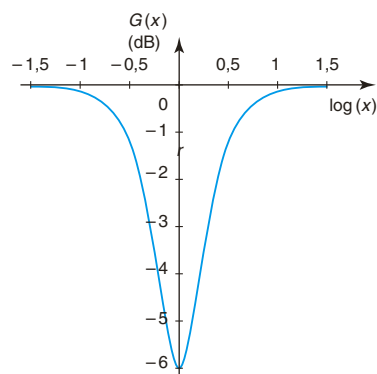
$$H_{(x=1)} = \frac{1 + j \frac{r}{R+r} \frac{1}{Q} - 1}{1 + j \frac{1}{Q} - 1} = \frac{r}{R+r}.$$

6  $\underline{H}(jx) = \frac{1 + jx + (jx)^2}{1 + 2jx + (jx)^2} = \frac{1 - x^2 + jx}{1 - x^2 + 2jx} \Rightarrow |\underline{H}(jx)| = \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2 + x^2}{(1 - x^2)^2 + 4x^2}};$

$$G(x) = 20 \log |\underline{H}(jx)| \Rightarrow G(x) = 10 \log \frac{(1 - x^2)^2 + x^2}{(1 - x^2)^2 + 4x^2}$$

7 Les quelques valeurs du gain du tableau suivant permettent de tracer l'allure de la courbe de la réponse  $G(x)$  en fonction de  $\log(x)$ . On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel comme sur la figure ci-contre.

|                |       |       |      |      |      |       |
|----------------|-------|-------|------|------|------|-------|
| $x$            | 0,1   | 0,5   | 1    | 1,5  | 2    | 10    |
| $\log(x)$      | -1    | -0,30 | 0    | 0,17 | 0,30 | 1     |
| $G(x)$ (en dB) | -0,13 | -2,8  | -6,0 | -4,4 | -2,8 | -0,13 |



Remarque : Les valeurs montrent que la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical.

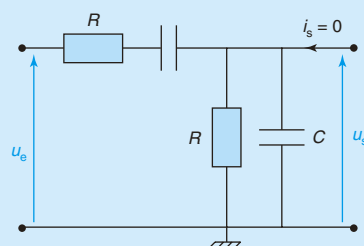
## en conclusion

L'analyse du comportement, à basse et à haute fréquences, permet de déterminer la nature d'un filtre, passe-bas, passe-bande ou passe-haut d'un quadripôle. Elle ne permet pas de reconnaître un filtre coupe-bande ni un passe-tout déphaseur.

## 2 – Filtre passe-bande de Wien

On considère le filtre de la figure ci-contre.

Données :  $C = 0,10 \mu\text{F}$  et  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ .



- 1 Déterminer les comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences. En déduire la nature du filtre.
- 2 Soit  $x$  la pulsation réduite définie par la relation  $RC\omega = x$ . Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite  $\underline{H}(jx)$ .
- 3 Calculer la valeur du facteur de qualité  $Q$ .
- 4 Montrer que la fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

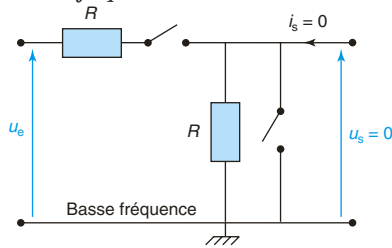
En déduire le gain maximal  $G_{\text{max}}$ .

- 5 Calculer la fréquence caractéristique  $f_0$  du filtre.
- 6 Déterminer la pulsation réduite  $x_1$  de la borne inférieure et la pulsation réduite  $x_2$  de la borne supérieure de la bande passante. En déduire les fréquences  $f_1$  de  $f_2$  correspondantes, puis la bande passante  $\Delta f$ . Vérifier sa valeur à partir de son expression en fonction de  $Q$ .
- 7 Exprimer la phase  $\varphi(x)$  de la fonction de transfert. Déterminer les phases  $\varphi(x_1)$  et  $\varphi(x_2)$ .
- 8 Tracer le diagramme de Bode.
- 9 Établir l'équation différentielle reliant la tension  $u_s(t)$  de sortie à la tension  $u_e(t)$  d'entrée. On introduira la constante de temps  $\tau = RC$ .

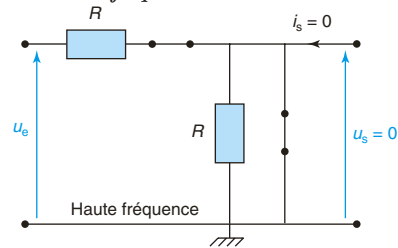
## résolution méthodique

- 1 À basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts (figure a) ; il n'y a aucun courant dans le résistor près de la sortie donc  $u_s = 0$ . À haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés (figure b), donc  $u_s = 0$ . Le filtre est un **filtre passe-bande**.

**a. Basse fréquence**

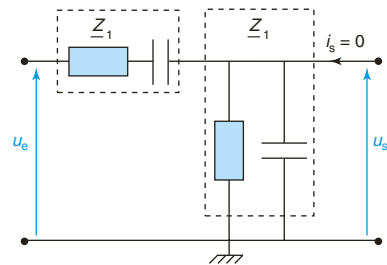


**b. Haute fréquence**



2 Le condensateur et le résistor près de l'entrée sont en série ; soit  $\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$  l'impédance de leur association (figure ci-contre).

Le condensateur et le résistor près de la sortie sont en parallèle ; soit  $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$  l'admittance et  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2}$  l'impédance de leur association.



Le courant de sortie est nul. Le dipôle  $\underline{Z}_1$  et le dipôle  $\underline{Z}_2$  sont traversés par le même courant ; ils sont en série. Le circuit  $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$  réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer facilement la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

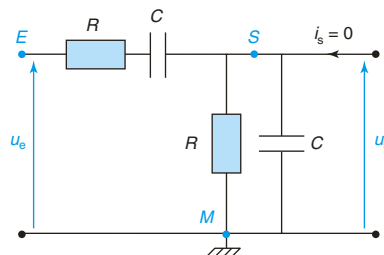
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + 1 + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{3 + jx + \frac{1}{jx}}$$

Finalement :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Faire apparaître le plus tôt possible la pulsation réduite pour simplifier le calcul de la fonction de transfert.

• **Autre méthode** : utilisation de la loi des noeuds en termes de potentiels (théorème de Millmann) (figure ci-dessous).



$$\underline{u}_s \left[ \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right] = \frac{1}{R} \underline{u}_M + jC\omega \underline{u}_M + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_e.$$

Le point  $M$  est à la masse donc  $\underline{u}_M = 0$ . Il vient :

$$\underline{u}_s \left[ \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right] = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_e$$

$$\underline{u}_s \left[ \frac{1+jx}{R} + \frac{jC\omega}{jx+1} \right] = \frac{jC\omega}{jx+1} \underline{u}_e \Rightarrow \frac{\underline{u}_s}{R} \left[ 1+jx + \frac{jx}{jx+1} \right] = \frac{jx}{jx+1} \frac{\underline{u}_e}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_s [(1+jx)^2 + jx] = jx \underline{u}_e.$$

Finalement :

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

La méthode du diviseur de tension est plus simple et plus rapide ; elle doit être préférée.

➤ **3** Par identification avec la relation donnée au § 2.1 du cours, il vient :

$$Q = \frac{1}{3}$$

On remarque que  $A_0 = \frac{1}{3}$ .

➤ **4** Le gain est maximal quand le module  $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left[x - \frac{1}{x}\right]^2}}$  de la fonction de transfert est maximal soit pour  $x = 1$ .

$$|\underline{H}|_{\max} = \frac{1}{3} \text{ et } G_{\max} = G_{(x=1)} = 20\log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}$$

➤ **5** La pulsation caractéristique  $\omega_0$  du filtre est telle que  $x = 1$ , d'où :

$$RC\omega_0 = RC2\pi f_0 = 1 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 0,16 \text{ kHz}$$

➤ **6** Appliquons la méthode de détermination de la bande passante donnée au chapitre 7.

• Valeur maximale du module de la fonction de transfert :  $|\underline{H}|_{\max} = \frac{1}{3}$ .

• Résolution de l'équation  $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$  :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left[x - \frac{1}{x}\right]^2}} = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \left[x - \frac{1}{x}\right]^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 3\epsilon x - 1 = 0 \text{ avec } \epsilon = \pm 1$$

$$\Delta = 9 + 4 = 13 \Rightarrow x = \frac{3\epsilon \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} = 0,30 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,3 ;$$

$$\Delta x = 3,0.$$

On en déduit :  $f_1 = f_0 x_1 = 48 \text{ Hz}$  ;  $f_2 = f_0 x_2 = 0,52 \text{ kHz}$  ;  $\Delta f = f_0 \Delta x = 0,48 \text{ kHz}$

La bande passante d'un filtre passe-bande est donnée par la relation  $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$ , soit :

$$\Delta f = 0,48 \text{ kHz}$$

Ce résultat est bien en accord avec celui trouvé à partir de la définition.

➤ **7**  $\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right),$

d'où  $\varphi(x) = -\arctan \left[ \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right) \right]$

$$\tan \varphi_{(x_1 = 0,30)} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\tan \varphi_{(x_2 = 3,3)} = -1 \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

➤ **8** Construction du diagramme de Bode.

#### a. Comportement asymptotique à basse fréquence

Quand  $x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx jx = xe^{+j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |\underline{H}(x)| \approx x \Rightarrow G_{\text{BF}} = 20 \text{ lc}$  et  $\varphi_{\text{BF}} = \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence :

$$G_{\text{BF}} = 20 \log(x) \quad \text{et} \quad \varphi_{\text{BF}} = \frac{\pi}{2}$$

#### • Expression à la fréquence caractéristique ( $x = 1$ )

$$x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = \frac{1}{3} \Rightarrow |\underline{H}(1)| = \frac{1}{3} \Rightarrow G_{(x=1)} = G_{\max} = -9,52 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \varphi_{(x=1)} = 0.$$

La courbe du gain en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; -9,52 \text{ dB})$ .

La courbe de la phase en fonction de  $\log(x)$  passe par le point  $(0 ; 0)$ .

#### • Comportement asymptotique à haute fréquence

Grand Quand  $x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx \frac{1}{jx} = \frac{1}{x} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |\underline{H}(x)| \approx \frac{1}{x} \Rightarrow G_{\text{HF}} = -20 \text{ lc}$  et  $\varphi_{\text{HF}} = -\frac{\pi}{2}$ .



On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence :

$$G_{\text{HF}} = -20\log(x) \quad \text{et} \quad \varphi_{\text{HF}} = -\frac{\pi}{2}.$$

**b.** La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites qui se coupent au point de coordonnées (0 ; 0).

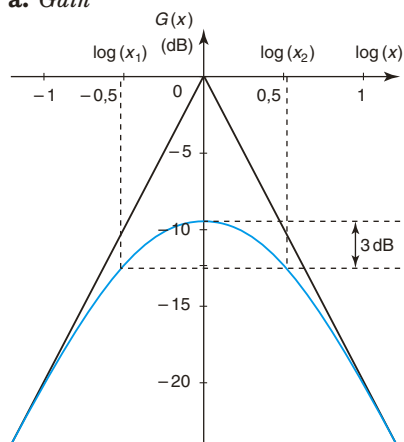
Les courbes asymptotiques du gain et de la phase en fonction de  $\log(x)$  sont en traits noirs sur les figures ci-dessous.

**c.** Les quelques valeurs du gain et de la phase du tableau suivant permettent de tracer l'allure du diagramme de Bode. On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel (figures ci-dessous).

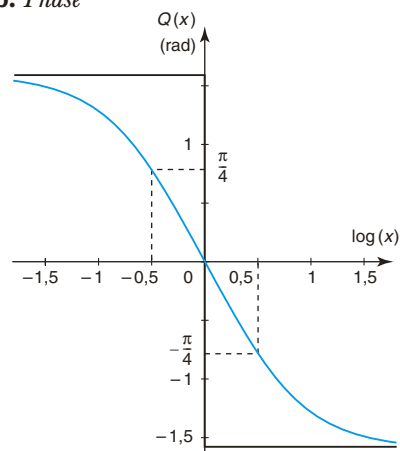
| $x$                | 0,1 | $x_1 = 0,3$ | 1    | $x_1 = 3,3$ | 10   |
|--------------------|-----|-------------|------|-------------|------|
| $\log(x)$          | -1  | -0,52       | 0    | 0,52        | 1    |
| $G(x)$ (en dB)     | -20 | -12,5       | -9,5 | -12,5       | -20  |
| $\varphi$ (en rad) | 1,3 | 0,78        | 0    | -0,78       | -1,3 |

*Remarque :* Les valeurs montrent que les courbes sont symétriques par rapport aux axes verticaux.

**a. Gain**



**b. Phase**



9 
$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + 3jx + (jx)^2} = \frac{j\omega\tau}{1 + 3j\omega\tau + (j\omega\tau)^2} \Rightarrow [1 + 3j\omega\tau + (j\omega\tau)^2]\underline{u}_s = j\omega\tau\underline{u}_e$$

En remplaçant, d'une part l'expression  $j\omega$  par  $\frac{d}{dt}$  et d'autre part l'expression  $(jx)^2$  par  $\frac{d^2}{dt^2}$ , il vient :

$$u_s + 3\tau \frac{du_s}{dt} + \tau^2 \frac{d^2u_s}{dt^2} = \tau \frac{du_e}{dt}.$$

L'équation différentielle d'un système du deuxième ordre se déduit de la fonction de transfert en remplaçant chaque terme  $j\omega$  par l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  et chaque terme  $(j\omega)^2$  par l'opérateur  $\frac{d^2}{dt^2}$ .

## en conclusion

- Faire apparaître le plus tôt possible la pulsation réduite pour simplifier le calcul de la fonction de transfert.
- L'équation différentielle d'un système du deuxième ordre se déduit de la fonction de transfert en remplaçant chaque terme  $j\omega$  par l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  et chaque terme  $(j\omega)^2$  par l'opérateur  $\frac{d^2}{dt^2}$ .

### 3 – Tension triangulaire à l'entrée d'un filtre passe-bande

- 1 La courbe ci-contre est celle du gain  $G(x)$ , exprimé en décibels, d'un filtre de pulsation de résonance  $\omega_r$ , en fonction de la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_r}$ .

Quelle est la nature du filtre ?

- 2 Tracer les asymptotes. Quel est l'ordre du filtre ?

- 3 La fonction de transfert réduite peut se mettre sous la forme  $\underline{H}(jx) = A_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ .

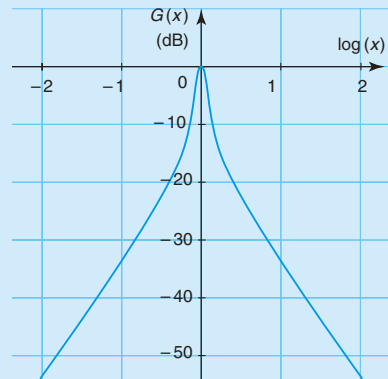
Déterminer graphiquement la constante  $A_0$ , et le facteur de qualité  $Q$ . On donne  $\log(2) = 0,30$ .

- 4 On injecte en entrée une tension triangulaire positive de fréquence  $\omega_r$  et d'amplitude 1,0 V d'expression :

$$u_e(t) = 0,5 + \frac{4}{\pi^2} \left[ \cos \omega_r t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_r t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_r t + \dots \right] \text{ (en volts).}$$

Déterminer la tension de sortie  $u_s(t)$  en ne gardant que les termes pertinents.

- 5 Par un dispositif approprié, on triple la pulsation de résonance du filtre, toutes choses égales par ailleurs. Déterminer la tension de sortie  $u'_s(t)$  en fonction de la pulsation réduite.



## résolution méthodique

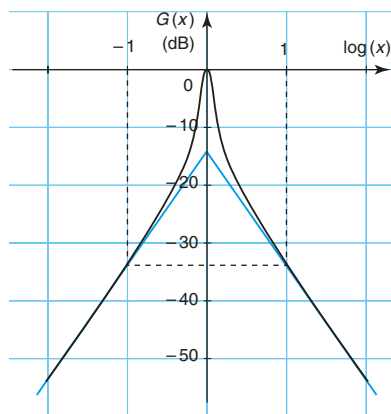
1 On reconnaît sur la figure ci-contre la courbe du gain d'un filtre passe-bande.

2 On constate que les asymptotes se coupent au point (0 ; -14 dB).

On lit sur la courbe que l'ordonnée du point d'abscisse -1 est égale à -34 dB ; la pente de l'asymptote basse fréquence est donc égale à 20 dB par décade.

On lit aussi sur la courbe que l'ordonnée du point d'abscisse 1 est égale à -34 dB ; la pente de l'asymptote haute fréquence est donc égale à -20 dB par décade.

Le filtre est **passe-bande du second ordre**.



$$3 \quad G_{(x=1)} = 0 \Rightarrow |H|_{(x=1)} = A_0 \left| \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right|_{x=1} = 1$$

$$A_0 = 1$$

On sait (voir § 2.4. du cours) que les asymptotes se coupent au point (0 ;  $-20\log Q$ ).

$$\text{On en déduit } -20\log Q = -14 \Rightarrow \log Q = 0,70 = 1 - 0,30 = \log\left(\frac{10}{2}\right).$$

$$Q = 5,0$$

4 Travaillons en notation complexe. La tension d'entrée s'écrit sous la forme d'une somme de tensions :

$$u_e = 0,5 + \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} e^{j3\omega_r t} + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} e^{j5\omega_r t} + \dots$$

D'après le théorème de superposition, la tension de sortie s'écrit sous la forme d'une somme de tensions :

$$u_s = \underline{H}_{x=0} 0,5 + \underline{H}_{x=1} \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} + \underline{H}_{x=3} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} e^{j3\omega_r t} + \underline{H}_{x=5} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} e^{j5\omega_r t} + \dots$$

Lorsque la tension d'entrée d'un quadripôle est une somme de tensions sinusoïdales, il faut calculer indépendamment la tension de sortie de chacune des tensions composantes. La tension de sortie est égale à la somme des tensions de sortie.

Exprimons chacune des composantes de la tension de sortie :

- $\underline{u}_{s0} = \underline{H}_{x=0} 0,5 = 0$  ;
- $\underline{u}_{s1} = \frac{1}{1 + j5\left(1 - \frac{1}{1}\right)} \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} = \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t}$  ;
- $\underline{u}_{s3} = \frac{1}{1 + j5\left(3 - \frac{1}{3}\right)} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} e^{j3\omega_r t} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} \frac{1}{1 + \frac{40}{3}j} e^{j3\omega_r t} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{40}{3}\right)^2}} e^{j(3\omega_r t - \alpha_3)}$   
?Plus Grand Que?> 1

avec  $\tan \alpha_3 = \frac{40}{3}$  ;

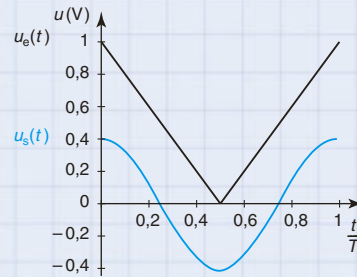
$\underline{u}_{s3} \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} \frac{3}{40} e^{j(3\omega_r t - \alpha_3)}$ , soit  $\underline{u}_{s3} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{120} e^{j(3\omega_r t - \alpha_3)}$  avec  $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$  ;

- $\underline{u}_{s5} = \frac{1}{1 + j5\left(5 - \frac{1}{5}\right)} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} e^{j5\omega_r t} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} \frac{1}{1 + 24j} e^{j5\omega_r t} \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{600} e^{j(5\omega_r t - \alpha_5)}$  avec  $\tan \alpha_5 = 24$ .

On voit les amplitudes des tensions composantes de pulsations réduites supérieures à 1 sont inférieures à 1 % de l'amplitude de la tension de pulsation réduite  $x = 1$  ; on peut

négliger ces termes. La tension de sortie se réduit à :  $u_s(t) = \frac{4}{\pi^2} \cos \omega_r t \text{ (V)}$

Le filtre permet de sélectionner en sortie la composante sinusoïdale de la tension d'entrée dont la pulsation est égale sa pulsation de résonance.  
La figure ci-contre est une simulation obtenue avec un logiciel de calcul formel (Maple).  $T$  est la période.



## 5 Exprimons chacune des composantes de la tension de sortie :

- $\underline{u}'_{s0} = \underline{H}_{x=0} 0,5 = 0$  ;
- $\underline{u}'_{s1} = \frac{1}{1 + j5\left(\frac{1}{3} - 3\right)} \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} = \frac{1}{1 - \frac{40}{3}j} \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} \approx \frac{3}{40} j \frac{4}{\pi^2} e^{j\omega_r t} = \underbrace{\frac{3}{40} \frac{4}{\pi^2}}_{U_1} e^{j\left(\omega_r t + \frac{\pi}{2}\right)}$  ;
- $\underline{u}'_{s3} = \frac{1}{1 + j5\left(1 - \frac{1}{1}\right)} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9} e^{j3\omega_r t} = \underbrace{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{9}}_{U_3} e^{j3\omega_r t}$  ;
- $\underline{u}'_{s5} = \frac{1}{1 + j5\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right)} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} e^{j5\omega_r t} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} \frac{1}{1 + \frac{21}{2}j} e^{j5\omega_r t} \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{25} \frac{2}{21} e^{j\left(5\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right)} = \underbrace{\frac{4}{\pi^2} \frac{2}{525}}_{U_5} e^{j\left(5\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right)}$ .

Comparons les amplitudes des tensions de sortie :

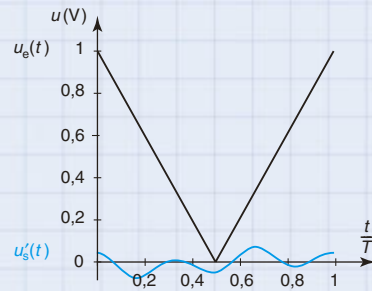
$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{27}{40} = 0,67 ; \quad \frac{18}{525} = 0,034 \text{ ? Moins Que}$$

Les amplitudes des composantes de rangs différents de 1 et 3 sont négligeables. La tension de sortie peut s'écrire :

$$u'_s(t) = \frac{4}{\pi^2} \left[ \frac{3}{40} \cos \left( \omega_r t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{9} \cos 3\omega_r t \right] \text{ (V)}$$

La tension de sortie n'est pas sinusoïdale.

La figure ci-contre est une simulation obtenue avec un logiciel de calcul formel (Maple).  
La tension de sortie n'est pas sinusoïdale.



## en conclusion

Lorsque la tension d'entrée d'un quadripôle est une somme de tensions sinusoïdales, il faut calculer indépendamment la tension de sortie de chacune des tensions composantes. La tension de sortie est égale à la somme de tensions de sortie.

# Index

## A

Adaptation d'impédance 96  
Admittance 67  
    complexe 67  
Amortissement 126, 129, 132  
Amplificateur opérationnel 101  
Amplitude complexe 66  
Analyse de Fourier 65  
ARQP 53  
ARQS 53  
Association  
    en série 72  
    parallèle 73  
Association de générateurs  
    en parallèle 28  
    en série 25  
Association de résistors  
    en parallèle 27  
    en série 24

## B

Bande passante à  $-3$  dB 102  
Bobine 44  
Branche 4

## C

Capacité  $C$  d'un condensateur 39  
Caractéristique d'un dipôle 7  
Circuit  
    LC 61  
    RC 39  
    RL 44  
    RLC 47  
Circuit électrique 4  
Coefficient d'amortissement 48  
Comportements asymptotiques  
d'un filtre 108  
Condensateur 39  
Conductance 7, 67  
Conducteur ohmique 7  
Constante de temps 41, 44  
Courant électromoteur 8

## D

Déphasage 64  
Dérivateur 110  
Diode 14  
Dipôle 4  
    actif 7  
    passif 7  
Diviseur  
    de courant 28, 74  
    de tension 25, 72

## E

Échelon de tension 40  
Énergie  
    électrique 40  
    magnétique 44

## F

Facteur  
    de puissance 90  
    de qualité 126, 129, 132  
Facteur de qualité 48  
Facteur de qualité  $Q$  76, 77  
Filtre  
    coupe-bande 137  
    passe-bande 140, 145  
    passe-bas du deuxième ordre  
        126  
    passe-bas du premier ordre  
        102  
    passe-haut du deuxième ordre  
        132  
    passe-haut du premier ordre  
        105  
Fonction de transfert 100  
Force électromotrice 8  
Fréquence  
    caractéristique 132  
    de résonance 129  
    propre 129  
Fréquence de coupure 102, 105

## G

Générateur 6, 18  
    de signaux électriques (GBF )  
        64  
    réel 71  
Générateur idéal  
    de courant 71  
    de tension 71

## I

Impédance 67  
Impédances complexes 66  
Inductance 44  
    propre 44  
Intégrateur 110  
Intégrateur et pseudo-intégrateur  
120  
Intensité 5

## L

La loi d'ohm en représentation  
complexe 66  
Loi  
    d'Ohm 7  
    de Pouillet 73  
    des mailles 6, 69  
    des nœuds 5, 69  
    des nœuds en termes de poten-  
        tiel 70  
Loi de Pouillet 26  
Loi des nœuds 30  
    en termes de potentiels 30, 31  
Lois de Kirchhoff 32

## M

Maille 4  
Masse 64, 65  
Masse d'un circuit 30  
Multimètre numérique 64

## N

Nœud 4

## O

Oscilloscope 65

## P

Passe-tout déphaseur du premier ordre 118

Période propre 48

Point de fonctionnement 9

Potentiel 30

Puissance 18

instantanée 89

moyenne 89, 90

Pulsation

caractéristique 132

de résonance 129

propre 129

Pulsation de coupure 102, 105

Pulsation propre 48

## Q

Quadripôle 99

## R

Réactance 67

Récepteur 6, 18

Réduction canonique 41, 48

Réduction du circuit 31

Relèvement du facteur de puissance 95

Représentations de Thévenin et de Norton 29

Résistance 7, 67

critique 51

Résistivité 19

Résistor 7

Résonance 128

en intensité 75

en tension 78

Résonance en puissance 93

## S

Signaux sinusoïdaux 63

Stabilité 109

Susceptance 67

## T

Tension 6

alternative sinusoïdale 52

en crêteaux 52

Théorème de Millman 30, 70

## V

Valeur

efficace 64

moyenne 63

Valeur efficace 90