



Visiter notre Forum : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

Visiter notre page :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>


HH Prépa

édition spéciale

Physique

MPSI-PCSI-PTSI

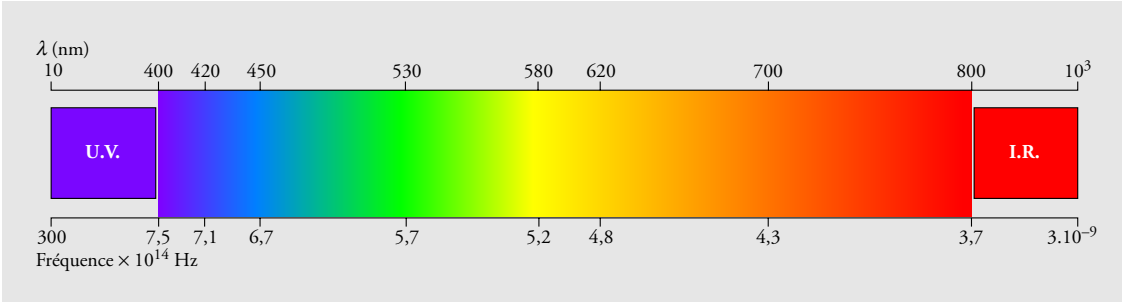
*Spécialement conçu pour
bien démarrer
votre prépa*

- 
- ▶ Approfondissement des notions utiles pour la prépa
 - ▶ De nombreux exercices
 - ▶ Tous les corrigés



HACHETTE
Supérieur

Correspondance entre fréquence, longueur d'onde dans le vide et couleur pour les ondes lumineuses



Le système légal (système international S.I.)

| Grandeur mesurée | Nom de l'unité | Abréviation | Relations avec d'autres unités |
|-----------------------|----------------------------|---------------------|--|
| longueur | mètre | m | 1 Hz = 1 s ⁻¹ |
| aire | mètre carré | m ² | |
| volume | mètre cube | m ³ | |
| temps | seconde | s | |
| fréquence | hertz | Hz | |
| vitesse | mètre par seconde | m.s ⁻¹ | 1 N = 1 kg.m.s ⁻² |
| accélération | mètre par seconde au carré | m.s ⁻² | |
| angle | radian | rad | |
| vitesse angulaire | radian par seconde | rad.s ⁻¹ | 1 J = 1 N.m = 1 kg.m ² .s ⁻² 1 W = 1 J.s ⁻¹ = 1 kg.m ² .s ⁻³ |
| masse | kilogramme | kg | |
| masse volumique | kilogramme par mètre cube | kg.m ⁻³ | 1 C = 1 A.s |
| force | newton | N | |
| travail | | | 1 V = 1 J.C ⁻¹ 1 Ω = 1 V.A ⁻¹ 1 F = 1 C.V ⁻¹ 1 H = 1 J.A ⁻¹ 1 T = 1 N.A ⁻¹ .m ⁻¹ = 1 kg.s ⁻² .A ⁻¹ |
| énergie | joule | J | |
| puissance | watt | W | 1 Pa = 1 N.m ⁻² = 1 kg.m ⁻¹ .s ⁻² |
| intensité électrique | ampère | A | |
| charge électrique | coulomb | C | |
| potentiel électrique | | | |
| tension | volt | V | |
| résistance électrique | ohm | Ω | |
| capacité | farad | F | |
| inductance | henry | H | |
| champ magnétique | tesla | T | |
| température | kelvin | K | |
| pression | pascal | Pa | |
| quantité de matière | mole | mol | |



Physique

MPSI-PCSI-PTSI

Marc MÉNÉTRIER

Professeur en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

Philippe GIRIN

Professeur au lycée Thiers à Marseille

Hervé IDDA

Professeur en classes préparatoires au lycée Paul-Cézanne à Aix-en-Provence

Michel FANGUET

Professeur au lycée Jean-Lurçat à Martigues

Maquette de couverture : *Alain Vambacas*.

Maquette intérieure : *MO Design*.

Composition et mise en page : *Laser Graphie*.

Photographies : *Alain Béguerie* (p. 142).

© HACHETTE Livre 2003, 43 quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15.

www.hachette-education.com

ISBN 978-2-01-181571-2

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5 d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Avant-propos

Vous venez d'obtenir le bac et vous vous destinez à des études scientifiques. Cet ouvrage ne ressemble pas à vos manuels de lycée, ni à ceux que vous utiliserez par la suite.

Son objectif est double : assurer les bases qui vous permettront de profiter au mieux de l'enseignement que vous allez suivre et vous familiariser avec les problèmes que vous allez aborder et avec les méthodes que vous allez devoir acquérir.

Notre expérience d'enseignants, tant au lycée qu'en classes préparatoires, nous a permis de répertorier les principales difficultés sur lesquelles un grand nombre d'étudiants débutants achoppent. Nous y avons porté une attention particulière : il est important d'avoir des idées claires sur les bases d'une discipline avant d'en aborder les aspects plus complexes.

Chaque chapitre est découpé en trois parties :

■ **Un rappel des connaissances essentielles acquises au cours de vos études secondaires, intitulé « Ce qu'il faut savoir ».**

Il se peut que vous soyez parfois surpris par la forme de ces rappels. Ainsi, avons-nous utilisé la classification des disciplines qui sera celle que vous retrouverez par la suite. De plus, nous avons fortement insisté sur des points qui ont pu vous paraître secondaires jusqu'ici. Si vous les lisez attentivement, vous vous rendrez compte que ce sont effectivement des rappels.

L'*index* placé à la fin de l'ouvrage vous permettra de retrouver rapidement le détail qui vous aurait échappé.

■ **Une première série d'exercices, intitulée « Pour faire le point ».**

Ces exercices devraient pouvoir être résolus sans grande difficulté par un élève qui a correctement assimilé la physique enseignée au lycée. Ils vous permettront de tester vos connaissances de base.

■ **Une deuxième série d'exercices, intitulée « Pour aller plus loin ».**

Bien qu'ils n'utilisent que les connaissances vues au lycée, ces exercices constituent une initiation aux méthodes que vous allez devoir utiliser dans l'enseignement supérieur. Ils demandent en général une plus grande rigueur dans l'analyse du système étudié, une plus grande maîtrise des concepts, et parfois une bonne habileté dans les calculs. Il est normal que vous n'arriviez pas à les résoudre tous sans effort ! En vous y « frottant » et en étudiant les solutions, vous vous familiariserez avec les exercices qui vous seront proposés par la suite.

Les énoncés sont en général suivis de « Conseils ». Commencez par essayer de résoudre le plus de questions possibles sans regarder les conseils. Ensuite, vous pouvez utiliser ces conseils. Et enfin, si vous ne trouvez toujours pas, regardez la solution. L'essentiel n'est pas la solution elle-même, mais les **méthodes** qui ont permis d'y parvenir. Lisez donc très attentivement les solutions et les remarques qui les complètent : il vaut mieux faire peu d'exercices bien compris que d'en survoler beaucoup.

Il ne nous reste qu'à vous féliciter de votre choix pour des études scientifiques et à vous souhaiter de les mener avec succès.

Les auteurs

Sommaire

| | |
|---|-----|
| 1. Cinématique..... | 6 |
| 2. Forces | 20 |
| 3. Étude dynamique du mouvement d'un solide | 35 |
| 4. Systèmes mécaniques oscillants..... | 53 |
| 5. Travail et énergie mécanique..... | 70 |
| 6. Thermodynamique | 88 |
| 7. Circuits électriques en courant continu..... | 105 |
| 8. Circuits électriques en régime variable..... | 122 |
| 9. Champ magnétique | 141 |
| 10. Ondes mécaniques progressives | 152 |
| 11. Optique géométrique..... | 164 |
| 12. La lumière | 182 |

■ Annexes

| | |
|---|-----|
| 1. Grandeurs physiques et dimensions..... | 189 |
| 2. Écriture d'un résultat numérique..... | 190 |
| 3. Équations différentielles du premier ordre | 191 |
| I ndex | 192 |

■ En couverture

Verso de la couverture : Correspondance entre fréquence, longueur d'onde dans le vide et couleur pour les ondes lumineuses ; le système légal (système international S.I.).

Dernière page : Valeurs de quelques constantes de la Physique ; valeurs approchées et ordres de grandeurs.

1 Cinématique

Les notions de force ou d'énergie n'interviennent pas dans une étude cinématique.

Lorsque l'on décrit un mouvement, il faut toujours préciser le référentiel, c'est-à-dire l'observateur dont on adopte le point de vue.

Ce qu'il faut savoir...

La cinématique est la description du mouvement sans se préoccuper de ses causes ou de ses effets.

1. Référentiel et mouvement

■ Définitions

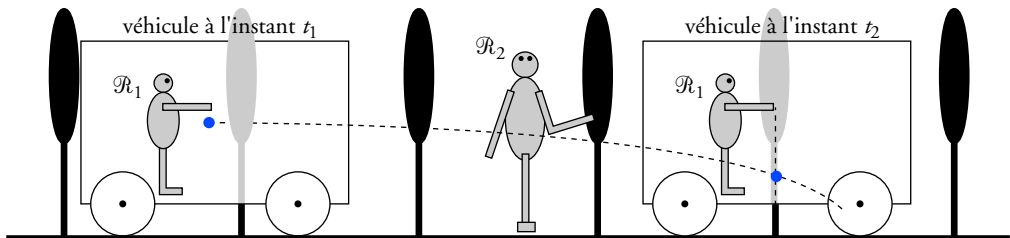
- Un objet peut être immobile pour un observateur et en mouvement pour un autre observateur : la notion de mouvement est relative.
- Un **référentiel** \mathcal{R} est un solide de référence qui reste immobile pour un observateur donné.

Un point mobile passe successivement par différents points qui constituent une ligne appelée **trajectoire**. Cette trajectoire dépend du référentiel choisi.

Voir exercice n° 7

■ Exemple

Observons le mouvement d'une bille lâchée par le passager d'un véhicule (doc. 1).



Doc. 1

- Les parois du véhicule constituent un référentiel pour le passager, que nous notons \mathcal{R}_1 .
La bille lâchée par le passager décrit dans \mathcal{R}_1 une trajectoire verticale. En toute rigueur, il faudrait parler de la trajectoire du centre de la bille.
- La route et les arbres constituent un référentiel pour l'auto-stoppeur, que nous notons \mathcal{R}_2 .
La bille lâchée par le passager décrit dans \mathcal{R}_2 une trajectoire courbe.

2. Vitesse et vecteur vitesse

Un point mobile M se déplace sur une trajectoire du référentiel \mathcal{R} . Entre les dates t_1 et t_2 , il passe de la position M_1 à la position M_2 en parcourant une distance L_{12} mesurée le long de la trajectoire.

- Sa **vitesse moyenne** v_m dans le référentiel \mathcal{R} entre les instants t_1 et t_2 est :

$$v_m = \frac{L_{12}}{t_2 - t_1}.$$

- Sa **vitesse instantanée** à la date t_1 dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{L_{12}}{t_2 - t_1} \quad \text{ou encore} \quad v(t_1) = \left(\frac{dL}{dt} \right)_{t=t_1}.$$

- O étant un point fixe de \mathcal{R} (par exemple l'origine des coordonnées), le **vecteur vitesse** dans le référentiel \mathcal{R} du point M à la date t est la dérivée par rapport au temps du vecteur position \overrightarrow{OM} :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}.$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire (doc. 2).

Il est dirigé selon le sens du mouvement.

Sa norme est égale à la vitesse instantanée : $\|\vec{v}\| = v$.

- ($O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) étant un repère lié au référentiel \mathcal{R} , le vecteur position du point M et son vecteur vitesse ont pour expression :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

ou, en notant par un point la dérivée par rapport au temps :

$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}.$$

3. Vecteur accélération

- Dans un référentiel \mathcal{R} donné, le vecteur accélération du point mobile M est égal à la dérivée par rapport au temps de son vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

- ($O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) étant un repère orthonormé lié au référentiel \mathcal{R} , le vecteur accélération du point M a pour expression :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}$$

ou, en notant par un double point la dérivée seconde par rapport au temps :

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}.$$

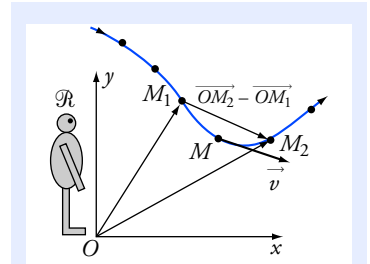
- Les coordonnées du vecteur accélération sont homogènes à une longueur divisée par un temps au carré.

- Dans le système international d'unités (S.I.) :

– l'unité de vitesse est le mètre par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ;

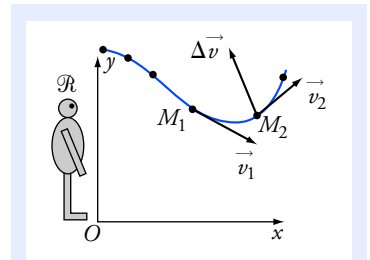
– l'unité d'accélération est le mètre par seconde au carré ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Voir exercice n° 9



L_{12} est la longueur de l'arc $\widehat{M_1 M_2}$. A priori, L_{12} est différent de $\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ mais ces deux quantités ont même limite lorsque M_1 tend vers M_2 .

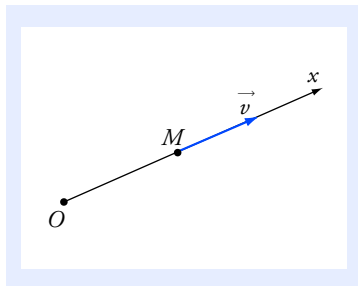
Doc. 2 Vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} .



Si la trajectoire n'est pas rectiligne, le **vecteur accélération n'est pas tangent à la trajectoire**.

On constate sur la figure que : $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ n'est tangent à la trajectoire en aucun point de l'intervalle $M_1 M_2$.

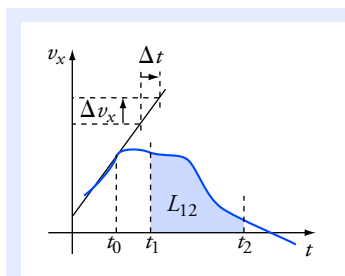
Doc. 3 Variation du vecteur vitesse.



Doc. 4 Le sens du mouvement est donné par le signe de v_x .

Si $v_x > 0$, M s'éloigne de O .

Si $v_x < 0$, M se rapproche de O .



$$\bullet a_x(t_0) = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

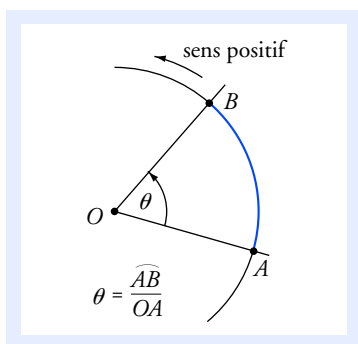
$$\bullet L_{12} = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x(u) du.$$

Doc. 5

On ne peut écrire :

$v_x(t) = a_x(t) + v_x(0)$ que si a_x est constante.

Dans le cas général, il faut déterminer la primitive de la fonction $a_x(t)$ qui vérifie la condition initiale.



Doc. 6

4. Cas particulier d'un mouvement rectiligne

Le mouvement du point mobile M est rectiligne dans \mathcal{R} si sa trajectoire dans ce référentiel est une droite.

• Représentons la trajectoire dans \mathcal{R} par l'axe (Ox) de vecteur unitaire \vec{i} . $x(t)$ représente l'abscisse de M (doc. 4).

Les vecteurs vitesse et accélération ont pour expression :

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} = \dot{x} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} = \ddot{x} \cdot \vec{i}.$$

• Représentons le graphe de la fonction $v_x(t)$ (doc. 5).

L'accélération à l'instant t est représentée par le coefficient directeur de la tangente à la courbe.

La distance parcourue entre les dates t_1 et t_2 est représentée par la valeur absolue de l'intégrale de la vitesse :

$$L_{12} = \left| \int_{t_1}^{t_2} v_x(u) du \right|.$$

• Si on connaît l'expression du vecteur accélération en fonction du temps, on obtient le vecteur vitesse, puis la position par deux intégrations successives.

La vitesse $v_x(t)$ est une primitive de l'accélération $a_x(t)$ et la position $x(t)$ est une primitive de la vitesse $v_x(t)$.

La primitive d'une fonction est déterminée à une constante près. On détermine cette constante à partir des **conditions initiales**, c'est-à-dire la position et la vitesse connues à la date t_0 .

• Si l'accélération a_x est constante, le mouvement est dit **uniformément accéléré**. Dans ce cas particulier, **et seulement dans ce cas**, on obtient :

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0) ;$$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_x(t - t_0)^2 ;$$

$v_x(t_0)$ et $x(t_0)$ étant les valeurs de la vitesse et de la position à la date t_0 .

Voir exercices n° 1, 3, 4, 5 et 6

5. Cas d'un mouvement circulaire

Un point qui, dans un référentiel donné, décrit un cercle est en mouvement circulaire.

• L'angle \widehat{AOB} , exprimé en radian, est égal au rapport de la longueur de l'arc de cercle \widehat{AB} et du rayon $OA = OB$:

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{OA}.$$

L'angle θ est positif si le cercle est parcouru dans le sens positif de rotation, et négatif si le cercle est parcouru dans le sens négatif de rotation (doc. 6).

Un angle exprimé en radian, rapport de deux longueurs, **est un nombre sans dimension**.

• Sur un cercle, on repère la position d'un point par un angle (doc. 7). On remarque que la même position correspond à une infinité d'angles qui diffèrent de 2π radians.

• La **vitesse angulaire** d'un point mobile sur un cercle repéré par l'angle θ est égale à la dérivée de θ par rapport au temps. Si on note ω cette vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{ou} \quad \omega = \dot{\theta}.$$

La vitesse angulaire est positive si le cercle est parcouru dans le sens positif ; elle est négative s'il est parcouru dans le sens négatif.

La vitesse angulaire s'exprime en radian par seconde ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Comme un angle exprimé en radian est un nombre sans dimension, elle est homogène à l'inverse d'un temps.

• Pour exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération, nous définissons deux vecteurs **unitaires** attachés au point M (doc. 8) :

- \vec{T} , tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement ;
- \vec{N} , orthogonal à la trajectoire, contenu dans le plan du cercle et orienté vers le centre O .

• Pour un mouvement circulaire, le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{T}.$$

Si le sens du mouvement coïncide avec le sens positif de rotation, on a également :

$$v = R \cdot \omega = R \cdot \dot{\theta}.$$

On vérifie bien que $v = R \cdot \omega$ est homogène à une longueur divisée par un temps, donc à une vitesse.

• Le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$

$$\text{ou encore : } \vec{a} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{T} + R \cdot \omega^2 \cdot \vec{N} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{T} + R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{N}.$$

On vérifie bien que $R \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$ sont homogènes à une longueur divisée par un temps au carré, donc à une accélération.

• Si la vitesse angulaire ω est constante, on a un **mouvement circulaire uniforme**.

Dans ce cas :

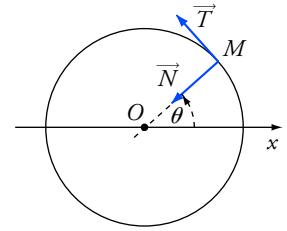
$\theta = \theta(0) + \omega \cdot t$: θ est fonction affine du temps ;

$v = R \cdot \omega$ est une constante ;

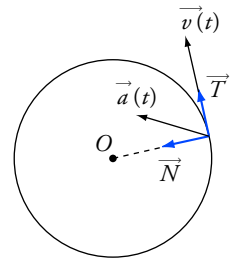
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = R \cdot \omega^2 \cdot \vec{N}.$$

Le vecteur accélération est orthogonal à la trajectoire et dirigé vers le centre.

Voir exercice n° 2



Doc. 7 On repère la position de M par l'angle θ .



Doc. 8 Vecteur vitesse et vecteur accélération.

Dans le cas représenté, la vitesse

augmente : $\frac{dv}{dt} > 0$.

Dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse doit sans cesse changer d'orientation. On constate qu'il faut le faire tourner vers l'intérieur du cercle. C'est ce qui explique le terme

$\frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$ du vecteur accélération.

Un mouvement circulaire uniforme est accéléré.

En effet, bien que sa norme soit constante, le vecteur vitesse est variable car il change constamment d'orientation.

Pour faire le point...

1. Le bon signe

Un point mobile de position M est en mouvement rectiligne le long d'un axe (Ox) orienté de gauche à droite.

Son vecteur vitesse est $\vec{v} = v(t) \cdot \vec{i}$ et son vecteur accélération est $\vec{a} = a(t) \cdot \vec{i}$, $v(t)$ et $a(t)$ algébriques.

On considère quatre types de mouvement numérotés de 1 à 4.

Compléter le tableau en attribuant un type de mouvement à chaque case.

- (1) : M se dirige vers la droite en ralentissant.
- (2) : M se dirige vers la gauche en ralentissant.
- (3) : M se dirige vers la droite en accélérant.
- (4) : M se dirige vers la gauche en accélérant.

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---------|---------|---------|
| $v > 0$ | | |
| $v < 0$ | | |

Conseils

- Bien distinguer la vitesse, grandeur positive, et la valeur algébrique $v(t)$ de la coordonnée du vecteur vitesse ; le signe de $v(t)$ indique le sens de déplacement.
- On dit qu'un mobile est **accéléré** si la valeur de sa vitesse augmente. Quel est le signe de la dérivée d'une fonction négative dont la valeur absolue augmente ?

2. Centrifugeuse

Pour entraîner les astronautes aux fortes accélérations subies lors du décollage et lors de la rentrée dans l'atmosphère, on les place dans un siège situé à l'extrémité d'un bras en rotation.

Un point M du sujet (par exemple son œil droit) décrit dans le référentiel lié au sol un cercle de rayon $R = 5,0$ m à la vitesse angulaire ω .

1. Pourquoi l'énoncé précise-t-il « un point du sujet » et pas simplement « le sujet » ?
2. La vitesse angulaire est stabilisée à une valeur constante ω_0 .
 - a. Déterminer la valeur de ω_0 pour laquelle la valeur de l'accélération du point M dans le référentiel lié au sol est égale à $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On exprimera cette vitesse angulaire en tour par seconde.
 - b. Quelle est la vitesse du point M dans le référentiel lié au sol ? On l'exprimera en km/h.
 - c. Quelle est alors l'accélération dans le référentiel lié au siège ?
3. Partant de la vitesse nulle, la valeur ω_0 est atteinte au bout de 10 secondes, et on suppose que entre $t = 0$ s et $t = 10$ s, la vitesse angulaire est une fonction linéaire du temps. Déterminer le vecteur accélération à la date $t_1 = 5$ s.

Conseils

- Voir le mouvement circulaire : vecteur vitesse et vecteur accélération.
- Si l'unité de temps est la seconde, une vitesse angulaire s'exprime en radian par seconde. Combien de radians y a-t-il dans un tour ?

3. Mouvement rectiligne accéléré

Un point mobile M se déplace le long d'un axe rectiligne (Ox) .

Son accélération est constante : $\vec{a} = a \cdot \vec{i}$.

À la date initiale $t = 0$, son abscisse x est nulle et sa vitesse est égale à v_0 .

1. Déterminer la loi horaire $x(t)$.

Application : Un véhicule, partant de l'arrêt, atteint 100 mètres en 5,0 secondes. En supposant le mouvement uniformément accéléré, déterminer son accélération.

2. v_0 et a sont quelconques ; a est toujours constante. Déterminer la vitesse moyenne de M entre les dates $t - \frac{\Delta t}{2}$ et $t + \frac{\Delta t}{2}$; comparer à la vitesse instantanée à la date t et conclure.

3. On étudie les mouvements de trois points mobiles M_1 , M_2 et M_3 . Pour ces trois mobiles, on relève les abscisses atteintes à différentes dates. Les résultats sont reproduits dans le tableau :

| t (s) | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 |
|-----------|------|------|--------|--------|--------|--------|
| x_1 (m) | 0,37 | 1,57 | 3,37 | 5,77 | 8,77 | 12,37 |
| x_2 (m) | 0,22 | 0,22 | - 0,37 | - 1,57 | - 3,37 | - 5,77 |
| x_3 (m) | 0,39 | 1,29 | 2,50 | 4,10 | 6,49 | 10,09 |

a. Pour chaque mobile, calculer la vitesse moyenne entre les dates :

$t_i - 0,5$ s et $t_i + 0,5$ s, pour $t_i = 1$ s, 2 s, 3 s, 4 s et 5 s.

Reporter les résultats sur un graphique où les instants t_i sont reportés en abscisse et les vitesses moyennes en ordonnée.

On pourra prendre 1 cm pour 1 seconde en abscisse, et 1 cm pour 1 m.s⁻¹ en ordonnée.

b. Un de ces trois mobiles n'est pas en mouvement uniformément accéléré. Lequel ?

Pour les deux autres, déterminer d'après le graphique les valeurs de v_0 et de a .

Conseil

Revoir la définition de la vitesse moyenne et les propriétés d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Pour s'entraîner...

4. Mouvement rectiligne accéléré

Un véhicule se déplace sur une route rectiligne. Pour repérer sa position, on utilise un repère (O ; \vec{i}) dont l'origine O est située sur la route, et dont le vecteur unitaire est parallèle à la route.

À la date initiale $t = 0$, il est à l'origine O et sa vitesse est nulle : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Son accélération est tout d'abord une fonction affine décroissante du temps :

$$\vec{a} = a(t) \cdot \vec{i} \text{ avec } a(t) = a_0 - \alpha \cdot t ; a_0 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } \alpha = 0,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}.$$

Cette loi $a(t)$ est valable jusqu'à ce que la vitesse atteigne la valeur v_1 égale à 15 m.s⁻¹.

La vitesse reste ensuite égale à v_1 .

1. a. Tracer le graphe de la vitesse en fonction du temps.

b. Le problème a-t-il un sens pour toutes les valeurs de v_1 ?

2. Déterminer la durée t_1 de la phase où le véhicule est accéléré. Calculer sa valeur numérique. Repérer la valeur de t_1 sur le graphe.

3. Exprimer en fonction de a_0 , α et t_1 la distance d parcourue pendant cette phase. Comment cette distance est-elle repérée sur le graphe ? Calculer numériquement sa valeur.

Conseils

- **L'accélération n'est pas uniforme.** Pour déterminer la vitesse, puis l'abscisse, il faut intégrer deux fois la fonction $a(t)$. Bien faire attention à déterminer correctement les constantes d'intégration à partir des conditions initiales.
- L'accélération est une fonction affine du temps. Quelle est la forme de la courbe représentant $v(t)$? Peut-on prévoir a priori si l'extrémum est un maximum ou un minimum ?

5. Mouvement rectiligne

Un véhicule se déplace sur une route rectiligne.

Au départ, sa vitesse est nulle, puis dans une première phase, il subit une accélération uniforme de valeur a_1 jusqu'à la date t_1 .

Puis, à partir de t_1 , il est ralenti et la valeur absolue de son accélération est a_2 .

Le mouvement s'arrête à la date t_2 , lorsque la vitesse redevient nulle.

1. Tracer le graphe de la vitesse en fonction du temps.
2. Dédire du graphe une relation entre a_1 , a_2 , t_1 et t_2 .
3. En déduire l'expression de la distance parcourue d en fonction de a_1 , a_2 et t_1 .
Calculer les dates t_1 et t_2 , la vitesse maximale atteinte et la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = t_2$.

Données : $d = 100 \text{ m}$; $a_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $a_2 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Conseils

- Lorsque l'accélération est constante, quelle est l'allure du graphe de $v(t)$?
- La vitesse est une fonction continue du temps : une très brusque variation de vitesse signifierait une valeur très grande de l'accélération.
- La détermination de d revient à calculer l'aire d'un triangle.

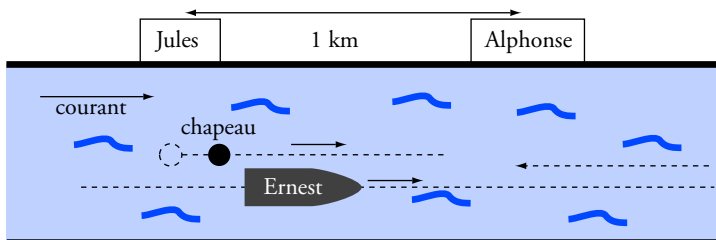
6. Histoires de référentiels

Par une belle après-midi d'été, Ernest fait une promenade en canot sur un fleuve.

Il se déplace tout d'abord dans le sens du courant, et au moment où il passe devant la maison de Jules, il laisse tomber son chapeau qui se met alors à flotter.

Un quart d'heure après la chute du chapeau, il fait demi-tour ; il remonte le courant et il croise son chapeau juste devant la maison d'Alphonse, qui est située à 1 km en aval de celle de Jules.

Quelle est la vitesse du courant ?



On fera les hypothèses suivantes :

- l'eau de la rivière a la même vitesse à chaque instant et en tout point : $\vec{v}_{\text{eau}} = v_0 \cdot \vec{i}$;
- le canot a toujours la même vitesse **par rapport à l'eau** ;
- un objet flottant sans moteur reste immobile par rapport à l'eau.

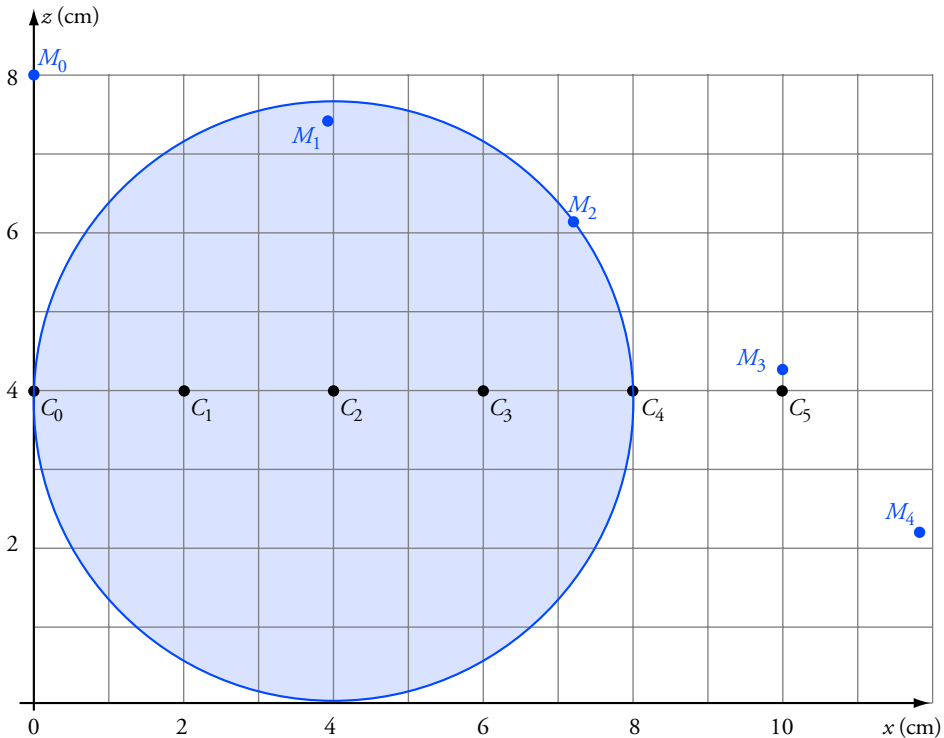
Conseils

- Ne pas chercher à exprimer la vitesse du canot par rapport aux berges. Ce problème a une solution très simple si on se place dans le bon référentiel. Quels sont les deux référentiels envisageables ?
- Décrire le mouvement du canot du point de vue de la libellule qui s'est posée sur le chapeau. En particulier, que peut-on dire **dans ce référentiel** des distances parcourues à l'aller et au retour ?
- Quelle est la vitesse du canot dans le référentiel lié à l'eau ?
- Quel est le rapport, dans un référentiel donné, entre la distance parcourue, la durée et la vitesse ?

7. Étude graphique du mouvement d'un point d'une roue

Une roue de centre C et de rayon R roule sur l'axe $(O; \vec{i})$, tout en restant dans le plan $(O; \vec{k}, \vec{i})$. On s'intéresse au mouvement d'un point M situé sur la circonférence.

La figure ci-dessous représente les positions successives du centre C et du point M à différents instants tous espacés du même intervalle $\Delta t = 0,20$ s. On fixe la date $t = 0$ lorsque C est en C_0 et M en M_0 . Ainsi C est en C_3 à la date $t_3 = 0,60$ s. On a aussi représenté la roue à l'instant t_2 , lorsque C est en C_2 et M en M_2 .



1. Déterminer la vitesse du centre C . Comment peut-on qualifier le mouvement de C ?
2. À partir des positions de M représentées sur la figure ci-dessus, déterminer de façon approchée les coordonnées v_x et v_z du vecteur vitesse aux dates :

$$t_A = 0,10 \text{ s} ; t_B = 0,30 \text{ s} ; t_C = 0,50 \text{ s} ; t_D = 0,70 \text{ s}.$$

3. a. À partir des valeurs calculées précédemment, déterminer de façon approchée les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération aux dates :

$$t_1 = 0,20 \text{ s} ; t_2 = 0,40 \text{ s} ; t_3 = 0,60 \text{ s}.$$

Pour ces quatre dates :

- b. Déterminer une valeur approchée de la norme du vecteur accélération ;
- c. Tracer le vecteur accélération avec son origine en M_i ($i = 1, 4$).

1. Le bon signe

Soit $V(t)$, la vitesse égale à la valeur absolue de $v(t)$: $V(t) = |v(t)|$.

Pour ce mouvement rectiligne : $a(t) = \ddot{x}$ et $v(t) = \dot{x}$;

on en déduit : $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

- La valeur algébrique $v(t)$ est positive si le mobile se dirige vers la droite. Si $v > 0$ alors $V(t) = v(t)$.

$V(t)$ augmente (mouvement accéléré) implique que $v(t)$ augmente, et donc $a > 0$.

$V(t)$ diminue (mouvement ralenti) implique que $v(t)$ diminue, et donc $a < 0$.

- Si $v < 0$ alors $V(t) = -v(t)$.

$V(t)$ augmente (mouvement accéléré) implique que $v(t)$ diminue, et donc $a < 0$.

$V(t)$ diminue (mouvement ralenti) implique que $v(t)$ augmente, et donc $a > 0$.

2. Centrifugeuse

1. Le rayon de rotation, c'est-à-dire la distance à l'axe n'est pas exactement la même pour tous les points du sujet de l'expérience. Le vecteur vitesse et le vecteur accélération n'ont pas la même valeur en tout point.

2. a. Lorsque la vitesse angulaire ω est constante, le mouvement est circulaire et uniforme. Le vecteur accélération est alors orthogonal à la trajectoire et sa valeur est $a = \omega_0^2 \cdot R$.

On en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{R}} ; \text{ soit } \omega_0 = 2,45 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 rad = $\frac{1}{2\pi}$ tour, ce qui donne une vitesse de rotation égale à :

0,39 tour $\cdot \text{s}^{-1}$.

b. La vitesse v est égale à $\omega_0 \cdot R$, soit : $v = 12,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

ou encore :

$$v = \frac{12,2 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{\frac{1}{3\,600} \text{ h}} ; \text{ soit } v = 44 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

c. Le point M est immobile dans le référentiel du siège : son accélération est nulle dans ce référentiel.

3. La vitesse angulaire est fonction linéaire du temps :

$$\omega = \alpha \cdot t \text{ avec } \alpha = 0,245 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

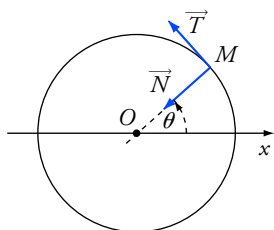
On exprime le vecteur accélération avec les vecteurs unitaires \vec{T} et \vec{N} , soit :

$$\vec{a} = \alpha \cdot R \cdot \vec{T} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{N}.$$

Lorsque $t = t_1$: $\omega = 2,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha \cdot R = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\omega^2 \cdot R = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

$$\vec{a}(t_1) = a_{T_1} \cdot \vec{T} + a_{N_1} \cdot \vec{N} \text{ avec } a_{T_1} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } a_{N_1} = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---------|---------|---------|
| $v > 0$ | (3) | (1) |
| $v < 0$ | (2) | (4) |



$$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{10^{-3} \text{ km}}{\frac{1}{3\,600} \text{ h}}.$$

$$\text{Soit : } 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

On peut retenir ce résultat.

3. Mouvement rectiligne accéléré

1. $\ddot{x} = a$ (constante).

À une constante près, la primitive de $\ddot{x}(t)$ est $\dot{x}(t)$ et celle de a est $a \cdot t$.

D'où : $\dot{x}(t) = a \cdot t + U$.

On détermine la *constante d'intégration* U en écrivant la *condition initiale*

$\dot{x}(0) = v_0$, ce qui s'écrit : $0 + U = v_0$. On en déduit : $\dot{x}(t) = at + v_0$.

À une constante près, la primitive de $\dot{x}(t)$ est $x(t)$ et celle de

$$a \cdot t + v_0 \text{ est : } \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t.$$

On peut donc écrire : $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + A$, avec A constante.

En écrivant la *condition initiale* $x(0) = 0$, on trouve $A = 0$ et donc :

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t.$$

Application numérique : $v_0 = 0$ (départ arrêté), donc $a = \frac{2x}{t^2}$;

soit : $a = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Par définition de la vitesse moyenne : $v_m = \frac{x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$.

Avec $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$, on obtient :

$$v_m = \frac{\frac{a}{2} \left[\left(t + \frac{\Delta t}{2} \right)^2 - \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \right] + v_0 \Delta t}{\Delta t},$$

qui se simplifie en : $v_m = a \cdot t + v_0$.

On remarque que : $v_m = v(t)$.

3. a. On applique à chaque fois la définition de la vitesse moyenne. Les résultats sont reportés dans le tableau, puis sur la figure ci-contre :

| $t \text{ (s)}$ | $v_{1m} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ | $v_{2m} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ | $v_{3m} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ |
|-----------------|---|---|---|
| 1 | 1,20 | 0,00 | 0,90 |
| 2 | 1,80 | - 0,59 | 1,21 |
| 3 | 2,40 | - 1,20 | 1,60 |
| 4 | 3,00 | - 1,80 | 2,39 |
| 5 | 3,60 | - 2,40 | 3,60 |

b. On constate que, avec la précision permise par les données :

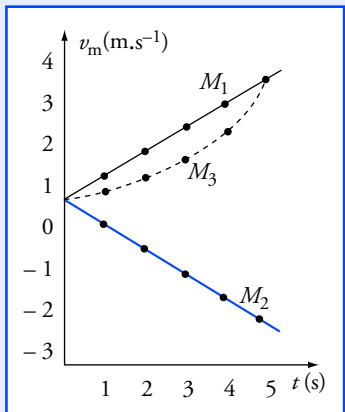
• v_{3m} n'est pas représentable par une fonction affine de t ; le mobile M_3 ne peut donc pas être en mouvement uniformément accéléré.

• v_{1m} et v_{2m} sont représentables par une fonction affine de t ; les mouvements des mobiles M_2 et M_3 peuvent donc être uniformément accélérés.

$v_{1m} = a_1 \cdot t + v_{01}$ avec $a_1 = 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_{01} = 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$v_{2m} = a_2 \cdot t + v_{02}$ avec $a_2 = -0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_{02} = 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le résultat $v_m = v(t)$ n'est vrai que parce que l'accélération a est constante. Cette relation serait fautive dans le cas général.



4. Mouvement rectiligne accéléré

1. a. $a(t)$ est la dérivée de la vitesse $v(t)$; $v(t)$ est donc une primitive de $a(t)$:

$$v(t) = a_0 \cdot t - \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 + U.$$

On détermine la constante d'intégration U par la **condition initiale** $v(0) = 0$.

On en déduit $U = 0$ et donc :
$$v(t) = a_0 \cdot t - \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2.$$

Traçons le graphe de $v(t)$ représenté ci-contre.

- La courbe est une portion de parabole ; la dérivée seconde est négative, donc la fonction admet un maximum.
- Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est $a(0) = a_0$.

- La dérivée s'annule pour $t = t_m = \frac{a_0}{\alpha}$ et pour $v = v_m = \frac{a_0^2}{2\alpha}$;

On trouve : $t_m = 20 \text{ s}$ et $v_m = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b. Cette expression de $v(t)$ cesse d'être valide dès que la vitesse v_1 est atteinte.

On voit que le problème serait impossible si v_1 était supérieur à $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. La phase d'accélération dure jusqu'à la date t_1 pour lequel $v = v_1$.

On obtient donc une équation du second degré en t_1 :

$$v_1 = a_0 \cdot t - \frac{1}{2} \alpha \cdot t_1^2$$

ou encore :

$$\alpha \cdot t_1^2 - 2 a_0 \cdot t_1 + 2 v_1 = 0.$$

Si $v_m = \frac{a_0^2}{2\alpha} > v_1$, cette équation admet deux racines positives. On ne retient que la première, car la loi $v(t)$ cesse d'être valable dès que $v = v_1$:

$$t_1 = \frac{a_0}{\alpha} - \frac{\sqrt{a_0^2 - 2\alpha \cdot v_1}}{\alpha}.$$

Application numérique : $t_1 = 10 \text{ s}$.

3. $v(t)$ est la dérivée de l'abscisse $x(t)$ et donc $x(t)$ est une primitive de $v(t)$.

On en déduit :
$$x(t) = a_0 \cdot t_1^2 - \frac{1}{6} \alpha \cdot t_1^3 + X_0.$$

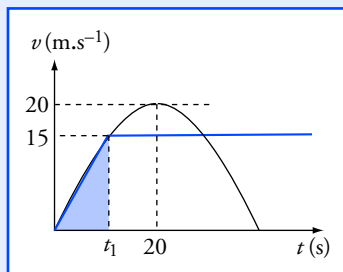
La condition $x(0) = 0$ implique que la constante X_0 est nulle, d'où :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 - \frac{1}{6} \alpha \cdot t^3.$$

Par définition : $d = x(t_1)$, donc :
$$d = \frac{1}{2} a_0 \cdot t_1^2 - \frac{1}{6} \alpha \cdot t_1^3.$$

Cette distance parcourue est égale à l'intégrale $d = \int_0^{t_1} v(t) dt$. Elle est représentée par l'aire délimitée par la courbe sur la figure ci-dessus.

Numériquement : $d = 83,3 \text{ m}$.



t_1 est déterminé par l'intersection de la courbe $v(t)$ et de la droite horizontale $v = v_1$.

5. Mouvement rectiligne

1. $a(t)$ est la dérivée de la vitesse $v(t)$; $v(t)$ est donc une primitive de $a(t)$, soit ici une fonction affine.

Première phase : la pente de $v(t)$ est a_1 et la droite passe par l'origine.

Seconde phase : la pente de $v(t)$ est $-a_2$ et la fonction $v(t)$ est continue en t_1 .

2. On exprime les coefficients directeurs des deux droites à partir de v_{\max} , t_1 et t_2 :

$$a_1 = \frac{v_{\max}}{t_1} \quad \text{et} \quad -a_2 = \frac{0 - v_{\max}}{t_2 - t_1}.$$

On en déduit en éliminant v_{\max} :

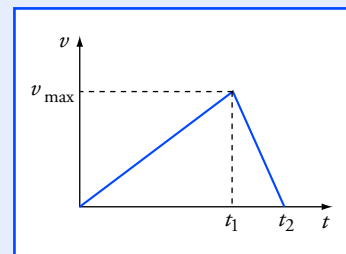
$$a_1 \cdot t_1 = a_2 \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{ou} \quad t_2 = t_1 \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_2}.$$

3. La distance parcourue est représentée géométriquement par l'aire du triangle formé par les deux droites :

$$d = \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_2 \quad \text{ou encore} \quad d = \frac{a_1 \cdot (a_1 + a_2)}{2a_2} \cdot t_1^2.$$

Application numérique : $t_1 = 8,2 \text{ s}$; $t_2 = 12,2 \text{ s}$; $v_{\max} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$v_m = \frac{d}{t_2}$, soit : $v_m = 8,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



• La distance parcourue est donnée par l'intégrale :

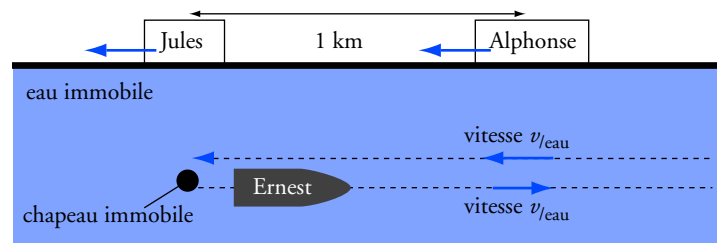
$$d = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt.$$

• L'aire du triangle est égale à :

$$\frac{1}{2} \text{ base} \times \text{hauteur}.$$

6. Histoires de référentiels

On traite le problème dans le référentiel lié à l'eau, ou, ce qui est équivalent, lié au chapeau. Un observateur lié au chapeau voit le canot s'éloigner, puis revenir, tandis que les berges défilent.



Dans ce référentiel, les distances parcourues sont égales à l'aller et au retour. Comme le canot a toujours la même vitesse par rapport à ce référentiel, la durée du trajet aller est égale à la durée du trajet retour.

Le trajet aller durant un quart d'heure, on en conclut que Ernest retrouve son chapeau une demi-heure après l'avoir perdu.

Or, pendant ce temps, le chapeau a été à la vitesse du courant de chez Jules à chez Alphonse : en une demi-heure, le courant a parcouru 1 km.

On en déduit la vitesse du courant : **2 km/h**.

Point de vue de la libellule juchée sur le chapeau, ou, en langage savant : étude dans le référentiel lié à l'eau.

Pour calculer une valeur approchée de la vitesse en un point, on peut utiliser la définition en « supprimant » la précision : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$.

On a alors :

$$\vec{v}(t) \approx \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}.$$

On obtient en fait une approximation plus précise, pour un même Δt , en posant :

$$\vec{v}(t) \approx \frac{\overrightarrow{OM}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \overrightarrow{OM}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}.$$

La décimale (...5) n'est qu'indicative. Les mesures sont trop imprécises pour l'évaluer précisément.

• La précision de la réponse dépend donc de la précision du tracé.

• L'incertitude de lecture sur les coordonnées de $\overrightarrow{M_i M_j}$ est de l'ordre de ± 1 mm.

On en déduit donc l'incertitude sur les composantes de la vitesse qui est de l'ordre de $\pm \frac{1 \text{ mm}}{0,2 \text{ s}}$; soit $\pm 0,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

7. Étude graphique du mouvement d'un point d'une roue

1. Les positions de C pour des intervalles de temps égaux sont équidistantes. On en déduit que la vitesse moyenne entre deux points a toujours la même valeur. On peut donc raisonnablement penser que la vitesse de C est constante.

Le mouvement de C est un **mouvement rectiligne uniforme** :

$$\vec{v}_C = v_C \cdot \vec{i} \quad \text{avec} \quad v_C = \frac{\Delta x_C}{\Delta t}, \quad \text{soit} \quad v_C = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. On utilise la relation approchée :

$$\vec{v}(t) \approx \frac{\overrightarrow{OM}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \overrightarrow{OM}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t},$$

$$\text{Avec } \Delta t = 0,2 \text{ s, cela donne : } \vec{v}(t_A) \approx \frac{\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_0}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_0 M_1}}{\Delta t}.$$

On mesure et on obtient :

$$v_x(t_A) \approx \frac{3,9}{0,20} = 19,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_z(t_A) \approx \frac{-0,5}{0,20} = -2,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On obtient de même :

$$v_x(t_B) \approx \frac{3,5}{0,20} = 17,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_z(t_B) \approx \frac{-1,3}{0,20} = -6,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_x(t_C) \approx \frac{2,6}{0,20} = 13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_z(t_C) \approx \frac{-1,9}{0,20} = -9,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_x(t_D) \approx \frac{1,6}{0,20} = 8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_z(t_D) \approx \frac{-2,0}{0,20} = -10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. a. On obtient la valeur approchée du vecteur accélération à partir des valeurs des coordonnées du vecteur vitesse, selon la même méthode que précédemment :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \vec{v}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}.$$

$$\text{D'où : } a_x(t_1) \approx \frac{v_x(t_B) - v_x(t_A)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad a_z(t_1) \approx \frac{v_z(t_B) - v_z(t_A)}{\Delta t}.$$

$$\text{Soit : } a_x(t_1) \approx \frac{-2,0}{0,20} = -10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad a_z(t_1) \approx \frac{-4,0}{0,20} = -20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2};$$

et de même :

$$a_x(t_2) \approx \frac{-4,5}{0,20} = -22,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad a_z(t_2) \approx \frac{-3,0}{0,20} = -15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$a_x(t_3) \approx \frac{-5,0}{0,20} = -2,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } a_z(t_3) \approx \frac{-0,50}{0,20} = -2,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}.$$

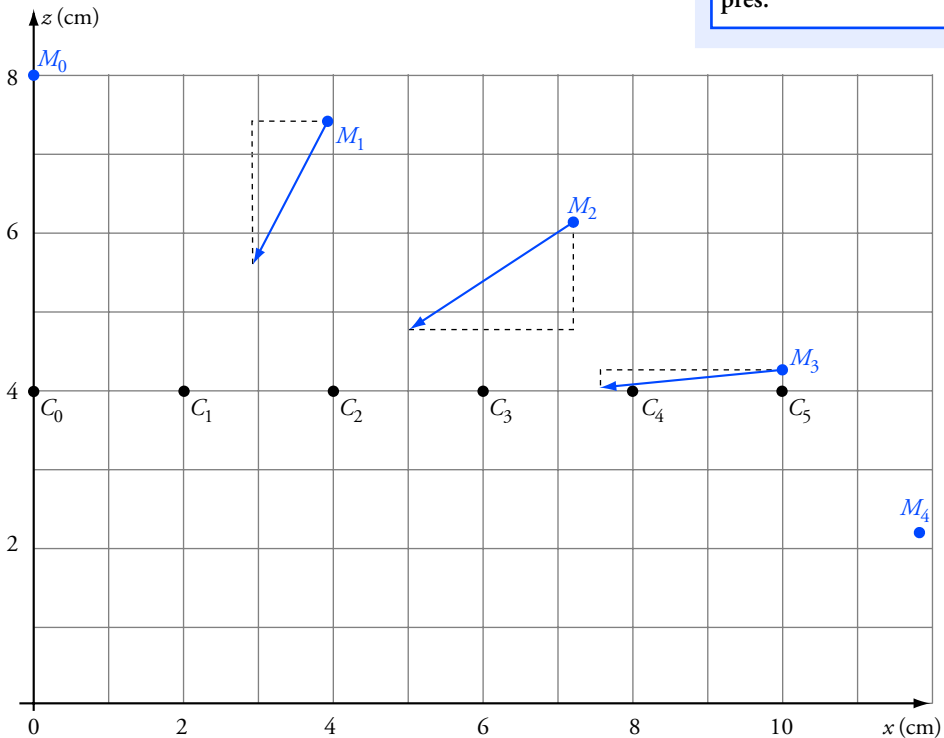
b. La norme du vecteur accélération est : $a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2}$.

On obtient, avec les valeurs approchées précédemment calculées :

$$a(t_1) \approx 22 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}; \quad a(t_2) \approx 27 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}; \quad a(t_3) \approx 25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}.$$

c. On reporte les valeurs trouvées de a_x et a_z sur la figure, en prenant 1 cm pour $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$.

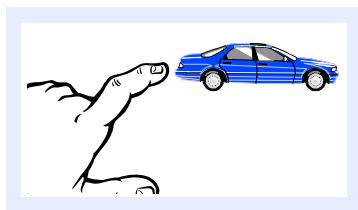
- Si on a une erreur de $\pm 0,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ sur chaque composante du vecteur vitesse, l'erreur maximale sur une différence telle que $v_x(t_B) - v_x(t_A)$ est au maximum de l'ordre de 1 cm^{-1} .
- L'erreur commise sur le rapport $\frac{v_x(t_B) - v_x(t_A)}{\Delta t}$ est donc au maximum de l'ordre de : $\frac{1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}{0,2 \text{ s}} = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Pour conclure, les résultats issus de l'analyse graphique ne sont garantis qu'à $\pm 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ près.



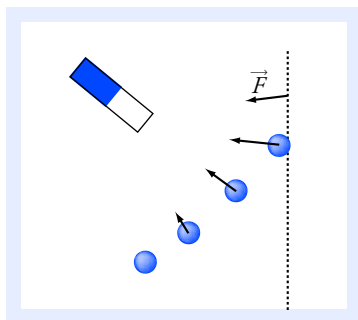
Remarque : On peut remarquer que, pour ces trois dates le vecteur accélération est approximativement colinéaire à \overrightarrow{CM} et qu'il a sensiblement la même norme. Une étude théorique montrerait en effet que :

$$\vec{a}(t) = - \frac{v_c^2}{CM^2} \cdot \overrightarrow{CM}.$$

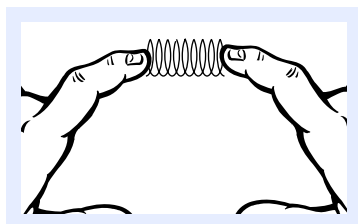
2 Forces



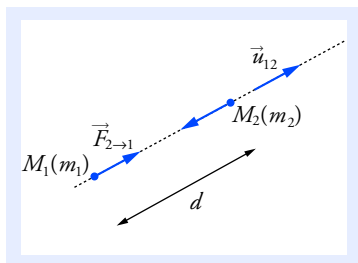
Doc. 1 Une force peut mettre un objet en mouvement.



Doc. 2 L'aimant exerce sur la bille une force qui dévie sa trajectoire.



Doc. 3 Une force peut déformer un objet.



Doc. 4 Interaction gravitationnelle : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Ce qu'il faut savoir...

1. Notion de force

■ Effets d'une force

La notion de force peut être appréhendée grâce à ses effets observables sur des objets de la vie quotidienne.

Une force peut :

- mettre en mouvement un objet (**doc. 1**) ;
- dévier la trajectoire d'un objet (**doc. 2**) ;
- déformer un objet (**doc. 3**).

Dans le système international d'unités (S.I.), l'unité légale de la force est le **newton (N)** : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

■ Représentation

Une force est représentée par un vecteur \vec{F} :

- l'origine du vecteur \vec{F} est le point d'application de la force ;
- la direction et le sens du vecteur \vec{F} sont les mêmes que ceux de la force ;
- la longueur du vecteur \vec{F} peut représenter la valeur de la force par l'utilisation d'une échelle appropriée ($x \text{ cm/N}$).

Voir exercice n° 2

2. Les interactions fondamentales

Quelle que soit l'échelle, l'ensemble des forces observables dans l'Univers résulte de seulement quatre *interactions fondamentales* : gravitationnelle, électromagnétique, forte et faible.

■ L'interaction gravitationnelle

C'est une interaction de portée infinie, toujours attractive et qui concerne tous les objets. Les forces gravitationnelles sont responsables du mouvement des astres dans l'Univers et se manifestent à notre échelle par la force de pesanteur qui nous attire vers la Terre.

Modélisation

Soit deux objets ponctuels M_1 et M_2 séparés par une distance d . Ceux-ci exercent l'un sur l'autre des forces attractives $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ de même valeur, de même direction, mais de sens opposé (**doc. 4**)

tel que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

\vec{u}_{12} est le vecteur unitaire de l'axe $M_1 M_2$ orienté de M_1 vers M_2 .

G est la constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

m_1 et m_2 sont les masses de M_1 et M_2 .

d est la distance séparant M_1 de M_2 , soit $d = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$.

Généralisation

Cette loi reste valable dans le cas de corps à symétrie sphérique tels que le Soleil, la Terre, une boule de pétanque, ... Dans ce cas, tout se passe comme si la masse de l'objet était concentrée en son centre.

Voir exercices n°s 1, 2 et 3

■ L'interaction électromagnétique

C'est une interaction de portée infinie qui peut être attractive ou répulsive. C'est elle qui permet la cohésion des objets et leur donne leurs propriétés (forme, élasticité,...). Elle intervient aussi dans les réactions chimiques.

Modélisation de l'interaction électrique

Dans le cas où les charges ne sont pas en mouvement, l'interaction électromagnétique prend une forme simple appelée interaction électrique étudiée par C. de Coulomb en 1785.

Deux objets ponctuels M_1 et M_2 , porteurs de charge électrique et séparés par une distance d , exercent l'un sur l'autre des **forces attractives ou répulsives** $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ de même valeur, de même direction mais de sens opposé (doc. 5) tel que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \cdot \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

\vec{u}_{12} est le vecteur unitaire de l'axe $M_1 M_2$ orienté de M_1 vers M_2 .

K est une constante caractéristique du milieu.

q_1 et q_2 sont les charges de M_1 et M_2 .

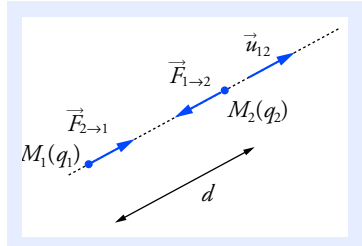
d est la distance séparant M_1 de M_2 , soit $d = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$.

Dans le système international d'unités (S.I.), les charges sont exprimées en **coulomb (C)**. Dans l'air ou dans le vide : $K = 9,0 \cdot 10^9$ S.I.

Voir exercice n° 2

Dans le système international,

$F_{1 \rightarrow 2} = \|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\|$ s'exprime en newton (N), les masses en kilogramme (kg) et la distance en mètre (m).



Doc. 5 Interaction électrique entre deux objets ponctuels :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

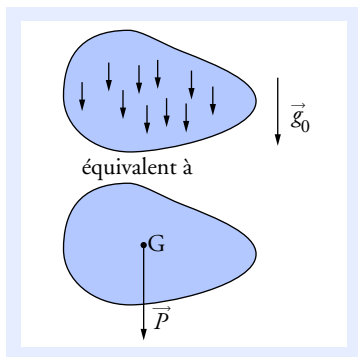
- L'interaction est attractive si q_1 et q_2 sont de signes opposés.
- L'interaction est répulsive si q_1 et q_2 ont le même signe.

La force électromagnétique entre deux protons est environ 10^{36} fois plus forte que la force gravitationnelle. Mais seule cette dernière intervient dans les mouvements planétaires et galactiques car les objets à l'échelle macroscopique sont globalement neutres.

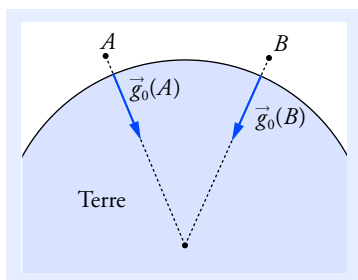
3. Les forces macroscopiques

■ Le poids

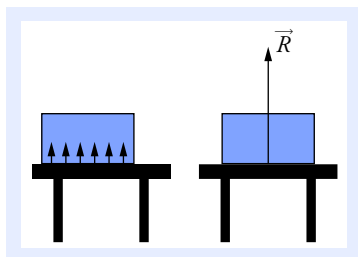
Le poids représente, en première approximation, l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet.



Doc. 6 Les forces de gravitation sont équivalentes à une force unique appliquée au centre d'inertie G .



Doc. 7 On considère que le champ de pesanteur \vec{g}_0 est uniforme tant que les distances ne dépassent pas quelques kilomètres. Au-delà, il faut tenir compte de la courbure de la Terre.



Doc. 8 Contact sans frottement. Les forces répulsives sont équivalentes à une force unique \vec{R} orthogonale à la surface de contact.

Modélisation

L'ensemble des forces d'attraction gravitationnelle exercées sur les particules qui constituent un objet de masse m placé au voisinage de la Terre est équivalent à une force unique appelée **pooids** (doc. 6), symbolisé par le vecteur \vec{P} tel que :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0.$$

\vec{g}_0 est le **vecteur champ de pesanteur** du lieu (doc. 7).

- Son point d'application est situé au centre d'inertie G de l'objet.
- Sa direction définit la verticale du lieu et son sens est du haut vers le bas.
- La valeur de \vec{P} est :

$$P = \|\vec{P}\| = m \cdot g_0.$$

\swarrow \downarrow \searrow
 N kg $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

L'intensité moyenne du champ de pesanteur à la surface de la Terre est : $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Voir exercices n^{os} 1, 3, 4, 5, 6 et 7

■ Forces de contact entre solides (réaction d'un support)

Quand on pose un objet sur une table, celui-ci ne s'enfonce pas. Il existe des interactions répulsives, d'origine électromagnétique, entre les atomes de la table et ceux de l'objet, réparties sur l'ensemble de la surface de contact.

La **réaction du support** \vec{R} est la résultante de ces microforces de contact.

Modélisation

La réaction du support n'a pas les mêmes caractéristiques en présence ou en l'absence de frottement.

S'il n'y a pas de frottements (doc. 8)

La réaction du support \vec{R} présente les caractéristiques suivantes :

- son point d'application est sur la surface de contact ;
- sa direction est perpendiculaire à la surface de contact ;
- son sens va du support vers l'objet en contact.

S'il y a des frottements (doc. 9)

La réaction du support \vec{R} présente les caractéristiques suivantes :

- son point d'application est sur la surface de contact ;
- sa direction est inclinée par rapport à sa normale ;
- son sens va du support vers l'objet en contact ;
- la réaction \vec{R} est décomposable en une composante normale \vec{R}_N et une composante tangentielle \vec{R}_T correspondant aux forces de frottements.

Voir exercices n^{os} 4 et 5

■ Les forces de contact entre un fluide et un solide (forces de pression)

Un fluide (gaz ou liquide) est constitué de particules microscopiques en mouvement permanent et désordonné.

Quand on place un solide au contact d'un fluide, les molécules qui le constituent exercent sur la paroi du solide un grand nombre de forces microscopiques qui sont toutes de nature électromagnétique.

La force de contact \vec{F}_p entre un fluide et un solide est la résultante de ces microforces pressantes sur toute la surface de contact (doc. 10).

Modélisation

La force de contact \vec{F}_p ou **force pressante** sur une surface plane S présente les caractéristiques suivantes :

- son point d'application est sur la surface de contact ;
- sa direction est perpendiculaire à la surface de contact ;
- son sens est toujours dirigé du fluide vers la surface de contact ;
- sa valeur est donnée par :

$$F_p = \|\vec{F}_p\| = p \cdot S.$$

p est la *pression* du fluide au niveau de la surface de contact.

L'unité S.I. de pression est le **pascal (Pa)** : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Voir exercice n° 3

■ La poussée d'Archimède

Dans le cas particulier d'objets flottants ou totalement immergés dans le fluide, la résultante des forces de pression sur la surface du solide peut être modélisée par une force unique $\vec{\Pi}$ appelée **poussée d'Archimède** (doc. 11) telle que :

$$\vec{\Pi} = -m_{\text{fluide}} \cdot \vec{g}_0.$$

m_{fluide} est la masse de fluide déplacée par le solide et \vec{g}_0 le vecteur champ de pesanteur du lieu.

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ présente les caractéristiques suivantes :

- son point d'application, appelé **centre de poussée** (C), est le centre d'inertie du fluide déplacé par l'objet ;
- sa direction suit la verticale du lieu ;
- son sens va du bas vers le haut ;
- sa valeur est donnée par :

$$\Pi = \|\vec{\Pi}\| = m_{\text{fluide}} \cdot g_0.$$

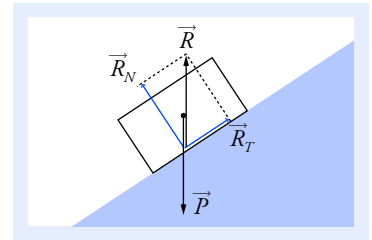
On exprime aussi la poussée d'Archimède par :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot \vec{g}_0.$$

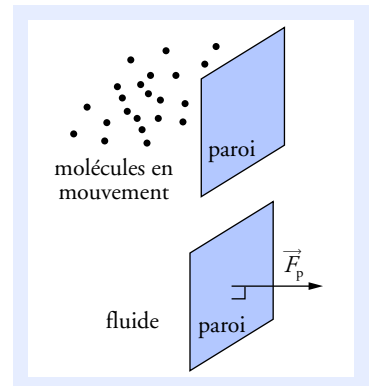
ρ_{fluide} est la masse volumique du fluide et V le volume de fluide déplacé.

Dans le système international d'unités, ρ s'exprime en kilogramme par mètre cube ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) et V en mètre cube (m^3).

Voir exercice n° 6

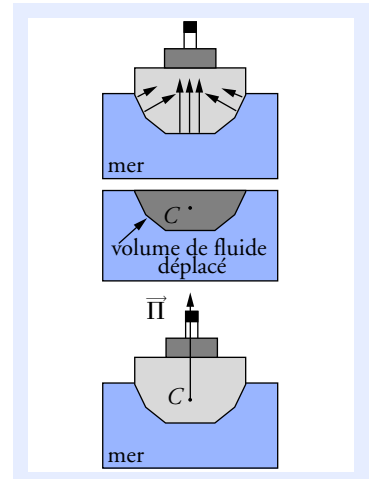


Doc. 9 La réaction du support \vec{R} est inclinée par rapport à la surface de contact et elle s'oppose à la mise en mouvement. Dans ce cas : $\vec{P} = -\vec{R}$.



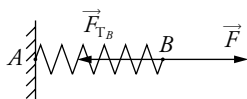
Doc. 10 Les interactions microscopiques sont représentées par la force de pression.

La pression est souvent exprimée en bar : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

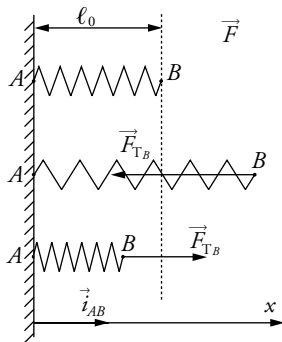


Doc. 11 Le navire est soumis à des forces de pression équivalentes à une force unique : la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$.

La poussée d'Archimède existe dans les gaz comme dans les liquides, mais elle est environ mille fois plus faible dans l'air que dans l'eau en raison de la différence de masse volumique.



Doc. 12 La force de rappel exercée par le ressort en B s'oppose à la force \vec{F} exercée par un opérateur.



Doc. 13 Sens de la force de rappel.

Exemples d'équilibres :

- Au document 8 :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

si \vec{P} est le poids de l'objet posé.

- Au document 11 :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$$

si \vec{P} est le poids du navire.

■ Force de rappel exercée par un ressort

La forme d'un solide résulte des interactions électromagnétiques existant entre les particules qui le constituent.

Considérons un ressort AB dont l'extrémité A est fixée. Quand on le déforme, il se crée des contraintes internes qui se manifestent par une force de rappel exercée par le ressort en B et qui s'oppose à la déformation (doc. 12).

Modélisation

- Soit un ressort AB à spires non jointives de longueur libre ℓ_0 (libre de toute contrainte). Si la déformation est modérée, la **force de rappel** \vec{F}_{TB} exercée par le ressort en B est proportionnelle à son allongement $\Delta\ell$.

Elle est donnée par :

$$\vec{F}_{TB} = -k \cdot \Delta\ell \cdot \vec{i}_{AB}.$$

\vec{i}_{AB} est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) parallèle à l'axe du ressort orienté de A vers B .

$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ est l'allongement du ressort ($\Delta\ell$ est algébrique).

k est la *constante de raideur* du ressort.

- Le ressort exerce sur ses deux extrémités A et B deux forces de rappel opposées :

$$\vec{F}_{TA} = -k \cdot \Delta\ell \cdot \vec{i}_{BA} = +k \cdot \Delta\ell \cdot \vec{i}_{AB} = -\vec{F}_{TB}.$$

Dans le cas représenté au document 12, cette force est exercée sur l'anneau qui maintient le ressort fixé en A .

- On appelle **tension** du ressort la quantité :

$$T = k \cdot \Delta\ell.$$

Si le ressort est tendu, alors $\ell > \ell_0$, T est positive et la force de rappel \vec{F}_{TB} a pour effet de tirer B vers A .

Si le ressort est comprimé, alors $\ell < \ell_0$, T est négative et la force de rappel \vec{F}_{TB} a pour effet de repousser le point B (doc. 13).

Dans le système international (S.I.), la tension T est exprimée en newton (N), et la constante de raideur k en newton par mètre ($N \cdot m^{-1}$).

Voir exercices n^{os} 4 et 7

4. Équilibre d'un solide

D'après le principe d'inertie (ou première loi de Newton), pour qu'un solide reste en équilibre dans un référentiel galiléen, il faut que la somme de toutes les forces qui lui sont appliquées soit nulle :

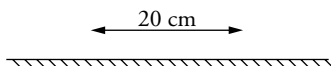
$$\sum \vec{F} = \vec{0}.$$

Dans tous les exercices de ce chapitre, on considérera que le référentiel d'étude est galiléen.

Pour faire le point...

1. Force gravitationnelle et poids

On dépose sur le sol, à 20 cm l'une de l'autre, deux sphères pleines de rayon $r = 5,0$ cm, de masse $m = 1,00$ kg.



On admet que la Terre et les sphères sont des corps à répartition sphérique de masse.

1. Calculer la valeur de la force gravitationnelle existant entre l'une des sphères et la Terre.
2. Calculer la valeur du poids de la sphère et la comparer avec celle de la force gravitationnelle. Conclure.
3. Donner une expression de l'intensité du champ de pesanteur g_0 en fonction de G , M_T et R_T . Préciser les caractéristiques du champ de pesanteur \vec{g}_0 en un point quelconque de la surface terrestre.
4. Existe-t-il des forces d'interaction entre les deux sphères ? Si oui, déterminer leur valeur et conclure.

Données : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I. ; masse de la Terre $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg ;
rayon de la Terre $R_T = 6\,380$ km ;
intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = 9,81$ m.s⁻².

Conseil

Revoir la modélisation de l'interaction gravitationnelle ainsi que celle du poids.

2. Les interactions dans l'atome d'hélium

Tous les atomes sont constitués d'un noyau central (formé de protons et de neutrons) et d'un nuage électronique autour du noyau.

On se propose d'étudier l'atome d'hélium ${}^4_2\text{He}$ dont le diamètre moyen est $d = 62$ pm.

1. Préciser la composition de l'atome d'hélium ${}^4_2\text{He}$.
2. Calculer la valeur de la force gravitationnelle exercée par le noyau sur un électron.
3. Calculer la valeur de la force électrique exercée par le noyau sur un électron. Comparer et conclure.
4. Représenter les forces électriques entre le noyau et l'électron avec pour échelle : $3 \cdot 10^{-7}$ N/cm.

Données : $K = 9,0 \cdot 10^9$ S.I. ; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I. ; masse d'un proton $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ;
masse d'un neutron $m_n \approx m_p$; masse d'un électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ;
charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Conseils

- Revoir la modélisation des interactions gravitationnelle et électrique.
- Quelle est la charge d'un proton ? d'un neutron ? d'un électron ?

3. Piston en équilibre dans un cylindre

On dispose d'un tube cylindrique, placé verticalement, de diamètre $D = 4,0$ cm. On ferme celui-ci avec un piston étanche de masse $m = 5,0$ kg pouvant glisser sans aucun frottement sur les parois du cylindre.

Au bout de quelques minutes, le piston est dans une position d'équilibre stable dans le tube.

1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur le piston et les représenter sur un schéma.
2. Préciser le type d'interaction qui est à l'origine de chaque force.
3. Énoncer une condition sur les forces appliquées permettant d'obtenir l'équilibre du piston.
4. Calculer la pression de l'air à l'intérieur du tube.

Données : intensité du champ de pesanteur $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
pression atmosphérique : $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Conseils

- Revoir la modélisation des forces de pression.
- Bien envisager **toutes** les forces de pression.
- Prendre un repère vertical d'axe (Oz) pour l'étude de ce problème.

4. Équilibre d'un système masse-ressort

Un anneau de masse m pouvant se déplacer sans frottement sur une tige est lié à un ressort de longueur libre ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixée sur l'axe au point O .

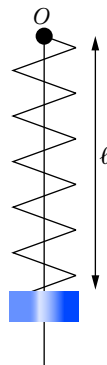
I. L'anneau est en position d'équilibre sur la tige placée verticalement

1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur l'anneau et les représenter sur un schéma.
2. Calculer la longueur ℓ_1 du ressort à l'équilibre.

II. La tige est inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale

1. Schématiser cette nouvelle situation et faire l'inventaire des forces appliquées sur l'anneau.
2. Déterminer l'expression $\ell(\theta)$ donnant la longueur du ressort en fonction de l'angle d'inclinaison θ de la tige.
3. Calculer la longueur ℓ_2 du ressort à l'équilibre pour un angle $\theta = 65^\circ$.
4. Calculer les longueurs ℓ du ressort pour une tige placée verticalement, puis horizontalement. Conclure.

Données : intensité du champ de pesanteur $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $m = 100 \text{ g}$; $\ell_0 = 15 \text{ cm}$;
 $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



Conseils

- Revoir la modélisation de la force de rappel d'un ressort.
- L'énoncé ne précisant pas de repère, il faut en définir un. Il est naturel de prendre un repère attaché à la tige.
- Pour la deuxième partie, prendre un repère orthonormé (O, x, y) en orientant l'axe (Ox) sur la tige.
- Ne pas oublier que les forces sont représentées par des **vecteurs**.

Pour s'entraîner...

5. Frottement sur un plan incliné

Un parallélépipède de masse m est en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

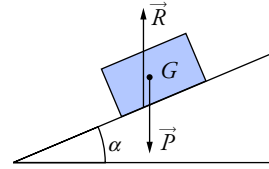
1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur le solide, les représenter sur un schéma et expliquer pourquoi il y a forcément des forces de frottement entre le solide et le plan incliné.

Le solide peut rester en équilibre sur le plan tant que la valeur de la force de frottement respecte la condition suivante :

$f \leq \mu \cdot R_N$, avec $f = \|\vec{f}\|$; $R_N = \|\vec{R}_N\|$ et μ une constante appelée **coefficient de frottement statique**, qui dépend de la nature des surfaces en contact.

2. Déterminer l'expression donnant l'angle d'inclinaison maximal α_{\max} du plan en fonction de μ pour que le solide reste en équilibre.

3. Calculer α_{\max} pour $\mu = 0,20$.



Conseils

- Décomposer la réaction du support en deux composantes \vec{R}_N et \vec{R}_T .
- Utiliser un repère orthonormé (O, x, y) en orientant l'axe (Ox) sur le plan incliné.

6. Un densimètre pour liquide

On réalise un densimètre avec un tube cylindrique gradué de longueur L et de diamètre D . Pour assurer la verticalité du tube quand il est plongé dans un liquide, on leste l'ensemble avec quelques billes de plomb placées au fond. La masse totale du densimètre est $m = 60$ g.

On plonge le densimètre dans l'eau, on note ℓ_{eau} la longueur de tube émergeant.

Ensuite, on plonge le densimètre dans de l'huile et on note ℓ_{huile} la nouvelle longueur de tube émergeant.

1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur le densimètre plongeant dans un liquide et les représenter sur un schéma.

2. Expliquer l'intérêt des billes de plomb dans le tube.

Que se passerait-t-il sinon ?

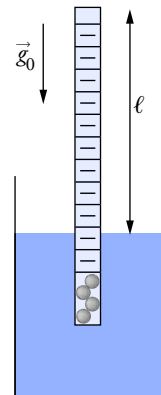
3. Déterminer la relation donnant la masse volumique ρ_{fluide} du liquide en fonction de la longueur émergente ℓ_{fluide} du densimètre.

4. En déduire la masse volumique de l'eau ρ_{eau} et celle de l'huile ρ_{huile} .

5. Définir la densité d d'un liquide et donner une expression de d en fonction des longueurs de tube émergentes dans le liquide et dans l'eau.

Données : $m = 60$ g ; $L = 30$ cm ; $D = 20$ mm ; $\ell_{\text{eau}} = 11,0$ cm ;

$\ell_{\text{huile}} = 7,0$ cm.



Conseils

- Le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre d'inertie du liquide déplacé.
- Où est situé approximativement le centre d'inertie du tube lesté ?
- Utiliser un repère vertical d'axe (Oz) pour ce problème.

7. Masse suspendue par deux ressorts

Un solide de masse m est maintenu par deux ressorts identiques, liés à deux tiges verticales distantes d'une longueur L .

Les deux ressorts sont à spires non jointives avec une constante de raideur k et une longueur libre ℓ_0 .

Les points de fixation O_1 et O_2 sont situés à la même hauteur, et la distance les séparant est :

$$L = O_1 O_2 = 2\ell_0.$$

À l'équilibre, le solide est descendu d'une hauteur h par rapport à la ligne horizontale $O_1 O_2$.

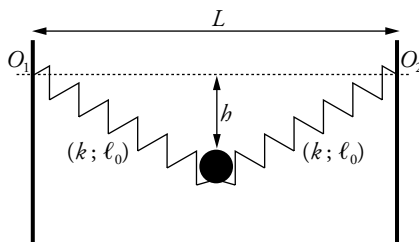
1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur le solide, les représenter sur un schéma.

2. Donner la relation liant les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des ressorts à l'équilibre.

3. Calculer alors la longueur ℓ des ressorts.

4. Déterminer une expression donnant la raideur k des ressorts et calculer sa valeur.

Données : intensité du champ de pesanteur $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $m = 190 \text{ g}$; $\ell_0 = 20,0 \text{ cm}$; $h = 15,0 \text{ cm}$.



Conseils

- Utiliser un repère orthonormé (O, x, y) en orientant l'axe (Ox) suivant l'horizontale.
- Pour projeter les forces dans votre repère, il faudra choisir un angle α compris entre l'axe des ressorts et l'horizontale.

Solutions...

1. Force gravitationnelle et poids

1. Les corps sont supposés à répartition sphérique de masse ; on peut donc appliquer le modèle de l'interaction gravitationnelle en considérant la Terre comme un objet ponctuel T de masse M_T et la sphère comme un objet ponctuel S de masse m , tous deux placés à leur centre respectif. La distance d séparant T de S est égale au rayon de la Terre, soit $d = R_T = 6\,380$ km.

La valeur de la force gravitationnelle entre la Terre et la sphère est :

$$F_{T \rightarrow S} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}, \text{ soit } F_{T \rightarrow S} = 9,8 \text{ N.}$$

2. La sphère posée sur le sol est soumise, comme tout objet placé au voisinage de la Terre, à son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0$, \vec{g}_0 étant le vecteur champ de pesanteur du lieu de l'expérience.

La valeur du poids est donnée par :

$$P = m \cdot g_0, \text{ soit } P = 9,81 \text{ N.}$$

Avec la précision de nos calculs $P = F_{T \rightarrow S}$. Ceci permet, en première approximation, de conclure que le poids est la résultante des forces d'attraction gravitationnelle exercées par la Terre sur l'ensemble des particules constituant la sphère.

3. L'égalité entre la valeur de la force gravitationnelle et la valeur du poids permet d'obtenir une expression de g_0 . En effet :

$$F_{T \rightarrow S} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = P = m \cdot g_0$$

donne par identification : $g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$.

On en déduit une expression de \vec{g}_0 en un point M de la surface terrestre :

$$\vec{g}_0 = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}_{TM}.$$

Le champ de pesanteur \vec{g}_0 est toujours dirigé vers le centre T de la Terre avec \vec{u}_{TM} le vecteur unitaire orienté de T vers M (voir la figure ci-contre). Sa direction change en fonction de la position du point M ($\vec{u}_{TM} \neq \vec{u}_{TM'}$).

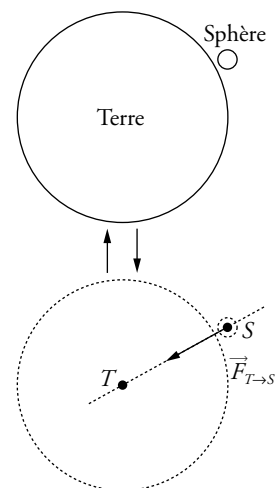
4. On peut aussi envisager l'interaction gravitationnelle entre les deux sphères. La répartition sphérique de masse des deux sphères permet de les confondre avec deux points matériels S_1 et S_2 placés aux centres et séparés par une distance :

$$d_{1-2} = \ell + 2r = 30 \text{ cm.}$$

La valeur des forces d'interaction gravitationnelle entre les sphères est :

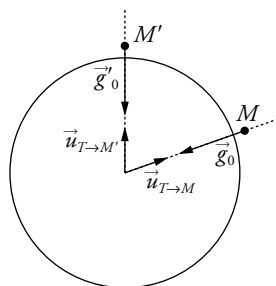
$$F_{1 \rightarrow 2} = G \cdot \frac{m \cdot m}{d_{1-2}^2} = G \cdot \left(\frac{m}{d_{1-2}} \right)^2 = F_{2 \rightarrow 1}, \text{ soit } F_{1 \rightarrow 2} = 7,4 \cdot 10^{-10} \text{ N.}$$

On constate que l'interaction entre les sphères est négligeable par rapport au poids de chaque sphère ($F_{1-2} \ll P$). Dans la plupart des problèmes de mécanique, on ne prendra pas en compte ces interactions vis-à-vis du poids au cours de l'inventaire des forces.



La force gravitationnelle entre la Terre et une sphère est équivalente à l'interaction gravitationnelle entre deux objets ponctuels T et S .

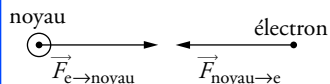
Champ de pesanteur \vec{g}_0 en deux points :



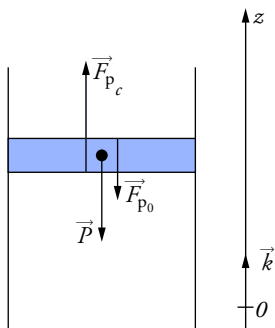
Ceci n'est qu'une approximation de l'expression donnant le champ de pesanteur à la surface terrestre. En réalité, le vecteur champ gravitationnel \vec{G}_0 , le vecteur champ de pesanteur \vec{g}_0 ne sont pas confondus. Il faut tenir compte de la rotation propre de la Terre sur elle-même et des effets qui en résultent.



Le noyau étant composé de deux protons et de deux neutrons de masses pratiquement égales à celle du proton : $m_{\text{noyau}} = 4 m_p$.



Ce problème a pour objet l'étude de l'équilibre du piston. Avant de faire un inventaire des forces, il faut toujours préciser le système auquel ces forces sont appliquées.



2. Les interactions dans l'atome d'hélium

1. La composition de l'atome d'hélium ${}^4_2\text{He}$ est :

- un noyau central constitué de deux protons et deux neutrons. Sa charge globale est donc : $Q_{\text{noyau}} = +2e$;
- un nuage électronique comportant deux électrons en raison de l'électroneutralité de l'atome.

2. La valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée par le noyau sur un électron est :

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{m_e \cdot m_{\text{noyau}}}{r^2}.$$

$m_{\text{noyau}} = 4 m_p = 6,68 \cdot 10^{-27}$ kg est la masse du noyau.

r est la distance moyenne entre le noyau et l'électron (environ la moitié du diamètre de l'atome :

$$r = \frac{d}{2} = 31 \text{ pm} = 31 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

Application numérique : $F_{\text{grav}} = 4,22 \cdot 10^{-46} \text{ N}.$

3. La valeur de la force électrique exercée par le noyau sur un électron est donnée par la loi de Coulomb : $F_{\text{élec}} = K \cdot \frac{|q_e \cdot Q_{\text{noyau}}|}{r^2}.$

Application numérique : $F_{\text{élec}} = 4,79 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$

On constate que $F_{\text{élec}} \gg F_{\text{grav}}$ (le rapport est de l'ordre de 10^{39}). Ceci nous montre, qu'à l'échelle atomique, on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrique.

4. L'interaction électrique entre le noyau et l'électron est attractive car les charges électriques en présence sont de signes opposés. Pour respecter l'échelle, la longueur des flèches doit être de 1,60 cm.

3. Piston en équilibre dans un cylindre

1. Le système étudié est le piston de masse m et de centre d'inertie G .

Le piston est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0 = -m \cdot g_0 \cdot \vec{k}$, appliqué au centre d'inertie G ;
- la force de pression due à l'atmosphère \vec{F}_{p_0} , appliquée au centre de la surface supérieure du piston, de direction verticale et dirigée vers le bas. Son expression est $\vec{F}_{p_0} = -p_0 \cdot S \cdot \vec{k}$ avec S la surface du piston en contact avec l'atmosphère et p_0 la pression atmosphérique ;
- la force de pression due à l'air dans le cylindre \vec{F}_{p_c} , appliquée au centre de la surface inférieure du piston, de direction verticale et dirigée vers le haut. Son expression est $\vec{F}_{p_c} = +p_c \cdot S \cdot \vec{k}$ avec S la surface du piston en contact avec l'air contenu dans le cylindre et p_c la pression de l'air dans le cylindre.

2. Le poids représente l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le piston.

Les forces de pression représentent les forces d'interaction entre les particules de gaz et les parois. C'est l'interaction électromagnétique qui intervient au moment d'un choc particule-paroi.

3. Le piston étant en équilibre, la somme des vecteurs forces qui lui sont appliquées doit être nulle :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \text{ soit } \vec{F}_{p_0} + \vec{F}_{p_c} + \vec{P} = \vec{0}.$$

4. La relation précédente s'écrit : $-p_0 \cdot S \cdot \vec{k} + p_c \cdot S \cdot \vec{k} - m \cdot g_0 \cdot \vec{k} = \vec{0}$.

En projetant sur l'axe vertical (Oz) : $-p_0 \cdot S + p_c \cdot S - m \cdot g_0 = 0$.

La pression de l'air dans le cylindre s'en déduit facilement :

$$p_c = \frac{m \cdot g_0}{S} + p_0.$$

Application numérique : avec $S = \pi \frac{D^2}{4} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ et $m = 5,0 \text{ kg}$:

$$p_c = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \text{ soit } p_c = 1,4 \text{ bar}.$$

4. Équilibre d'un système masse-ressort

Soit (Ox), de vecteur unitaire \vec{i} , l'axe attaché à la tige.

I.1. Le système étudié est l'anneau de masse m et de centre d'inertie G . L'anneau est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0$, appliqué au centre d'inertie G ;
- la force de rappel du ressort \vec{F}_T , appliquée au point d'attache de l'anneau, de direction verticale.

Son expression est $\vec{F}_T = -k \cdot \Delta \ell \cdot \vec{i}$ avec $\Delta \ell = \ell - \ell_0$ l'allongement du ressort et k sa raideur.

2. On projette sur l'axe de la tige. L'anneau étant en équilibre, la somme des vecteurs forces qui lui sont appliquées doit être égale à $\vec{0}$:

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \text{ soit } -k \cdot \Delta \ell \cdot \vec{i} + m \cdot g_0 \cdot \vec{i} = \vec{0}.$$

On projette la relation précédente sur l'axe vertical (Ox) :

$$-k \cdot \Delta \ell + m \cdot g_0 = 0, \text{ avec } \Delta \ell = \ell_1 - \ell_0.$$

D'où la longueur du ressort à l'équilibre : $\ell_1 = \ell_0 + \frac{m \cdot g_0}{k}$.

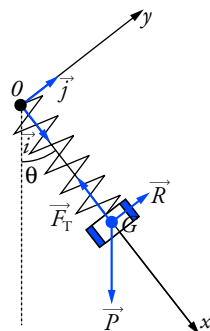
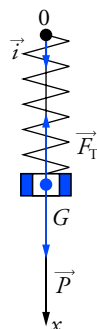
Application numérique : $\ell_1 = 0,20 \text{ m}$.

II.1. Le système étudié est l'anneau de masse m et de centre d'inertie G . L'anneau est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0$, appliqué au centre d'inertie G , de direction verticale et orienté vers le bas ;
- la force de rappel du ressort \vec{F}_T , appliquée au point d'attache de l'anneau, de direction identique à la tige. Son expression est toujours $\vec{F}_T = -k \cdot \Delta \ell \cdot \vec{i}$ avec $\Delta \ell = \ell_1 - \ell_0$, mais l'axe (Ox) n'est plus vertical ;
- la réaction de la tige sur l'anneau \vec{R} , appliquée au niveau de la surface de contact entre l'anneau et la tige, de direction perpendiculaire à la tige en raison de l'absence de frottements et orienté vers le haut.

2. Les forces appartenant toutes au même plan, on choisit le repère orthonormé (O, x, y) d'axe (Ox) de vecteur unitaire \vec{i} dirigé sur la tige, et d'axe (Oy) de vecteur unitaire \vec{j} perpendiculaire à la tige.

Afin de travailler avec des valeurs algébriques, il faut projeter les relations vectorielles sur un repère judicieusement choisi. Dans notre cas, tous les vecteurs sont portés sur une même droite verticale. Notre repère peut se limiter alors à un axe vertical (O, z) de vecteur unitaire \vec{k} dirigé vers le haut.



La projection sur l'axe (O, y) permet d'obtenir une expression de R :

$$R = m \cdot g_0 \cdot \sin \theta.$$

Ainsi, dans le cas d'une tige verticale ($\theta = 0^\circ$), on retrouve que la réaction est :

$$\vec{R} = \vec{0}.$$

Elle n'apparaît donc pas dans l'inventaire des forces.

À l'équilibre, la somme des vecteurs forces est égale à $\vec{0}$, soit :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \vec{T} \begin{vmatrix} -k \cdot \Delta \ell \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{R} \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P} \begin{vmatrix} m \cdot g_0 \cdot \cos \theta \\ -m \cdot g_0 \cdot \sin \theta \end{vmatrix}.$$

Par projection :

$$- \text{sur l'axe } (Ox) : -k \cdot \Delta \ell + m \cdot g_0 \cdot \cos \theta = 0;$$

$$- \text{sur l'axe } (Oy) : R - m \cdot g_0 \cdot \sin \theta = 0.$$

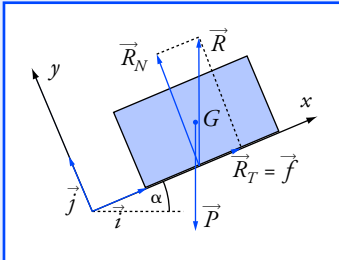
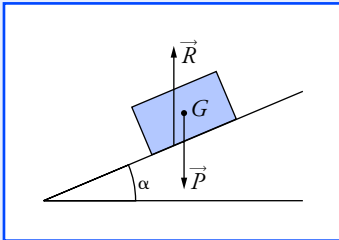
On obtient une expression donnant la longueur du ressort en fonction de l'angle en utilisant la projection sur l'axe (Ox) :

$$\Delta \ell = \frac{m \cdot g_0 \cdot \cos \theta}{k}, \text{ soit } \ell(\theta) = \ell_0 + \frac{m \cdot g_0 \cdot \cos \theta}{k}.$$

3. La longueur ℓ_2 du ressort à l'équilibre pour un angle $\theta = 65^\circ$ est :
 $\ell_2 = 17 \text{ cm}.$

4. Dans le cas d'une tige verticale ($\theta = 0^\circ$), on trouve $\ell(0) = 20 \text{ cm}$, soit la même valeur qu'à la question I.2.

Si la tige est horizontale ($\theta = 90^\circ$), on trouve $\ell(90) = 15 \text{ cm}$, soit la longueur du ressort libre de toute contrainte ℓ_0 .



Pour vérifier si les projections d'une force sont correctes, il faut « tester » vos expressions dans les cas extrêmes.

Par exemple, dans le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$ (soit un plan horizontal), on sait que la direction du poids doit être confondue avec l'axe (Oy) et orienté vers le bas. Quant à sa projection sur l'axe (Ox) , elle doit être nulle.

5. Frottement sur un plan incliné

1. Le système étudié est le solide de masse m et de centre d'inertie G . Il est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0$, appliqué au centre d'inertie G , de direction verticale et orienté vers le bas ;
- la réaction du support \vec{R} , appliquée sur la surface de contact, et orientée du support vers le solide.

Pour donner plus de précision sur la réaction \vec{R} , il faut tenir compte de l'équilibre du solide. La somme des vecteurs forces qui lui sont appliqués doit être nulle, soit :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}.$$

On en déduit que sa direction est verticale, orientée vers le haut, et que sa valeur est :

$$R = P = m \cdot g_0.$$

La réaction \vec{R} est décomposable en une composante normale à la surface \vec{R}_N et une composante tangentielle à la surface $\vec{R}_T = \vec{f}$ correspondant aux forces de frottements.

Il y a donc obligatoirement frottement pour maintenir l'équilibre sur le plan incliné.

2. Les forces appartenant toutes au même plan, on choisit le repère orthonormé (O, x, y) d'axe (Ox) de vecteur unitaire \vec{i} dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné et d'axe (Oy) de vecteur unitaire \vec{j} perpendiculaire au plan.

À l'équilibre, la somme des vecteurs forces est nulle :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \vec{f} \begin{vmatrix} f \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{R}_N \begin{vmatrix} 0 \\ R_N \end{vmatrix}; \quad \vec{P} \begin{vmatrix} -m \cdot g_0 \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g_0 \cdot \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Par projection :

- sur l'axe (Ox) : $f - m \cdot g_0 \cdot \sin \alpha = 0$, d'où $f = m \cdot g_0 \cdot \sin \alpha$;
 - sur l'axe (Oy) : $R_N - m \cdot g_0 \cdot \cos \alpha = 0$, d'où $R_N = m \cdot g_0 \cdot \cos \alpha$.
- Le solide reste en équilibre tant que $f \leq \mu \cdot R_N$.

En prenant les expressions de f et R_N , on obtient $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq \mu$.

L'angle d'inclinaison limite est donné par $\tan \alpha_{\max} = \mu$.

3. Pour un coefficient de frottement $\mu = 0,20$, le solide reste en équilibre tant que l'angle d'inclinaison α est inférieur à $\alpha_{\max} = 11,3^\circ$.

6. Un densimètre pour liquide

Nous utiliserons un repère vertical d'axe (Oz) de vecteur unitaire \vec{k} .

1. Le système étudié est le densimètre de masse m et de centre d'inertie G . Il est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0 = -m \cdot g_0 \cdot \vec{k}$, appliqué au centre d'inertie G ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, appliquée au centre d'inertie C du liquide déplacé, de direction verticale et orienté vers le haut. Son expression est :

$$\vec{\Pi} = \rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g_0 \cdot \vec{k},$$

avec V le volume de liquide déplacé par le densimètre et ρ_{fluide} sa masse volumique.

2. Le densimètre est soumis à deux forces dont les points d'application G et C ne sont pas confondus.

En présence des billes de plomb, le centre d'inertie G est plus bas que le centre de poussée C . La position verticale du densimètre dans le liquide est stable. En effet, dès que le tube s'incline par rapport à la verticale, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et le poids \vec{P} exercent sur le tube un couple de forces qui le ramènent à sa position d'équilibre.

En revanche, si le densimètre n'est pas lesté, son centre d'inertie G remonte au milieu du tube et la position verticale devient instable.

Le moindre écart par rapport à la verticale sera amplifié par le couple de forces qui le fera basculer à l'horizontale.

3. Comme toutes les forces ont une direction verticale, on choisit comme repère l'axe vertical (Oz) de vecteur unitaire \vec{k} orienté vers le haut. Le densimètre étant en équilibre, la somme des vecteurs forces qui lui sont appliquées doit être égale à $\vec{0}$:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} ; \text{ soit } \vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \vec{P} = -m \cdot g_0 \cdot \vec{k} \text{ et } \vec{\Pi} = +\rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g_0 \cdot \vec{k}.$$

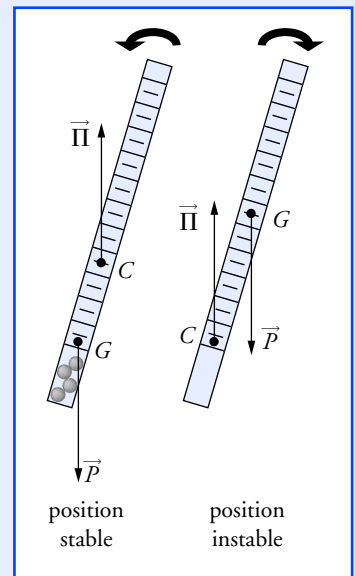
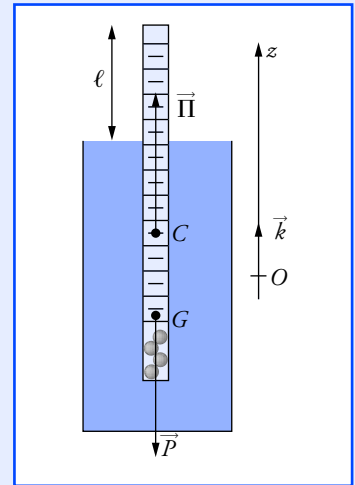
Par projection sur l'axe (Oz) : $\rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g_0 - m \cdot g_0 = 0$.

Le volume de fluide déplacé correspond au volume de tube immergé,

$$\text{soit : } V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot (L - \ell_{\text{fluide}}).$$

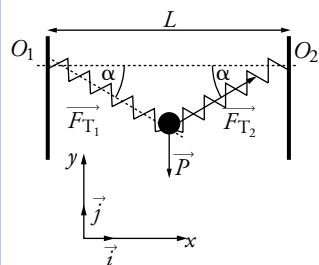
La relation donnant la masse volumique ρ_{fluide} du liquide s'en déduit

$$\text{facilement : } \rho_{\text{fluide}} = \frac{4m}{\pi D^2 \cdot (L - \ell_{\text{fluide}})}.$$



Par définition, la densité d d'un liquide est égale au quotient de la masse volumique du liquide ρ_{fluide} par celle de l'eau ρ_{eau} :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{eau}}}.$$



Les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des ressorts à l'équilibre sont égales. Ce résultat était prévisible, compte tenu de la symétrie du problème.

4. La masse volumique de l'eau est $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Celle de l'huile est $\rho_{\text{huile}} = 0,83 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

5. L'expression de la densité d'un liquide d en fonction des longueurs de tube émergentes s'obtient par combinaison des deux dernières

expressions, soit $d = \frac{(L - \ell_{\text{eau}})}{(L - \ell_{\text{fluide}})}$.

C'est tout simplement le rapport des longueurs de tube immergées.

7. Masse suspendue par deux ressorts

1. Le système étudié est le solide de masse m et de centre d'inertie G . Le solide est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}_0$, appliqué au centre d'inertie G ;
- la force de rappel du ressort (1) \vec{F}_{T_1} , appliquée au point d'attache du solide, de même direction que l'axe du ressort (1) et orientée vers O_1 . Sa tension est $T_1 = k \cdot \Delta \ell_1$, avec $\Delta \ell_1 = \ell_1 - \ell_0$;
- la force de rappel du ressort (2) \vec{F}_{T_2} , appliquée au point d'attache du solide, de même direction que l'axe du ressort (2) et orientée vers O_2 . Sa tension est $T_2 = k \cdot \Delta \ell_2$, avec $\Delta \ell_2 = \ell_2 - \ell_0$.

2. Les ressorts étant identiques, les tensions de chaque ressort T_1 et T_2 doivent avoir la même valeur : $T_1 = T_2$.

Avec $T_1 = k \cdot \Delta \ell_1$ et $T_2 = k \cdot \Delta \ell_2$, on trouve $\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2$, soit $\ell_2 = \ell_1$.

3. La longueur ℓ de chaque ressort se déduit facilement par le théorème de Pythagore : $\ell^2 = \ell_0^2 + h^2$.

Application numérique : on trouve $\ell = 25,0 \text{ cm}$.

4. Les forces appartenant toutes au même plan vertical, on choisit le repère orthonormé (O, x, y) d'axe (Ox) horizontal de vecteur unitaire \vec{i} , et d'axe (Oy) vertical de vecteur unitaire \vec{j} .

À l'équilibre, la somme des vecteurs forces est nulle :

$$\vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{P} = \vec{0}.$$

On choisit α , l'angle compris entre l'axe du ressort (1) et l'horizontale. Par symétrie, cet angle se retrouve entre l'axe du ressort (2) et l'horizontale (voir la figure ci-contre). Les expressions des forces \vec{F}_{T_1} , \vec{F}_{T_2} et \vec{P} sont alors :

$$\vec{F}_{T_1} \begin{vmatrix} -k \cdot \Delta \ell \cdot \cos \alpha \\ +k \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha \end{vmatrix} ; \quad \vec{F}_{T_2} \begin{vmatrix} +k \cdot \Delta \ell \cdot \cos \alpha \\ +k \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha \end{vmatrix} ; \quad \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ -m \cdot g_0 \end{vmatrix}.$$

Par projection sur l'axe (Oy) : $k \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha + k \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha - m \cdot g_0 = 0$, soit :

$$2 \cdot k \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha = m \cdot g_0.$$

La raideur des ressorts est donc donnée par : $k = \frac{m \cdot g_0}{2 \cdot \Delta \ell \cdot \sin \alpha}$.

Comme $\sin \alpha = \frac{h}{\ell}$, on obtient finalement l'expression de k :

$$k = \frac{m \cdot g_0 \cdot \ell}{2 \cdot \Delta \ell \cdot h}.$$

Application numérique : avec $\Delta \ell = \ell - \ell_0 = 5,0 \text{ cm}$ et $h = 15,0 \text{ cm}$, on trouve : $k = 31 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

3 Étude dynamique du mouvement d'un solide

Ce qu'il faut savoir...

1. Quelques définitions

■ Un **système matériel** est un objet ou un ensemble d'objets séparés du reste de l'Univers.

■ Un **solide** est un système matériel indéformable. Son centre d'inertie est un point dont le mouvement est en général plus simple que celui des autres points du solide (doc. 1).

■ Parmi toutes les forces appliquées à un système, on distingue :

- les **forces extérieures** exercées par un élément, n'appartenant pas au système, sur le système ;
- les **forces intérieures** exercées par un élément du système sur un autre élément du système.

2. Les lois de Newton

■ Première loi de Newton ou principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au vecteur nul, son centre d'inertie a un mouvement rectiligne uniforme, et réciproquement.

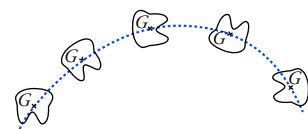
• Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

• Le **référentiel héliocentrique** est quasiment galiléen. Il est constitué d'un solide imaginaire formé du centre d'inertie S du Soleil et de trois axes d'origine S dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes (doc. 2).

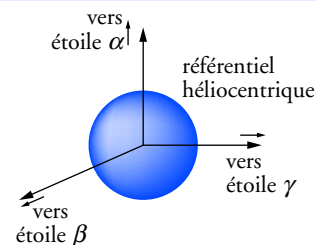
• Le **référentiel géocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences n'excédant pas quelques jours. Il est constitué d'un solide imaginaire formé du centre d'inertie T de la Terre et de trois axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique (doc. 3).

• Le **référentiel terrestre** est constitué par la surface de la terre. Il est en rotation par rapport au référentiel géocentrique. Cette rotation étant lente, nous pouvons avec une bonne approximation le considérer comme galiléen pour la plupart des expériences courantes (doc. 3).

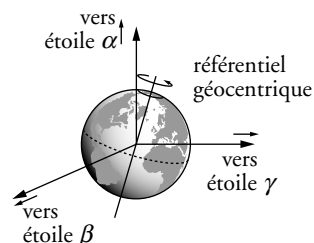


Doc. 1 Le solide lancé à un mouvement complexe, mais son centre d'inertie a un mouvement simple.

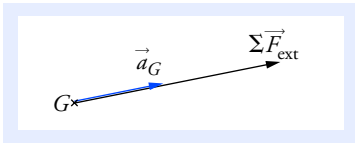
Avant d'effectuer l'inventaire des forces extérieures exercées sur un système, il est fondamental de définir le système avec soin, en tenant compte des questions posées.



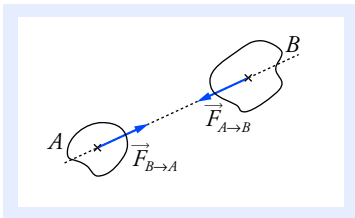
Doc. 2 Référentiel héliocentrique



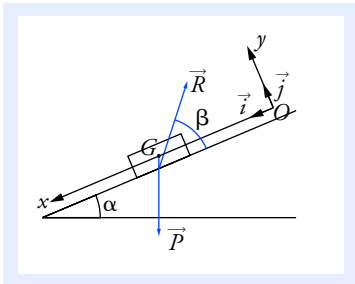
Doc. 3 Référentiel géocentrique et référentiel terrestre



Doc. 4 La résultante des forces extérieures $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$ a même direction et même sens que le vecteur accélération du centre d'inertie.



Doc. 5 $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$.



Doc. 6 Le solide glisse avec frottements. La force de réaction \vec{R} n'est pas orthogonale au plan incliné.

Le repère doit être choisi de façon à obtenir des relations simples entre les coordonnées des vecteurs sur les axes.

Le mouvement du centre d'inertie du solide s'effectue dans un plan parallèle au plan incliné, donc :

$$\ddot{y}_G = 0 \quad \text{et} \quad a_G = \ddot{x}_G.$$

La valeur de R et celle de β dépendent du frottement entre le solide et le plan incliné.

Dans le cas idéal d'un contact sans frottement, on aurait :

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad R = m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

■ Deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un solide est égale au produit de la masse m du solide par le vecteur accélération \vec{a}_G de son centre d'inertie (doc. 4) :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G.$$

$m \cdot s^{-2}$
N ← kg

■ Troisième loi de Newton ou loi des actions réciproques

Considérons deux systèmes A et B en interaction ; la force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ modélise l'action de A sur B et la force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ modélise l'action de B sur A .

Ces forces ont la même droite d'action et elles vérifient la relation :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}.$$

Cette loi est applicable si A et B sont au repos ou en mouvement (doc. 5).

3. Méthode d'étude du mouvement d'un solide

À travers un exemple, un plan d'étude en cinq points vous est proposé pour l'étude du mouvement d'un solide.

Un solide S de masse m , lâché sans vitesse initiale, glisse avec frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Déterminons le vecteur accélération de son centre d'inertie G dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ convenablement choisi.

- **Choix du référentiel** : référentiel terrestre galiléen.
- **Système** : solide S .
- **Inventaire des forces extérieures** : \vec{P} et \vec{R} .
- **Choix d'un repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (doc. 6) tel que :
 - \vec{i} est dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné et orienté vers le bas ;
 - \vec{j} est orthogonal au plan incliné et orienté vers le haut.
- **Application de la deuxième loi de Newton** :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\text{avec } \vec{P} \begin{vmatrix} P \cdot \sin \alpha \\ -P \cdot \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \vec{R} \begin{vmatrix} -R \cdot \cos \beta \\ R \cdot \sin \beta \end{vmatrix}; \quad \vec{a}_G \begin{vmatrix} \vec{a}_{G_x} = \ddot{x}_G \\ \vec{a}_{G_y} = \ddot{y}_G \end{vmatrix}.$$

Par projection :

– sur l'axe (Ox) :

$$P \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \beta = m \cdot \ddot{x}_G; \quad (1)$$

– sur l'axe (Oy) :

$$-P \cdot \cos \alpha + R \cdot \sin \beta = m \cdot \ddot{y}_G \quad \text{avec} \quad \ddot{y}_G = 0. \quad (2)$$

De (1) on déduit :

$$\ddot{x}_G = \frac{P \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \beta}{m};$$

soit, puisque $\ddot{y}_G = 0$:

$$\vec{a}_G = \frac{P \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \beta}{m} \cdot \vec{i} = \left(g \cdot \sin \alpha - \frac{R}{m} \cdot \cos \beta \right) \cdot \vec{i},$$

Voir exercices n^{os} 1 et 2

4. Chute libre d'un solide

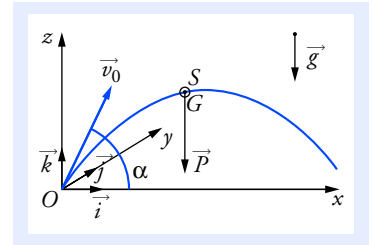
Un solide soumis à la seule action de son poids tombe en chute libre.

Cette condition est réalisée dans le vide.

Dans l'air, pour un solide dense et une faible hauteur de chute, les forces de poussée d'Archimède et de frottement de l'air peuvent être négligées par rapport au poids du solide. La chute peut alors être considérée comme libre.

On étudie le mouvement du centre d'inertie d'un projectile, de masse m , lancé depuis le point O avec une vitesse \vec{v}_0 formant un angle α quelconque avec le plan horizontal (doc. 7).

On négligera l'influence sur le mouvement, des forces de poussée d'Archimède et de frottement exercées par l'air.



Doc. 7 Le repère a été choisi de telle façon que le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$ contienne le vecteur \vec{v}_0 . α est un angle orienté.

■ Détermination du vecteur accélération

- Référentiel : terrestre galiléen.
- Système : solide S de masse m et de centre d'inertie G .
- Inventaire des forces extérieures : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ (\vec{g} est supposé uniforme).
- Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec \vec{k} dirigé suivant la verticale et orienté vers le haut ; et \vec{v}_0 dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.
- Application de la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G ;$$

$$\text{soit : } \vec{a}_G = \vec{g} = -g \cdot \vec{k} \quad (1).$$

Le vecteur accélération est indépendant de la masse du solide.

■ Équations horaires du mouvement

Projetons la relation (1) sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$a_{G_x} = \ddot{x} = 0 ; \quad a_{G_y} = \ddot{y} = 0 ; \quad a_{G_z} = \ddot{z} = -g.$$

Intégrons ces équations différentielles avec comme conditions initiales :

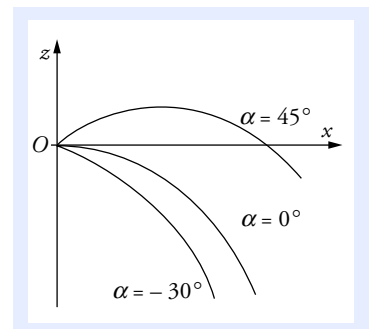
$$x(0) = 0 ; \quad y(0) = 0 ; \quad z(0) = 0 ;$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos \alpha ; \quad \dot{y}(0) = 0 ; \quad \dot{z}(0) = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

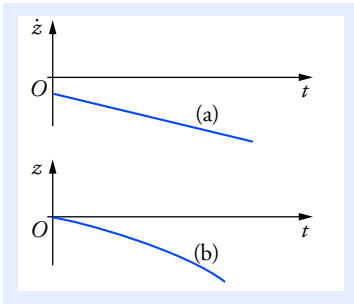
| $\ddot{x} = 0$ | $\ddot{y} = 0$ | $\ddot{z} = -g$ |
|--|--|--|
| $\dot{x} = \text{cte}$ $\dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos \alpha$ donc $\dot{x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ | $\dot{y} = \text{cte}$ $\dot{y}(0) = 0$ donc $\dot{y} = 0$ | $\dot{z} = -g \cdot t + \text{cte}$ $\dot{z}(0) = v_0 \cdot \sin \alpha$ donc $\dot{z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$ |
| $x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte}$ $x(0) = 0$ donc $x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$ | $y(t) = \text{cte}$ $y(0) = 0$ donc $y(t) = 0$ | $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte}$ $z(0) = 0$ donc $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t$ |

- Dans $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, m est la masse gravitationnelle.
- Dans $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$, m est la masse inertielle.

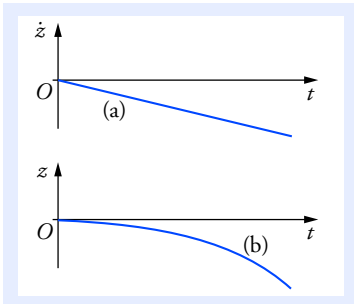
Ces deux masses sont égales ; cette identité est, entre autres, confirmée par le même mouvement du centre d'inertie des solides en chute libre.



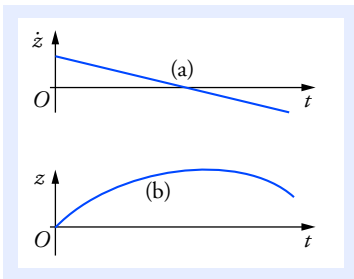
Doc. 8 Quelques trajectoires pour une même valeur de la vitesse initiale, et pour $\alpha = +45^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, et $\alpha = -30^\circ$.



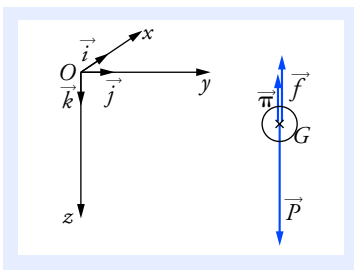
Doc. 9 Graphes de $\dot{z} = f(t)$ (a) et $z = g(t)$ (b), pour $v_0 < 0$.



Doc. 10 Graphes de $\dot{z} = f(t)$ (a) et $z = g(t)$ (b), pour $v_0 = 0$.



Doc. 11 Graphes de $\dot{z} = f(t)$ (a) et $z = g(t)$ (b), pour $v_0 > 0$.



Doc. 12 Forces exercées lors d'une chute verticale d'un solide dans un fluide.

On obtient les équations horaires paramétriques :

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t ; \quad y(t) = 0 ; \quad z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t .$$

Le mouvement du centre d'inertie G s'effectue dans le plan vertical $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Le mouvement de la projection de G sur l'axe (Ox) est uniforme.

Le mouvement de la projection de G sur l'axe (Oz) est uniformément varié.

■ Trajectoire du centre d'inertie du projectile

L'équation $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$ donne : $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$.

En reportant dans z , on obtient : $z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x$.

La trajectoire du centre d'inertie du projectile est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant le vecteur \vec{v}_0 (doc. 8).

Voir exercices n° 2 et 5

■ Cas particulier de la chute libre verticale

Si la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{k}$ (v_0 algébrique) est verticale, alors la chute libre est verticale.

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = 0 ; \quad y(0) = 0 ; \quad z(0) = 0 ; \quad \dot{x}(0) = 0 ; \quad \dot{y}(0) = 0 ; \quad \dot{z}(0) = v_0 ;$$

les équations du mouvement deviennent :

$$x(0) = 0 ; \quad y(0) = 0 ; \quad z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t .$$

Le centre d'inertie du solide est donc animé d'un mouvement rectiligne vertical, uniformément varié (doc. 9, 10 et 11).

Voir exercice n° 1

5. Chute verticale d'un solide dans un fluide

Le solide de masse m et de volume V est lâché sans vitesse initiale dans un fluide au repos de masse volumique ρ . Il est soumis à :

- la force de pesanteur $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$;
- la force de poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho \cdot V \cdot \vec{g}$ (voir le chapitre 2).
- la force de frottement fluide \vec{f} qui dépend du vecteur vitesse \vec{v}_G du centre d'inertie G par rapport au fluide, de même direction que \vec{v}_G , mais de sens opposé.

■ Vecteur accélération

- Référentiel terrestre galiléen.
- Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec \vec{k} dirigé suivant la verticale et orienté vers le bas (doc. 12).

- Application de la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G;$$

$$\text{soit : } \vec{a}_G = \vec{g} + \frac{\vec{\Pi}}{m} + \frac{\vec{f}}{m}. \quad (2)$$

■ Équations horaires du mouvement

L'accélération étant verticale et la vitesse initiale n'ayant pas de composante horizontale, le mouvement ne peut être que vertical.

Posons donc :

$$\vec{a}_G = a_G \cdot \vec{k}; \quad \vec{v}_G = v_G \cdot \vec{k}; \quad \vec{f} = f \cdot \vec{k} \quad (f, a_G \text{ et } v_G \text{ algébriques}).$$

L'équation (2) devient, en projection sur l'axe (Oz) :

$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = g - \frac{\rho \cdot V}{m} + \frac{f}{m}.$$

Pour établir l'équation différentielle, il est nécessaire de connaître l'expression de la force de frottement \vec{f} . Nous envisageons deux cas.

Premier cas

Si la vitesse est faible, la force de frottement fluide est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{f} = -K \cdot v_G \cdot \vec{k};$$

soit en projection : $f = -K \cdot v_G$.

K est une constante pour un solide et un fluide donnés.

Nous obtenons donc une équation différentielle vérifiée par v_G :

$$\frac{dv_G}{dt} = g - \frac{\rho \cdot V \cdot g}{m} - \frac{k \cdot v_G}{m} = -\frac{k \cdot v_G}{m} + g \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right).$$

Cette équation différentielle est de la forme $\tau \cdot \frac{dv_G}{dt} + v_G = v_L$,

avec $\tau = \frac{m}{k}$ et $v_L = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right)$ (voir l'annexe 3).

La solution s'écrit : $v_G = A e^{-\frac{t}{\tau}} + v_L$.

Lorsque $t \rightarrow \infty$ la vitesse tend vers la *vitesse limite* v_L .

En tenant compte de la condition initiale $v_G = 0$ à $t = 0$, on en déduit :

$$v_G(t) = v_L \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{doc. 13}).$$

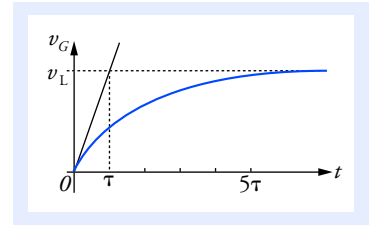
Le mouvement de la bille est rectiligne vertical. On distingue :

- le régime transitoire ; le mouvement de G est accéléré ;
- le régime permanent atteint au bout de quelques τ ; la vitesse est égale à la vitesse limite.

Deuxième cas

Si la vitesse est élevée, la force de frottement fluide est proportionnelle au carré de la vitesse :

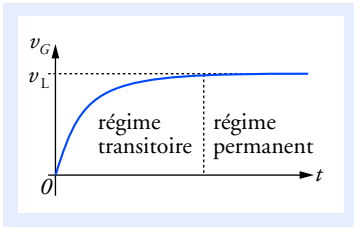
$$\vec{f} = -k \cdot v_G^2 \cdot \vec{k}.$$



Doc. 13 τ représente le temps caractéristique : cette valeur permet de connaître l'ordre de grandeur de la durée d'apparition du régime permanent, environ 5τ .

Si $m < \rho \cdot V$, le solide tend à remonter à la surface. On trouve bien une vitesse limite négative, ce qui correspond à un mouvement vers le haut.

La valeur de la force de frottement exercée par un fluide sur un solide est en général proportionnelle à V_G^n avec n compris entre 1 et 2. Une étude expérimentale associée à une étude théorique permet de choisir la meilleure valeur de n . Cependant, la valeur de n peut varier au cours du mouvement.



Doc. 14 Graphique de $v_G = f(t)$.

Nous obtenons donc une équation différentielle vérifiée par v_G :

$$\frac{dv_G}{dt} = g - \frac{\rho \cdot V \cdot g}{m} - \frac{k \cdot v_G^2}{m}.$$

La vitesse limite est atteinte lorsque $a_G = 0$, d'où :

$$v_L = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right)} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot (m - \rho \cdot V)}.$$

Cette équation différentielle du mouvement peut être résolue numériquement. La représentation graphique de $v_G = f(t)$ met en évidence deux régimes (doc. 14).

Voir exercice n° 3

6. Application de la deuxième loi de Newton aux mouvements des planètes et des satellites

■ Mouvement des planètes

- Référentiel : héliocentrique galiléen.
- Système : planète.
- Inventaire des forces: force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_{S \rightarrow P}$ exercée par le Soleil de masse m_S sur la planète de masse m_P (doc. 15).
- Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{S \rightarrow P} = m_P \cdot \vec{a}_P$.

D'après la loi d'interaction gravitationnelle étudiée au chapitre 2 :

$$- G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2} \vec{u}_{SP} = m_P \cdot \vec{a}_P$$

avec r distance entre S le centre du Soleil et P le centre de la planète. On en déduit (doc. 16) :

$$\vec{a}_P = - G \cdot \frac{m_S}{r^2} \cdot \vec{u}_{SP}, \quad \text{or} \quad \vec{u}_{SP} = -\vec{N};$$

donc :

$$\vec{a}_P = G \cdot \frac{m_S}{r^2} \cdot \vec{N}.$$

le vecteur accélération est centripète.

La solution générale de cette équation nous indique que les planètes en orbite autour du soleil ont pour trajectoire une ellipse dont le soleil occupe un des foyers. Nous ne traitons ici que le cas simple, mais important, des orbites circulaires.

Dans le cas où le point P décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon r , sa vitesse v est constante et son vecteur accélération a pour

expression :

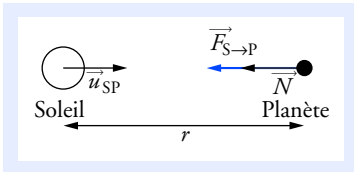
$$\vec{a}_P = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N}.$$

En égalant les deux expressions de \vec{a}_P , on vérifie que dans le référentiel héliocentrique le mouvement circulaire uniforme du centre P de la planète est une solution possible des équations déduites de la deuxième

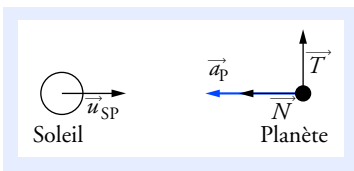
loi de Newton si :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_S}{r}}.$$

Pour cette étude élémentaire, on ne tient pas compte de l'action gravitationnelle des autres planètes, très faible devant celle du Soleil.



Doc. 15 Force exercée par le Soleil sur la planète.



Doc. 16 Les vecteurs \vec{u}_{SP} et \vec{N} sont tels que $\vec{u}_{SP} = -\vec{N}$.

Les trajectoires des centres des planètes sont elliptiques. Mais on peut considérer avec une assez bonne approximation que leur trajectoire est pratiquement circulaire (à l'exception de Mercure et Pluton) et de centre, le centre du Soleil.

La période de révolution vaut $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_S}}$.

La vitesse et la période de révolution ne dépendent pas de la masse de la planète. Pour une plus grande distance d'une planète au Soleil, la vitesse est plus faible et la période de révolution plus grande.

À partir de l'expression de la période de révolution, on peut en déduire la relation suivante : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = \text{cte}$, constante indépendante de la planète étudiée.

■ Mouvement d'un satellite de la Terre

L'étude se conduit de la même façon que pour le mouvement d'une planète autour du Soleil.

Seule la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre est à prendre en compte. Pour une orbite circulaire, dont le centre se confond avec le centre de la Terre, la masse m_T de la Terre, le rayon r , la période T et la vitesse v sont liées par les relations :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}}$$

ou encore :
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_T}.$$

Si R_T est le rayon de la Terre et h l'altitude du satellite :
$$r = R_T + h.$$

■ Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire doit avoir une position fixe par rapport au référentiel terrestre. Il est donc situé en permanence à la verticale d'un point de la surface de la Terre.

- Le plan de son orbite est le plan équatorial (doc. 17).
- La période de révolution est égale à un jour sidéral, c'est-à-dire à la période de rotation propre de la Terre dans le référentiel géocentrique, soit $T = 86\,164$ s.
- Son altitude se déduit de l'expression de la période :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}}, \quad \text{d'où} \quad r = R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_T}{4\pi^2}}.$$

Avec $R_T = 6\,380$ km, $T = 86\,164$ s, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.,
 $m_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, on obtient : $h = 35,8 \cdot 10^3$ km.

Voir exercices n^{os} 4 et 6

On peut vérifier que l'expression de v est homogène.

La dimension de G est :

$$M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}.$$

$$[v] = \left(\frac{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot M}{L} \right)^{1/2}$$

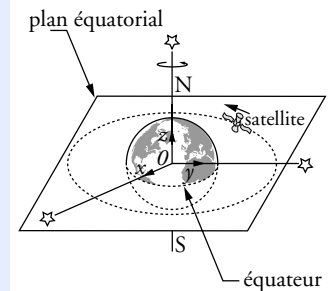
$$[v] = L \cdot T^{-1}.$$

Pour cette étude la Terre est assimilée à un corps ayant une répartition de masse à symétrie sphérique.

Les satellites artificiels sont considérés comme des masses ponctuelles.

La Lune est assimilée à un corps ayant une répartition de masse à symétrie sphérique.

On peut donc appliquer la loi de la gravitation en supposant la masse de la Terre concentrée en son centre.



Doc. 17 La trajectoire d'un satellite géostationnaire est contenue dans le plan équatorial.

On peut calculer le produit $G \cdot m_T$ sans connaître les valeurs de G et de m_T .

Il suffit d'écrire que la force de pesanteur au niveau du sol est égale à la force de gravitation exercée sur un objet situé à une distance R_T du centre de la Terre :

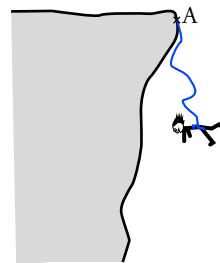
$$m \cdot g_0 = \frac{G \cdot m_T \cdot m}{R_T^2},$$

soit : $G \cdot m_T = g_0 \cdot R_T^2.$

Pour faire le point...

1. Étude d'une corde d'escalade

Au cours de l'escalade d'une paroi rocheuse un grimpeur effectue une chute libre sans vitesse initiale d'une hauteur de 7,8 m, avant que la corde de sécurité fixée en A se tende. On donne : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



1. Calculer la vitesse v_1 atteinte par ce grimpeur à l'instant où la corde commence à se tendre.

2. La portion de corde mise en jeu a une longueur au repos $\ell = 8,0 \text{ m}$. Son élasticité vaut $E = 8,0 \%$ (sa longueur peut augmenter de 8,0 %).

a. Calculer l'accélération, supposée constante, subie par l'alpiniste entre la date à laquelle se tend la corde et la date correspondant au point le plus bas atteint par le grimpeur. Le mouvement est supposé rester vertical.

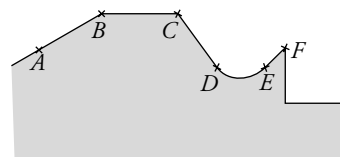
b. La résistance à la rupture de cette corde vaut 25 kN. Cette valeur est-elle suffisante pour enrayer la chute ? La masse du grimpeur avec son équipement est $m = 78 \text{ kg}$.

Conseil

Bien distinguer les deux phases du mouvement et faire une analyse soignée des forces exercées sur le système.

2. Saut à ski

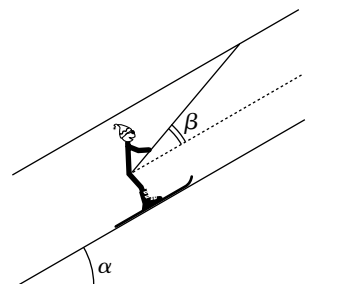
Un skieur aborde successivement les différentes parties d'une piste dont le profil est schématisé ci-contre.



1. Il remonte à vitesse constante la piste AB inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant même direction que la perche. Elle forme un angle $\beta = 20^\circ$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et l'air sur le skieur est équivalent à une force unique \vec{F} de valeur $F = 65 \text{ N}$, opposée au mouvement.

Calculer la valeur de la force de traction exercée par la perche.

2. Arrivé au sommet de la pente en B, il lâche la perche avec une vitesse de $3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il est alors sur une surface plane et horizontale. Quelle distance va-t-il parcourir avant de s'arrêter, en admettant que l'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F' = 42 \text{ N}$?



3. Il aborde ensuite une pente CD inclinée d'un angle $\alpha' = 35^\circ$ par rapport au plan horizontal. La valeur des forces de frottement ne peut plus être considérée comme constante et on admettra qu'elle est proportionnelle au carré de sa vitesse : $F = k \cdot v^2$, avec $k = 0,56 \text{ N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$. Quelle vitesse limite v_L le skieur peut-il atteindre ?

4. Il aborde un tremplin de saut EF incliné d'un angle $\gamma = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale. Pour simplifier la suite de l'étude, on ne prendra pas en compte les forces exercées par l'air. Par ailleurs, on considérera que sa vitesse en F vaut $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5,0 m au-dessous de F.

Données : masse du skieur $m = 80 \text{ kg}$; $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Conseils

- Pour chaque phase du mouvement, faire un inventaire soigné des forces exercées et un schéma sur lequel figureront les vecteurs forces.
- Pour simplifier l'étude, changer de repère d'espace pour chaque phase.

3. Chute d'une goutte d'eau

On considère la chute verticale d'une goutte d'eau sphérique dans l'atmosphère.

1. Comparer, pour la goutte, le poids et la force de poussée d'Archimède ; conclure.
2. Au cours de sa chute, la goutte est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v et de valeur $f = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$ avec r le rayon de la goutte et η la viscosité dynamique de l'air.

Établir l'équation différentielle du mouvement de la goutte (tenir compte de la question 1.).

3. Déterminer la vitesse limite v_L atteinte par la goutte.
4. La goutte étant initialement au repos, exprimer la vitesse $v(t)$ à une date quelconque en

fonction de v_L , t et $\tau = \frac{v_L}{g}$. Tracer l'allure de la représentation graphique de $v = f(t)$.

Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.

5. Au bout de quelle durée la vitesse limite est-elle atteinte à 1 % près ? Calculer la distance parcourue par la goutte au cours de cette durée.

Données : masses volumiques : $\mu_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\mu_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$r = 50 \text{ } \mu\text{m}$; $\eta = 18,5 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$; $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Conseils

- Pour établir l'équation différentielle du mouvement, utiliser la deuxième loi de Newton, puis projeter sur un axe vertical orienté dans le sens du mouvement.
- Quelle est la masse d'une sphère de rayon r et de masse volumique μ ?
- Pour l'étude de τ , revoir le paragraphe 4 de Ce qu'il faut savoir.

4. La planète Uranus

La planète Uranus a été découverte en 1781. La sonde Voyager 2 lancée en 1977 est passée à proximité d'Uranus le 24 janvier 1986. Cette planète possède vingt et un satellites.

Les différents corps sont tous supposés avoir une répartition de masse à symétrie sphérique.

I. Distance Soleil Uranus

Dans le référentiel héliocentrique, Uranus décrit une trajectoire pratiquement circulaire dont le centre est le centre du Soleil. Seule l'interaction entre le Soleil et Uranus est prise en compte.

1. Montrer que le mouvement d'Uranus dans le référentiel héliocentrique est uniforme.
2. Établir l'expression de la période de révolution T d'Uranus autour du Soleil en fonction du rayon r de l'orbite, de la masse M_s du Soleil et de la constante de gravitation universelle G .
3. En déduire le rayon de l'orbite d'Uranus autour du Soleil en unité astronomique (u.a.).

II. Masse d'Uranus

Les cinq satellites d'Uranus les plus massifs ont été découverts entre 1787 et 1948. Le mouvement de ces satellites est étudié dans un référentiel \mathcal{R}_U considéré comme galiléen, défini par le centre d'Uranus et trois étoiles fixes. Les données relatives aux satellites sont rassemblées dans le tableau ci-après. Pour les calculs, on supposera les orbites circulaires.

| Satellite | Rayon moyen de l'orbite ($\times 10^6$ m) | Période de révolution (en jours terrestres) | Diamètre (km) |
|-----------|--|---|---------------|
| Titania | 435,8 | 8,71 | 1 578 |
| Obéron | 582,6 | 13,50 | 1 523 |
| Umbriel | 266,0 | 4,14 | 1 169 |
| Ariel | 191,2 | 2,52 | 1 158 |
| Miranda | 129,8 | 1,41 | 472 |

1. Dans le référentiel \mathcal{R}_U , exprimer la période de révolution de ces satellites (en mouvement circulaire et uniforme) en fonction du rayon r de leur orbite, de la masse m_U d'Uranus et de la constante de gravitation G . On ne considérera que l'interaction satellite-planète.

2. Tracer la représentation graphique de $T^2 = f(r^3)$.

3. Dédurre de ce tracé la masse d'Uranus.

Données : $T = 84,01$ années terrestres ; 1 u.a. = la distance moyenne entre le centre du Soleil et celui de la Terre. On supposera que l'orbite terrestre est circulaire.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.}$$

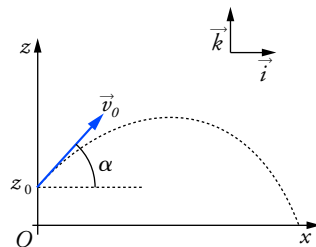
Conseils

- Pour que le mouvement soit uniforme, il faut que le vecteur accélération soit centripète.
- Pour la question II.1., procéder par analogie avec I.

Pour s'entraîner...

5. Le lob au tennis

Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court. Le joueur 1, situé à $d_1 = 2,0$ m du filet, tape la balle à une hauteur $z_0 = 0,30$ m et lui communique une vitesse \vec{v}_0 contenue dans un plan vertical, de valeur $v_0 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et formant un angle $\alpha = 60^\circ$ avec l'horizontale. On négligera les forces de frottement.



1. Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$ représenté sur la figure (la balle est frappée à la date $t = 0$).

2. En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

3. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ?

4. Le joueur 2 est de l'autre côté du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle : le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur $h = 2,30$ m. À quelle distance minimale du filet le joueur 2 doit-il se placer pour intercepter la balle ?

5. Le joueur 2 se trouve à une distance $d_2 = 4,0$ m du filet. Peut-il intercepter la balle ? Le lob est-il réussi ?

6. Caractériser le vecteur vitesse \vec{v} de la balle lors de son impact sur le sol.

Données : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La hauteur du filet h vaut $1,0$ m. La ligne de fond de court est située à $12,0$ m du filet.

Conseils

- Établir l'équation de la trajectoire en prenant garde aux conditions initiales.
- On caractérise le vecteur vitesse par sa valeur et l'angle qu'il forme avec le plan horizontal.

6. Le satellite SOHO

Nous considérons que la Terre et le Soleil ont une répartition de masses à symétrie sphérique. Le satellite SOHO, d'observation solaire, a été lancé en 1995. Il se trouve au point de Lagrange L1, situé entre la Terre et le Soleil. Ce satellite reste constamment à la même distance du Soleil sur la droite joignant le centre de la Terre au centre du soleil.

Nous considérons que la Terre et le Soleil ont une répartition de masses à symétrie sphérique.

1. En ne considérant que l'interaction Terre-Soleil, exprimer la vitesse angulaire de rotation du centre de la terre autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique, en fonction de G , la masse du soleil M_S et la distance entre les centres de ces corps notée a . Le mouvement est supposé circulaire et uniforme.

2. Comparer les vitesses angulaires de la Terre et de SOHO autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique.

3. Exprimer le vecteur accélération du satellite en fonction de G , M_S , a et de la distance entre le centre de la Terre et le satellite x . Pour simplifier on posera $M_S = K \cdot m_T$.

4. Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite pour obtenir une relation entre a , x et K .

5. Le point L_1 est beaucoup plus proche de la Terre que du Soleil $\left(\frac{x}{a} \ll 1\right)$. En tenant compte

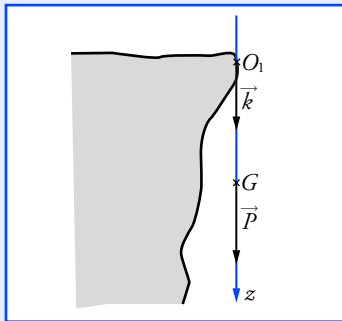
de l'approximation $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n \cdot \varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$, établir la relation $x = \frac{a}{\sqrt[3]{3K}}$.

Calculer x .

Données : $a = 1,50 \cdot 10^{11}$ m ; $K = 3,33 \cdot 10^5$ S.I.

Conseils

- À l'échelle du système solaire, le référentiel géocentrique n'est pas galiléen. Dans quel référentiel est-on autorisé à appliquer la seconde loi de Newton ?
- Faire un schéma avec le satellite, le Soleil et la Terre.
- Faire un inventaire correct des forces appliquées sur SOHO.
- La question 4. conduit à la résolution d'une équation du troisième degré. Avec l'approximation proposée la résolution devient beaucoup plus simple.



Pour cette question, il est plus simple de changer l'origine des dates.

Si un point mobile M est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié entre deux points P_1 et P_2 , d'abscisses x_1 et x_2 , l'accélération a entre ces deux points est telle que :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1),$$
 avec v_1 et v_2 vitesse de M , respectivement en P_1 et P_2 .

L'organisme humain peut supporter une accélération de $150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant une fraction de seconde.

1. Étude d'une corde d'escalade

1. • Référentiel terrestre considéré comme galiléen.

• Système : grimpeur.

• Le mouvement de chute étant vertical, nous prenons un repère unidimensionnel $(O_1; \vec{k})$. O_1 est la position du centre d'inertie du grimpeur à l'instant de la chute, à $t = 0$ et \vec{k} est vertical dirigé vers le bas.

• Inventaire des forces : le poids du grimpeur, $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = + m \cdot g \cdot \vec{k}$.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_{G_1}$,

donc :
$$\vec{a}_{G_1} = \vec{g} = g \cdot \vec{k}.$$

On en déduit :
$$\ddot{z} = -g,$$

d'où :
$$\dot{z} = v_G = g \cdot t + \text{cte.}$$

Comme $\dot{z}(0) = 0$: $\dot{z} = g \cdot t$ (1) ce qui s'intègre en $z = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + \text{cte.}$

Comme $z(0) = 0$, nous obtenons finalement : $z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2.$ (2)

(1) entraîne $t = \frac{v_G}{g}$. En reportant dans (2), on obtient :

$$v_G^2 = 2g \cdot z, \text{ soit } v_G = v_1 = \sqrt{2g \cdot z}.$$

D'où :
$$v_1 = 12,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. a. Lorsque la corde s'allonge, le mouvement est rectiligne et uniformément retardé d'accélération a_{G_2} , d'où :

$$v_G = a_{G_2} \cdot t + \text{cte.}$$

À la date $t = 0$ où la corde commence à se tendre, la vitesse de l'alpiniste vaut v_1 , donc : $v_G = a_{G_2} \cdot t + v_1$ (3).

Cette équation s'intègre en : $z_G = \frac{1}{2} a_{G_2} \cdot t^2 + v_1 \cdot t + \text{cte.}$

À $t = 0$, $z_G = z_1$, donc : $z_G = \frac{1}{2} a_{G_2} \cdot t^2 + v_1 \cdot t + z_1$ (4).

En combinant (3) et (4), on obtient :
$$a_{G_2} = \frac{v_G^2 - v_1^2}{2(z_G - z_1)}.$$

La vitesse de G s'annule ($v_G = 0$) lorsque le point le plus bas est atteint.

La distance parcourue vaut alors : $z_G - z_1 = \ell$. $E = 0,64 \text{ m}$.

On en déduit : $a_{G_2} = -118 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx -1,2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$

b. • Référentiel terrestre galiléen.

• Système : grimpeur.

• Inventaire des forces : \vec{P} et la force de tension exercée par la corde \vec{T} .

• On utilise le même repère spatial que précédemment.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_{G_2}$.

En projetant cette relation sur l'axe (Oz) , on obtient : $P - T = m \cdot a_{G_2}$,

soit :
$$T = P - m \cdot a_{G_2} = m \cdot (g - a_{G_2}).$$

D'où :
$$T = 9\,968 \text{ N} \approx 10 \text{ kN} < 25 \text{ kN};$$

la résistance de la corde est suffisante.

2. Saut à ski

1. • Référentiel terrestre galiléen.

• Système : skieur.

• Inventaire des forces : le poids du skieur \vec{P} , l'ensemble des forces exercées par la neige décomposée en une force de réaction normale \vec{R} et une force de frottement \vec{F}_1 , la force de traction exercée par la perche \vec{T} .

• Repère : $(O_1; \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ avec \vec{i}_1 parallèle à la ligne de plus grande pente, dans le sens du mouvement et \vec{j}_1 orthogonal à la pente.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$.

Le mouvement s'effectue à vitesse constante, donc :

$$\vec{a}_G = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{avec} \quad \vec{P} \begin{vmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \vec{R} \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix}; \quad \vec{F}_1 \begin{vmatrix} -F_1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{T} \begin{vmatrix} T \cdot \cos \beta \\ T \cdot \sin \beta \end{vmatrix}.$$

On obtient par projection sur l'axe (Ox) :

$$-F_1 - m \cdot g \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \beta = 0;$$

$$\text{d'où :} \quad T = \frac{F_1 + m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\cos \beta} = 486 \text{ N} \approx 4,9 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

2. • Inventaire des forces : \vec{P} , \vec{R} , \vec{F}_2 .

• Repère : $(O_2; \vec{i}_2, \vec{j}_2)$ défini sur le schéma ci-contre.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}_G$.

En projetant cette relation sur l'axe (Ox) , on obtient : $-F_2 = m \cdot a_G$,

$$\text{soit :} \quad a_G = -\frac{F_2}{m} = -0,525 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$v_x = a_G \cdot t + v_0$ avec v_0 la vitesse du skieur à $t = 0$ lorsqu'il lâche la perche.

$$x = \frac{1}{2} a_G \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad \text{avec} \quad x_0 \text{ l'abscisse du skieur à } t = 0.$$

En éliminant t entre ces deux relations, on obtient :

$$x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_0^2}{2a_G},$$

soit avec $v_x = 0$ et $v_0 = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: $x - x_0 = 9,8 \text{ m}$.

3. • Inventaire des forces : \vec{P} , \vec{R} , \vec{F}_3 .

• Repère : $(O_3; \vec{i}_3, \vec{j}_3)$ défini sur le schéma ci-contre.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_3 = m \cdot \vec{a}_G$.

Lorsque la vitesse maximale est atteinte : $\vec{a}_G = \vec{0}$.

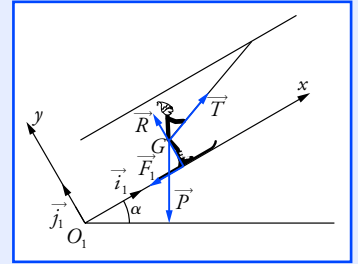
En projetant la relation sur l'axe (O_3x) on obtient : $P \cdot \sin \alpha' - F_3 = 0$,

$$\text{soit :} \quad P \cdot \sin \alpha' = k \cdot v_L^2;$$

$$\text{d'où :} \quad v_L = \sqrt{\frac{P \cdot \sin \alpha'}{k}} = 28,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

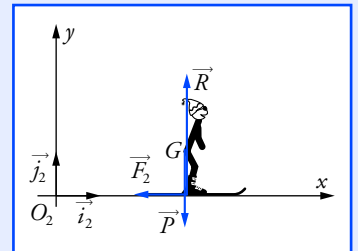
4. • Inventaire des forces : \vec{P} .

• Repère : $(O_4; \vec{i}_4, \vec{j}_4)$ contenant le vecteur vitesse au point F : \vec{v}_F .

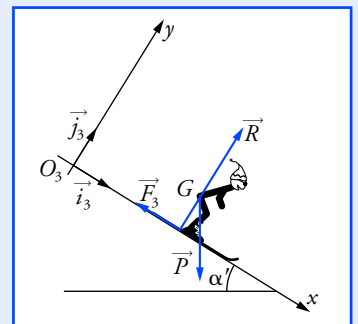


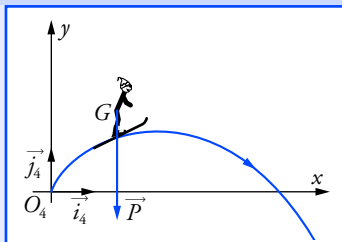
Pour simplifier l'étude, l'un des vecteurs de la base doit avoir la même direction et le même sens que le mouvement du centre d'inertie du skieur.

En utilisant la projection sur l'axe (Oy) on peut déterminer la valeur de R .

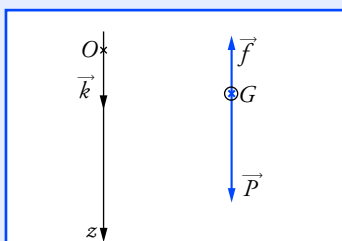


On retrouve la relation entre abscisse, vitesse et accélération présentée à l'exercice 1.

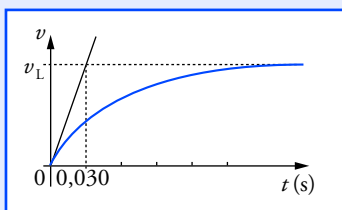




La comparaison de ces forces ne nécessite pas la connaissance du volume de la goutte.



Le vecteur vitesse étant orienté vers le bas, la force de frottement est orientée vers le haut, soit : $\vec{f} = -f \cdot \vec{k}$.



• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$.

En reprenant l'étude présentée au paragraphe 4 de *Ce qu'il faut savoir*, on obtient l'équation de la trajectoire suivante :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_F^2 \cdot \cos \gamma} \cdot x^2 + \tan \gamma \cdot x. \quad (1)$$

Le skieur reprend contact avec la neige en un point tel que $y = -5,0$ m. En remplaçant dans (1), on obtient une équation du second degré qui admet deux solutions : $x_1 = 46,3$ m et $x_2 = -13,3$ m. Seule la valeur $x_1 = 46,3$ m ≈ 46 m convient.

3. Chute d'une goutte d'eau

1. Pour comparer ces deux forces, calculons leur quotient :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\mu_{\text{eau}} \cdot V \cdot g}{\mu_{\text{air}} \cdot V \cdot g} \text{ avec } V \text{ le volume de la goutte.}$$

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\mu_{\text{eau}}}{\mu_{\text{air}}} = 7,7 \cdot 10^2.$$

Pour l'étude du mouvement, on pourra donc négliger l'influence de la poussée d'Archimède.

2. • Référentiel terrestre galiléen.

• Système : goutte d'eau.

• Repère : $(O; \vec{k})$ défini sur le schéma.

• Inventaire des forces : $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{k}$ et \vec{f} .

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$.

En projetant sur l'axe (Oz) on obtient : $m \cdot g - f = m \cdot a_G$ (1).

Or : $f = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$ et $a_G = \frac{dv}{dt}$,

donc (1) s'écrit : $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$;

soit : $\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi \cdot r \cdot \eta}{m} \cdot v = g$.

3. Lorsque la vitesse limite est atteinte $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $v_L = \frac{m \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta}$.

En remplaçant m par $\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \mu_{\text{eau}}$, on obtient :

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{r^2 \cdot g \cdot \mu_{\text{eau}}}{\eta}, \text{ soit } v_L = 0,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'équation différentielle peut s'écrire en utilisant l'expression de v_L :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{v_L} \cdot v = g, \text{ soit } \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v = \frac{v_L}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{v_L}{g}.$$

En se reportant à l'annexe 3, on trouve : $v(t) = v_L \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

L'allure de la représentation graphique se déduit de l'étude précédente. La tangente à l'origine coupe l'asymptote au point d'abscisse τ . τ représente le temps caractéristique. Il vaut 0,030 s.

4. À la date t_1 , la vitesse de la goutte vaut : $v_1 = 0,99 \cdot v_L$.

Donc :
$$\frac{v_L - v_1}{v_L} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,01,$$

soit :
$$t_1 = -\tau \cdot \ln 0,01 = 4,6 \tau \approx 0,14 \text{ s}.$$

Sachant que $v(t) = \frac{dv}{dt}$, on en déduit :

$$z(t) = v_L \cdot t + \tau \cdot v_L \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cte}.$$

À $t = 0$, $z(0) = 0$, donc : $z(t) = v_L \cdot t + \tau \cdot v_L \cdot (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1).$

À $t_1 = 4,6 \tau$: $z(t_1) = 0,032 \text{ m} = 3,2 \text{ cm}.$

4. La planète Uranus

I. 1. Référentiel : héliocentrique.

- Système : Uranus de masse m_U et de centre U .
- Inventaire des forces : force d'attraction gravitationnelle centripète

exercée par le Soleil sur Uranus : $\vec{F}_{S \rightarrow U} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_U}{r^2} \cdot \vec{u}_{SU}.$

- Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{S \rightarrow U} = m_U \cdot \vec{a}_U.$
- \vec{a}_U est donc un vecteur accélération centripète.

Or pour un mouvement circulaire (voir le *chapitre 1*) :

$$\vec{a}_U = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N} \text{ avec ici } \vec{u}_{SU} = -\vec{N}. \text{ On en déduit que } \frac{dv}{dt} = 0.$$

La vitesse a une valeur constante : le mouvement est circulaire uniforme.

2. La deuxième loi permet d'écrire : $-G \cdot \frac{M_S \cdot m_U}{r^2} \cdot \vec{u}_{SU} = m_U \cdot \vec{a}_U.$

$$G \cdot \frac{M_S \cdot m_U}{r^2} \cdot \vec{N} = m_U \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N}, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}};$$

d'où :
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_S}}.$$

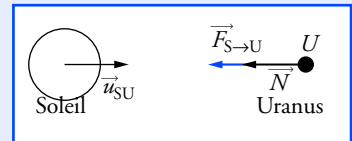
3. De l'expression de T , on déduit :

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}} \text{ et } r_T = \sqrt[3]{\frac{T_{\text{Terre}}^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}}.$$

Comparons r au rayon de l'orbite terrestre $r_T = 1 \text{ u.a.}$:

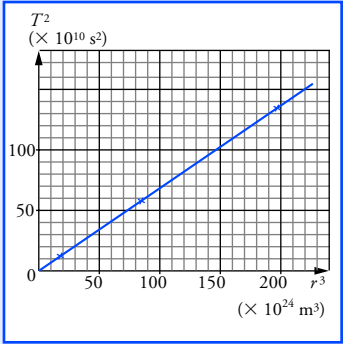
$$\frac{r}{r_T} = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_{\text{Terre}}}\right)^2}, \text{ soit } r = 84,01^{2/3} r_T \text{ et donc } r = 19,2 \text{ u.a.}$$

II. 1. L'expression de la période est similaire à la précédente. La masse du Soleil est remplacée par la masse d'Uranus, qui constitue l'astre attracteur.



En comparant les rayons des orbites de la Terre et celui d'Uranus, nous avons évité des calculs numériques fastidieux consistant à exprimer r et r_T en mètre à partir des valeurs de M_S et G , puis à en faire le rapport.

La relation trouvée est homogène car les deux termes sont des nombres sans dimension.



Dans ce cas, r représente la distance entre le centre du satellite et le centre d'Uranus, on a :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_U}}.$$

2. En élevant au carré l'expression précédente, on obtient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_U} r^3.$$

| Satellite | $r^3 \text{ (m}^3\text{)}$ | $T^2 \text{ (s}^2\text{)}$ |
|-----------|----------------------------|----------------------------|
| Titania | $8,280 \cdot 10^{25}$ | $5,66 \cdot 10^{11}$ |
| Obéron | $1,98 \cdot 10^{26}$ | $1,36 \cdot 10^{12}$ |
| Umbriel | $1,88 \cdot 10^{25}$ | $1,28 \cdot 10^{11}$ |
| Ariel | $6,99 \cdot 10^{24}$ | $4,74 \cdot 10^{10}$ |
| Miranda | $2,19 \cdot 10^{24}$ | $1,48 \cdot 10^{10}$ |

La représentation graphique est une droite de coefficient directeur :

$$\frac{4\pi^2}{G \cdot m_U}.$$

3. Le coefficient directeur vaut : $6,88 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Le calcul de la masse d'Uranus donne : $m_U = 8,6 \cdot 10^{25} \text{ kg}$.

5. Le lob au tennis

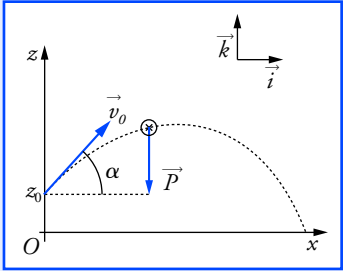
1. • Référentiel terrestre galiléen.

• Système : la balle.

• La seule force extérieure est : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \vec{k}$ (\vec{g} uniforme).

• Repère orthonormé : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Application de la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$,
soit : $\vec{a}_G = \vec{g} = -g \cdot \vec{k}$.



| | | |
|---|------------------------|--|
| $\ddot{x} = 0$ | $\ddot{y} = 0$ | $\ddot{z} = -g$ |
| $\dot{x} = \text{cte}$ | $\dot{y} = \text{cte}$ | $\dot{z} = -g \cdot t + \text{cte}$ |
| $\dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos \alpha$ | $\dot{y}(0) = 0$ | $\dot{z}(0) = v_0 \cdot \sin \alpha$ |
| donc $\dot{x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ | donc $\dot{y} = 0$ | donc $\dot{z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$ |
| $x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte}$ | $y(t) = \text{cte}$ | $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte}$ |
| $x(0) = 0$ | $y(0) = 0$ | $z(0) = z_0$ donc |
| donc $x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$ | donc $y(t) = 0$ | $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + z_0$ |

$y(t) = 0$; le mouvement du centre d'inertie du projectile s'effectue donc dans le plan vertical $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

On obtient les équations horaires paramétriques :

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + z_0.$$

2. L'équation $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$ donne : $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$.

En reportant dans z , on obtient :

$$z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x + z_0.$$

3. Calculons la valeur de z pour un point d'abscisse $x = 2,0$ m à l'aide de l'équation de la trajectoire : $z = 3,0$ m $>$ 1,0 m, donc la balle passe au-dessus du filet.

4. Pour que le joueur puisse intercepter la balle, la valeur de z doit être inférieure à $h = 2,30$ m pour une abscisse x_1 correspondant à la position du joueur 2.

x_1 est solution de l'équation du second degré :

$$h = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x_1^2 + \tan \alpha \cdot x_1 + z_0.$$

On obtient deux solutions $x'_1 = 1,4$ m et $x'_2 = 7,5$ m. La solution $x'_1 < 2,0$ m ne convient pas. Le joueur 2 doit se trouver à une distance minimale de 5,5 m du filet pour pouvoir intercepter la balle.

5. Le joueur, trop proche du filet, ne peut pas intercepter la balle. Le lob est réussi si la balle rencontre le sol en un point d'abscisse x_2 situé avant la ligne de fond de court, c'est-à-dire si pour $z = 0$, $x < 14,0$ m. x_2 est solution de l'équation :

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x_2^2 + \tan \alpha \cdot x_2 + z_0 = 0.$$

On obtient $x_2 = 9,0$ m $<$ 14,0 m ; le lob est réussi.

6. Les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_{G_x} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{G_z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right.$$

Or : $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t,$

d'où : $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}.$

Les coordonnées s'écrivent : $\vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_{G_x} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{G_z} = -\frac{g \cdot x}{v_0 \cdot \cos \alpha} + v_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right.$

Application numérique : $v_{G_x} = 5,0$ m \cdot s⁻¹ ; $v_{G_z} = -9,0$ m \cdot s⁻¹.

Le vecteur vitesse a une valeur égale à $\sqrt{v_{G_x}^2 + v_{G_z}^2} = 10,3$ m \cdot s⁻¹.

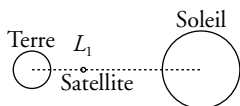
L'angle β que forme le vecteur vitesse avec le sol est tel que :

$$\tan \beta = \frac{|v_{G_z}|}{v_{G_x}} = 1,8 \quad \text{et} \quad \beta = 61^\circ.$$

$$36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ne pas oublier, lorsque plusieurs solutions sont possibles, de tenir compte de leur sens physique avant de les valider.

Pour déterminer la valeur de la vitesse, on pourrait aussi utiliser le théorème de l'énergie cinétique présenté au chapitre 5.



6. Le satellite SOHO

1. En reprenant une étude similaire à celle présentée dans le paragraphe 5 de *Ce qu'il faut savoir*, on obtient la vitesse v du centre de la Terre :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{a}}.$$

La vitesse angulaire vaut :

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{a^3}}.$$

2. Puisque le centre de la Terre, SOHO et le centre du Soleil restent constamment alignés, les vitesses angulaires de rotation de la Terre et de SOHO sont les mêmes.

3. Le mouvement de SOHO est circulaire uniforme **dans le référentiel héliocentrique galiléen**. Son accélération dans ce référentiel vaut :

$$\vec{a}_{\text{sat}} = \omega^2 (a - x) \cdot \vec{N},$$

soit en remplaçant ω par son expression :

$$\vec{a}_{\text{sat}} = \frac{G \cdot M_S}{a^3} (a - x) \cdot \vec{N} = \frac{G \cdot K \cdot m_T}{a^3} (a - x) \cdot \vec{N}.$$

4. Le satellite est soumis aux forces d'attraction gravitationnelle exercées par la Terre et le Soleil $\vec{F}_{T \rightarrow \text{sat}}$ et $\vec{F}_{S \rightarrow \text{sat}}$.

En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$\vec{F}_{T \rightarrow \text{sat}} + \vec{F}_{S \rightarrow \text{sat}} = m_{\text{sat}} \cdot \vec{a}_{\text{sat}},$$

soit :

$$-G \cdot \frac{m_T \cdot m_{\text{sat}}}{x^2} \cdot \vec{N} + G \cdot \frac{K m_T \cdot m_{\text{sat}}}{(a - x)^2} \cdot \vec{N} = m_{\text{sat}} \cdot G \frac{K \cdot m_T}{a^3} (a - x) \cdot \vec{N}.$$

$$\text{Après simplification : } -\frac{1}{x^2} + \frac{K}{(a - x)^2} = \frac{K}{a^3} (a - x). \quad (1)$$

5. Compte tenu de l'approximation proposée, on obtient :

$$\frac{K}{(a - x)^2} \approx \frac{K}{a^2} \left(1 + \frac{2x}{a}\right),$$

$$\text{d'où : } -\frac{1}{x^2} + \frac{K}{a^2} \left(1 + \frac{2x}{a}\right) = \frac{K}{a^3} (a - x).$$

Après simplification, on obtient $x = \frac{a}{\sqrt[3]{3K}} = 1,495 \cdot 10^9 \text{ m}$, c'est-à-dire

presque $\frac{1}{100}$ de la distance entre les centres de la Terre et du Soleil.

On voit ici toute l'importance d'une définition précise du référentiel d'étude :

- SOHO est **fixe** dans le référentiel non galiléen, lié à l'axe qui relie le centre du Soleil à celui de la Terre ;
- SOHO est **en mouvement circulaire** dans le référentiel héliocentrique qui est galiléen.

4 Systèmes mécaniques oscillants

Ce qu'il faut savoir...

1. Quelques définitions

■ On appelle **système mécanique oscillant** un système matériel pouvant évoluer de part et d'autre d'une position d'équilibre stable. Ce système peut évoluer périodiquement.

■ Une **oscillation** est le mouvement effectué par le système entre deux passages consécutifs à la même position et dans le même sens.

■ La **période** T est la durée d'une oscillation. La **fréquence** f est égale au nombre d'oscillations par unité de temps.

Dans le système international d'unités, la période se mesure en seconde (s) et la fréquence en **hertz (Hz)** : $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

2. Oscillations libres d'un pendule pesant

■ Un **pendule pesant** (doc. 1) est constitué d'un solide mobile autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre d'inertie G .

■ Un pendule est en **équilibre** lorsque son centre de gravité G est situé sur une verticale passant par l'axe de rotation (doc. 2).

■ Lorsqu'un pendule non amorti est écarté de sa position d'équilibre stable, puis abandonné, ses oscillations sont **périodiques**.

■ Pour étudier son mouvement, on définit l'**abscisse angulaire** $\theta(t)$ qui est fonction du temps.

La valeur maximale de l'abscisse angulaire est appelée **amplitude angulaire**, notée θ_m (doc. 3).

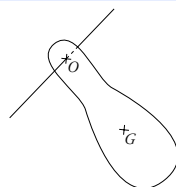
Elle est positive. $\theta(t)$ varie entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$.

■ La période est pratiquement indépendante de l'amplitude angulaire θ_m des oscillations si celle-ci est inférieure à 10° . Il y a **isochronisme des petites oscillations**. On appelle **période propre**, notée T_0 , la valeur de la période mesurée pour les petites oscillations.

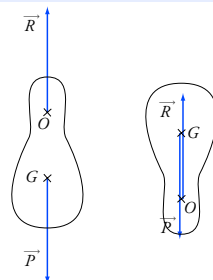
3. Oscillations libres d'un pendule simple

■ Un **pendule simple** est un système oscillant constitué d'un petit objet de masse m suspendu à un fil inextensible, ou une tige rigide, de longueur ℓ (doc. 4). La masse m est très supérieure à celle du fil ou de la tige, la longueur ℓ est très supérieure aux dimensions de l'objet. Il peut être considéré comme un **modèle idéalisé du pendule pesant**.

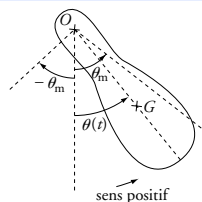
$$\text{Hz} \longleftarrow f = \frac{1}{T} \cdot \longrightarrow \text{s}$$



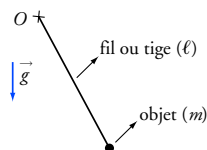
Doc. 1



Doc. 2 Lorsque le pendule est en équilibre :
– stable : G est situé au-dessous de l'axe ;
– instable : G est situé au-dessus de l'axe.



Doc. 3



Doc. 4

$$\left[\frac{\ell}{g} \right] \text{ se lit « dimension de } \frac{\ell}{g} \text{ ».}$$

La relation $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est démontrée à l'exercice 8.

■ Lois du mouvement d'un pendule simple non amorti

La période propre d'un pendule simple :

- ne dépend pas de la masse m de l'objet suspendu ;
- augmente si la longueur ℓ du pendule augmente ;
- diminue si la valeur g de la pesanteur augmente.

■ Période propre d'un pendule simple

L'expression de la période propre peut être obtenue par une **analyse dimensionnelle**.

$$\left[\frac{\ell}{g} \right] = \frac{L}{L \cdot T^{-2}} = T^2 \quad \text{avec } L \text{ la longueur et } T \text{ le temps}$$

On en déduit : $\left[\sqrt{\frac{\ell}{g}} \right] = T$, donc $T_0 = C \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$,

avec C une constante sans dimension.

On démontre que $C = 2\pi$, d'où :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

m
 s $N \cdot kg^{-1} \text{ ou } m \cdot s^{-2}$

Voir exercices n^{os} 1 et 7



Doc. 5

4. Oscillations libres d'un système solide-ressort

■ Constitution de l'oscillateur mécanique

Un solide S de masse m est fixé à un ressort de raideur k dont l'une des extrémités est fixe (doc. 5).

Le solide S est, par exemple, écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné. Il effectue des oscillations libres en translation rectiligne, de part et d'autre de sa position d'équilibre.

■ Force de rappel exercée par le ressort sur le solide S

Un ressort étiré (doc. 6a) ou comprimé (doc. 6b) exerce une force sur chaque objet en contact avec ses extrémités, en particulier sur le solide S .

La force de rappel a même direction que celle du ressort.

Son expression, valable quel que soit l'état du ressort, vaut :

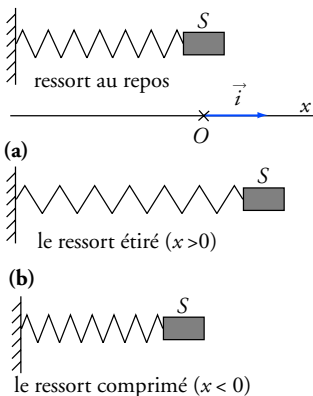
$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$$

Pour un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de longueur totale ℓ , l'allongement x vaut :

$$x = \ell - \ell_0.$$

La raideur k du ressort est exprimée en $N \cdot m^{-1}$ (unité S.I.).

La valeur algébrique x de l'allongement du ressort est exprimée en mètre.



Doc. 6 Le ressort étiré ($x > 0$) attire le solide S (a) ; le ressort comprimé ($x < 0$) repousse le solide S (b).

■ Étude dynamique du système solide

L'oscillateur est horizontal sans frottement, la masse du ressort est supposée très faible.

• **Référentiel** : terrestre galiléen.

• **Système** : solide S .

• **Inventaire des forces** (doc. 7) :

- poids \vec{P} vertical orienté vers le bas ;
- réaction \vec{R} du support, verticale (absence de frottement) et orientée vers le haut ;
- force de rappel $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$ exercée par le ressort sur le solide S .

• **Par application de la deuxième loi de Newton** au solide de centre d'inertie G , on obtient :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G.$$

• **En projetant** cette égalité vectorielle sur le repère $(O ; \vec{i})$, indiqué sur le schéma, on obtient :

$$0 + 0 - k \cdot x = m \cdot a_{G_x} \quad \text{avec} \quad a_{G_x} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0. \quad (1)$$

■ Solutions de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement est du second ordre. La solution générale est une fonction périodique de période T_0 (doc. 8) de la forme :

$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

T_0 est la période propre des oscillations libres.

x_m est l'amplitude du mouvement ($x_m > 0$).

ϕ est la phase à la date $t = 0$.

x_m et ϕ sont des constantes dont les valeurs sont déterminées à l'aide des conditions initiales, c'est-à-dire la position et la vitesse à la date $t = 0$: $x(0)$ et $v(0)$.

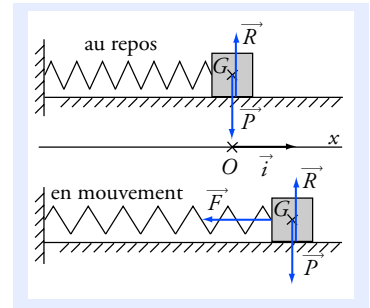
Par exemple, si le solide est lâché sans vitesse initiale avec une elongation initiale a , la solution est $x(t) = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right)$.

■ Période propre des oscillations

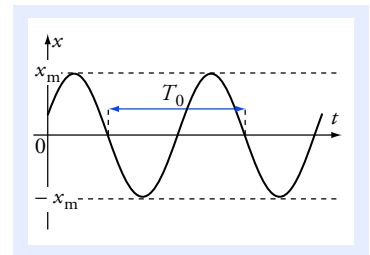
$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right);$$

donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x.$$



Doc. 7



Doc. 8 La vitesse est donnée par le coefficient directeur de la tangente à la courbe. On remarque que la vitesse est nulle aux positions extrêmes et qu'elle est maximale lorsque le solide repasse par sa position d'équilibre.

Lorsqu'on écrit :

$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right),$$

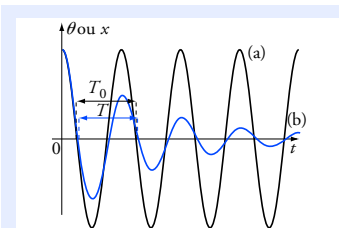
il est sous-entendu que la quantité

$\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right)$ est un angle qui doit

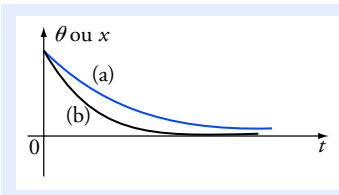
être exprimé en radian.

La dimension de $\sqrt{\frac{m}{k}}$ est celle d'un temps. En effet :

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}} \right] = \left(\frac{M}{M \cdot T^{-2}} \right)^{1/2} = T.$$

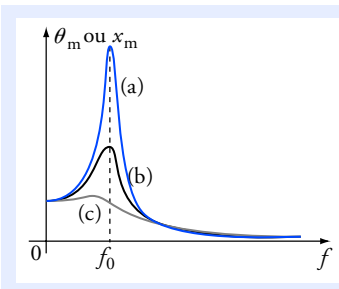


Doc. 9 Mouvement de l'oscillateur sans amortissement (régime oscillatoire) (a) et avec un amortissement faible (régime pseudo périodique) (b).



Doc. 10 Mouvement apériodique (a) et critique (b).

En fait, l'excitateur n'impose sa fréquence qu'après un certain temps, après un régime transitoire de durée limitée.



Doc. 11 L'amplitude de l'excitateur est constante :
 (a) résonateur peu amorti : résonance aiguë ;
 (b) résonateur amorti ;
 (c) résonateur très amorti : résonance floue.

On en déduit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \cdot x = 0 \quad (2).$$

En comparant (1) et (2), on obtient : $\left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = \frac{k}{m}$,

soit :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Les unités sont indiquées : m en kg, k en N.m⁻¹.

La période propre T_0 est indépendante des conditions initiales du mouvement.

Voir exercice n° 2

5. Oscillations amorties

Les forces de frottement provoquent un amortissement des oscillations. Leur amplitude diminue au cours du temps.

■ Si l'amortissement est faible le mouvement est dit **pseudo périodique**. La **pseudo-période** T est voisine de la période propre T_0 de l'oscillateur non amorti (doc. 9).

■ Si l'amortissement est élevé, le système revient à sa position d'équilibre sans osciller. Le mouvement est dit **apériodique** (doc. 10).

■ L'amortissement est **critique** lorsque l'oscillateur revient à sa position d'équilibre, sans osciller, au cours d'une durée minimale (doc. 10). C'est le cas limite entre le mouvement pseudo périodique et le mouvement périodique.

Voir exercice n° 2

6. Oscillations forcées et résonance

Lorsqu'un dispositif animé d'un mouvement périodique de fréquence f appelé **l'excitateur** est relié au système oscillant, celui-ci apporte régulièrement de l'énergie et finit par imposer sa fréquence au système oscillant appelé le **résonateur**. **Les oscillations sont alors qualifiées de « forcées ».**

L'amplitude θ_m ou x_m des oscillations forcées du résonateur dépend de la fréquence f de l'excitateur (doc. 11).

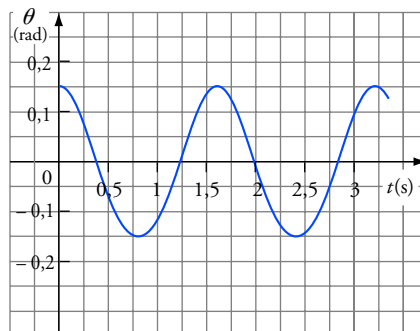
Pour f voisin de f_0 , fréquence propre du résonateur, l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale : c'est le phénomène de résonance.

Voir exercice n° 3

Pour faire le point...

1. Pendule simple

On étudie les oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ et de masse m . À l'aide d'un dispositif approprié, on obtient la représentation graphique de l'abscisse angulaire en fonction du temps.



I.1. En utilisant la représentation graphique, déterminer :

- l'amplitude angulaire ;
- la période propre et la fréquence propre des oscillations ;
- la vitesse angulaire à la date $t = 0$.

2. L'abscisse angulaire peut se mettre sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right).$$

Dans cette expression que représente ϕ ?

Déterminer, en utilisant la représentation graphique, la valeur de ϕ .

3. Avec le même dispositif, quelle serait la valeur de la période propre des oscillations pour une amplitude angulaire de $7,5^\circ$? La vitesse angulaire initiale et l'amplitude angulaire étant les mêmes que précédemment, quelle serait l'expression de l'abscisse angulaire ?

II.1. Donner l'expression de la période propre d'un pendule simple et vérifier son homogénéité.

2. La longueur de ce pendule vaut $\ell = 62,8$ cm. Le champ de pesanteur terrestre au lieu considéré vaut $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. Calculer la période propre de ce pendule et comparer avec la valeur obtenue en **I.1**.

3. Quelle longueur devrait avoir un pendule simple oscillant à la surface de la Lune avec la même période propre T_0 , le champ de pesanteur lunaire valant $g' = 1,62 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$?

III. Ce pendule est constitué d'un objet sphérique de rayon r et de masse m suspendu à un fil.

1. En considérant que la masse du fil est très inférieure à celle de l'objet, une modélisation plus élaborée permet d'obtenir l'expression suivante pour la période :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m \cdot r^2 + m \cdot \ell^2}{m \cdot g \cdot \ell}}.$$

La longueur ℓ représente la distance entre le point de suspension du fil et le centre de l'objet. Vérifier l'homogénéité de cette expression.

2. Vérifier que si le pendule peut être assimilé à un pendule simple, on obtient l'expression de la période utilisée à la question **II.1**.

Conseils

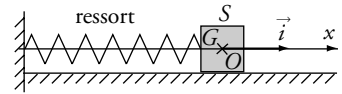
- L'amplitude angulaire et la phase à $t = 0$ sont déterminées en utilisant les conditions initiales déduites de l'étude graphique.
- Penser à utiliser l'isochronisme des oscillations de faibles amplitudes.
- Pour vérifier l'homogénéité d'une relation, faire une analyse dimensionnelle.

2. Oscillation d'un système solide-ressort

Un solide S de masse $m = 150$ g, mobile sur un banc à coussin d'air horizontal, est accroché à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, de raideur $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; l'autre extrémité est fixe.

Pour l'étude du mouvement on choisit le repère $(O; \vec{i})$, l'origine O du repère coïncide avec la position du centre d'inertie du solide à l'équilibre.

Le solide est écarté de sa position d'équilibre de 4,5 cm vers la droite, puis lâché sans vitesse initiale à la date $t = 0$ s.



1. Par une étude dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement. En déduire l'expression de la période propre. Calculer sa valeur numérique.
3. Dans les mêmes conditions expérimentales cette valeur serait-elle modifiée à la surface de la Lune ? Pourquoi ?
4. En utilisant les conditions initiales imposées au système, établir l'équation du mouvement : $x = f(t)$.
5. Tracer la représentation graphique $x = f(t)$.
6. Dans le cas de frottements faibles, tracer sur le graphe précédent l'allure de la représentation graphique correspondante.

Conseils

- Pour l'étude dynamique, le choix du système étudié est fondamental.
- Un schéma soigné sur lequel les différentes forces sont représentées est indispensable.

3. Oscillateur en régime forcé

Une essoreuse à linge industrielle peut être soumise à des vibrations dangereuses. Leur importance dépend de la vitesse de rotation du moteur et de la masse de linge à essorer.

1. Le moteur peut tourner aux vitesses suivantes N exprimées en tour par minute :

$$N = 300 ; 500 ; 600 ; 700 ; 800.$$

En déduire les fréquences f_m correspondantes.

2. La cuve de masse $M = 12,0$ kg est suspendue grâce à un système équivalent à un ressort de raideur k égal à $6,0 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer la fréquence propre des oscillations de la cuve lorsqu'elle contient les masses suivantes m de linge exprimées en kilogramme :

$$m = 2,0 ; 3,2 ; 4,0 ; 6,0 ; 8,0 ; 10,0.$$

3. L'essoreuse tourne à la vitesse de $600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ et contient 3,2 kg de linge. La machine vibre beaucoup. Expliquer ce phénomène.
4. Pour une même vitesse, si la machine contient 6,0 kg de linge, a-t-on les mêmes inconvénients ?
5. L'essoreuse tourne à la vitesse de $700 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Pourrait-on observer les mêmes inconvénients ?

Conseils

- Revoir Ce qu'il faut savoir sur les oscillations forcées et la résonance.
- Le dispositif étudié est modélisé par un solide fixé à un ressort.

Pour s'entraîner...

4. Vibration d'une molécule

Une molécule diatomique AB est formée de deux atomes A et B unis par une liaison covalente.

Cette molécule peut être modélisée par deux masses ponctuelles de valeurs m_A et m_B égales respectivement aux masses des atomes A et B , reliées par un ressort de raideur k , appelé dans ce cas la constante de force de la liaison. Ces masses oscillent autour de leur position d'équilibre avec une fréquence ν_0 . Si la masse de A est nettement supérieure à celle de B , A peut être considéré comme fixe, alors que B vibre avec une fréquence ν_0 dans le référentiel lié à A .

Lorsque cette molécule est soumise à l'action d'une onde électromagnétique caractérisée par sa fréquence ν , il y a résonance c'est-à-dire absorption d'énergie, pour $\nu = \nu_0$.

1. Quelle relation existe-t-il entre la longueur d'onde λ_0 d'une radiation dans le vide et sa fréquence ν_0 ?
2. Pour les molécules de chlorure d'hydrogène et d'iodure d'hydrogène, il y a absorption, respectivement pour $\lambda_{01} = 3,4 \mu\text{m}$ et $\lambda_{02} = 4,5 \mu\text{m}$. Calculer la fréquence de résonance de ces molécules.
3. En déduire pour chacune de ces molécules la constante de force de liaison.
4. Cette constante renseigne sur la force de la liaison. Plus elle est élevée, plus la liaison est forte. Laquelle des deux liaisons est la plus forte ?

Données : $M(\text{H}) = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{I}) = 126,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
 $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conseils

- Revoir Ce qu'il faut savoir au chapitre 12.
- Dans le cadre de l'approximation proposée, la fréquence de vibration de l'atome B est la même que celle d'un solide fixé à un ressort dont l'autre extrémité est fixe.

5. L'oscillateur d'« Archimède »

Un solide plongé dans un liquide est soumis à un ensemble de forces de poussées équivalentes à une force unique appelée force de poussée d'Archimède. Sa direction est verticale, elle est orientée vers le haut, sa valeur est égale au poids du volume de liquide déplacé et son point d'application, appelé centre de poussée, coïncide avec le centre de gravité du volume de liquide déplacé.

Un cylindre homogène, de section S , de longueur L , de masse volumique μ flotte sur l'eau. Un système de guidage adapté permet de maintenir en permanence le déplacement du cylindre vertical.

1. Exprimer littéralement la valeur F de la force de poussée \vec{F} en fonction de S , μ_{eau} la masse volumique de l'eau, h la hauteur immergée du cylindre et g la valeur du champ de pesanteur.

2. Pour qu'une hauteur $h = \frac{L}{2}$ du solide soit immergée à l'équilibre, quelle relation doit-il

exister entre les masses volumiques μ et μ_{eau} ?

3. Le système étant à l'équilibre dans les conditions précédentes, on l'enfonce et, à un instant pris comme origine des dates, on le lâche sans vitesse initiale. Choisir un repère $(O ; \vec{j})$ convenable pour l'étude du mouvement, puis établir l'équation différentielle du mouvement du cylindre en négligeant tout frottement. En déduire la nature du mouvement.

4. Donner l'expression de la période propre des oscillations du solide en fonction de g , le champ de pesanteur, et L .

5. Vérifier l'homogénéité de cette expression, puis calculer la valeur de la période.
6. En tenant compte de la présence d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}$, établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle serait la nature de ce mouvement ?

Données : $L = 10 \text{ cm}$; $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Conseils

Faire un schéma soigné pour exprimer correctement le vecteur force de poussée en fonction de L et y . On fixera l'origine O du repère $(O; \vec{j})$ de façon à avoir $y = 0$ à l'équilibre.

6. Suspension d'une automobile

I. On considère un ressort vertical, à spires non jointives, de raideur $k = 56 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ sur lequel est fixé un solide S de masse $M = 0,53 \text{ kg}$ comme l'indique le schéma ci-dessous. La longueur du ressort a diminué de $\Delta \ell$ en présence de S .

1. Écrire la relation entre k , $\Delta \ell$, M et g à l'équilibre, le centre d'inertie G du solide étant en G_0 .

2. Suite à une perturbation, à partir de l'état d'équilibre, le solide S acquiert une vitesse $v_0 = 0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vers le haut. Le mouvement de S est alors oscillatoire, le ressort restant toujours comprimé. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G de S . Le mouvement de G est vertical.

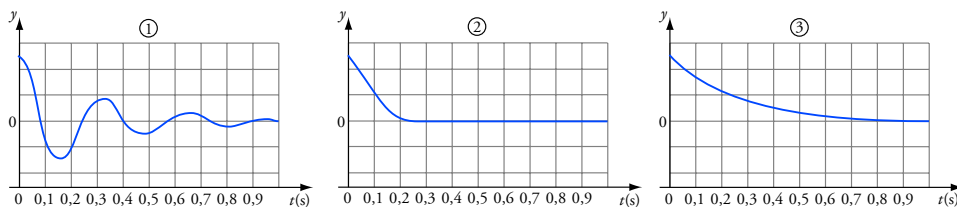
3. En déduire l'équation du mouvement $y = f(t)$ de G .

II. Les suspensions d'une automobile peuvent être simplement modélisées par un ensemble unique constitué d'un ressort de raideur $K = 5,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et d'un amortisseur. Ce dispositif assure la liaison entre le véhicule noté S de masse $M = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ et les roues.

1. Sans amortissement quelle serait la valeur de la période propre des oscillations ?

2. Avec amortissement la force de frottement exercée sur S est opposée à la vitesse du point G suivant la verticale : $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}_y \cdot \vec{j}$ (λ est un coefficient positif appelé coefficient d'amortissement). Établir, par une étude dynamique, l'équation différentielle du mouvement lors d'oscillations libres et amorties.

III. La résolution de cette équation différentielle, compte tenu des conditions initiales imposées au système, conduit pour trois véhicules, dont seule la valeur du coefficient d'amortissement change, à trois représentations graphiques.



1. Associer aux différentes courbes les valeurs correspondantes du coefficient :
 $\lambda_1 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; $\lambda_2 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; $\lambda_3 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. L'un des régime est pseudo périodique. Lequel ? Déterminer la pseudo-période et comparer avec la période propre du système calculée sans amortissement.
3. Le régime critique est le meilleur pour le confort et la sécurité des passagers. Quelle valeur du coefficient d'amortissement convient le mieux parmi les trois valeurs proposées ?

Conseils

- Pour l'étude statique, puis dynamique, faire trois schémas soignés : ressort à vide, système à l'équilibre, système en mouvement.
- On exprimera la longueur $\ell(t)$ du ressort en fonction de ℓ_0 , $\Delta\ell$ et $y(t)$. Attention aux erreurs de signe !
- Pour obtenir l'équation du mouvement, utiliser les valeurs de y et \dot{y} dans les conditions initiales.
- Revoir Ce qu'il faut savoir sur les oscillations amorties.

7. Pendule simple, détermination de la période propre

Un pendule simple est constitué d'un solide S , de très petites dimensions et de masse m , accroché à un fil de longueur ℓ , inextensible et de masse négligeable. Il oscille dans un plan vertical et sa position est repérée par l'angle (algébrique) θ .

Le fil étant de masse négligeable, on peut admettre :

- qu'il reste rectiligne ;
- que la force \vec{F}_{fil} exercée par le fil sur le solide S est colinéaire au fil.

1. Quelle est la trajectoire décrite par le centre d'inertie du solide S ? Rappel l'expression du vecteur accélération pour un mouvement circulaire en fonction de la longueur ℓ , de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ et des vecteurs unitaires \vec{N} et \vec{T} .

2. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide S et écrire la loi de Newton. Une des forces est connue et l'autre est *a priori* inconnue : laquelle ?

3. On veut en déduire une équation différentielle. Pour cela, on projette l'équation vectorielle sur un axe. Quel axe faut-il choisir pour que la force inconnue n'apparaisse pas dans l'équation obtenue ? Écrire l'équation différentielle obtenue.

4. Pour des petits angles, on peut écrire $\sin \theta \approx \theta$ (en radian). En utilisant la calculatrice,

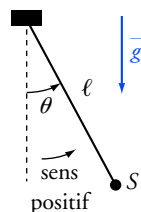
déterminer l'écart relatif $\frac{\theta - \sin \theta}{\theta}$ pour $\theta = 0,100$ rad, $\theta = 0,200$ rad et $\theta = 0,250$ rad.

Jusqu'où peut-on faire l'approximation si on s'autorise un écart relatif de 1 % ?

En faisant cette approximation, réécrire l'équation différentielle.

5. Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle. Retrouver l'expression de la période propre du pendule.

Le solide S est lâché sans vitesse initiale à partir de la position : $\theta(0) = \alpha$. Déterminer $\theta(t)$.



Conseils

- Voir Ce qu'il faut savoir au chapitre 1.
- On prendra soin d'orienter le vecteur unitaire \vec{T} de façon qu'il indique bien le sens positif de rotation ; ce n'est qu'à cette condition que l'on pourra poser : $\vec{v} = \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{T}$.
- Lorsque l'on utilise les fonctions trigonométriques, toujours exprimer les angles en radian.
- Pour la solution de l'équation différentielle, suivre la même méthode que pour le pendule simple.

Par définition la vitesse angulaire vaut $\omega = \dot{\theta}$.

L'amplitude angulaire θ_m et la phase ϕ à la date $t = 0$ sont déterminées en utilisant les conditions initiales.

Choisir une valeur simple de ϕ .

Vérifier l'homogénéité d'une relation permet de révéler certaines erreurs.

Pour comparer deux grandeurs on peut calculer leur écart relatif.

1. Pendule simple

I.1. L'amplitude angulaire, valeur maximale de l'abscisse angulaire, est lue sur la représentation graphique : $\theta_m = 0,15 \text{ rad} = 8,6^\circ$.

La période propre vaut $T_0 = 1,60 \text{ s}$. La fréquence propre vaut :

$$f = \frac{1}{T_0} = 0,625 \text{ Hz}.$$

À la date $t = 0$, elle est donc numériquement égale au coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique $\theta = f(t)$ au point d'abscisse $t = 0$. En ce point, la tangente est horizontale : son coefficient directeur est nul. La vitesse angulaire notée $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}$ est donc nulle.

2. ϕ est la phase à la date $t = 0$. À la date t :

$$\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right); \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right).$$

$$\text{À } t = 0 : \quad \theta(0) = \theta_m \cdot \cos \phi; \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m \cdot \sin \phi.$$

$$\text{À } t = 0 : \quad \theta(0) = \theta_m; \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0; \quad \text{donc } \cos \phi = 1 \text{ et } \sin \phi = 0.$$

On en déduit : $\phi = k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Prenons par exemple, $k = 0$, alors $\phi = 0$.

$$\text{L'abscisse angulaire vaut : } \theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right),$$

avec $\theta_m = 0,15 \text{ rad}$ et $T_0 = 1,60 \text{ s}$.

3. Si l'amplitude angulaire est inférieure à 10° , il y a isochronisme des oscillations. La période propre est donc la même pour des amplitudes angulaires de $8,6^\circ$ et $7,5^\circ$. Dans ce dernier cas, elle vaut encore $1,60 \text{ s}$.

L'expression de l'abscisse angulaire est inchangée :

$$\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right).$$

$$\text{II.1. } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \left[2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = \left(\frac{L}{L \cdot T^{-2}}\right)^{1/2} = T;$$

T_0 a bien la dimension d'un temps.

$$2. \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,628}{9,81}} = 1,59 \text{ s}.$$

Pour comparer avec la valeur obtenue en **I.1.**, calculons l'écart relatif :

$$\frac{1,60 - 1,59}{1,60} = 6,2 \cdot 10^{-3}, \text{ soit } 0,62 \text{ \%.}$$

3. Les périodes propres sont égales, donc :

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell'}{g'}} ; \quad \text{soit} \quad \frac{\ell}{g} = \frac{\ell'}{g'}.$$

On déduit : $\ell' = \frac{g'}{g} \cdot \ell = \frac{1,62}{9,81} \times 62,8 = 10,4 \text{ cm}.$

III.1. L'expression de T_0 se simplifie : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + \ell^2}{g \cdot \ell}}.$

$$\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + \ell^2}{g \cdot \ell}} \right] = \left(\frac{L^2}{L \cdot T^{-2} \cdot L} \right)^{1/2} = T.$$

La dimension de T_0 est bien celle d'un temps, l'expression est homogène.

2. Dans l'expression de $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + \ell^2}{g \cdot \ell}}$, divisons numérateur et

dénominateur par ℓ^2 . On obtient $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2r^2}{5\ell^2} + 1}{\frac{g}{\ell}}}$, or si le pen-

dule peut-être assimilé à un pendule simple : $r \ll \ell$, donc $\frac{2r^2}{5\ell^2} \ll 1$.

On retrouve l'expression de T_0 utilisée à la question II.1. :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

2. Oscillations d'un système solide-ressort

1. • Référentiel : terrestre galiléen.

• Système : solide S .

• Inventaire des forces :

– le poids vertical \vec{P} orienté vers le bas ;

– la réaction \vec{R} du support, verticale (absence de frottement) et orientée vers le haut ;

– la force de rappel $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$ exercée par le ressort sur le solide S .

• Par application de la deuxième loi de Newton au solide de centre d'inertie G , on obtient :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G.$$

• En projetant cette relation vectorielle sur le repère $(O; \vec{i})$, on obtient :

$$0 + 0 - k \cdot x = m \cdot a_{G_x}.$$

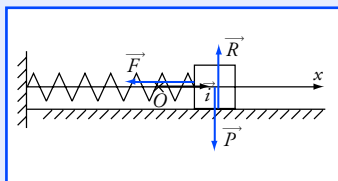
Avec $a_{G_x} = \ddot{x}$, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad (1).$$

2π est un nombre sans dimension.

Il faut utiliser une expression de la forme :

$$1 + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1.$$



Lors de l'étude dynamique d'un système, il est vivement conseillé d'adopter la démarche ci-contre en cinq étapes.

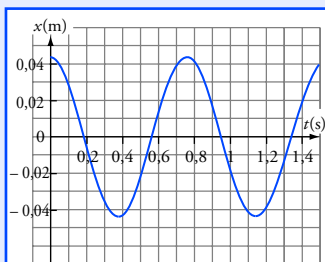
La dérivée par rapport au temps de :

$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right)$$

vaut :

$$\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0} x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

Par définition x_m est une grandeur positive.



2. La solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

En dérivant deux fois cette expression, on obtient :

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x; \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x = 0 \quad (2).$$

Par comparaison des équations (1) et (2), on en déduit :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m}; \quad \text{soit} \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$\text{Application numérique : } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,15}{10}} = 0,77 \text{ s.}$$

3. Cette valeur ne serait pas modifiée à la surface de la Lune. En effet, l'équation différentielle du mouvement, qui ne dépend pas de g , serait inchangée.

$$4. \text{ À } t: x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right); \quad \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

$$\text{À } t = 0: x(0) = x_m \cdot \cos \phi; \quad \dot{x}(0) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \cdot \sin \phi.$$

$$\text{À } t = 0: x(0) = 0,045 \text{ m}; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

On en déduit $\cos \phi > 0$, car x_m est positif et $\sin \phi = 0$;
d'où : $\phi = k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Prenons par exemple, $k = 0$, alors $\phi = 0$.

Par ailleurs, $x(0) = x_m \cdot \cos \phi$; donc $x_m = \frac{x_0}{\cos \phi} = 0,045 \text{ m}$.

$$\text{L'équation s'écrit : } x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right),$$

avec $x_m = 0,045 \text{ m}$ et $T_0 = 0,77 \text{ s}$.

5. Voir la représentation graphique ci-contre.

6. Dans le cas de frottements faibles, le régime est pseudo périodique. La pseudo-période a sensiblement la même valeur que la période propre. L'amplitude décroît au cours du temps.

3. Oscillateur en régime forcé

$$1. f_m = \frac{N}{60}.$$

| vitesse (tr. min ⁻¹) | 300 | 500 | 600 | 700 | 800 |
|-------------------------------------|------|------|------|------|------|
| f_m (Hz) | 5,00 | 8,33 | 10,0 | 11,7 | 13,3 |

2. La période propre est calculée en utilisant l'expression suivante :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{k}} \quad \text{d'où} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

| | | | | | | |
|--------------------|------|-----|-----|-----|-----|------|
| $m \text{ (kg)}$ | 2,0 | 3,2 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 |
| $f_0 \text{ (Hz)}$ | 10,4 | 10 | 9,7 | 9,2 | 8,7 | 8,3 |

3. Lorsque la machine tourne, le moteur est l'excitateur et la cuve avec le linge le résonateur. Pour une vitesse de rotation du moteur de $600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, la fréquence de rotation du moteur vaut $f_m = 10,0 \text{ Hz}$. Avec $3,2 \text{ kg}$ de linge, la fréquence propre du résonateur vaut $f_0 = 10 \text{ Hz}$. Ces deux valeurs étant égales, le système est à la résonance ; l'amplitude des vibrations de la cuve et du linge devient importante.

4. Lorsque la cuve contient $6,0 \text{ kg}$ de linge $f_m \neq f_0$. Le système est en oscillations forcées, mais il n'y a pas résonance.

5. On aurait les mêmes inconvénients pour $f_m = f_0$,

soit :

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M+m}} ;$$

$$\text{d'où : } M+m = \frac{k}{4\pi^2 \cdot f_m^2}, \quad \text{soit} \quad M+m = \frac{6,0 \cdot 10^4}{4\pi^2 \times 11,7^2} = 11 \text{ kg}.$$

Cette valeur est inférieure à la masse de la cuve seule. Le système ne pourra pas être à la résonance.

4. Vibration d'une molécule

1. $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}.$

2. $\nu_{01} = \frac{c}{\lambda_{01}} = \frac{3,0 \cdot 10^8}{3,4 \cdot 10^{-6}} = 8,8 \cdot 10^{13} \text{ Hz} ;$

$$\nu_{02} = \frac{c}{\lambda_{02}} = \frac{3,0 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{-6}} = 6,7 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

3. Compte tenu du modèle proposé, la fréquence de résonance de ces molécules vaut :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_H}}.$$

La masse de l'atome d'hydrogène vaut : $m_H = \frac{M(H)}{N_A} ;$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } k_{\text{HCl}} &= 4\pi^2 \cdot \nu_{01}^2 \cdot \frac{M(H)}{N_A} = 4\pi^2 \times (8,8 \cdot 10^{13})^2 \times \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \\ &= 5,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{\text{HI}} &= 4\pi^2 \cdot \nu_{02}^2 \cdot \frac{M(H)}{N_A} = 4\pi^2 \times (6,7 \cdot 10^{13})^2 \times \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \\ &= 2,9 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}. \end{aligned}$$

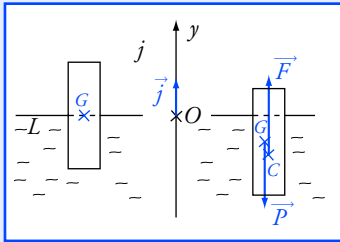
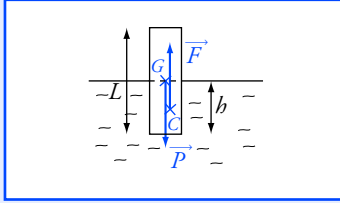
4. La liaison la plus forte est celle qui unit les atomes d'hydrogène et de chlore de la molécule de chlorure d'hydrogène.

La période propre des oscillations d'un solide de masse M suspendu à un ressort de raideur k vaut :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Les vibrations sont importantes à la résonance lorsque la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur.

Le modèle proposé dans l'énoncé est applicable car les masses des atomes de chlore et d'iode sont très supérieures à celle de l'atome d'hydrogène.



L'équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{y} + \left(\frac{2\pi}{T_0^2} \right) \cdot y = 0$$

On déduit l'expression de T_0 .

L'équation différentielle est homogène : chacun des termes admet comme dimension $L \cdot T^{-2}$.

5. L'oscillateur d'« Archimède »

1. $F = \mu_{\text{eau}} \cdot S \cdot h \cdot g$.

2. • Référentiel : terrestre galiléen.

• Système : solide.

• Inventaire des forces :

– le poids du solide \vec{P} , vertical, vers le bas ;

– la force de poussée d'Archimède \vec{F} verticale, vers le haut.

• En appliquant la première loi de Newton, on peut écrire : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, d'où : $P = F$ et $\mu \cdot S \cdot L \cdot g = \mu_{\text{eau}} \cdot S \cdot h \cdot g$.

Avec $h = \frac{L}{2}$, on obtient : $\mu = \frac{1}{2} \mu_{\text{eau}}$.

3. En appliquant la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G \quad (1).$$

Compte tenu du repère $(O; \vec{j})$ choisi sur le schéma, la hauteur de solide immergé vaut :

$$h = \frac{1}{2} L - y.$$

On en déduit : $\vec{F} = \left(\frac{1}{2} \cdot L - y \right) \cdot S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{j}$ avec $\vec{a}_G = \ddot{y} \cdot \vec{j}$.

(1) s'écrit :

$$- \mu \cdot S \cdot L \cdot g \cdot \vec{j} + \left(\frac{1}{2} L - y \right) \cdot S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{j} = m \cdot \vec{a}_G \quad (2).$$

Or $\mu = \frac{1}{2} \mu_{\text{eau}}$, donc la relation (2) devient après simplification :

$$- y \cdot S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g = m \cdot \ddot{y} ;$$

soit : $\ddot{y} + \frac{S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g}{m} \cdot y = 0$.

C'est une équation différentielle du deuxième ordre. Le mouvement du centre d'inertie du solide est donc rectiligne sinusoïdal.

4. $\left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = \frac{S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g}{m}$, donc $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g}}$.

Or $m = \mu \cdot S \cdot L = \frac{1}{2} \mu_{\text{eau}} \cdot S \cdot L$, donc $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$.

5. $\left[2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right] = \left(\frac{L}{L \cdot T^{-2}} \right)^{1/2} = T$.

Application numérique : $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{0,10}{2 \times 9,80}} = 0,45 \text{ s}$.

6. En appliquant la deuxième loi de Newton au solide, on écrit :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G ;$$

soit : $- \mu \cdot S \cdot L \cdot g \cdot \vec{j} + \left(\frac{1}{2} L - y \right) \cdot S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot \vec{j} - \lambda \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{a}_G ;$

d'où : $- \mu \cdot S \cdot L \cdot g + \left(\frac{1}{2} L - y \right) \cdot S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g - \lambda \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$.

Avec la relation à l'équilibre et la relation entre les masses volumiques, on obtient après simplification :

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{m} \cdot \dot{y} + \frac{S \cdot \mu_{\text{eau}} \cdot g}{m} \cdot y = 0.$$

Si le coefficient d'amortissement n'est pas très élevé, le mouvement du solide est pseudo périodique.

En revanche, si le coefficient d'amortissement est très élevé le mouvement sera apériodique.

6. Suspension d'une automobile

I.1. • Référentiel : terrestre galiléen.

- Système : solide S .
- Inventaire des forces :
 - le poids du solide \vec{P} , vertical vers le bas ;
 - la force de rappel \vec{F} , verticale vers le haut exercée par le ressort.
- En appliquant la première loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}.$$

- En projetant cette égalité vectorielle sur le repère $(O; \vec{j})$, O coïncidant avec G_0 , on obtient :

$$-m \cdot g + k \cdot \Delta \ell = 0, \quad \text{soit} \quad m \cdot g = k \cdot \Delta \ell.$$

2. Par application de la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{avec} \quad \vec{F} = k \cdot (\Delta \ell - y) \cdot \vec{j}.$$

En projetant cette égalité vectorielle sur le repère $(O; \vec{j})$, on obtient :

$$-m \cdot g + k \cdot (\Delta \ell - y) = m \cdot a_{G_y} = m \cdot \ddot{y}.$$

Compte tenu de la relation établie à l'équilibre du système, on en déduit, après simplification, l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0; \quad \text{soit} \quad \ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0.$$

3. La solution générale de l'équation différentielle est

$$y(t) = y_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

- Calcul de T_0 : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{0,53}{56}} = 0,61 \text{ s}.$

- Détermination de y_m et ϕ :

$$\text{À } t: y(t) = y_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right); \quad \dot{y}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot y_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \phi\right).$$

$$\text{À } t = 0: y(0) = y_m \cdot \cos \phi; \quad \dot{y}(0) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot y_m \cdot \sin \phi. \quad (1)$$

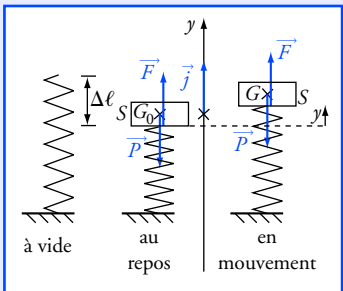
$$\text{À } t = 0: y(0) = 0 \text{ m}; \quad \dot{y}(0) = 0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On en déduit $\cos \phi = 0$ et $\sin \phi < 0$, car y_m est positif ;

$$\text{d'où :} \quad \phi = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\tau = \frac{m}{\lambda}$ est homogène à

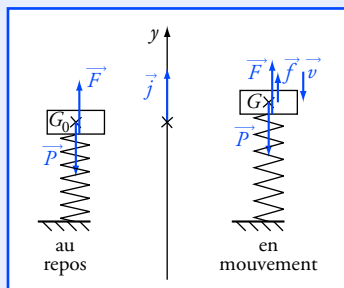
un temps. Cette grandeur représente la durée caractéristique de l'amortissement. Si λ augmente, cette valeur diminue.



La longueur du ressort est :

$$\ell(t) = \ell_0 - \Delta \ell + y(t)$$

Les valeurs de y_m et de ϕ sont déterminées par les conditions initiales.



$$\tau = \frac{M}{\lambda} \text{ est homogène à}$$

un temps. Cette grandeur représente la durée caractéristique de l'amortissement. Elle diminue si λ augmente.

Prenons par exemple, $k = -1$, alors $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

On déduit de (1) :

$$y_m = -\frac{\dot{y}_0}{\frac{2\pi}{T_0} \sin \phi} = -\frac{0,72}{\frac{2\pi}{0,61} \times (-1)} = 0,070 \text{ m} = 7,0 \text{ cm}.$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$y(t) = y_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } y_m = 7,0 \text{ cm et } T_0 = 0,61 \text{ s}.$$

II. 1. Par application de la relation $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{K}}$, on obtient :

$$T_0 = 0,31 \text{ s}.$$

2. • Référentiel : terrestre galiléen.

- Système : véhicule S.
- Inventaire des forces :
 - le poids du véhicule \vec{P} , vertical vers le bas ;
 - la force de rappel \vec{F} exercée par le ressort, verticale vers le haut ;
 - la force de frottement verticale opposée au vecteur vitesse de G.
- En appliquant la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = M \cdot \vec{a}_G$$

avec $\vec{F} = K \cdot (\Delta\ell - y) \cdot \vec{j}$ et $\vec{f} = -\lambda \cdot v_y \cdot \vec{j} (v_y = \dot{y})$.

- En projetant cette égalité vectorielle sur le repère $(O; \vec{j})$, on obtient :

$$-M \cdot g + K \cdot (\Delta\ell - y) - \lambda \cdot \dot{y} = M \cdot a_{G_y} = M \cdot \ddot{y}.$$

- Compte tenu de la relation à l'équilibre du système, on a $M \cdot g = K \cdot \Delta\ell$, on en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$M \cdot \ddot{y} + \lambda \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0 ;$$

soit :

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{M} \cdot \dot{y} + \frac{k}{M} \cdot y = 0.$$

III.1. Par ordre d'amortissement croissant, on a : courbe 1, courbe 3, courbe 2.

D'où pour la courbe 1 : λ_1 ; courbe 3 : λ_2 ; courbe 2 : λ_3 .

2. Le régime 1 est pseudo-périodique. La pseudo-période vaut $T = 0,32 \text{ s}$; elle est légèrement supérieure à la valeur de T_0 .

3. Le régime critique correspond à un retour de l'oscillateur à sa position d'équilibre, sans osciller, au cours d'une durée minimale. Il faut donc choisir le numéro 2. Le coefficient d'amortissement vaut $\lambda_2 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

7. Pendule simple, détermination de la période propre

1. La distance entre le point d'attache et le centre d'inertie G du solide est toujours égale à ℓ : G décrit une trajectoire circulaire de rayon ℓ .

On sait que si \vec{N} est le vecteur unitaire normal à la trajectoire, orienté vers l'intérieur et \vec{T} le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement, l'accélération de G s'écrit :

$$\vec{a} = \ell \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{T} + \ell \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{N}.$$

2. On applique la seconde loi de Newton au solide S dans le référentiel d'étude que nous supposons galiléen.

S est soumis à son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ et à la force \vec{F}_{fil} exercée par le fil, donc :

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{fil}}.$$

3. \vec{F}_{fil} est orthogonal à \vec{T} ; on l'élimine donc de l'équation par une projection sur l'axe parallèle à \vec{T} :

$$m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{T} + m \cdot \ell \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{N} = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{fil}}.$$

On projette sur un axe parallèle à \vec{T} : $m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot \sin \theta$.

4.

| | | | |
|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| θ (rad) | 0,100 | 0,200 | 0,250 |
| $\sin(\theta)$ | 0,998 | 0,199 | 0,296 |
| écart relatif | $1,67 \cdot 10^{-3}$ | $6,65 \cdot 10^{-3}$ | $1,04 \cdot 10^{-2}$ |

L'écart relatif atteint 1 % pour θ voisin de 0,25 radian (soit 14 degrés)

En faisant l'approximation des petits angles, on obtient :

$$m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot \theta.$$

5. Cette équation est identique à celle du pendule élastique. La solution est sinusoïdale : $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \varphi\right)$.

Pour trouver la période propre T_0 , on remplace $\ddot{\theta}$ par sa valeur dans l'équation différentielle :

$$-m \cdot \ell \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \varphi\right) = -m \cdot g \cdot \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \varphi\right).$$

On simplifie et on trouve : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Il reste à déterminer les valeurs des constantes θ_m et φ . Pour cela, étudions les conditions initiales.

• « Le solide est lâché sans vitesse initiale » signifie $\dot{\theta}(0) = 0$.

En dérivant la fonction $\theta(t)$, on obtient :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \varphi\right).$$

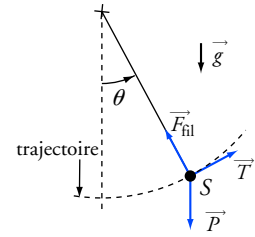
$\dot{\theta}(0) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m \cdot \sin \varphi = 0$, d'où $\varphi = 0$ (on choisit la valeur 0, plutôt que π).

On écrit que $\theta(0) = \alpha$ en tenant compte du fait que $\varphi = 0$:

$$\alpha = \theta_m \cdot \cos(0), \text{ d'où } \theta_m = \alpha.$$

Finalement, on a déterminé complètement l'équation horaire du mouvement :

$$\theta(t) = \alpha \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right).$$



- \vec{T} : vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
- $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$: poids.
- \vec{F}_{fil} : force exercée par le fil.

Sur la figure, on a pris soin d'orienter \vec{T} de façon qu'il indique le sens de la vitesse pour θ positif.

On pourrait prendre $\varphi = \pi$. Dans ce cas :

$$\alpha = \theta_m \cdot \cos \pi = -\theta_m$$

et la solution devient :

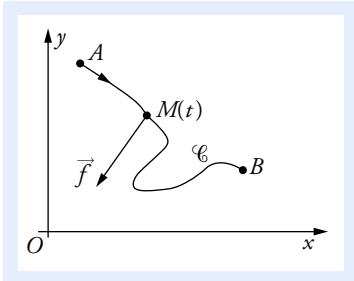
$$\theta(t) = -\alpha \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0} + \pi\right).$$

Si vous connaissez vos formules de trigonométrie, vous savez que :

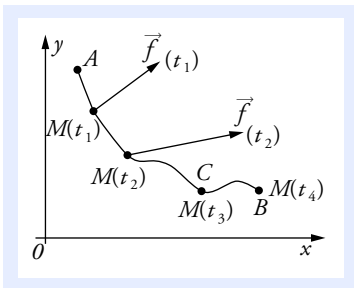
$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

On retrouve donc bien le même résultat :

$$\theta(t) = \alpha \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right).$$



Doc. 1 La force \vec{f} est appliquée au point mobile M .



Doc. 2

Le raisonnement qui permet d'obtenir le travail d'une force non constante est délicat mais **absolument capital**. Nous l'utiliserons en d'autres points de cet ouvrage et surtout vous le retrouverez constamment au cours de vos études supérieures. Pour bien le saisir, vous devez avoir bien assimilé la notion mathématique d'intégrale.

Ce qu'il faut savoir...

1. Travail d'une force

Le point d'application M de la force \vec{f} décrit une trajectoire \mathcal{C} qui relie le point A au point B . À la date t , le point M se trouve à la position $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.

Pour simplifier les figures, nous supposons que le point M reste dans le plan (xOy) (doc. 1).

■ Travail d'une force constante

Considérons tout d'abord le cas d'une force constante en valeur, sens et direction. Par définition :

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Si le vecteur force a pour coordonnées (f_x, f_y, f_z) cette expression devient :

$$W_{A \rightarrow B} = f_x \cdot (x_B - x_A) + f_y \cdot (y_B - y_A) + f_z \cdot (z_B - z_A).$$

■ Travail d'une force non constante

À la date t , la force $\vec{f}(t)$ a pour coordonnées $(f_x(t), f_y(t), f_z(t))$.

Plaçons $(N-1)$ points intermédiaires entre A et B : $M(t_1), M(t_2), \dots$. Prenons $N = 4$ (doc. 2). Notons également t_0 et t_N les dates où le point M passe en A et en B .

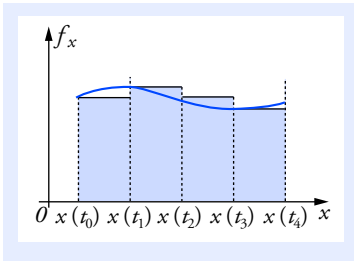
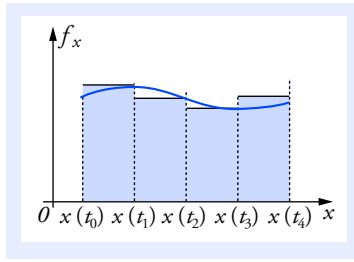
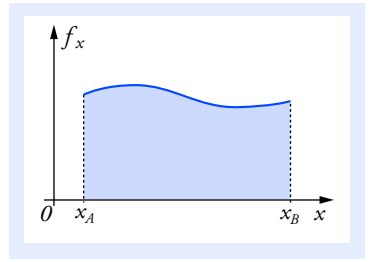
Si N est suffisamment grand, nous pouvons estimer une valeur approchée du travail total en supposant que \vec{f} est constante sur chacun des N petits déplacements. Avec $N = 4$, et en se limitant pour simplifier à un mouvement dans le plan (xOy) , on a :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} \approx & f_x(t_0) \cdot (x(t_1) - x(t_0)) + f_x(t_1) \cdot (x(t_2) - x(t_1)) \\ & + f_x(t_2) \cdot (x(t_3) - x(t_2)) + f_x(t_3) \cdot (x(t_4) - x(t_3)) \\ & + f_y(t_0) \cdot (y(t_1) - y(t_0)) + f_y(t_1) \cdot (y(t_2) - y(t_1)) \\ & + f_y(t_2) \cdot (y(t_3) - y(t_2)) + f_y(t_3) \cdot (y(t_4) - y(t_3)). \end{aligned}$$

La somme des quatre premiers termes est égale à l'aire des quatre rectangles représentés sur le document 3.

Il est tout aussi légitime de remplacer les coordonnées de la force \vec{f}_x par leur valeur à l'autre extrémité de chaque petit déplacement :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} \approx & f_x(t_1) \cdot (x(t_1) - x(t_0)) + f_x(t_2) \cdot (x(t_2) - x(t_1)) \\ & + f_x(t_3) \cdot (x(t_3) - x(t_2)) + f_x(t_4) \cdot (x(t_4) - x(t_3)) \\ & + f_y(t_1) \cdot (y(t_1) - y(t_0)) + f_y(t_2) \cdot (y(t_2) - y(t_1)) \\ & + f_y(t_3) \cdot (y(t_3) - y(t_2)) + f_y(t_4) \cdot (y(t_4) - y(t_3)). \end{aligned}$$

**Doc. 3** Une approximation.**Doc. 4** Une autre approximation.**Doc. 5** Limite commune à toutes les approximations pour $N \rightarrow \infty$.

Dans ce cas, la somme des quatre premiers termes est égale à l'aire des quatre rectangles représentés sur le [document 4](#).

Lorsque N tend vers l'infini, les deux approximations ont une limite commune qui est l'aire délimitée par la courbe représentant $f_x(x)$.

Cette aire est égale à l'intégrale $\int_{x_A}^{x_B} f_x \cdot dx$.

En reprenant le même raisonnement pour les coordonnées y (et éventuellement z), nous obtenons l'expression exacte non approchée du travail de la force \vec{f} sur le trajet AB :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{x_A}^{x_B} f_x \cdot dx + \int_{y_A}^{y_B} f_y \cdot dy + \int_{z_A}^{z_B} f_z \cdot dz.$$

Dans le système international, l'unité du travail est le **Joule (J)**.

■ Exemples à connaître

Cas du poids

Soit un corps de masse m dont le centre d'inertie G se déplace d'un point A vers un point B ([doc. 6](#)). Le poids étant une force constante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

En considérant le repère (Ox, Oz) avec (Oz) orienté vers le haut, on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = -m \cdot g \cdot (z_B - z_A).$$

On utilise une notation sous forme de colonne pour les coordonnées des vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Cas d'un ressort

Soit un ressort dont une des extrémités E est fixe, l'autre extrémité est fixée à un solide en un point M . On choisit un repère $(O; \vec{i})$ suivant l'axe du ressort ; O coïncide avec son extrémité à vide ([doc. 7](#)).

Le déplacement du point M se fait suivant l'axe (Ox) .

La force de rappel qu'exerce le ressort sur le solide est :

$$\vec{F}_r = -k \cdot \overrightarrow{OM} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$$

avec x l'abscisse de M à une date quelconque.

Le travail $W_{A \rightarrow B}$ peut être noté de façon plus synthétique par :

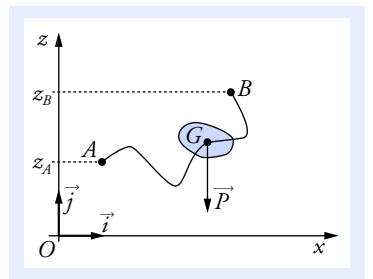
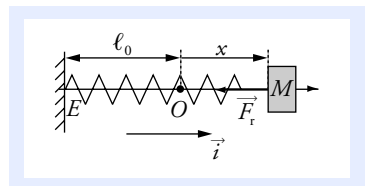
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

en définissant le **vecteur déplacement élémentaire** $d\vec{\ell}$ de coordonnées (dx, dy, dz) .

$d\vec{\ell}$ est tangent à la trajectoire et il représente le déplacement entre deux dates aussi rapprochées que l'on veut. En explicitant le produit scalaire :

$$\vec{f} \cdot d\vec{\ell} = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy + f_z \cdot dz,$$

on retrouve l'expression du travail avec les trois intégrales.

**Doc. 6** Déplacement d'un solide soumis à son poids.**Doc. 7** Déplacement d'un solide soumis à l'action d'un ressort.

Le travail de cette force pour amener l'extrémité mobile M d'un point A vers un point B est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_r) = \int_A^B \vec{F}_r \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_A}^{x_B} -k \cdot x \cdot dx = \left[-\frac{1}{2} k \cdot x^2 \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_r) = -\frac{1}{2} k \cdot x_B^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_A^2.$$

Si A coïncide avec O : $W_{O \rightarrow B}(\vec{F}_r) = -\frac{1}{2} k \cdot x_B^2.$

Voir exercice n° 1

Si on double la quantité de matière d'un solide se déplaçant à une vitesse donnée, sa masse est doublée et donc son énergie cinétique est également doublée.

L'énergie cinétique d'un ensemble d'objets de masses m_1, m_2, \dots est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des objets.

On dit que l'énergie cinétique est une **grandeur extensive**.

Une force exercée sur un système est une force exercée par le milieu extérieur (opérateur, ...). Le travail de cette force apparaît comme un terme d'échange énergétique entre le système et le milieu extérieur.

2. Théorème de l'énergie cinétique

■ Définition

Pour un solide de masse m en mouvement de translation et dont le centre d'inertie se déplace à la vitesse \vec{v} , son énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

■ Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel Galiléen, pour un solide S de masse m dont le centre d'inertie se déplace d'un point A vers un point B , la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées à ce solide :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i).$$

Si $W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i) > 0$, le système (solide S) reçoit du travail.

Si $W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i) < 0$, le système (solide S) fournit du travail.

Voir exercice n° 2

3. Forces conservatives, énergie potentielle

■ Forces conservatives et non conservatives

Une force est dite **conservative** si le travail de cette force entre deux point A et B de l'espace, **ne dépend pas du chemin suivi**.

Si ce n'est pas le cas, la force sera dite **non conservative**.

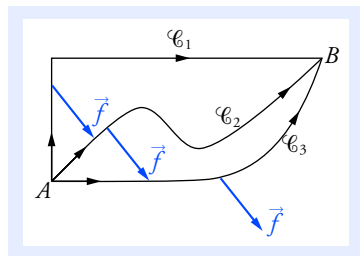
La force \vec{f} est conservative (doc. 8) si :

$$W_{A \rightarrow B}^{\mathcal{C}_1}(\vec{f}) = W_{A \rightarrow B}^{\mathcal{C}_2}(\vec{f}) = W_{A \rightarrow B}^{\mathcal{C}_3}(\vec{f}).$$

Exemples :

- Le poids, la force de traction d'un ressort sont des forces conservatives.
- Les forces de frottements sont des forces non conservatives.

Voir exercice n° 3



Doc. 8 Différents chemins reliant A à B .

■ Énergie potentielle associée à une force

Pour une force conservative \vec{f}_c , il existe une fonction $E_p(x, y, z)$ tel que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_c) = -\Delta E_p = -(E_p(x_B, y_B, z_B) - E_p(x_A, y_A, z_A)).$$

x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace.
L'expression analytique de $E_p(x, y, z)$ dépend du repère choisi.

■ Exemples

Le poids

On prend le repère du [document 6](#) :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot (z_B - z_A) = -(E_p(z_B) - E_p(z_A));$$

d'où l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p(z) = m \cdot g \cdot z + \text{cte.}$$

Force de rappel exercée par d'un ressort

On prend le repère du [document 7](#) :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_r) = -\frac{1}{2} k \cdot x_B^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 = -(E_p(x_B) - E_p(x_A));$$

d'où l'expression de l'énergie potentielle élastique :

$$E_p(\ell) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \text{cte.}$$

Nous pouvons exprimer cette énergie potentielle en fonction de la longueur ℓ du ressort à une date quelconque et de sa longueur à vide (libre de toute contrainte) ℓ_0 . $x = \ell - \ell_0$ ([doc. 7](#)), d'où :

$$E_p(\ell) = \frac{1}{2} k \cdot (\ell - \ell_0)^2 + \text{cte.}$$

Voir exercice n° 4

4. Énergie mécanique

■ Définition

Reprenons l'expression du théorème de l'énergie cinétique et séparons les travaux des forces conservatives (\vec{f}_c) et non conservatives (\vec{f}_{nc}).

Exprimons les travaux des forces conservatives au moyen de la variation des énergies potentielles.

$$\Delta E_c = \sum_j W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{c_j}) + \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{nc_k})$$

$$\Delta E_c = -\sum_j \Delta E_{p_j} + \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{nc_k}).$$

$E_p(x, y, z)$ est une représentation en terme d'énergie de l'interaction entre le système soumis à des forces conservatives et le milieu extérieur. La donnée de la fonction $E_p(x, y, z)$ suffit pour caractériser complètement une force conservative.

L'énergie potentielle étant définie à partir d'une variation, elle est définie à une constante scalaire près. On peut arbitrairement choisir une référence d'énergie en une position particulière.

• Dans le cas du poids, on prend souvent $E_p(0) = 0$, ainsi :

$$E_p(z) = m \cdot g \cdot z.$$

• Pour un ressort, on prend souvent la référence d'énergie potentielle pour $\ell = \ell_0$:

$$E_p(\ell) = \frac{1}{2} k \cdot (\ell - \ell_0)$$

avec $E_p(\ell_0) = 0$.

La variation d'énergie mécanique entre un point de départ (état initial) et un point d'arrivée (état final) ne dépend pas du chemin suivi, on dit que l'énergie mécanique est une **fonction d'état**.

Si la force \vec{f} exercée par un opérateur est la seule force non conservative, alors :

$$\Delta E_m = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}).$$

Si l'opérateur exerce un travail moteur, l'énergie mécanique augmente.

Cette énergie diminue si le travail est résistant.

L'énergie mécanique E_m est (dans le cas général) une fonction de la vitesse v et des coordonnées x , y et z , qui sont eux-mêmes fonctions du temps. E_m est donc une fonction du temps.

Pour un système conservatif :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 ;$$

cette équation permet de trouver, dans de nombreux cas, l'équation différentielle du mouvement.

Par définition, l'**énergie mécanique du système** est égale à la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatrices :

$$E_m = E_c + \sum_j E_{p_j}.$$

$$\text{Donc : } \Delta E_c + \sum_j \Delta E_{p_j} = \Delta E_m = \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{nc_k}).$$

Nous en déduisons le **théorème de l'énergie mécanique** :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{nc_k}).$$

■ Systèmes conservatifs

S'il n'y a pas de forces non conservatives ou si elles sont à tout instant perpendiculaires au déplacement, leurs travaux sont nuls. **L'énergie mécanique du système est constante** au cours du temps. On dit que le système est conservatif.

Voir exercice n° 5

5. Puissance mécanique

■ Puissance d'une force

Entre les dates t et $t + \Delta t$ le point d'application d'une force se déplace (vectoriellement) de $\Delta \vec{\ell}$ et produit un travail $\delta W_{\vec{f}}$. On appelle puissance de cette force :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta W_{\vec{f}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{f} \cdot \frac{\Delta \vec{\ell}}{\Delta t} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

ou encore :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \frac{dW}{dt}.$$

La puissance représente le travail par unité de temps.

Dans le système international, la puissance s'exprime en **Watt (W)** :

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}.$$

■ Évolution de l'énergie mécanique

En reprenant le théorème de l'énergie mécanique et en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_k \mathcal{P}(\vec{f}_{nc_k}).$$

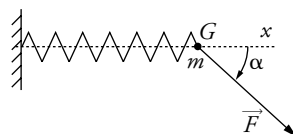
- Si $\sum_k \mathcal{P}(\vec{f}_{nc_k}) > 0$, alors l'énergie mécanique augmente au cours du temps.
- Si $\sum_k \mathcal{P}(\vec{f}_{nc_k}) < 0$, alors l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

Pour faire le point...

1. Travail d'une force de rappel

Un solide S de masse $m = 0,10 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (l'autre extrémité du ressort est fixe). Il se déplace, sans frottement, sur un guide horizontal.

Un opérateur exerce une force \vec{F} de valeur $F = \|\vec{F}\| = 10 \text{ N}$ et dont la direction fait un angle $\alpha = 60^\circ$ avec l'axe du guide. Le point G se déplace du point O (position pour laquelle le ressort est libre de toute contrainte) à un point A tel que $OA = 10 \text{ cm}$.



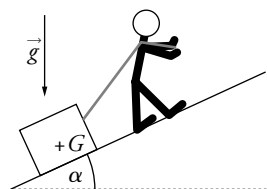
1. Faire l'inventaire des forces agissant sur le solide.
2. Calculer le travail effectué par \vec{F} sur le trajet (AB) .
3. Calculer le travail de la force de traction du ressort sur ce même trajet.
4. Que peut-on dire du travail des autres forces, sur ce trajet ?
5. Calculer la vitesse de G lorsqu'il arrive en A sachant que sa vitesse initiale (en O) est nulle.

Conseils

- Revoir le calcul du travail pour une force constante et pour une force non constante.
- Il faut choisir un repère de projection pour pouvoir calculer le travail d'une force non constante.
- Revoir le théorème de l'énergie cinétique.

2. Système soumis à plusieurs forces ; calcul des travaux

Une personne tire, à l'aide d'un fil, un solide de masse $m = 15 \text{ kg}$, sur un plan incliné formant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale. Le solide glisse avec une force de frottement \vec{f} de valeur constante 10 N . Il est traîné sur une longueur $L = 30 \text{ m}$. On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



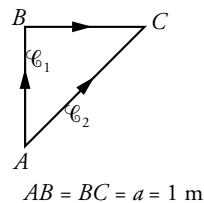
1. Faire l'inventaire des forces appliquées au solide.
2. Calculer le travail de la réaction normale du support.
3. Déterminer l'expression du travail du poids du solide au cours du trajet :
 - a. en utilisant la définition du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$, après avoir défini un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec \vec{k} vertical orienté vers le haut.
 - b. en utilisant $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
 - c. Donner sa valeur numérique.
4. Calculer le travail de la force de frottement sur le trajet considéré.
5. Au départ et à l'arrivée, le solide est au repos. Calculer le travail de la force exercée par le fil sur le solide pour le déplacement étudié.

Conseils

- Représenter les forces sur un schéma. La force de frottement est opposée au mouvement.
- Bien repérer le déplacement du point d'application des différentes forces.
- Penser à utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

3. Exemple de force non conservative

Un solide de masse m , de centre d'inertie G est soumis à une force de frottement de valeur constante $f = 2,0 \text{ N}$ lors de son déplacement sur une table horizontale. Un opérateur le déplace suivant deux trajets $\mathcal{C}_1: A \rightarrow B \rightarrow C$ et $\mathcal{C}_2: A \rightarrow C$.



1. Déterminer l'expression du travail de la force de frottement :

a. sur le trajet \mathcal{C}_1 ;

b. sur le trajet \mathcal{C}_2 ;

c. Conclure : la force est-elle conservative ?

2. Le solide est immobile lorsque G est au point A et au point C . Calculer le travail fourni par l'opérateur suivant ces deux trajets. Quel est le trajet le moins « fatigant » pour l'opérateur ?

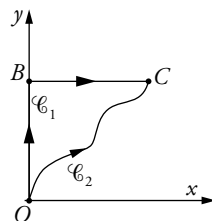
Conseils

- La force de frottement est opposée au déplacement. Il faut donc décomposer le trajet \mathcal{C}_1 en deux parties.
- Faire un inventaire des forces s'exerçant sur le système étudié.
- Penser à utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

4. Force conservative et énergie potentielle

Un solide de masse m de centre d'inertie G se déplace sur un plan horizontal.

Il est soumis à une force horizontale $\vec{F} = -k \cdot \overrightarrow{OG}$. On considère deux trajets \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 suivis par G . O , B et C sont dans un même plan horizontal.



1. Déterminer l'expression du travail de la force \vec{F} :

a. sur le trajet $O \rightarrow B$;

b. sur le trajet $B \rightarrow C$;

c. sur le trajet \mathcal{C}_2 .

2. Comparer le travail de cette force suivant les deux trajets \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Conclure.

3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à cette force. On prendra la référence $E_p = 0$ lorsque G est en O .

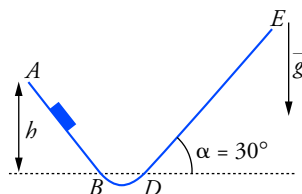
On pose $r = \|\overrightarrow{OM}\|$. Donner l'expression de E_p en fonction de r .

Conseils

- Revoir la définition du travail d'une force sous forme intégrale.
- Tous les vecteurs sont dans un plan horizontal ; tout doit pouvoir s'exprimer en fonction de x et y .
- Revoir la définition d'une énergie potentielle.

5. Montagnes russes

Un chariot de masse $m = 40 \text{ kg}$ est solidaire d'une piste P . Les parties (AB) et (DE) sont rectilignes, la partie (BD) est une portion de cercle. Le chariot glisse sans frottement sur les parties (AB) et (BD) . On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



1. Le chariot est lâché en A , sans vitesse initiale, à une hauteur $h = 10$ m par rapport à B (ou D). On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottement sur (DE) .

Déterminer la hauteur h_1 atteinte par le chariot sur (DE) :

- par application du théorème de l'énergie cinétique ;
- par application du théorème de l'énergie mécanique.

2. Sur (DE) le chariot est soumis à une force de frottement de valeur constante f . La hauteur atteinte par le chariot n'est que de 8,0 m. Déterminer f :

- par application du théorème de l'énergie cinétique ;
- par application du théorème de l'énergie mécanique.

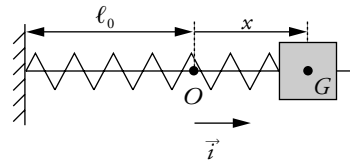
Conseils

- Faire l'inventaire des forces appliquées au chariot.
- Revoir la définition de l'énergie mécanique.

Pour s'entraîner...

6. Étude énergétique de l'oscillateur harmonique

Un solide S de masse $m = 200$ g, de centre d'inertie G se déplace, sans frottement, sur un guide horizontal. Il est accroché à un ressort, sans masse, de raideur $k = 20$ N·m⁻¹. O est la position de G à l'équilibre, en l'absence de tout frottement. On écarte G de $a = 5$ cm dans le sens des x croissants et on abandonne S à lui-même sans vitesse initiale.



1. Donner l'expression de l'énergie mécanique du solide S , en fonction des paramètres x et \dot{x} (vitesse de G). On prendra comme référence l'énergie potentielle en O ($E_p(0) = 0$). Ce système est-il conservatif ?

2. En déduire l'équation différentielle du second ordre en $x(t)$ régissant le mouvement de G .

3. Vérifier que la solution $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$, avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, convient.

Déterminer A et φ en fonction de a .

4. Donner l'expression de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique du système en fonction du temps.

5. Représenter ces énergies sur un même graphe.

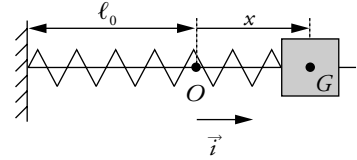
Échelle : en abscisse : 2 cm pour 0,1 s ; en ordonnée : 5 cm pour 10 mJ.

Conseils

- Il faut faire l'inventaire des forces pour pouvoir déterminer l'énergie potentielle du système.
- Revoir la définition d'un système conservatif, penser à utiliser la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps.
- Penser à utiliser les conditions initiales.

7. Oscillateur amorti

Un solide de masse $m = 200 \text{ g}$ et de centre d'inertie G se déplace sur un guide horizontal. Il est accroché à un ressort, sans masse, de raideur $k = 20,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Il est soumis à une force de frottement \vec{f} de la part du guide. O est la position de G à l'équilibre, en l'absence de tout frottement. On écarte G de $10,0 \text{ cm}$ dans le sens des x croissants. G effectue des oscillations amorties de pseudo-période T . On mesure les élongations maximales lorsque la



vitesse s'annule aux dates $t_n = n \frac{T}{2}$.

| $x(0)$ | $x\left(\frac{T}{2}\right)$ | $x(T)$ | $x\left(\frac{3T}{2}\right)$ | $x(2T)$ | $x\left(\frac{5T}{2}\right)$ | $x(3T)$ |
|--------|-----------------------------|--------|------------------------------|---------|------------------------------|---------|
| 10 cm | -9,3 cm | 8,6 cm | -7,9 cm | 7,2 cm | -6,5 cm | 5,8 cm |

1. Calculer l'énergie mécanique du solide aux dates $t = 0$; $\frac{T}{2}$; T ; $\frac{3T}{2}$; $2T$; $\frac{5T}{2}$ et $3T$.

2. On suppose que la force de frottement \vec{f} a une valeur constante f .

Déterminer l'expression du travail de cette force entre les dates nT et $nT + \frac{T}{2}$, en fonction de

$x(nT)$, $x\left(nT + \frac{T}{2}\right)$ et f .

À l'aide du tableau, vérifier si l'hypothèse (f constante) est justifiée.

3. Représenter sur un graphe l'énergie potentielle du solide en fonction de l'abscisse x de G . Échelle : en abscisse : un carreau par cm ; en ordonnée : deux carreaux pour 10 mJ.

4. Représenter sur le même graphe l'énergie mécanique en fonction de x , entre les dates 0 et $3T$. Jusqu'où évoluera le système ?

Conseils

- Il faut définir l'énergie mécanique du système.
- Penser au théorème de l'énergie mécanique.
- Quelle est la nature de la fonction $E_m(x)$ pendant chaque demi-pseudo-période ?

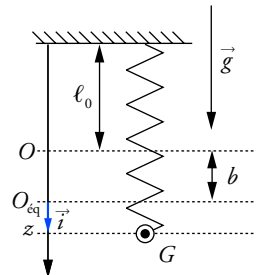
8. Ressort vertical

Un solide S de masse $m = 200 \text{ g}$ et de centre d'inertie G est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable.

On note O la position de G lorsque l'allongement du ressort est nul (ressort à vide) et O_{eq} la position de G à l'équilibre.

On utilise le repère vertical descendant d'origine O_{eq} ($O_{\text{eq}} ; \vec{i}$), z étant la coordonnée de G à une date quelconque, par rapport à O_{eq} .

On pose $\overrightarrow{OO_{\text{eq}}} = b \cdot \vec{i}$.

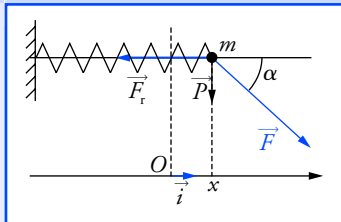


1. Déterminer l'expression de b en fonction de m , g et k .
2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale de S en fonction de z : $E_p(z)$.
3. On prend la référence d'énergie potentielle en O_{eq} : $E_p(0) = 0$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle en fonction de z , compte tenu de cette référence.
4. Le système est-il conservatif ? Si oui, en déduire l'équation différentielle en z . Conclure.
5. On lance S avec une vitesse $v = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à partir de la position d'équilibre. Calculer l'amplitude a des oscillations.

Conseils

- Combien y a-t-il de forces conservatives ?
- Bien distinguer allongement du ressort et coordonnée de G pour exprimer l'énergie potentielle élastique.
- Pour avoir l'amplitude, il n'est pas nécessaire d'avoir l'équation horaire du mouvement. Penser au théorème de l'énergie mécanique.

Solutions...



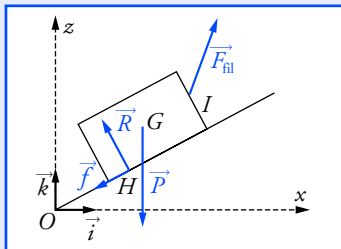
L'angle α étant connu, on calcule le produit scalaire par :

$$\vec{F} \cdot \vec{OA} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{OA}\| \cdot \cos \alpha.$$

On choisit le repère de projection qui donne les expressions les plus simples. L'origine O du repère choisie étant prise à la position à vide de l'extrémité du ressort, l'abscisse x de G se confond avec l'allongement du ressort.

Entre deux dates t et $t + dt$, le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{\ell} = dx \cdot \vec{i}.$$



Le solide (indéformable) est en translation. On peut en déduire :

$$\overrightarrow{HA} \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{IA} \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}.$$

Pour le calcul des travaux, tout se passe comme si les points d'application des forces se déplaçaient de A vers B .

1. Travail d'une force de rappel

1. Les forces agissant sur le solide sont :

- son poids \vec{P} , vertical dirigé vers le bas ;
- la réaction du guide \vec{R} , verticale dirigée vers le haut ;
- la force de l'opérateur \vec{F} ;
- la force de traction du ressort \vec{F}_r , horizontale.

2. \vec{F} est une force constante : $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{OA}$
 $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) = F \cdot OA \cdot \cos \alpha.$

Application numérique : $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) = 0,50 \text{ J}.$

3. \vec{F}_r n'étant pas constante, il faut calculer $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}_r) = \int_O^A \vec{F}_r \cdot d\vec{\ell}.$

Prenons $(O ; \vec{i})$ comme repère de projection : $\vec{F}_r = -k \cdot x \cdot \vec{i}.$

Le calcul de W se réduit à une seule intégrale (y et z sont constants) :

$$W_{O \rightarrow A}(\vec{F}_r) = \int_0^{x_A} -k \cdot x \cdot dx = \left[-\frac{1}{2} k \cdot x^2 \right]_0^{x_A} = -\frac{1}{2} k \cdot OA^2.$$

Application numérique : $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}_r) = -0,25 \text{ J}.$

4. Les forces \vec{P} et \vec{R} sont perpendiculaires au déplacement ; leur produit scalaire avec le vecteur déplacement élémentaire est nul à tout instant et leur travail est nul sur le trajet OA .

5. On applique le théorème de l'énergie cinétique au solide S dans le référentiel terrestre, galiléen :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 - 0 = W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{F}_r).$$

D'où : $v_A^2 = 5,0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, donc $v_A = 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

2. Système soumis à plusieurs forces ; calcul des travaux

1. Inventaire des forces appliquées au solide de masse m :

- le poids \vec{P} , appliqué en G ;
- la réaction du support \vec{R} en un point H de la surface de contact ;
- la force de frottement \vec{f} , en H , opposée au déplacement ;
- la force exercée par le fil \vec{F}_{fil} , appliquée en I .

2. Appelons A et B les positions de G au départ et à l'arrivée.

Le point H se déplace de H_A vers H_B :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) = \int_{H_A}^{H_B} \vec{R} \cdot d\vec{\ell}.$$

\vec{R} étant à tout instant perpendiculaire au déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ de H , le produit scalaire est nul.

3. a. Exprimons les coordonnées du déplacement \overrightarrow{AB} de G et celles du poids \vec{P} dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ défini sur la figure :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix}.$$

On en déduit le travail du poids :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -m \cdot g \cdot (z_B - z_A) = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha.$$

b. En prenant l'autre définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) &= \vec{P} \cdot \vec{AB} = m \cdot g \cdot L \cdot \cos(\vec{P}, \vec{AB}) \\ &= m \cdot g \cdot L \cdot \cos \beta = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

puisque $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ et que $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$.

Avec cette méthode, il n'est pas utile de définir un repère de projection.

c. *Application numérique* : $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$.

Ce travail est négatif, c'est donc un travail **résistant**.

4. Utilisons la deuxième définition du produit scalaire : les vecteurs \vec{f} et \vec{AB} ont même direction, mais sont de sens opposés. Ils font donc entre eux un angle égal à π radians.

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) &= \vec{f} \cdot \vec{AB} = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos(\vec{f}, \vec{AB}) \\ &= f \cdot L \cdot \cos \pi = -f \cdot L. \end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -3,0 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Ce travail est également résistant.

5. Dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, on applique le théorème de l'énergie cinétique au solide entre l'état initial (G en A avec une vitesse nulle) et l'état final (G en B avec une vitesse nulle).

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = 0$$

$$= W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{fil}});$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{fil}}) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) - W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = m \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha + f \cdot L$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{fil}}) = 1,8 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Ce travail est **moteur**.

3. Exemple de force non conservative

1.a. Suivant \mathcal{C}_1 , il faut découper ce trajet en deux portions rectilignes (AB) et (BC) pour lesquelles la force de frottement est constante et opposée au déplacement.

$$\text{Sur } (AB) : W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{AB} = f \cdot a \cdot \cos \pi = -f \cdot a.$$

$$\text{Sur } (BC) : W_{B \rightarrow C}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{BC} = f \cdot a \cdot \cos \pi = -f \cdot a.$$

Le travail sur le trajet \mathcal{C}_1 est : $W_{A \rightarrow C}^{\mathcal{C}_1}(\vec{f}) = -2 f \cdot a = -4,0 \text{ J}$.

b. Suivant \mathcal{C}_2 :

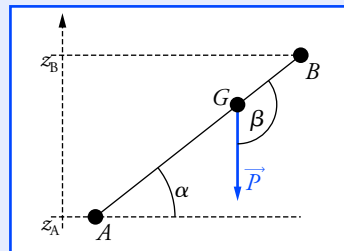
$$W_{A \rightarrow B}^{\mathcal{C}_2}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{AC} = f \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos \pi = -f \cdot a\sqrt{2} = -2,8 \text{ J}.$$

(En utilisant le théorème de Pythagore : $\|\vec{AC}\| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.)

c. Le travail de la force dépend du chemin suivi : **elle n'est pas conservative**.

2. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide, dans le référentiel galiléen terrestre. Les forces appliquées sont :

- le poids \vec{P} appliqué en G ;
- la réaction du support \vec{R} en un point H de la surface de contact ;

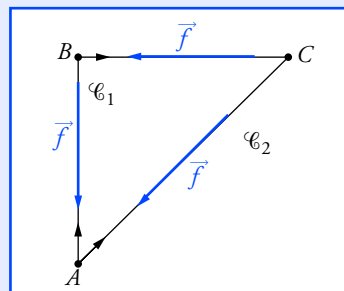


Pour bien repérer l'angle β entre \vec{P} et \vec{AB} ne pas hésiter à refaire un schéma comme celui-ci.

On voit bien que dans ce cas :

- $\cos \beta$ est négatif ;
- $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

Le théorème de l'énergie cinétique nous a permis de déterminer le travail de la force exercée par le fil, sans pour cela connaître les caractéristiques de cette force.



Quand on utilise le théorème de l'énergie cinétique, il faut définir :

- le système étudié ;
- le référentiel ;
- les forces appliquées ;
- l'état initial et final.

D'après la troisième loi de Newton, le solide exerce une force $\vec{F}_S = -\vec{F}$ sur l'opérateur. Le travail reçu par l'opérateur est :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}_S) = W_{A \rightarrow C}(-\vec{F}) \\ = -W_{A \rightarrow C}(\vec{F}).$$

Le travail représente un **échange** d'énergie entre deux systèmes.

Pour justifier l'expression du travail par ces deux intégrales, on utilise couramment un raisonnement, peu rigoureux sur le plan mathématique, mais très efficace :

entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$, G , soumis à la force $\vec{F}(t)$, subit un déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$. Le travail élémentaire de \vec{F} est donc :

$$dW = \vec{F}(t) \cdot d\vec{\ell} \\ = F_x(t) dx + F_y(t) dy.$$

Le travail total de A à B est égal à la somme des travaux élémentaires, qui s'exprime au moyen d'intégrales :

$$W_{O \rightarrow C}(\vec{F}) = \int_O^C dW \\ = \int_0^{x_C} F_x \cdot dx + \int_0^{y_C} F_y \cdot dy \\ = \int_0^a -k \cdot x \cdot dx + \int_0^b -k \cdot y \cdot dy.$$

Dans le cas étudié, le vecteur force \vec{F} est *bidirectionnel* (il a des coordonnées sur (Ox) et (Oy)), mais l'énergie potentielle ne dépend que d'un seul paramètre : la distance r entre l'origine O et le point G .

- la force de frottement \vec{f} en H , opposée au déplacement ;
- la force \vec{F} qu'exerce l'opérateur sur le solide pour le déplacer.

État Initial (G en A , $\vec{v}_A = \vec{0}$) \rightarrow État Final (G en C , $\vec{v}_C = \vec{0}$).

$W_{A \rightarrow C}(\vec{R}) = 0$, car \vec{R} est orthogonal au déplacement à tout instant.

$W_{A \rightarrow C}(\vec{P}) = 0$, car \vec{P} est orthogonal au déplacement à tout instant.

$E_c(C) = E_c(A) = 0 = W_{A \rightarrow C}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow C}(\vec{R}) + W_{A \rightarrow C}(\vec{f}) + W_{A \rightarrow C}(\vec{F})$;

$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) = -W_{A \rightarrow C}(\vec{f})$.

Ainsi le système reçoit le travail minimal, de la part de l'opérateur, au cours du trajet \mathcal{C}_2 .

4. Force conservative et énergie potentielle

1. Nous utilisons les coordonnées dans le repère (Ox, Oy) .

À la date t : $OG(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{F}(t) \begin{pmatrix} -k \cdot x(t) \\ -k \cdot y(t) \end{pmatrix}$.

La force étant variable, il faut déterminer le travail par des intégrales :

$$W_{I \rightarrow J}(\vec{F}) = \int_{x_i}^{x_j} -k \cdot x \cdot dx + \int_{y_i}^{y_j} -k \cdot y \cdot dy.$$

a. Suivant (OB) : $x_B = x_O = 0$; la première intégrale est nulle.

$$W_{B \rightarrow C}(\vec{F}) = \int_0^b -k \cdot y \cdot dy = \left[-\frac{1}{2} k \cdot y^2 \right]_0^b = -\frac{1}{2} k \cdot b^2.$$

b. Suivant (BC) : $y_B = y_C = b$; la seconde intégrale est nulle.

$$W_{O \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_0^a -k \cdot x \cdot dx = \left[-\frac{1}{2} k \cdot x^2 \right]_0^a = -\frac{1}{2} k \cdot a^2.$$

c. Suivant \mathcal{C}_2 :

$$W_{O \rightarrow C}(\vec{F}) = \int_0^a -k \cdot x \cdot dx + \int_0^b -k \cdot y \cdot dy \\ = \left[-\frac{1}{2} k \cdot x^2 \right]_0^a + \left[-\frac{1}{2} k \cdot y^2 \right]_0^b = -\frac{1}{2} k \cdot a^2 - \frac{1}{2} k \cdot b^2.$$

d. Suivant \mathcal{C}_1 :

$$W_{O \rightarrow C}(\vec{F}) = W_{O \rightarrow B}(\vec{F}) + W_{B \rightarrow C}(\vec{F}) = -\frac{1}{2} k \cdot a^2 - \frac{1}{2} k \cdot b^2.$$

La valeur des deux intégrales ne dépend que de la position du point C et non du détail du chemin parcouru. **Le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi.**

2. L'énergie potentielle $E_p(x, y)$ existe donc ; elle est définie par :

$$\Delta E_p(a, b) - E_p(0, 0) = -W_{O \rightarrow C}(\vec{F}).$$

En prenant $E_p(0, 0) = 0$, il vient :

$$E_p(a, b) = \frac{1}{2} k \cdot a^2 + \frac{1}{2} k \cdot b^2.$$

Ce résultat étant vrai pour toute valeur de a et de b , on conclut que :

$$E_p(x, y) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \frac{1}{2} k \cdot y^2.$$

Avec $r = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$E_p(r) = \frac{1}{2} k \cdot r^2.$$

5. Montagnes russes

1. Référentiel : galiléen terrestre.

• Système étudié : chariot de masse m , de centre d'inertie G .

• Inventaire des forces appliquées au chariot :

– son poids \vec{P} ;

– la réaction normale au support \vec{R} .

a. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre l'état initial (G en A ; $\vec{v}_A = \vec{0}$) et l'état final (G en H ; $\vec{v}_H = \vec{0}$).

À tout instant, \vec{R} est perpendiculaire au déplacement : $W_{A \rightarrow H}(\vec{R}) = 0$.

\vec{P} est une force constante : $W_{A \rightarrow H}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AH}$.

$E_c(H) - E_c(A) = 0 = \vec{P} \cdot \vec{AH}$. Deux solutions sont possibles :

• soit H est en A mais alors G est immobile : solution sans intérêt ;

• soit \vec{P} est orthogonal à \vec{AH} , H est à la même hauteur que A : $h_1 = h$.

b. \vec{P} est une force conservative. Avec le repère de $(O; \vec{i}, \vec{k})$ de la figure ci-contre et en prenant la référence d'énergie potentielle en $z = 0$:

$$E_p(z) = m \cdot g \cdot z \quad \text{et} \quad E_m = E_p + \frac{1}{2} m \cdot v^2 ;$$

soit :

$$E_m(z) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot z.$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les états initial et final :

$$m \cdot g \cdot z_H - m \cdot g \cdot z_A = W_{A \rightarrow H}(\vec{R}) = 0 ;$$

d'où : $z_A = z_H$, soit $h = h_1$.

On obtient le même résultat.

2. Dans l'inventaire des forces, il faut ajouter la force de frottement pour la portion (DE) .

Gardons le même référentiel, le même état initial et final.

\vec{f} est une force constante sur (DH) , donc $W_{D \rightarrow H}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{DH}$.

\vec{f} et \vec{DH} ont même direction, mais sont de sens opposés. Ils font donc entre eux un angle de π radians. Par ailleurs : $b' = DH \cdot \sin \alpha$.

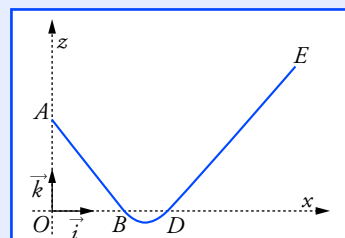
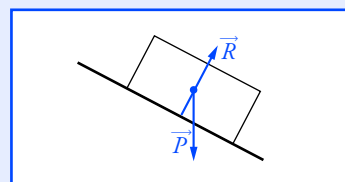
Donc :

$$\vec{f} \cdot \vec{DH} = -f \cdot \frac{b'}{\sin \alpha}.$$

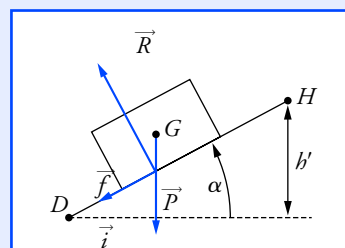
a. $E_c(H) - E_c(A) = 0 = \vec{P} \cdot \vec{AH} + \vec{f} \cdot \vec{DH}$.

$$\vec{P} \cdot \vec{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = -m \cdot g \cdot (z_H - z_A) = -m \cdot g \cdot (b' - h).$$

D'où : $f = \frac{m \cdot g \cdot (b' - h) \cdot \sin \alpha}{b'}$; soit $f = 40 \text{ N}$.



L'énergie mécanique est une fonction dépendant de la position de G . Il faut donc se donner un repère de projection.



On voit sur la figure que :
– $b' = DH \sin \alpha$;
– l'angle (\vec{f}, \vec{DH}) est égal à π .

Pour déterminer correctement l'énergie potentielle d'un système, il faut impérativement faire l'inventaire des forces conservatives appliquées.

La réaction du support ne peut jamais être représentée par une fonction énergie potentielle.

La dérivée par rapport au temps de $x^2(t)$ se calcule en appliquant les règles de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d(x^2)}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2x \cdot \dot{x}.$$

De même :

$$\frac{d(\dot{x})^2}{dt} = 2\dot{x} \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x} \cdot \ddot{x}.$$

Ici la vitesse à $t = 0$ est nulle, le solide étant abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

Si on garde la solution

$\varphi = \pi$ alors $A \cdot \cos \pi = a$,

d'où : $A = -a$.

La solution est :

$$x(t) = -a \cdot \cos(\omega_0 t + \pi) \\ = a \cdot \cos(\omega_0 t).$$

On obtient le même résultat. C'est pour cela qu'en pratique on ne considère qu'un cas.

b. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(H) - E_m(A) = (E_c(H) + m \cdot g \cdot z_H) - (E_c(A) + m \cdot g \cdot z_A) \\ = m \cdot g \cdot z_H - m \cdot g \cdot z_A;$$

$$m \cdot g \cdot z_H - m \cdot g \cdot z_A = m \cdot g(b' - b) = W_{A \rightarrow H}(\vec{R}) + W_{D \rightarrow H}(\vec{f}) \\ = -f \frac{b'}{\sin \alpha}.$$

On retrouve le même résultat.

6. Étude énergétique de l'oscillateur harmonique

1. Le système étudié est le solide S , dans le référentiel terrestre galiléen. Les forces appliquées à S sont :

- le poids \vec{P} vertical vers le bas ;
- la réaction du support \vec{R} vertical vers le haut ;
- la force de traction du ressort $\vec{T} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$, dans le repère de projection, défini sur la figure de l'énoncé.

Il y a deux forces conservatives \vec{P} et \vec{T} .

- l'énergie potentielle de pesanteur qui est une fonction de l'altitude z z étant constante : $E_{p \text{ poids}} = C_1$ (C_1 : constante).

- l'énergie potentielle élastique est $E_{p \text{ élastique}}(x) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + C_2$.

L'énergie potentielle totale est donc avec $E_p(x) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + C_1 + C_2$.

La référence $E_p(0) = 0$ implique $C_1 + C_2 = 0$, soit finalement :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

On en déduit l'énergie mécanique du système :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

La seule force non conservative est la réaction du support dont le travail est nul (elle est perpendiculaire au déplacement). L'énergie mécanique est donc constante. **Le système est conservatif.**

2. x et \dot{x} étant des fonctions du temps, E_m est aussi fonction du temps.

Le système étant conservatif, on a : $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Dérivons E_m par rapport au temps : $0 = m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} \cdot x$.

La solution $\dot{x} = 0$ est une solution mathématique sans intérêt. Écartons-la et divisons les deux membres de l'équation par \dot{x} :

$$m\ddot{x} + kx = 0, \text{ ou } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ en posant } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (i).}$$

3. En considérant la solution proposée : $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$. En remplaçant $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans (i), on constate que la solution proposée vérifie bien l'équation.

Il faut déterminer A et φ , en utilisant les conditions initiales à $t = 0$.

$$x(0) = A \cdot \cos \varphi = a \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -\omega_0 \cdot \sin \varphi = 0 ;$$

d'où : $\varphi = q \cdot \pi$ (q entier).

En prenant $\varphi = 0$, on obtient $A = a$.

$$\text{Ainsi : } x(t) = a \cdot \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot a \cdot \sin \omega_0 t.$$

4. On en déduit les énergies en fonction du temps :

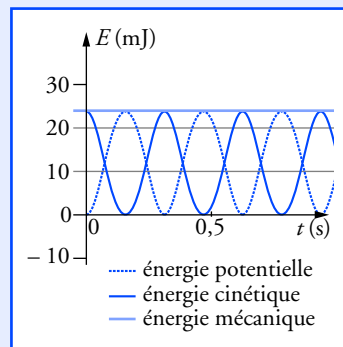
$$\text{-- l'énergie potentielle : } E_p(t) = \frac{1}{2} k \cdot a^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t ;$$

-- l'énergie cinétique :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 a^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k \cdot a^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t ;$$

$$\text{-- l'énergie mécanique : } E_m(t) = \frac{1}{2} k \cdot a^2, \quad \text{l'énergie mécanique est constante.}$$

5. On obtient le graphe représenté sur la figure ci-contre.



7. Oscillateur amorti

1. Le système étudié est le solide S , dans le référentiel galiléen terrestre.

Inventaire des forces appliquées :

- le poids \vec{P} , perpendiculaire à (Ox) ;
- la réaction normale du support \vec{R} , perpendiculaire à (Ox) ;
- la force de frottement \vec{f} parallèle à (Ox) , opposée au déplacement ;
- la traction du ressort $\vec{F}_r = -k \cdot x \cdot \vec{i}$.

Les deux forces conservatives sont \vec{P} et \vec{T} .

$$\text{L'énergie potentielle totale est : } E_p(x) = m \cdot g \cdot 0 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

$$\text{L'énergie mécanique du système est donc : } E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

Lorsque $x(t)$ est maximum, $\dot{x} = 0$; soit $v^2 = 0$,

$$\text{ainsi : } E_m\left(n \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \left(n \frac{T}{2}\right).$$

On obtient les résultats suivants :

| t | 0 | $\frac{T}{2}$ | T | $\frac{3T}{2}$ | $2T$ | $\frac{5T}{2}$ | $3T$ |
|------------|-----|---------------|------|----------------|------|----------------|------|
| E_m (mJ) | 100 | 86,5 | 74,0 | 62,4 | 51,8 | 42,2 | 33,6 |

2. La force de frottement \vec{f} étant toujours opposée au déplacement, son travail est négatif. Sa valeur f étant constante, son travail est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{AB} = -f \cdot |x_B - x_A|.$$

La réaction normale du support est perpendiculaire au déplacement, son travail est nul. Le théorème de l'énergie mécanique nous donne :

$$E_m(x_B) - E_m(x_A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -f \cdot |x_B - x_A|.$$

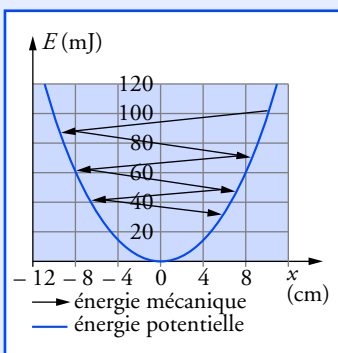
L'énergie potentielle de pesanteur est ici constante. Comme elle est définie à une constante arbitraire près, nous pouvons la prendre nulle.

L'expression de l'énergie potentielle associée à la force exercée par le ressort est connue. Si x représente l'allongement du ressort :

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad \text{avec} \quad E_p(0) = 0.$$

Le numérateur de l'expression de f est une différence de deux carrés de la forme :

$$x_B^2 - x_A^2 = (x_A - x_B) \cdot (x_B + x_A).$$



À l'équilibre, l'allongement du ressort est égal à b . Il exerce une force de rappel dirigée vers le haut et dont l'expression est :

$$\vec{F}_r = -k \cdot b \cdot \vec{i}.$$

En appliquant ce résultat entre les dates $n \frac{T}{2}$ et $\left(n \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right)$, il vient :

$$\frac{1}{2} k \cdot \left(x^2 \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x^2 \left(n \frac{T}{2} \right) \right) = -f \cdot \left| x \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x \left(n \frac{T}{2} \right) \right|,$$

$$\text{d'où : } f = \frac{-\frac{1}{2} k \cdot \left(x^2 \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x^2 \left(n \frac{T}{2} \right) \right)}{\left| x \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x \left(n \frac{T}{2} \right) \right|}.$$

Comme $x^2 \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) < x^2 \left(n \frac{T}{2} \right)$:

$$f = \frac{1}{2} k \cdot \left| \frac{x^2 \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x^2 \left(n \frac{T}{2} \right)}{x \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) - x \left(n \frac{T}{2} \right)} \right|.$$

On obtient : $f = + \frac{1}{2} k \cdot \left| x \left(\left(n+1\right) \frac{T}{2} \right) + x \left(n \frac{T}{2} \right) \right|,$

| | $0 \rightarrow \frac{T}{2}$ | $\frac{T}{2} \rightarrow T$ | $T \rightarrow \frac{3T}{2}$ | $\frac{3T}{2} \rightarrow 3T$ | $3T \rightarrow \frac{5T}{2}$ | $\frac{5T}{2} \rightarrow 3T$ |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $ \Delta x \text{ (cm)}$ | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 |
| $f \text{ (N)}$ | 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |

L'hypothèse est justifiée.

3. Seule l'énergie potentielle élastique d'interaction avec le ressort est fonction de x :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

Le graphe de $E_p(x)$ est une parabole (voir la figure ci-contre).

4. Au cours d'une demi-pseudo-période, la variation d'énergie mécanique est proportionnelle à la distance parcourue :

$$\Delta E_m = W(\vec{f}) = -f \cdot |\Delta x|.$$

$E_m(x)$ est donc une fonction affine de x et une fonction décroissante du temps.

Lorsque la fonction $E_m(x)$ atteint le fond de la cuvette ($E_m = 0$ en $x = 0$),

l'évolution est bloquée car l'énergie mécanique $E_m = E_p + \frac{1}{2} m \cdot v^2$ doit toujours rester supérieure (ou égale si $v = 0$) à l'énergie potentielle.

8. Ressort vertical

1. Le système est le solide S dans le référentiel galiléen terrestre. Inventaire des forces appliquées :

- le poids \vec{P} ;
- la force de rappel exercée par le ressort \vec{F}_r .

S est à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0}$ avec $\vec{F}_r = -k \cdot b \cdot \vec{i}$.

On projette dans le repère $(O_{\text{eq}}; \vec{i})$: $m \cdot g - k \cdot b = 0$, d'où $b = \frac{m \cdot g}{k}$.

2. Les deux forces appliquées au système sont conservatives, l'énergie potentielle comporte donc deux termes :

– l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p_1}(z) = -m \cdot g \cdot z + C_1$;

– l'énergie potentielle élastique $E_{p_2}(z) = \frac{1}{2} k \cdot (\ell - \ell_0)^2 + C_2$.

$\ell = \ell_0 + b + z$ est la longueur du ressort ; C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

On en déduit l'énergie potentielle totale :

$$E_p(z) = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} k \cdot (z + b)^2 + C_1 + C_2.$$

3. On pose $E_p(0) = 0$, d'où : $C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} k \cdot b^2$.

$E_p(z) = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} k \cdot (z + b)^2 - \frac{1}{2} k \cdot b^2$. En tenant compte de la condition d'équilibre $m \cdot g = k \cdot b$ (question 1.), et en développant $(z + b)^2$,

on obtient :

$$E_p(z) = \frac{1}{2} k \cdot z^2.$$

4. Les deux forces appliquées sont conservatives ; le système est donc conservatif. L'énergie mécanique du système est :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k \cdot z^2 = \text{cte.}$$

E_m est une fonction du temps (t) dont la dérivée est nulle. En dérivant l'expression précédente par rapport à t , il vient :

$$m \cdot \dot{z} \cdot \ddot{z} + k \cdot z \cdot \dot{z} = 0.$$

En éliminant la solution sans intérêt $\dot{z} = 0$, on obtient l'équation différentielle :

$$m \cdot \ddot{z} + k \cdot z = 0.$$

On obtient la même forme que pour l'exercice 6, mais ici z représente l'écart de G par rapport à sa position d'équilibre.

5. L'énergie mécanique est la même pour deux états du système :

– le lancement à la date 0 : $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = +v$;

– le point d'altitude a atteint à la date t_1 : $z(t_1) = a$ et $\dot{z}(t_1) = 0$.

$$E_m(0) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k(0)^2 = E_m(t_1) = \frac{1}{2} m(0)^2 + \frac{1}{2} k \cdot a^2.$$

On obtient : $a = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v$, donc $a = 7,1 \text{ cm}$.

Attention :

l'axe $(O_{\text{eq}}z)$ est orienté vers le bas donc : $\vec{P} = +m \cdot g \cdot \vec{i}$;

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) &= \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= m \cdot g \cdot (z_B - z_A) ; \\ E_{p_1}(z_B) - E_{p_1}(z_A) &= -m \cdot g \cdot (z_B - z_A) ; \end{aligned}$$

soit : $E_p(z) = -m \cdot g \cdot z + \text{cte.}$

Attention :

Ne pas confondre allongement du ressort $(\ell - \ell_0)$ et déplacement par rapport à l'équilibre (z). Si on regarde la figure de l'énoncé, on voit clairement que :

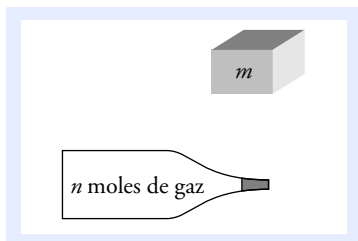
$$\ell = \ell_0 + b + z.$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur sans frottement.

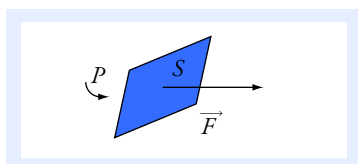
Tout ce passe comme si le poids n'intervenait pas, à condition de considérer z , c'est-à-dire l'écart par rapport à la position d'équilibre.

$z = a$ représente le maximum de z . La vitesse est donc nulle à la date t_1 pour laquelle $z(t_1) = a$. Pour le montrer, il suffit d'écrire que si $z(t)$ est maximal en $t = t_1$, alors $\dot{z}(t_1) = 0$.

Ce chapitre rappelle les notions d'énergie interne et de transferts d'énergie vues en classe de Première. Elles sont récapitulées ici sous une forme un peu différente, en utilisant les concepts et le vocabulaire de la **thermodynamique** telle qu'elle est étudiée dans l'enseignement supérieur scientifique.



Doc. 1 Un solide de masse m ou n moles de gaz enfermées dans un récipient hermétiquement clos constituent un système thermodynamique fermé.



Doc. 2 Pression p et force pressante \vec{F} :
– \vec{F} est orthogonale à S ;
– $F = \|\vec{F}\| = p \cdot S$.

1 cm^3 de gaz dans les conditions usuelles contient $2,7 \cdot 10^{19}$ molécules en mouvement désordonné. Il est donc impossible de le décrire complètement à l'échelle microscopique.

Ce qu'il faut savoir...

1. Système thermodynamique

■ Définition

Un *système thermodynamique fermé* est un ensemble matériel contenu dans une enveloppe de volume V à travers laquelle il n'y a pas d'échange de matière avec le milieu extérieur (**doc. 1**).

Tout ce qui entoure le volume V est le *milieu extérieur*.

Nous ne considérerons que le cas des systèmes fermés, mais dans la suite de vos études vous rencontrerez le cas des systèmes ouverts pour lesquels il y a un échange de matière avec le milieu extérieur.

2. Grandeurs thermodynamiques

Un système thermodynamique (contenant n moles de matière) est caractérisé par un certain nombre de paramètres dont son **volume** V .

■ Pression

- La pression est une grandeur qui est liée aux forces exercées par le fluide sur une surface (**doc. 2**).

Si on double la surface, la force pressante double également, ce qui fait que la pression est inchangée.

- Les grandeurs qui, comme la pression, restent inchangées lors de la juxtaposition de deux systèmes identiques (ou lors de la division d'un système) sont dites **intensives**.

Dans le système international, l'unité de pression est le **pascal (Pa)**.

■ Température

- C'est la grandeur mesurée avec un thermomètre ; son unité dans le système international est le **Kelvin (K)**.

- La température est la manifestation à notre échelle, dite macroscopique, de l'agitation des particules microscopiques qui constituent la

matière. Plus la température est élevée, plus l'agitation est importante. À titre documentaire, signalons que la vitesse moyenne d'agitation des molécules d'un gaz parfait est proportionnelle à \sqrt{T} (doc. 3).

- Comme la pression, la température T est une grandeur **intensive**.
- On utilise couramment l'échelle Celsius :

$$T = 273,15 + \theta$$

où θ est la température en degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$).

■ Autres grandeurs caractéristiques

On peut citer la masse, la masse volumique, le volume molaire, ...

La masse, comme le volume, est une grandeur **extensive** : si on rassemble deux systèmes en un seul, il faut additionner les masses, alors qu'additionner les températures et les pressions n'aurait aucun sens.

■ Paramètres d'état d'un système

- Un ensemble de grandeurs, suffisantes pour décrire un système thermodynamique, constituent les paramètres d'état de celui-ci.

Un système thermodynamique fermé est caractérisé par trois paramètres thermodynamiques, appelés paramètres d'état :

- son volume V ;
- sa pression P ;
- sa température T .

- Au cours de l'évolution du système, la transformation est :
 - **isochore** si le volume reste constant ;
 - **isobare** si la pression est constante à l'intérieur du système ;
 - **isotherme** si la température est constante à l'intérieur du système.

3. Équation d'état d'un système thermodynamique

■ Équilibre thermodynamique

Un système thermodynamique est en équilibre thermodynamique si sa pression P et sa température T ont la même valeur en tout point.

Pour un système fermé de n moles d'un corps à l'état solide, liquide ou gazeux à l'équilibre, les paramètres d'état ne sont pas indépendants. Il existe entre eux une relation appelée **équation d'état**.

■ Équation d'état des gaz parfaits

Pour n moles de gaz parfait, à l'équilibre thermodynamique (P , T), contenus dans une enceinte de volume V :

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

avec $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

Attention : Cette équation n'a de sens que si T est la température absolue, exprimée en Kelvin.

| $T(\text{K})$ | $v_m (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ |
|---------------|--------------------------------------|
| 300 | 445 |
| 500 | 575 |
| 700 | 680 |

Doc. 3 La vitesse moyenne d'agitation des molécules de O_2 en fonction de la température T .

Les autres grandeurs peuvent s'exprimer en fonction des paramètres d'état.

Pour un système constitué de n moles de matière, de masse molaire M , on détermine :

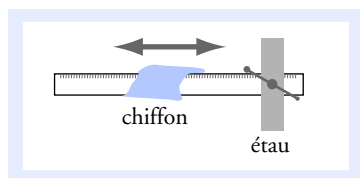
- sa masse $m = n \cdot M$;
- sa masse volumique $\mu = \frac{m}{V}$;
- son volume molaire $V_M = \frac{V}{n}$.

Cette définition de l'équilibre ne tient pas compte des éventuelles variations de pression dues à la variation d'altitude. Par exemple, dans un système constitué d'eau au repos, donc à l'équilibre, la pression augmente avec la profondeur à raison de 0,1 bar par mètre.

Le gaz parfait est un modèle limite. Il constitue une bonne approximation du gaz réel si, pour un volume donné, la pression du gaz n'est pas trop importante (jusqu'à quelques centaines de kPa).

Voir exercice n° 1

Cela revient à négliger les phénomènes de dilatation et de compression. Les solides et les liquides parfaits sont non dilatables et incompressibles. Cette approximation sera suffisante pour les cas envisagés dans cet ouvrage.



Doc. 4 Règle frottée par un chiffon.

• L'énergie cinétique d'un système

est :
$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_G^2,$$

v_G étant la vitesse du centre d'inertie du système.

• La vitesse et la position du centre d'inertie sont observables à l'échelle macroscopique ; l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont donc des énergies macroscopiques.

• L'énergie interne est une énergie microscopique qui représente l'énergie cinétique liée à l'agitation des particules et les énergies potentielles liées aux interactions entre particules.

Le transfert thermique est un terme d'échange énergétique qui rend compte des travaux des forces microscopiques exercées par les particules du milieu extérieur sur celles du système.

■ Phases condensées parfaites

Les solides et les liquides sont des phases condensées. n moles de solide, ou de liquide, constitue un système solide, ou liquide, parfait si, à l'équilibre thermodynamique, son volume est constant quelque soit P et T .

$$V = \text{cte} \quad \text{quelque soit } P \text{ et } T,$$

4. Bilan thermodynamique ; notion de transfert thermique

■ En étudiant le théorème de l'énergie mécanique (voir le *chapitre 5*), nous ne nous sommes pas intéressés au système dans sa globalité. Nous n'avons en effet pris en compte pour le décrire que sa position et son mouvement, sans nous intéresser, par exemple, à sa température.

Prenons une règle en matière plastique fixée entre les mâchoires d'un étau et frottons-la énergiquement avec un chiffon (doc. 4).

Considérons le système {chiffon + règle} entre deux états :

- état initial, à la date $t = 0$ où l'opérateur prend le chiffon ;
- état final, à la date $t = t_1$ où il repose le chiffon au même endroit.

Entre ces deux états, la variation d'énergie cinétique du chiffon est nulle ainsi que celle de la règle. La variation d'énergie potentielle étant elle aussi nulle, la variation d'énergie mécanique du système est nulle.

Faisons l'inventaire des travaux des forces **non conservatives** exercées sur le système par le **milieu extérieur (l'opérateur et l'étau)** :

- les forces exercées par l'étau, qui maintiennent la règle, ont des points d'application de vitesse nulle : leur travail est nul ;
- les forces exercées par l'opérateur sur le chiffon ont un travail positif.

Globalement, **la variation d'énergie mécanique est nulle alors que le travail des forces extérieures, reçu par le système, est positif.**

Cependant la description purement mécanique n'est pas suffisante : si l'on touche la règle en fin d'opération, on constate qu'elle s'est échauffée (le chiffon aussi, mais de manière moins perceptible). Dans ce cas, le travail mécanique fourni par les forces extérieures n'a pas eu pour effet d'augmenter l'énergie mécanique du système, mais d'élever sa température.

Pour retrouver un bilan d'énergie satisfaisant, il faut ajouter à l'énergie mécanique une énergie accumulée par le matériau, indépendamment de sa vitesse ou de sa position, appelée **énergie interne** et notée U . Dans ce cas, le travail mécanique reçu a servi à augmenter l'énergie interne U du système {chiffon + règle}.

Si maintenant on laisse la règle en contact avec l'atmosphère, elle se refroidit lentement jusqu'à la température ambiante. L'énergie totale $E_{\text{totale}} = E_m + U$ de la règle a cette fois diminué bien qu'il n'y ait eu aucun travail échangé avec l'extérieur. Il faut donc, en plus du travail des forces extérieures, ajouter un terme de transfert énergétique « invisible » On l'appelle **transfert thermique** noté Q .

■ Finalement, on est amené à poser un principe, qui comme tout principe physique, ne se démontre pas, mais est justifié par ses vérifications expérimentales.

Pour un système fermé, il existe une fonction U extensive appelée énergie interne du système.

U est une fonction d'état (qui dépend des paramètres d'état du système).

L'énergie totale du système est :

$$E_{\text{totale}} = U + E_c + E_p,$$

Pour un système évoluant d'un état initial I vers un état final F, sa variation d'énergie totale est égale à la somme du travail mécanique des forces non conservatives exercées par le milieu extérieur et du transfert thermique reçu de la part du milieu extérieur :

$$\Delta E_{\text{totale}} = W_{I \rightarrow F} + Q_{I \rightarrow F}.$$

- La fonction énergie interne U dépend *a priori* des paramètres P , V et T .
- Comme pour l'énergie potentielle E_p , on ne peut mesurer que des variations d'énergie interne ; U est définie à une constante près.
- Comme l'énergie cinétique, l'énergie interne U est une fonction extensive. Si un système est constitué de plusieurs sous-systèmes, son énergie interne est égale à la somme des énergies internes des sous-systèmes.
- Le transfert thermique $Q_{I \rightarrow F}$ est également appelé *quantité de chaleur*.
- Si W (ou Q) est positif, il s'agit d'un **gain** d'énergie pour le système ; le transfert d'énergie est dirigé de l'extérieur vers le système. Inversement, W (ou Q) négatif correspond à une **perte** d'énergie pour le système.
- L'expérience montre qu'un transfert thermique est toujours orienté du système le plus chaud vers le système le plus froid. Si Q est positif, alors la température du milieu extérieur est supérieure à celle du système.
- S'il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur, l'évolution du système entre l'état initial et final est dite **adiabatique**.
- Dans de très nombreux cas, le système est immobile et sa variation d'énergie potentielle est négligeable devant sa variation d'énergie interne. On obtient :

$$\Delta E_{\text{totale}} = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta U = W_{I \rightarrow F} + Q_{I \rightarrow F},$$

expression connue sous le nom de « **premier principe de la thermodynamique pour un système au repos** ».

5. Cas particuliers à connaître

■ Énergie interne des phases condensées parfaites

Pour un système fermé de masse m , constitué d'une phase condensée parfaite à l'équilibre thermodynamique, l'énergie interne est :

$$U(T) = C \cdot T + \text{cte} = m \cdot c \cdot T + \text{cte}.$$

C est appelée capacité thermique du système ; son unité S.I. est $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

c est sa capacité thermique massique ; son unité S.I. est $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Voir exercice n° 2

Le transfert thermique (comme le travail mécanique) est défini entre deux états du système.

Il est donc aberrant de confondre la température T , qui a une valeur parfaitement définie pour le système dans **un état donné**, avec le transfert thermique Q qui est un terme **d'échange** énergétique et qui n'a de sens **qu'entre deux états** du système.

Il ne faut pas se laisser abuser par les expressions du langage courant, non scientifique comme :

- « quelle chaleur ! », au lieu de « quelle température ! » ;
- « un corps chauffé accumule de la chaleur ». Cette affirmation est fausse.

Un corps solide dont la température augmente accumule de **l'énergie**, on peut y parvenir par un transfert thermique (ou chaleur) ou par un travail mécanique en le frottant.

Une transformation parfaitement adiabatique est impossible. En calorifugeant le volume V , on réalise cette transformation avec une bonne approximation.

Les échanges thermiques avec le milieu extérieur sont des phénomènes beaucoup plus lents que les échanges mécaniques. Ainsi, une transformation relativement rapide peut être adiabatique en première approximation.

Le cas d'un changement d'état à **température constante**, montre qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une variation de la température du système pour avoir un transfert thermique avec le milieu extérieur.

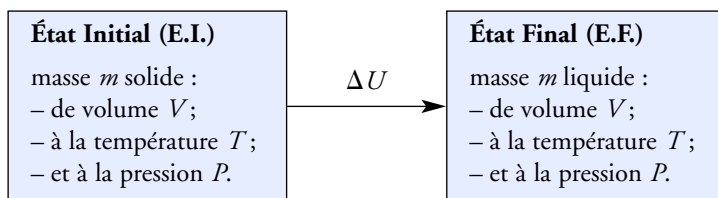
Le seul travail mécanique qui pourrait intervenir serait dû aux forces de pression (la pression atmosphérique, par exemple) s'exerçant sur le système. Pour la transformation envisagée, on peut négliger la variation du volume entre E.I. et E.F., donc le travail mécanique échangé.

Ceci **n'est pas vrai** pour le passage du liquide au gaz, à l'état final, sous la même pression P , le volume serait beaucoup plus grand.

Il faut se placer dans un référentiel galiléen. En pratique, on ne le spécifie pas, car la majorité des transformations s'effectue dans le référentiel laboratoire, suffisamment galiléen.

■ Chaleur latente massique de fusion de phases condensées parfaites

- D'une manière générale, on appelle chaleur latente massique de changement de phase (ou changement d'état) d'une phase 1 en une phase 2, le transfert thermique reçu par 1 kg de matière passant de la phase 1 à la phase 2, la pression et la température étant constantes au cours de la transformation.
- Un solide parfait de masse m transformé en une masse m de liquide parfait évolue entre les états thermodynamiques suivants :



La variation d'énergie interne ΔU au cours de cette transformation est donnée par :

$$\Delta U = m \cdot L_f$$

L_f est la chaleur latente de fusion du solide, son unité S.I. est $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. De même pour la chaleur latente de solidification L_s , qui n'est autre que l'évolution en sens contraire du système précédent : $L_s = -L_f$.

Voir exercice n° 3

■ Quelques définitions

Le passage du liquide à la vapeur est la *vaporisation*.

Le passage du solide à la vapeur est la *sublimation*.

Le passage de la vapeur au liquide est la *condensation* à l'état liquide (ou liquéfaction).

Le passage de la vapeur au solide est la *condensation* à l'état solide.

6. Comment traiter un bilan thermodynamique ?

1. Définir le système.
2. Définir l'état initial : P_I , V_I , T_I et éventuellement la vitesse et la position de son centre d'inertie.
3. Définir l'état final : P_F , V_F , T_F et éventuellement la vitesse et la position de son centre d'inertie.
4. Se poser la question : quels sont les échanges de travail et les échanges thermiques avec l'extérieur ?
Bien faire attention aux signes : le terme d'échange (W ou Q) est positif s'il s'agit d'un gain d'énergie pour le système et négatif s'il s'agit d'une perte.

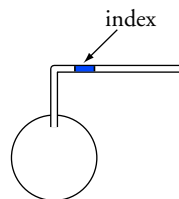
5. Quelle est la nature de la transformation ?

6. Appliquer :
$$\Delta E_{\text{totale}} = W_{I \rightarrow F} + Q_{I \rightarrow F}$$

Pour faire le point...

1. Transformations d'un gaz parfait

1. Un ballon contenant de l'air, considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, est muni d'un tube coudé en verre. Un index d'eau colorée peut se déplacer dans la partie horizontale du tube de diamètre 4,00 mm. L'air emprisonné a un volume $V = 0,500 \text{ L}$ et sa température est $T = 293 \text{ K}$. La pression atmosphérique est $P_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.



- Déterminer la quantité de matière contenue dans le volume V .
- Le ballon est plongé dans un récipient d'eau maintenue à la température $T' = 300 \text{ K}$. Déterminer la pression P_1 , la température T_1 et le volume V_1 à l'état final, lorsque l'équilibre thermodynamique est atteint. De quelle longueur L se déplace l'index ?
- Le ballon de volume $V = 0,500 \text{ L}$, contenant de l'air à $T = 293 \text{ K}$, est hermétiquement fermé. On le plonge dans l'eau à $T' = 300 \text{ K}$. Déterminer V_2 , T_2 et P_2 à l'équilibre thermodynamique final.
- Un volume $V' = 50,0 \text{ mL}$ d'air, à la température $T = 293 \text{ K}$, est emprisonné dans une seringue dont l'extrémité est bouchée. Un opérateur réduit son volume de moitié en maintenant la température du gaz à 293 K . Déterminer P_3 à l'équilibre thermodynamique final.

Conseils

- Revoir l'équation d'état des gaz parfaits.
- Il faut bien définir le système étudié.
- Dans chaque cas, il faut se poser la question : quel est le paramètre thermodynamique qui reste constant ?

2. Méthode des mélanges

1. Dans un calorimètre de capacité thermique C (avec ses accessoires : agitateur et thermomètre), on place une masse $m_1 = 300 \text{ g}$ d'eau. À l'équilibre thermodynamique, on mesure une température $\theta_1 = 20,0^\circ \text{C}$. On ajoute une masse $m_2 = 200 \text{ g}$ d'eau de température $\theta_2 = 80,0^\circ \text{C}$. Après avoir agité, la température finale est $\theta_F = 40,0^\circ \text{C}$. On néglige les transferts thermiques avec le milieu extérieur et on considérera les phases condensées comme parfaites. On donne la capacité thermique massique de l'eau : $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Déterminer la capacité thermique C du calorimètre.
 - Quelle masse d'eau a la même capacité thermique ?
2. Le calorimètre précédent est rempli avec une masse $m_1 = 300 \text{ g}$ d'eau, sa température à l'équilibre est $\theta_1 = 21,3^\circ \text{C}$. On plonge dans le calorimètre un bloc de cuivre, sortant d'un récipient d'eau bouillante, de masse $m_3 = 200 \text{ g}$ et à la température $\theta_3 = 100,0^\circ \text{C}$. La capacité thermique massique du cuivre est $c(\text{Cu}) = 0,384 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. On se place dans le cas des approximations de la question 1.
- Déterminer la température finale à l'équilibre thermodynamique.
 - Déterminer le transfert thermique Q_1 reçu par le bloc de cuivre de la part du milieu extérieur.

Conseils

- Il faut définir avec soin le système thermodynamique, ainsi que l'état initial et final.
- Revoir l'expression de l'énergie interne des phases condensées parfaites.
- Faire le bilan énergétique en remarquant que le calorimètre et l'eau sont immobiles.

3. Refroidissement d'une boisson

Un gobelet, en matière plastique, de capacité thermique négligeable contient $m = 300$ g d'eau à $\theta_1 = 22,0$ °C que l'on refroidit avec des cubes de glace de masse $m' = 10$ g, sortant d'un congélateur à $\theta_2 = -21,0$ °C. Dans tout l'exercice, on considérera qu'il n'y a pas de transfert thermique avec l'atmosphère extérieure et on néglige les variations de volume lors du changement de phase solide-liquide. On se place dans l'approximation des phases condensées parfaites.

Données :

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4,18$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹.

Capacité thermique massique de la glace : $c_s = 2,10$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹.

Chaleur latente de fusion de la glace (à 0 °C) : $L_f = 335$ kJ · kg⁻¹.

1. On plonge un cube de glace dans le gobelet. Déterminer la température θ_f de l'eau à l'équilibre thermodynamique.
2. Déterminer le nombre de cubes de glace nécessaire pour obtenir une boisson à 0 °C.

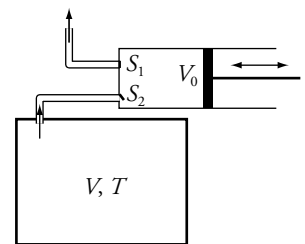
Conseils

- Revoir la définition de la chaleur latente de fusion pour des phases condensées parfaites.
- Il faut définir avec beaucoup de rigueur l'état initial et final.
- On ne peut pas calculer directement la variation d'énergie interne faisant passer la glace de -21 °C à de l'eau à θ_f . Il faut envisager une succession de transformations pour lesquelles on sait écrire la variation de la fonction énergie interne.

Pour s'entraîner...

4. Pompe à vide

Pour faire le vide dans une enceinte, contenant de l'air et de volume V , on utilise une pompe. Elle est composée d'un cylindre à l'intérieur duquel se déplace, sans frottement, un piston. Le volume maximum d'air admissible dans le corps de pompe est V_0 , lorsque le piston est tiré complètement vers la droite. Lorsqu'il est poussé complètement à gauche, le piston peut atteindre le fond du cylindre. Deux soupapes, S_1 et S_2 , permettent l'admission de l'air venant de l'enceinte et son refoulement vers l'atmosphère extérieure dont la pression est P_0 . Un moteur électrique déplace le piston qui fait un aller et un retour quand le moteur a fait un tour. On assimilera l'air à un gaz parfait dont la température T reste constante lors du fonctionnement de la pompe.



Au départ, la pression dans l'enceinte est $P_0 = 1,000 \cdot 10^5$ Pa. On néglige le volume du tuyau reliant la pompe à l'enceinte.

1. On étudie le premier aller-retour du piston.

Au départ, la pression dans l'enceinte est P_0 , le piston est poussé à gauche. Puis, S_2 étant ouverte et S_1 fermée, il est tiré complètement vers la droite.

Lors du retour du piston, S_1 est ouverte et S_2 est fermée, l'air contenu dans le cylindre est refoulé vers l'extérieur.

Déterminer la pression P_1 à la fin de cette opération.

2. En reprenant le raisonnement précédent, déterminer la pression P_2 , dans l'enceinte, à la fin du deuxième aller du piston.

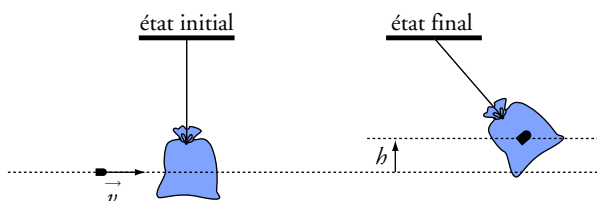
3. En déduire la pression P_N à l'intérieur de l'enceinte au bout de N allers-retours.

4. La fréquence de rotation du moteur est de $300 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Déterminer le temps t pour obtenir une pression de $0,001 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. On donne $V = 10,0 \text{ L}$ et $V_0 = 50,0 \text{ cm}^3$.

Conseils

- Il est impératif de bien définir le système thermodynamique étudié.
- Il faut définir les états initial et final pour chaque transformation envisagée.
- Se poser la question : quelle est la nature de la transformation ?

5. Arrêt d'une balle dans un sac de sable



Une balle de plomb de masse $m = 30,0 \text{ g}$ est tirée horizontalement et vient frapper à la vitesse $v = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ un sac de sable, immobile, de masse $M = 10,0 \text{ kg}$ suspendu à un fil inextensible, de masse négligeable. Après l'impact, la balle s'incruste au centre d'inertie du sac de sable. Le centre d'inertie de l'ensemble, confondu avec celui du sac de sable, s'élève jusqu'à la hauteur $h = 11,5 \text{ cm}$.

Données :

Valeur du champ de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Température ambiante : $\theta_e = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Capacité thermique massique du plomb à l'état solide : $c_s = 120 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Capacité thermique massique du plomb à l'état liquide : $c_\ell = 110 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Température de fusion du plomb : $\theta_{\text{fus}} = 327 \text{ }^\circ\text{C}$.

Chaleur latente massique de fusion du plomb : $L_f = 24,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'impact est de courte durée et la conductivité thermique du sable étant faible, le transfert thermique avec l'air environnant est quasi nul. On néglige les frottements dus à l'air. On se placera dans le cas des phases condensées parfaites et des changements de phase sans variation de volume.

1. Déterminer la variation d'énergie interne de l'ensemble {balle + sac de sable} entre une date t , juste avant l'impact, et une date t' où l'ensemble a atteint sa hauteur maximale.

2. 80 % de cette variation d'énergie interne correspond à la variation d'énergie interne de la balle.

a. En supposant que la balle reste à l'état solide, déterminer sa température finale. Conclure.

b. Déterminer complètement l'état final de la balle.

Conseils

- Attention, les positions et vitesses de la balle et du sac ne sont pas les mêmes entre l'état initial et l'état final.
- Les variations d'énergie cinétique et potentielle ne sont pas nulles.
- Il faut choisir un repère pour avoir l'expression analytique de l'énergie potentielle.

6. Calorimètre avec fuite thermique

La « valeur en eau » d'un calorimètre est, par définition, la masse d'eau qui a la même capacité thermique que le calorimètre (voir l'exercice 2).

À la date $t = 0$, un calorimètre, de valeur en eau $m_{\text{eq}} = 50$ g, contient une masse $m' = 250$ g d'eau à la température $\theta_0 = 80$ °C. Le calorimètre n'est pas parfait et la température de l'eau qu'il contient diminue au cours du temps. Un transfert thermique (fuite thermique) est échangé avec l'air ambiant qui est à la température $\theta_c = 20$ °C.

On définit la puissance thermique, reçue par un système thermodynamique, par :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{où } \delta Q \text{ est le transfert thermique reçu par le système entre les dates } t \text{ et } t + \Delta t.$$

On pose $m = m_{\text{eq}} + m'$; tout ce passe comme si le calorimètre et la masse m' d'eau étaient équivalents à une quantité d'eau de masse m (qui constitue le système \mathcal{S}).

La fuite thermique \mathcal{P}_{th} est égale au transfert thermique par unité de temps, reçu (algébriquement) par le système. On suppose que $\mathcal{P}_{\text{th}} = -h \cdot [T(t) - T_c]$ où h est une constante positive, $T(t)$ est la température du système à la date t et T_c la température (constante) de l'air ambiant (c'est le modèle de Newton).

1. a. Faire le bilan thermodynamique pour le système \mathcal{S} , entre deux dates t et $t + \Delta t$. En faisant tendre Δt vers 0, en déduire une expression de la dérivée par rapport au temps de l'énergie interne U en fonction de h , $T(t)$ et T_c .

b. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\frac{dT}{dt}$, m , c , h , $T(t)$ et T_c .

c. On pose $\alpha(t) = T(t) - T_c$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$, et en déduire l'expression de $\alpha(t)$.

d. À la date $t_1 = 60$ min, la température de l'eau est $\theta_1 = 50$ °C. Déterminer la valeur de h .

2. On reprend le même système mais à la température ambiante de 20 °C. On plonge une résistance électrique, de capacité thermique quasi nulle (son énergie interne est constante lors de son fonctionnement), alimentée par un générateur électrique. À la date $t = 0$, on branche le

générateur ; la résistance reçoit une puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{V^2}{R}$, $R = 10 \Omega$ étant la valeur

de la résistance et $V = 10$ V la tension à ses bornes.

Reprendre les questions **1. a.**, **b.** et **c.**

d. Quelle est la température atteinte par l'eau au bout d'une heure ?

Quelle est la température atteinte au bout d'un temps « infini » ?

e. Quelle est la tension minimale V_{min} nécessaire pour que l'eau entre en ébullition (100 °C) ?

Donnée : capacité thermique massique de l'eau : $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Conseils

- Attention : ici la température du système est fonction du temps, elle varie de Δt entre les dates t et $t + \Delta t$.
- Pour la résolution de l'équation différentielle, reportez vous à l'annexe 3.
- Après la question 2. il est préférable de prendre le système $\{\mathcal{S} + \text{la résistance électrique}\}$.

Solutions...

1. Transformations d'un gaz parfait

1. Prenons le système fermé constitué par les n moles de gaz parfait (air) contenues dans le volume V de départ.

À l'état initial et final, l'index est immobile et la somme vectorielle des forces qui lui sont appliquées est nulle. Son poids est opposé à la réaction du tube et les forces pressantes s'exerçant de part et d'autre de celui-ci sont opposées. **À l'état initial et final, la pression de l'air contenu dans le récipient est égale à la pression extérieure P_0 .**

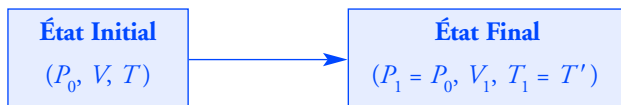
a. En appliquant l'équation d'état des gaz parfait à l'état initial :

$$P_0 \cdot V = n \cdot R \cdot T;$$

$$\text{d'où : } n = \frac{P_0 \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \times 0,50 \cdot 10^{-3}}{8,32 \times 293},$$

$$\text{soit : } n = 2,05 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

b. À l'état d'équilibre final, la température de l'air contenu dans le volume V_1 est égale à la température de l'eau, maintenue à T_1 .



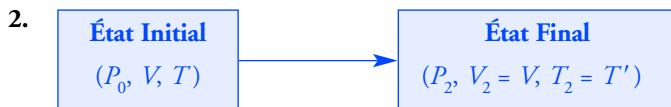
$$\frac{P}{n \cdot R} = \frac{T}{V} = \frac{T_1}{V_1}, \text{ d'où } V_1 = \frac{T_1}{T} \cdot V;$$

$$\text{soit : } V_1 = 0,51 \text{ L.}$$

$V_1 - V$ est le volume contenu dans le cylindre de section s (de diamètre d et de longueur L :

$$V_1 - V = s \cdot L = \frac{\pi d^2}{4} \cdot L; \text{ d'où } L = \frac{4(V_1 - V)}{\pi d^2} = \frac{4V \cdot \left(\frac{T_1}{T} - 1\right)}{\pi d^2};$$

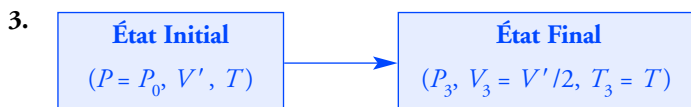
$$\text{soit : } L = 0,95 \text{ m.}$$



$$\frac{V}{n \cdot R} = \frac{T}{P} = \frac{T_2}{P_2}, \text{ d'où } P_2 = \frac{T_2}{T} \cdot P;$$

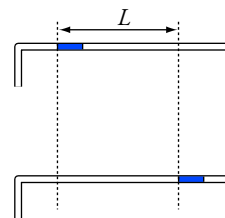
$$\text{soit : } P_2 = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

L'effet est relativement faible.



$$n \cdot R \cdot T = P \cdot V' = P_3 \cdot V_3; \text{ d'où } P_3 = \frac{V'}{V_3} \cdot P = 2P;$$

$$\text{soit : } P_3 = 2,00 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$



Déplacement de l'index entre l'état initial et l'état final.

La section d'un cylindre de révolution de diamètre d est un disque d'aire $\frac{\pi d^2}{4}$.

Au cours de la transformation, la pression du système reste constante.

L'équation d'une transformation isobare d'un gaz parfait

$$\text{est : } \frac{T}{V} = \text{cte.}$$

Au cours de la transformation, le volume du système est constant.

L'équation d'une transformation isochore d'un gaz parfait

$$\text{est : } \frac{T}{P} = \text{cte.}$$

Au cours de la transformation, la température à l'intérieur du système est constante.

L'équation d'une transformation isotherme d'un gaz

parfait est : $P \cdot V = \text{cte.}$

Les paramètres P et V sont les mêmes à l'état initial et final pour chaque sous-système ; c'est pour cela qu'on ne les a pas fait figurer.

L'énergie interne est une fonction extensive.

Le rôle du calorimètre est d'éviter les transferts thermiques avec le milieu extérieur, la transformation est adiabatique ($Q_{I \rightarrow F} = 0$). Aucun travail mécanique n'est échangé avec le milieu extérieur ($W_{I \rightarrow F} = 0$).

Étant donné que
 $T = 273,15 + \theta$:
 $\Delta T = \Delta \theta$.

m_{eq} est appelée *valeur en eau du calorimètre*. On la note parfois μ .

En remplaçant le calorimètre par une masse d'eau équivalente, on réduit le système à deux sous-systèmes.

Nous sommes dans les mêmes conditions qu'en 1.

On peut remarquer que T_F est le barycentre des points pondérés ($T_1, m \cdot c_e$) et ($T_3, m_3 \cdot c(\text{Cu})$).

2. Méthode des mélanges

1. Soit le système {calorimètre + eau de masse m_1 + eau de masse m_2 }.

| État Initial | État Final |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> – calorimètre à $\theta_1 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$; – m_1 d'eau à $\theta_1 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$; – m_2 d'eau à $\theta_2 = 80,0 \text{ }^\circ\text{C}$. | <ul style="list-style-type: none"> – calorimètre à $\theta_F = 40,0 \text{ }^\circ\text{C}$; – m_1 d'eau à $\theta_F = 40,0 \text{ }^\circ\text{C}$; – m_2 d'eau à $\theta_F = 40,0 \text{ }^\circ\text{C}$. |

L'énergie interne du système est égale à la somme des énergies internes des sous-systèmes : $U_{\text{syst}} = U_{\text{cal}} + U_{m_1} + U_{m_2}$.

À l'état initial et final, les sous-systèmes sont immobiles et à la même position. Les variations d'énergie potentielle et cinétique sont nulles.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique, dans ce cas :

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_{\text{cal}} + \Delta U_{m_1} + \Delta U_{m_2} = W_{I \rightarrow F} + Q_{I \rightarrow F} = 0.$$

La transformation est adiabatique.

Nous avons des phases condensées parfaites, d'où :

$$\Delta U_{\text{cal}} = C \cdot (T_F - T_1) = C \cdot (\theta_F - \theta_1) ;$$

$$\Delta U_{m_1} = m_1 \cdot c_e \cdot (T_F - T_1) = m_1 \cdot c_e \cdot (\theta_F - \theta_1) ;$$

$$\Delta U_{m_2} = m_2 \cdot c_e \cdot (T_F - T_2) = m_2 \cdot c_e \cdot (\theta_F - \theta_2).$$

En remplaçant dans l'expression du premier principe, on obtient :

$$C = \frac{-m_1 \cdot c_e \cdot (\theta_F - \theta_1) - m_2 \cdot c_e \cdot (\theta_F - \theta_2)}{\theta_F - \theta_1} = 418 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

D'où la masse d'eau équivalente :

$$C = m_{\text{eq}} \cdot c_e, \text{ soit } m_{\text{eq}} = 100 \text{ g}.$$

2. a. Soit le système {calorimètre + eau de masse m_1 + bloc de cuivre de masse m_3 } équivalent au système {eau de masse ($m_{\text{eq}} + m_1$) + bloc de cuivre de masse m_3 }.

| État Initial | État Final |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> – $m = m_{\text{eq}} + m_1$ d'eau à $\theta_1 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$; – m_3 de cuivre à $\theta_3 = 100,0 \text{ }^\circ\text{C}$. | <ul style="list-style-type: none"> – $m = m_{\text{eq}} + m_1$ d'eau à θ_F ; – m_3 de cuivre à θ_F. |

La transformation est adiabatique et sans échange de travail mécanique avec le milieu extérieur. Le bilan d'énergie s'écrit donc :

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_m + \Delta U_{m_3} = 0$$

avec : $\Delta U_m = m \cdot c_e \cdot (T_F - T_1) = m \cdot c_e \cdot (\theta_F - \theta_1)$

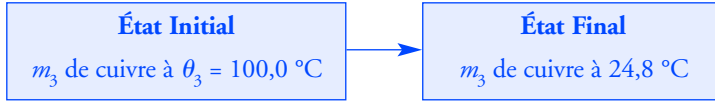
et : $\Delta U_{m_3} = m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot (T_F - T_3) = m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot (\theta_F - \theta_3) ;$

$$\text{d'où : } T_F = \frac{m \cdot c_e \cdot T_1 + m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot T_3}{m \cdot c_e + m_3 \cdot c(\text{Cu})}$$

$$\text{ou bien : } \theta_F = \frac{m \cdot c_e \cdot \theta_1 + m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot \theta_3}{m \cdot c_e + m_3 \cdot c(\text{Cu})}.$$

On obtient : $\theta_F = 24,8^\circ\text{C}$.

b. On considère le système {bloc de cuivre}.



Pour le système considéré, la transformation n'est pas adiabatique. L'extérieur est constitué du calorimètre et de la masse m_1 d'eau, il n'y a pas de travail mécanique échangé. Le bilan d'énergie donne :

$$\Delta U_{m_3} = m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot (T_F - T_3) = m_3 \cdot c(\text{Cu}) \cdot (\theta_F - \theta_3) = Q;$$

soit : $Q_1 = -5,78 \text{ kJ}$.

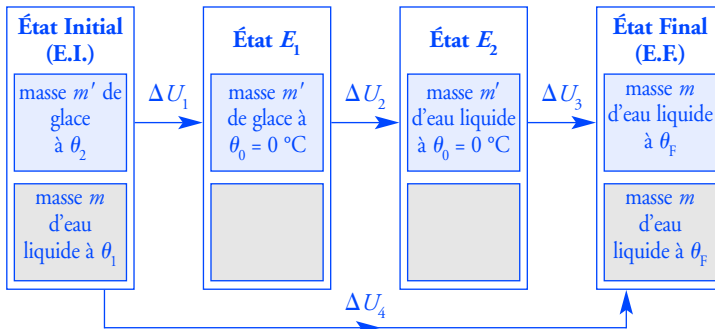
Le bloc de cuivre reçoit un transfert thermique Q_1 (négatif) de la part des 300 g d'eau et du calorimètre.

3. Refroidissement d'une boisson

1. Soit le système {masse m d'eau + un cube de glace de masse m' }.

Faisons l'hypothèse que l'on a une masse $m + m'$ d'eau liquide à l'équilibre thermodynamique.

Le système étant immobile, considérons deux états intermédiaires E_1 et E_2 .



Il n'est pas nécessaire de connaître les températures intermédiaires du sous-système constitué par la masse m d'eau initialement liquide.

Il n'y a pas de transfert thermique avec le milieu extérieur, la transformation est adiabatique et il n'y a pas de travail mécanique.

Le bilan énergétique s'écrit :

$$\Delta U_{\text{sys}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4 = 0.$$

$$\Delta U_1 = m' \cdot c_s \cdot (T_0 - T_2) = m' \cdot c_s \cdot (\theta_0 - \theta_2);$$

$$\Delta U_2 = m' \cdot L_f;$$

$$\Delta U_3 = m' \cdot c_\ell \cdot (T_F - T_0) = m' \cdot c_\ell \cdot (\theta_F - \theta_0);$$

$$\Delta U_4 = m \cdot c_\ell \cdot (T_F - T_1) = m \cdot c_\ell \cdot (\theta_F - \theta_1);$$

$$\text{d'où : } \theta_F = \frac{m' \cdot c_\ell \cdot \theta_0 + m \cdot c_\ell \cdot \theta_1 - m' \cdot L_f - m' \cdot c_s \cdot (\theta_0 - \theta_2)}{(m + m') \cdot c_\ell},$$

soit : $\theta_F = 18,4^\circ\text{C}$.

Sur cet exemple, on voit l'importance de bien définir le système pour faire un bilan thermodynamique correct.

Il y a deux possibilités :
 – l'état final ne contient que de l'eau liquide à $\theta_F > 0^\circ\text{C}$;
 – il reste de la glace et $\theta_F = 0^\circ\text{C}$.
 Il faut faire une hypothèse dont on vérifie le bien-fondé à la fin du calcul.

Entre les états E_1 et E_2 , il se produit un changement de phase se faisant à *température constante, mais avec variation d'énergie interne*.

L'hypothèse est correcte, on trouve une température supérieure à 0°C . Si on avait fait l'autre hypothèse, on trouverait une masse de glace fondue supérieure à celle du cube de départ !

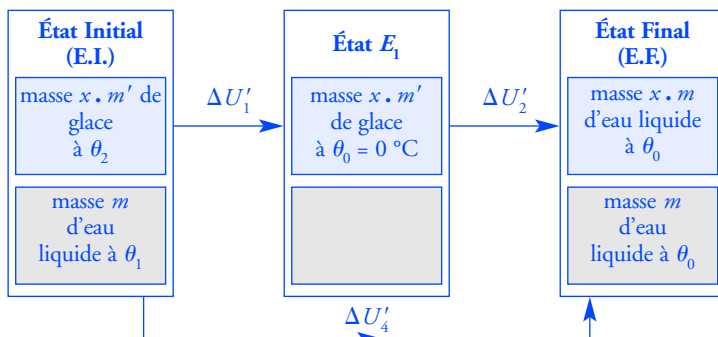
Sur cet exemple, vous pouvez voir comme il est important de bien définir le système (composé ici de deux sous-systèmes), l'état initial et l'état final.

En réalité, il y a toujours un transfert thermique avec le milieu extérieur. Pour compenser ces pertes, il faudra mettre plus de dix cubes de glace si vous voulez boire cette eau à 0 °C (ce qui n'est pas conseillé !).

C'est une transformation isotherme d'un gaz parfait, son équation est : $P \cdot V = \text{cte}$. (voir l'exercice 1)

Le système considéré n'est pas le même que celui en 1. Une partie de l'air a été refoulée dans l'atmosphère extérieure et donc $n_2 < n_1$. Il faut redéfinir le système fermé à chaque aller et retour.

2. Soit le système {masse m d'eau + x cubes de glace de masse m' }. Les conditions sont les mêmes que précédemment. Mais il faut redéfinir les états initial et final :



Le bilan énergétique s'écrit :

$$\Delta U'_{\text{sys}} = \Delta U'_1 + \Delta U'_2 + \Delta U'_4 = 0.$$

$$\Delta U'_1 = x \cdot m' \cdot c_s \cdot (T_0 - T_2) = x \cdot m' \cdot c_s \cdot (\theta_0 - \theta_2) ;$$

$$\Delta U'_2 = x \cdot m' \cdot L_f ;$$

$$\Delta U'_4 = m \cdot c_\ell \cdot (T_0 - T_1) = m \cdot c_\ell \cdot (\theta_0 - \theta_1) ;$$

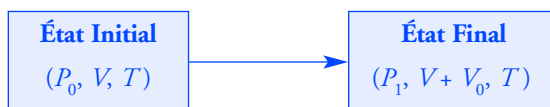
d'où :

$$x = \frac{-m \cdot c_\ell \cdot (\theta_0 - \theta_1)}{m' \cdot c_s \cdot (\theta_0 - \theta_2) + m' \cdot L_f} = 7,28.$$

Il faut donc **huit cubes de glace** pour avoir à la fin de l'eau (liquide) à 0 °C ; il reste un peu de glace à l'équilibre thermodynamique final.

4. Pompe à vide

1. Prenons comme système fermé les n_1 moles de gaz contenues au départ dans le volume V . À la fin de l'aller du piston, ce système occupe le volume $V + V_0$. Le retour du piston ne modifie pas la pression à l'intérieur de l'enceinte puisque la soupape S_2 est fermée pendant cette opération.



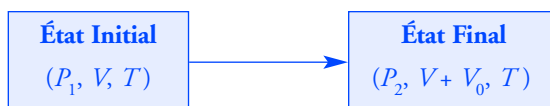
D'où :

$$P_0 \cdot V = P_1 \cdot (V + V_0),$$

donc :

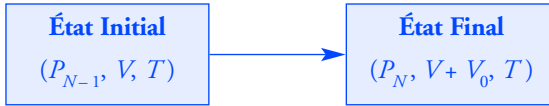
$$P_1 = P_0 \cdot \frac{V}{V + V_0}.$$

2. Prenons comme nouveau système fermé les n_2 moles de gaz contenues dans le volume V à la fin du premier aller et retour.



D'où $P_1 \cdot V = P_2 \cdot (V + V_0) ;$
 donc : $P_2 = P_1 \cdot \frac{V}{V + V_0} = P_0 \cdot \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^2 .$

3. Au N -ième aller-retour, le système fermé considéré est les n_N moles de gaz contenues dans le volume V à la fin du $(N - 1)$ -ième aller-retour.



donc : $P_{N-1} \cdot V = P_N \cdot (V + V_0)$, donc $P_N = P_{N-1} \cdot \frac{V}{V + V_0}$,

soit : $P_N = P_0 \cdot \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^N .$

4. De la relation précédente, on déduit :

$$\ln \frac{P_N}{P_0} = N \cdot \ln \left(\frac{V}{V + V_0} \right), \quad \text{d'où} \quad N = \frac{\ln \frac{P_N}{P_0}}{\ln \left(\frac{V}{V + V_0} \right)} = 1\,385,$$

soit un temps $t = \frac{1\,385}{300} = 4,62 \text{ min}$ ou encore $t = 277 \text{ s}$.

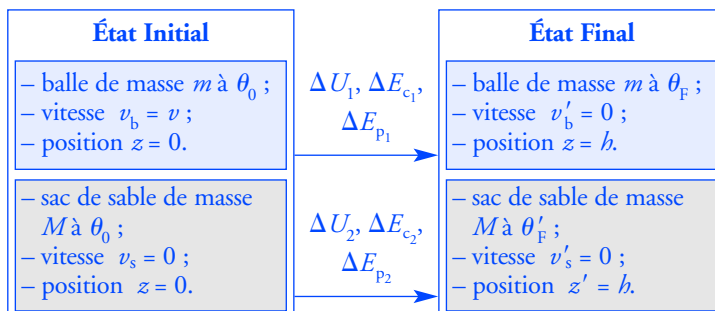
5. Arrêt d'une balle dans un sac de sable

1. Soit le système isolé {balle de masse m + sac de sable de masse M }.
 Nous avons des phases condensées parfaites dépendant du paramètre thermodynamique T . Il nous faut les paramètres position et vitesse pour décrire complètement le système.

Plaçons-nous dans le référentiel galiléen terrestre.

On choisit un repère vertical $(O ; \vec{k})$, orienté vers le haut. Les centres d'inertie de la balle et du sac sont à la même hauteur.

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide de masse m a pour expression $E_p(z) = m \cdot g \cdot z$, en choisissant $E_p = 0$ pour $z = 0$ (voir le chapitre 5).



La relation

$$P_N = P_0 \cdot \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^N$$

est vraie :

- pour $N = 1$;
- à l'ordre N , si elle est vraie à l'ordre $N - 1$.

Elle est donc vérifiée pour tout N (démonstration par récurrence).

La fréquence de rotation est N/t .

Les deux sous-systèmes sont des phases condensées parfaites en mouvement au cours de la transformation ; il nous faut les paramètres :

- température T ;
- position z ;
- vitesse V .

Le bilan énergétique nous permet d'obtenir la variation d'énergie interne du système (aspect microscopique) en fonction des variations d'énergie cinétique et potentielle (aspect macroscopique).

La température finale obtenue est supérieure à celle de fusion du plomb. On ne peut pas avoir du plomb solide à l'état final.

Le système {balle} échange du travail mécanique et du transfert thermique avec l'extérieur (le sac de sable, la terre). Nous cherchons la température finale du plomb, les autres paramètres étant connus ($z = h$ et $v'_b = 0$).

C'est le même type de calcul qu'à la question 2. de l'exercice 3.

Le bilan énergétique s'écrit :

$$\Delta E_{\text{totale}} = \Delta U_{\text{sys}} + \Delta E_{c_{\text{sys}}} + \Delta E_{p_{\text{sys}}}$$

$$\Delta E_{\text{totale}} = \Delta U_1 + \Delta E_{c_1} + \Delta E_{p_1} + \Delta U_2 + \Delta E_{c_2} + \Delta E_{p_2}$$

avec :

$$\Delta E_{c_1} = -\frac{1}{2} m \cdot V^2 ; \Delta E_{c_2} = 0 ; \Delta E_{p_1} = m \cdot g \cdot h ; \Delta E_{p_2} = M \cdot g \cdot h .$$

Il n'y a pas de force extérieure non conservative et il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur, donc : $\Delta E_{\text{tot}} = 0$.

$$\text{D'où : } \Delta U_{\text{sys}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = -\Delta E_{c_1} + \Delta E_{p_1} - \Delta E_{c_2} - \Delta E_{p_2}$$

$$\Delta U_{\text{sys}} = \frac{1}{2} m \cdot V^2 - (m + M) \cdot g \cdot h ;$$

$$\text{soit : } \Delta U_{\text{sys}} = 3,74 \text{ kJ}.$$

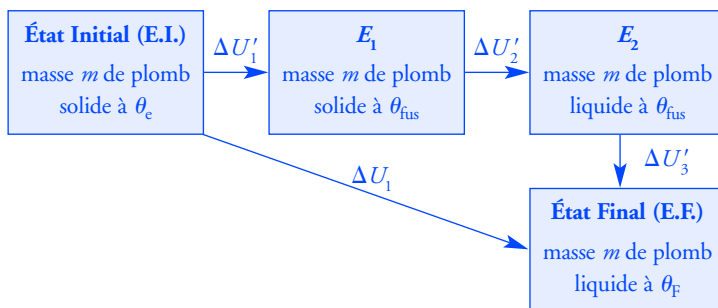
2. a. D'après l'énoncé :

$$\Delta U_1 = 0,80 \cdot \Delta U_{\text{sys}} = m \cdot c_s \cdot (\theta_F - \theta_c) ;$$

$$\text{d'où : } \theta_F = \frac{0,80 \cdot \Delta U_{\text{sys}}}{m \cdot c_s} + \theta_c .$$

Soit $\theta_F = 851^\circ\text{C}$. **L'hypothèse est fautive : la balle fond.**

Considérons la suite d'états thermodynamiques du système {balle} suivante :



La variation d'énergie interne s'écrit :

$$\Delta U_1 = \Delta U'_1 + \Delta U'_2 + \Delta U'_3 .$$

$$\Delta U'_1 = m \cdot c_s \cdot (T_{\text{fus}} - T_c) = m \cdot c_s \cdot (\theta_{\text{fus}} - \theta_c) ;$$

$$\Delta U'_2 = m \cdot L_f ;$$

$$\Delta U'_3 = m \cdot c_\ell \cdot (T_F - T_{\text{fus}}) = m \cdot c_\ell \cdot (\theta_F - \theta_{\text{fus}}) ;$$

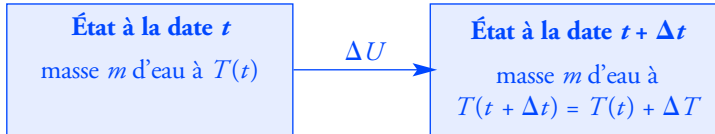
$$\text{d'où : } \theta_F = \frac{0,80 \cdot \Delta U_{\text{sys}} + m \cdot c_s \cdot \theta_{\text{fus}} - m \cdot L_f - m \cdot c_s \cdot (\theta_{\text{fus}} - \theta_c)}{m \cdot c_\ell} .$$

Soit :

$$\theta_F = 674^\circ\text{C}.$$

6. Calorimètre avec fuite thermique

1. a. Étudions le système \mathcal{S} entre les dates t et $t + \Delta t$.



L'énergie mécanique du système ne varie pas et le travail échangé avec l'extérieur est nul. Entre deux dates t et $t + \Delta t$, l'énergie interne varie de ΔU et le transfert thermique reçu (algébriquement) par le système est

$$\Delta U = \delta Q, \text{ soit : } \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\delta Q}{\Delta t}.$$

Pour Δt tendant vers 0, nous obtenons :

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{\text{th}} = -h \cdot [T(t) - T_e].$$

b. Dérivons par rapport au temps l'expression de l'énergie interne.

$$U(t) = m \cdot c \cdot T(t) + \text{cte};$$

$$\text{donc : } \frac{dU}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = -h \cdot [T(t) - T_e];$$

$$\text{d'où : } \tau \cdot \frac{dT}{dt} + (T - T_e) = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{m \cdot c}{h}.$$

$$\text{c. } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dT}{dt} \text{ puisque } T_e = \text{cte}; \text{ d'où } \tau \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\alpha(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La condition initiale $\theta(0) = T_0 - T_e$ permet de déterminer la constante A :

$$A = \alpha(0) = \theta_0 - \theta_e = 60^\circ \text{C}.$$

La solution est donc :

$$\alpha(t) = \alpha(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \alpha(0) = 60^\circ \text{C}.$$

$$\text{d. } \alpha(t_1) = 50 - 20 = 30^\circ \text{C} = \frac{\alpha(0)}{2} = \alpha(0) \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}}.$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{t_1}{\tau}, \text{ donc } \tau = \frac{t_1}{\ln 2};$$

$$\text{d'où : } h = \frac{m \cdot c \cdot \ln 2}{t_1} = 0,24 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Soit : } h = 0,24 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2. a. Considérons le système $\{\mathcal{S} + \text{résistance}\}$.

Entre les dates t et $t + \Delta t$, le bilan énergétique s'écrit :

$$\Delta U_{\text{sys}} = \Delta U_{\text{R}} + \Delta U = \delta W_{t \rightarrow t + \Delta t}^{\text{elec}} + \delta Q_{t \rightarrow t + \Delta t} \quad \text{avec } \Delta U_{\text{R}} = 0.$$

Par définition, la dérivée de la fonction $T(t)$ est définie par :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} = \dot{T}.$$

$$\alpha = T - T_e = \theta - \theta_e,$$

T est la température en K et θ la température en $^\circ \text{C}$.

Cette méthode simple permet de déterminer le coefficient h qui est le quotient d'une puissance par une différence de température.

Pour le système étudié, le milieu extérieur est constitué de l'air ambiant et du générateur électrique fournissant un travail électrique. Lors d'un bilan thermodynamique, il faut prendre en compte tous les échanges énergétiques ; dans ce cas, il s'agit de l'effet Joule (voir le *chapitre 8*).

Référez-vous à l'*annexe 3*.

Lorsque la température limite est atteinte, la puissance électrique fournie par le générateur est égale à la puissance thermique fournie par le système au milieu extérieur.

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\delta W_{t \rightarrow t + \Delta t}^{\text{elec}}}{\Delta t} + \frac{\delta Q}{\Delta t},$$

soit pour $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{\text{elec}} + \mathcal{P}_{\text{th}}.$$

b. On en déduit :

$$m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{V^2}{R} - h \cdot (T - T_c)$$

ou :

$$\frac{m \cdot c}{h} \cdot \frac{dT}{dt} + (T - T_c) = \frac{V^2}{h \cdot R}.$$

c. $\frac{m \cdot c}{h} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = \frac{V^2}{h \cdot R}$, qui est de la forme :

$$\tau \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = \alpha_{\infty} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m \cdot c}{h} \quad \text{et} \quad \alpha_{\infty} = \frac{V^2}{h \cdot R}.$$

Compte tenu de la condition initiale $\alpha(0) = 0$, la solution de cette équation différentielle est :

$$\alpha(t) = \alpha_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

d. *Application numérique* : $\alpha_{1h} = 21 \text{ }^{\circ}\text{C}$, soit $\theta_{1h} = 41 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Pour un temps « infini » c'est-à-dire environ 5τ , α tend vers $\alpha_{\infty} = 42 \text{ }^{\circ}\text{C}$; soit une température égale à : $\theta_{\infty} = 62 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

e. Pour atteindre l'ébullition de l'eau ($100 \text{ }^{\circ}\text{C}$), il faut que $\alpha_{\infty} = 80 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$V_{\min} = \sqrt{\alpha_{\infty} \cdot h \cdot R} = 14 \text{ V}.$$

7

Circuits électriques en courant continu

Ce qu'il faut savoir...

1. Tensions et courants

■ Un circuit électrique est constitué de dipôles (éléments du circuit comportant deux bornes). Le fonctionnement du circuit est caractérisé par l'intensité du courant traversant chaque dipôle et par la tension à leurs bornes. (doc. 1)

■ La tension U est mesurée avec un voltmètre comportant deux bornes marquées **V** (ou **+**) et **COM** (ou **-**).

Le voltmètre est branché en parallèle sur le dipôle.

La tension est égale à la différence de potentiel entre les bornes :

$$U = V_V - V_{\text{COM}}.$$

U est positive si $V_V > V_{\text{COM}}$.

On utilise une flèche pour repérer, sur un schéma, la tension aux bornes d'un dipôle.

Cette flèche représente, sur le schéma, le sens positif choisi pour la mesure de la tension.

Sur le document 1 : $U_1 = U_{AB} = V_A - V_B$;

$$U_2 = U_{BA} = V_B - V_A = -(V_A - V_B) = -U_{AB} = -U_1.$$

■ L'intensité du courant I est mesurée avec un ampèremètre comportant deux bornes marquées **A** (ou **+**) et **COM** (ou **-**).

L'ampèremètre est inséré dans le circuit, en série avec le dipôle.

La valeur donnée par l'appareil est positive si le courant entre par A et sort par COM.

On utilise une flèche pour repérer, sur un schéma, le courant traversant un dipôle.

Cette flèche représente, sur le schéma, le sens positif choisi pour la mesure de l'intensité du courant.

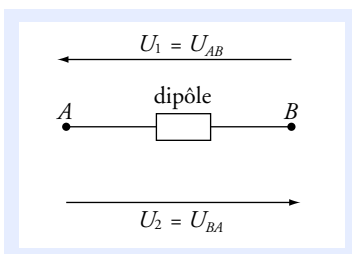
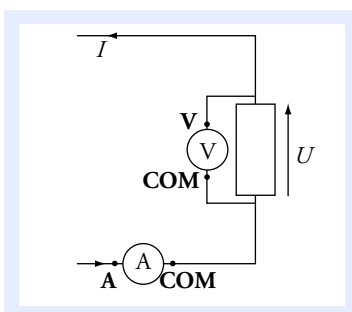
Sur le document 2 : $I_1 = I_{A \rightarrow B}$;

$$I_2 = I_{B \rightarrow A} = -I_{A \rightarrow B} = -I_1.$$

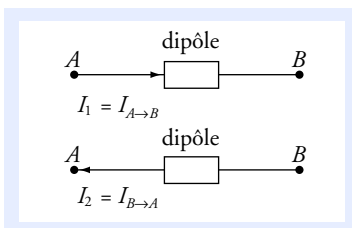
■ Dans le système international d'unités (S.I.), la tension se mesure en volt et l'intensité en ampère.

■ Les valeurs mesurées peuvent être positives ou négatives. Si un appareil est connecté dans l'autre sens, la valeur affichée a même valeur absolue, mais un signe opposé.

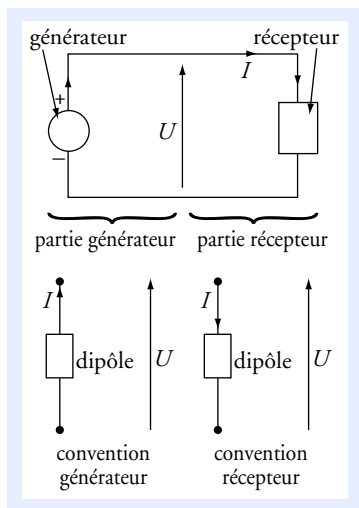
Faire une étude sur papier permet de prévoir comment le circuit va se comporter réellement. Ainsi on pourra réaliser le circuit sans risque de détériorer irréversiblement les composants.



Doc. 1 Représentation de la tension d'un dipôle.



Doc. 2 Représentation du courant traversant un dipôle.



Doc. 3

Les dipôles décrits ici sont des dipôles idéalisés, qui représentent une bonne approximation des composants réels.

Cette idéalisation permet de calculer simplement les tensions et les intensités des courants.

Observer soigneusement l'orientation du courant et celle de la tension avant d'écrire la loi d'Ohm.

Un dipôle est dit linéaire si sa caractéristique $I = f(U)$ est représentée par une droite **et une seule**.

Attention : il existe des dipôles non linéaires, par exemple une diode, (voir *exercices 7 et 8*).

La résistance ohmique et le générateur linéaire sont des dipôles linéaires.

2. Convention générateur et convention récepteur

Prenons un circuit simple du [document 3](#), composé d'un générateur connecté aux bornes d'un récepteur. Un courant I , d'intensité positive, circule de la borne $+$ vers la borne $-$ à l'extérieur du générateur.

Mesurons la tension U aux bornes du générateur (ou du récepteur) en branchant le voltmètre pour qu'elle soit positive.

Le circuit peut être vu comme deux parties connexes ([doc. 3](#)) :

- une partie « générateur » ;
- une partie « récepteur ».

On voit que du côté générateur les flèches U et I sont dans le même sens alors que du côté du récepteur, elles sont en sens contraire ([doc. 3](#)).

On a deux conventions pour orienter le courant qui traverse un dipôle et la tension à ses bornes :

- la **convention récepteur** où les flèches représentant U et I sont en sens contraire ;
- la **convention générateur** où les flèches représentant U et I sont dans le même sens.

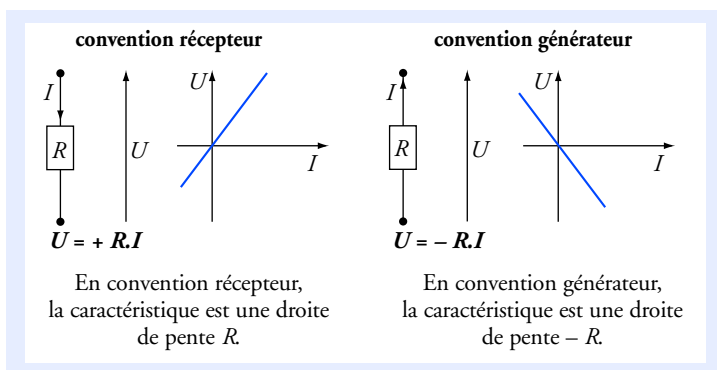
3. Caractéristiques des dipôles

■ Caractéristique intensité-tension

La **caractéristique** intensité-tension d'un dipôle, *pour une convention donnée*, est une représentation graphique qui à I associe $U = f(I)$, ou qui à U associe $I = f(U)$. Dans cet ouvrage, les représentations graphiques sont données dans un système de coordonnées où U est en ordonnée et I en abscisse.

■ Résistance ohmique (ou résistance)

Une résistance suit la loi d'Ohm si la tension et l'intensité du courant sont proportionnels ([doc. 4](#)).

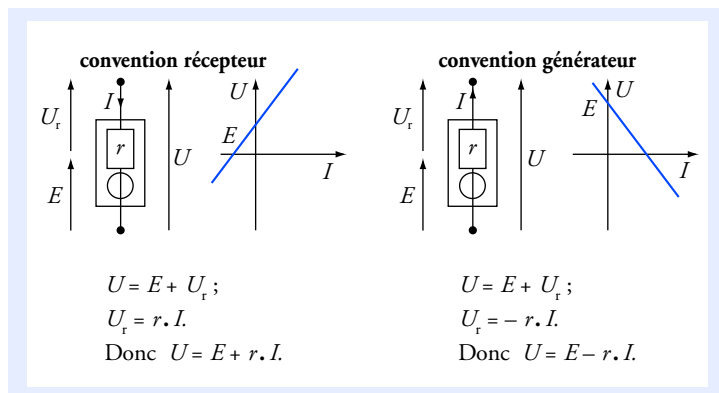


Doc. 4 Caractéristiques intensité-tension d'un conducteur ohmique.

Dans le système international, la résistance R se mesure en **ohm** (Ω).

■ Générateur linéaire de tension

Un générateur linéaire de tension peut être modélisé par l'association d'un conducteur ohmique de résistance r (résistance interne) et d'un élément qui impose une tension E à ses bornes (doc. 5). E est appelée la **force électromotrice** (f.é.m.) du générateur, elle se mesure en volt.



Doc. 5 Caractéristiques intensité-tension d'un générateur linéaire de tension.

■ Générateur idéal de tension

On peut parfois, en première approximation, négliger la résistance interne du générateur. Pour le générateur idéal de tension : $R = 0$.

Dans ce cas : $U = E$ quelque soit I (doc. 6).

■ Alimentation stabilisée

Ce type de générateur est utilisé dans de nombreux domaines. Il fournit une tension constante, comme un générateur idéal de tension, mais l'intensité du courant est limitée pour éviter une surintensité fatale aux composants (doc. 7). En convention générateur :

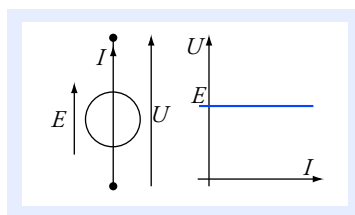
- $U = E$ si $I < I_0$;
- $I = I_0$ si $U < E$.

■ Récepteur ayant une force électromotrice

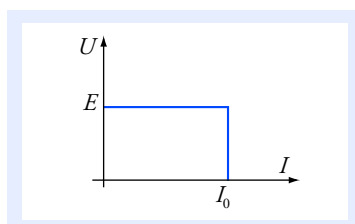
Un moteur électrique ou un électrolyseur peuvent être modélisés par un conducteur ohmique associé en série avec un générateur idéal de tension (doc. 8).

En convention récepteur : $U = E' + r \cdot I$ avec $E' > 0$ et $I > 0$.

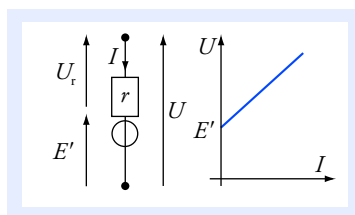
En règle générale, un générateur comporte deux bornes de sorties. Le conducteur ohmique de résistance interne et l'élément qui impose la tension ne sont pas accessibles de l'extérieur.



Doc. 6 Caractéristique intensité-tension d'un générateur idéal.



Doc. 7 Caractéristique d'une alimentation stabilisée.



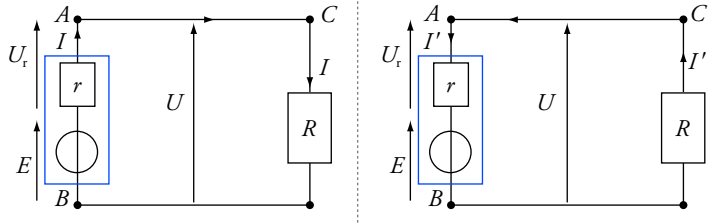
Doc. 8 Dipôle avec une force contre-électromotrice.

4. Utilisation des grandeurs électriques algébriques

Considérons un circuit simple et deux orientations différentes du courant.

Les orientations données à U et à I n'ont pas d'incidence sur les grandeurs réelles physiques.

Le sens réel du courant ne dépend pas de l'orientation choisie pour I .



- Côté générateur, on reconnaît une convention générateur :

$$U = E + U_r = E - r \cdot I.$$

- Côté récepteur, on reconnaît une convention récepteur :

$$U = R \cdot I.$$

$$\text{D'où : } I = + \frac{E}{R + r}.$$

- Côté générateur, on reconnaît une convention récepteur :

$$U = E + U_r = E + r \cdot I'.$$

- Côté récepteur, on reconnaît une convention générateur :

$$U = -R \cdot I'.$$

$$\text{D'où : } I' = - \frac{E}{R + r}.$$

Les deux conventions de calcul aboutissent aux mêmes conclusions physiques.

■ Conclusion

Si $E > 0$

- L'intensité I est positive et $I' = -I$ est négative. Le courant circule de A vers B à l'extérieur du dipôle de bornes A et B .
- U est positive.
- A est la borne + et B est la borne - du générateur.

Si $E < 0$

- L'intensité I est négative et $I' = -I$ est positive. Le courant circule de B vers A à l'extérieur du dipôle de bornes A et B .
- U est négative.
- A est la borne - et B est la borne + du générateur.

■ Règle

Pour l'étude d'un circuit électrique sur papier :

- on oriente arbitrairement chaque branche avec un sens positif du courant (I_1, I_2, I_3, \dots) ;

- on place les flèches tensions aux bornes des différents dipôles.

En pratique, on placera les tensions en convention récepteur pour les dipôles récepteurs.

Si dans le circuit un où plusieurs dipôles (polarisés) ne peuvent supporter qu'un courant dans un sens précis, l'étude sur papier permet de prévoir comment ce dipôle doit être monté dans le circuit.

Après calcul :

- Si on trouve $I > 0$, alors le courant circule dans le sens choisi.
- Si on trouve $I < 0$, alors le courant circule dans le sens inverse du sens choisi.
- Si on trouve $U > 0$, alors la borne + est au niveau de la pointe de la flèche et la borne - est au niveau de l'origine de la flèche.
- Si on trouve $U < 0$ alors la borne - est au niveau de la pointe de la flèche et la borne + est au niveau de l'origine de la flèche.

5. Loi des nœuds et loi des mailles

Ces lois permettent d'analyser un circuit plus complexe que la simple association d'un générateur et d'un récepteur.

■ Loi des nœuds

La somme des intensités des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités des courants partant de ce nœud.

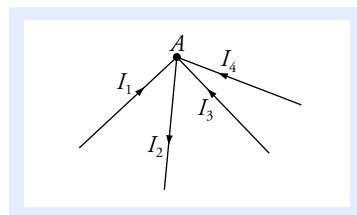
En pratique :

On ajoute les courants en affectant un signe plus à ceux qui entrent et un signe – à ceux qui sortent du nœud, cette somme est nulle.

Exemple :

Considérons la portion de circuit du [document 9](#) :

En A , on peut écrire : $I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$.



Doc. 9

■ Loi des mailles ou loi d'additivité des tensions

En considérant la maille du [document 10](#) :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0.$$

Soit : $-U_1 + U_2 + U_3 - U_4 = 0$.

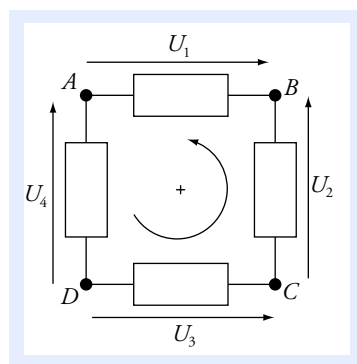
En pratique :

- On oriente arbitrairement la boucle.
- On place les flèches représentant les tensions aux bornes des dipôles.
- On ajoute les tensions en parcourant la boucle.

Si la flèche représentant la tension est dans le même sens que celui de l'orientation, alors on lui affecte le signe +.

Si la flèche représentant la tension est dans le sens contraire de l'orientation, alors on lui affecte le signe –.

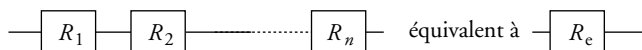
Cette somme est nulle quand on a parcouru toute la boucle.



Doc. 10

6. Associations de conducteurs ohmiques

■ Association en série



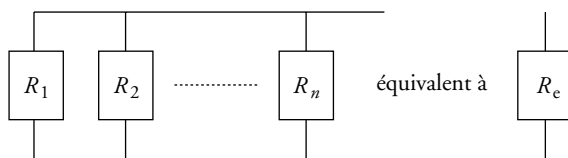
R_e est la résistance équivalente à l'association en série des résistances R_1 à R_n :

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

Dans une association en série, deux dipôles voisins ont une seule borne en commun.

C'est le même courant qui traverse tous les dipôles.

■ Association en parallèle



Dans une association en parallèle, tous les dipôles ont leurs deux bornes en commun.

On mesure la même tension aux bornes de tous les dipôles.

R_e est la résistance équivalente à l'association en parallèles des résistances R_1 à R_n :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

7. Puissance électrique

Il faut faire très attention à l'orientation utilisée.

La puissance reçue par un dipôle est l'opposée de la puissance fournie par ce même dipôle.

Dans un circuit électrique, la partie générateur fournit une puissance électrique à la partie récepteur qui la reçoit.

- La puissance échangée est égale à l'énergie échangée par unité de temps.

Dans le système international, l'énergie se mesure en **Joule (J)** et la puissance en **Watt (W)** : $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.

- En convention récepteur, si la puissance électrique $\mathcal{P} = U \cdot I$ est positive, elle représente la puissance absorbée par le dipôle.

L'énergie électrique absorbée est convertie en une autre forme d'énergie : énergie thermique dans un conducteur ohmique ou énergie mécanique dans un moteur.

- Un conducteur ohmique de résistance R reçoit une puissance :

$$\mathcal{P} = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}.$$

L'énergie reçue est convertie en énergie thermique ; c'est l'**effet Joule**.

- En convention générateur, si la puissance électrique $\mathcal{P} = U \cdot I$ est positive, elle représente la puissance fournie par le dipôle au reste du circuit.

L'énergie électrique peut avoir une source mécanique (alternateur ou dynamo) ou une source chimique (cas d'une pile ou d'un accumulateur).

Pour faire le point...

1. Diviseur de tension

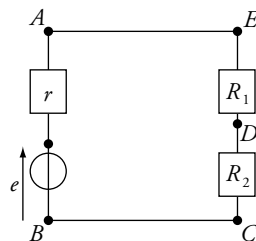
Soit le circuit représenté ci-contre :

Le dipôle de bornes A et B est un générateur de tension ayant une f.é.m. e et une résistance interne r , on lui associe deux conducteurs ohmiques de résistances R_1 et R_2 .

On note $U_2 = U_{DB} = V_D - V_C$ la tension aux bornes de R_2 ,

$U_1 = U_{ED} = V_E - V_D$ la tension aux bornes de R_1 et

$U = U_{AB} = V_A - V_B$ la tension aux bornes du générateur.



1. a. Comment sont montés les conducteurs ohmiques de résistances R_1 et R_2 ?

b. Comment est montée l'association de R_1 et R_2 avec le générateur ?

2. a. Déterminer U_1 en fonction de U , R_1 et R_2 .

b. Déterminer U_2 en fonction de U , R_1 et R_2 .

Les expressions de U_1 et U_2 conduisent à la formule du diviseur de tension.

Conseils

- Revoir les associations en série et en parallèle.
- L'énoncé ne mentionne pas le courant I ; on en a cependant besoin pour effectuer le calcul. Il faut donc le définir en l'orientant arbitrairement.
- Utiliser la loi des mailles.
- Faire attention aux orientations du courant et des tensions.

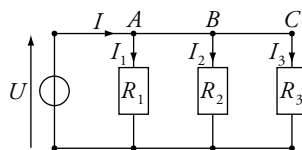
2. Diviseur de courant

Soit le circuit ci-contre, comportant trois conducteurs ohmiques en parallèle.

1. Établir l'expression de I_2 en fonction de R_1 , R_2 et I_1 .

2. Établir l'expression de I_3 en fonction de R_1 , R_3 et I_1 .

3. Déterminer les expressions de I_1 , I_2 , I_3 en fonction de I , R_1 , R_2 et R_3 .



Conseils

- Utiliser la loi des nœuds.
- On ne demande pas la tension U et pourtant il est nécessaire de l'utiliser pour faire le calcul.

3. Diviseur de tension avec une charge résistive

On reprend le diviseur de tension de l'exercice 1, mais on connecte en parallèle sur R_2 un conducteur ohmique de résistance R .

1. Faire le schéma du montage et placer les différents paramètres du circuit.

2. Déterminer U_2 en fonction de U , R , R_1 et R_2 . Dans quel cas retrouve-t-on la formule du diviseur de tension de l'exercice 1 ?

Conseils

- Penser à utiliser la résistance équivalente de l'association R_2 et R .
- Utiliser les résultats de l'exercice 1.

4. Pont de Wheatstone

Soit le circuit représenté ci-contre.

E est la f.é.m. d'un générateur de tension idéal.

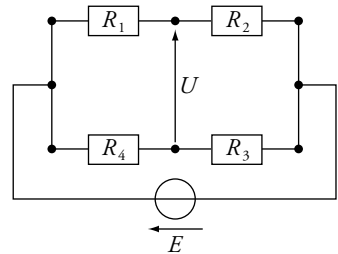
1. Déterminer la tension U en fonction de E , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

2. En déduire une condition sur R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour que $U = 0$.

3. On prend $R_2 = 10,0 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,00 \text{ k}\Omega$. On veut déterminer la valeur de la résistance R_1 inconnue, R_4 est une résistance variable. On ajuste R_4 jusqu'à obtenir $U \approx 0 \text{ V}$, dans ce cas $R_4 = 1,82 \text{ k}\Omega$. Déterminer R_1 .

Calculer U pour $R_1 = 18,0 \text{ k}\Omega$, puis pour $18,4 \text{ k}\Omega$.

Donnée : $E = 10,0 \text{ V}$.



Conseils

- La tension U n'est pas définie aux bornes d'un dipôle. Il faut donc la déterminer à partir d'autres tensions en utilisant la loi d'additivité des tensions.
- Il sera peut-être nécessaire d'utiliser dans les calculs des courants et des tensions non cités dans l'énoncé.
- Faire attention aux orientations choisies.

Pour s'entraîner...

5. Circuit avec plusieurs boucles et plusieurs nœuds

On donne le circuit ci-contre.

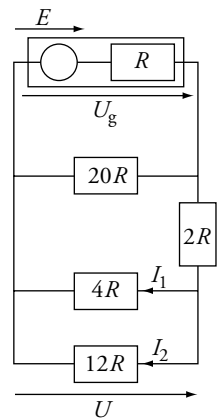
1. Donner l'expression du courant I délivré par le générateur en fonction de E et R . En déduire la tension U_g aux bornes du générateur.

2. Donner l'expression de U en fonction de E .

3. En déduire les courants I_1 et I_2 , en fonction de E et R , traversant les conducteurs ohmiques de résistances $4R$ et $12R$.

Conseils

- Utiliser les équivalences pour les conducteurs ohmiques en série et en parallèle.
- Se poser la question : quelles informations perd-on en réduisant le circuit ?
- Utiliser le diviseur de tension, en veillant bien qu'il ne soit pas chargé.



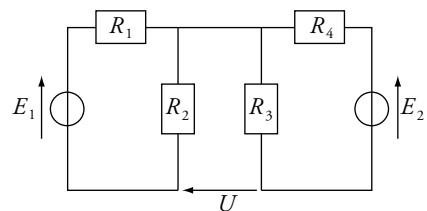
6. Circuit avec deux générateurs

Soit le circuit ci-contre.

E_1 et E_2 sont les f.é.m. de deux générateurs de tension.

1. Déterminer les tensions aux bornes de R_2 et de R_3 en fonction de E_1 , E_2 , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

2. En déduire U en fonction des mêmes données.



Conseils

- Le courant partant de la borne + d'un générateur est égal au courant arrivant à sa borne -.
- Peut-on appliquer la formule du diviseur de tension (voir l'exercice 1) ?
- Utiliser la loi d'additivité des tensions.

7. Alimentation stabilisée, point de fonctionnement

Une alimentation stabilisée est réglée à $E = 10 \text{ V}$ (tension à vide) et limitée en courant à $I_0 = 0,2 \text{ A}$.

1. Tracer la caractéristique de cette alimentation en portant le courant I en abscisse et la tension U à ses bornes en ordonnée, en convention générateur.

Échelle : en abscisse : 10 cm pour 0,1 A ; en ordonnée : 1 cm pour 1 V.

2. On branche un conducteur ohmique aux bornes de l'alimentation.

a. Dans le cas où sa résistance est $R_1 = 100 \Omega$, tracer sur le même graphique la caractéristique de ce conducteur ohmique en convention récepteur. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux caractéristiques. À quoi correspond ce point ?

b. Mêmes questions si la résistance vaut $R_2 = 25 \Omega$.

3. En considérant les deux cas de fonctionnement de l'alimentation stabilisée, retrouver les résultats du 2.

Conseils

- Revoir les représentations graphiques des caractéristiques d'un conducteur ohmique et d'une alimentation stabilisée.
- Pour la question 3., commencer par faire une hypothèse sur le fonctionnement de l'alimentation pour déterminer la tension aux bornes de celle-ci et le courant traversant le circuit. Si la solution trouvée est contradictoire avec l'hypothèse, alors cette hypothèse est fautive et il faut envisager l'autre cas de fonctionnement.

8. Équations et caractéristique d'une diode

On considère le circuit ci-contre.

G est un générateur idéal de tension de f.é.m. $E > 0$.

Il est relié à un conducteur ohmique de résistance R en série avec une diode idéale.

Une diode idéale présente les propriétés suivantes :

- si elle laisse passer le courant, l'intensité I est nécessairement positive et la diode est équivalente à un interrupteur fermé (diode passante) ;
- si l'intensité I ne peut être positive, la diode ne laisse pas passer le courant ; elle est équivalente à un interrupteur ouvert et U_0 est négative (diode bloquée).

1. Le générateur est connecté pour que $U = E$. Identifier les bornes + et - de celui-ci. La diode laisse-t-elle passer le courant ? En déduire U_d et I en convention récepteur, en fonction de E et R .

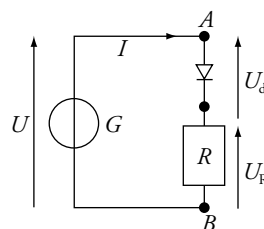
2. On inverse les bornes au niveau du générateur.

Quelle est l'expression de U en fonction de E ?

La diode laisse-t-elle passer le courant ?

En conservant la même orientation pour U_d et I , déterminer leurs expressions en fonction de E .

3. Tracer la représentation graphique de la caractéristique de la diode en convention récepteur. En déduire les équations correspondantes. La diode est-elle un dipôle linéaire ?



Conseils

- Attention à l'orientation prise pour U .
- Faire le schéma équivalent suivant le cas étudié.
- Pour la caractéristique, on cherche U_d en fonction de I et non U .

9. Montage adapté

Soit un générateur de tension de bornes A et B de f.é.m. E et de résistance interne r . On lui associe un conducteur ohmique de résistance R variable et on mesure la tension U à ses bornes avec un voltmètre électronique. Le courant qui traverse le voltmètre est négligeable.

1.a. On enlève la résistance variable R . Que mesure le voltmètre ?

b. On replace R , pour quelle valeur de R a-t-on $U = \frac{E}{2}$?

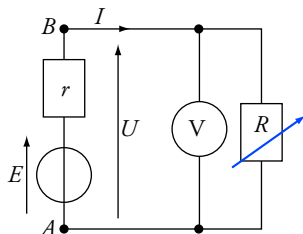
2.a. Exprimer la puissance \mathcal{P} reçue par le conducteur ohmique de résistance R .

b. Exprimer \mathcal{P} en fonction de E , r et R . Pour quelle valeur de R , la puissance est-elle maximale ?

c. Déterminer l'expression de l'efficacité η du montage, sachant que la puissance utile est celle reçue par le conducteur ohmique de résistance R . Discuter suivant les valeurs de R .

On peut définir le *rendement* ou efficacité η par : $\eta = \frac{\text{ce que je gagne}}{\text{ce que je paye}}$.

Ce que je gagne est la puissance utile, *ce que je paye* est la puissance fournie par le générateur idéal de f.é.m. E .



Conseils

- Quel est l'ordre de grandeur de la résistance interne d'un voltmètre électronique.
- Se rappeler qu'une fonction présente un extremum quand sa dérivée s'annule.
- Étudier η et \mathcal{P} en fonction de R pour conclure.

10. Bilan de puissance pour un moteur

Un générateur de f.é.m. $E = 70,0 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 1,00 \Omega$ est connecté à un moteur de f.é.m. E' et de résistance interne r' en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 10,0 \Omega$ plongeant dans un calorimètre.

1. Déterminer en fonction de E' , r' et du courant I qui traverse le moteur la puissance totale dissipée par le moteur ainsi que la puissance dissipée par effet Joule. En déduire l'expression de la puissance convertie en puissance mécanique \mathcal{P}_m . On orientera la f.é.m. E' dans le sens opposé à celui de l'intensité I .

2.a. Le moteur est bloqué, la puissance électrique convertie en puissance mécanique est nulle. On mesure un transfert thermique, au niveau du calorimètre, $Q_1 = 15,00 \text{ kJ}$ en une minute. Calculer r' .

b. Le moteur fonctionne. Le transfert thermique n'est plus que de $Q_2 = 1,50 \text{ kJ}$ en une minute. Calculer E' .

3. On enlève le conducteur ohmique de résistance R .

a. Déterminer l'expression du rendement η_1 du moteur.

b. Le moteur est connecté au générateur précédent. Déterminer le point de fonctionnement du circuit.

c. Calculer le rendement η_1 du moteur, puis le rendement η_2 pour le circuit complet.

Conseils

- Faire le schéma du circuit.
- La puissance électrique reçue par une résistance est transformée en transfert thermique par unité de temps.
- Bien définir le rendement pour le problème posé ; voir l'exercice 9.
- La puissance dissipée dans la résistance r est fournie par le générateur idéal E , mais n'est pas utile pour le fonctionnement du moteur.

Solutions...

1. Diviseur de tension

1. a. R_1 et R_2 ont une seule borne en commun, il s'agit donc d'un montage en série.

b. L'ensemble (R_1, R_2) forme le dipôle de bornes C et E , dont chacune des bornes est reliée à celles du générateur. Le dipôle (R_1, R_2) et le générateur sont donc montés en parallèle.

2. • Prenons un sens d'orientation du courant circulant dans le circuit, par exemple A, E, D, C, B, A .

• Plaçons les tensions U, U_1, U_2 et U_r .

• Prenons le sens inverse des aiguilles d'une montre pour appliquer la loi des mailles :

$$U_1 + U_2 - U = 0.$$

$$U_1 = R_1 \cdot I \text{ (loi d'Ohm en convention récepteur)} \text{ et } U_2 = R_2 \cdot I.$$

$$\text{D'où : } R_1 \cdot I + R_2 \cdot I - U = 0, \text{ donc } I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

En remplaçant I dans les expressions de U_1 et U_2 on obtient :

$$\text{a. } U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U; \quad \text{b. } U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U.$$

2. Diviseur de courant

Les points A, B, C sont au même potentiel et constituent un nœud. En appliquant la loi des nœuds en A , on a : $I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

1. En utilisant la loi d'Ohm, on obtient :

$$U = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2, \text{ d'où } I_2 = \frac{R_1}{R_2} \cdot I_1.$$

$$2. \text{ De même : } U = R_1 \cdot I_1 = R_3 \cdot I_3, \text{ d'où } I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \cdot I_1.$$

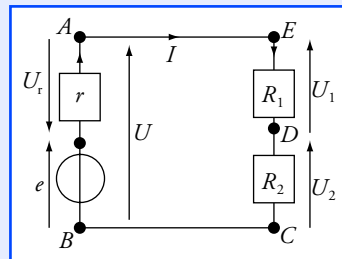
3. En remplaçant I_2 et I_3 par leurs expressions dans la loi des nœuds, on obtient :

$$I_1 \cdot \left(\frac{R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right) = I_1 \cdot R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = I;$$

$$\text{d'où } I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} I.$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$I_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot I \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot I.$$



U_1, U_2 et U_r sont en convention récepteur. U est en convention récepteur vu du dipôle de bornes C et E et en convention générateur vu du dipôle de bornes A et B .

Si l'on prend le sens inverse des aiguilles d'une montre, la loi des mailles donne :

$$-U_1 - U_2 + U = 0.$$

Le résultat est le même.

La généralisation de la relation obtenue constitue la formule du diviseur de tension :

$$U_i = \frac{R_i}{\sum_i R_i} U;$$

U étant la tension aux bornes d'un ensemble de conducteurs ohmiques en série de valeurs R_i , et U_i la tension aux bornes de l'un d'entre eux.

La tension U est commune à R_1, R_2 et R_3 .

On utilise U comme paramètre intermédiaire pour exprimer I_2 et I_3 en fonction de I_1 . Ainsi, on obtient la loi des nœuds en fonction, uniquement, de I_1 et I .

Connaissant I_1 , il suffit d'utiliser les relations entre I_1 et I_2 d'une part, entre I_1 et I_3 d'autre part, pour obtenir les expressions des deux autres courants.

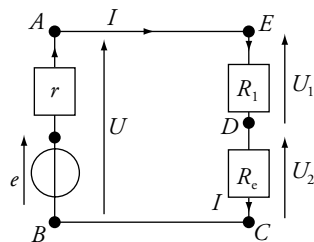
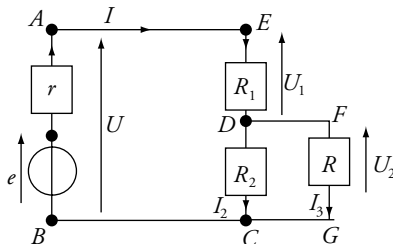
Il y a dans ce circuit trois intensités inconnues I_1 , I_2 et I . Une solution consisterait à écrire les trois équations obtenues à partir de deux lois de mailles ($AECB$ et $DCGF$) et une loi des nœuds en D , puis à résoudre ce système. Ici, on ne demande pas les courants traversant R_2 et R , mais seulement U_2 . On a tout intérêt à se ramener à une seule maille en remplaçant R_2 et R par une seule résistance équivalente.

On reconnaît le circuit de l'exercice 1. On peut donc appliquer le résultat trouvé en remplaçant R_2 par R_e .

On ne retrouve pas la formule du diviseur de tension de l'exercice 1, car la résistance R_2 est chargée par la résistance R en parallèle.

Si R est infinie alors on retrouve la formule du diviseur de tension. R n'existe plus, la résistance R_2 n'est plus chargée. Quand on applique cette formule, il faut faire attention qu'il n'y ait pas de charge sur le diviseur de tension.

3. Diviseur de tension avec une charge résistive



On a :
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} ; \text{ d'où } R_e = \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}.$$

$$U_2 = \frac{R_e \cdot U}{R_e + R_1} = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_e}} = \frac{U}{1 + \frac{R_1 \cdot (R_2 + R)}{R_2 \cdot R}} = \frac{R_2 \cdot U}{R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) + R_2}.$$

Si $R \rightarrow \infty$, on retrouve la formule du diviseur de tension.

4. Pont de Wheatstone

On paramètre le circuit comme indiqué sur le schéma ci-contre. On définit les courants I_1 et I_2 , ainsi que les tensions U_1 , U_2 , U_3 et U_4 qui nous seront utiles en tant qu'intermédiaires de calcul.

1. Dans la maille contenant (E , R_1 , R_2) parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$E - U_1 - U_2 = 0.$$

En appliquant la loi d'Ohm :

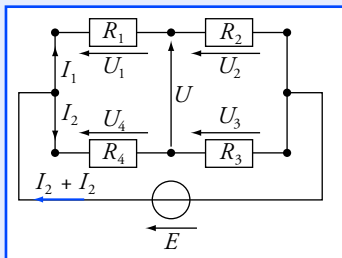
$$E = (R_1 + R_2) \cdot I_1, \text{ d'où } I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

De même dans la maille contenant (E , R_4 , R_3) parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$E - U_4 - U_3 = 0.$$

En appliquant la loi d'Ohm :

$$E = (R_3 + R_4) \cdot I_2, \text{ d'où } I_2 = \frac{E}{R_3 + R_4}.$$



En utilisant la loi d'additivité des tensions :

$$U = U_4 - U_1 = R_4 \cdot I_2 - R_1 \cdot I_1$$

$$U = E \cdot \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{R_2 \cdot R_4 - R_1 \cdot R_3}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)} \cdot E.$$

2. $U = 0$ si $R_2 \cdot R_4 = R_1 \cdot R_3$.

3. $R_1 = \frac{R_2}{R_3} \cdot R_4 = \frac{10}{1} \times 1,82 = 18,2 \text{ k}\Omega$.

Application numérique :

– pour $R_1 = 18 \text{ k}\Omega$: $U = + 2,53 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 25,3 \text{ mV}$;

– pour $R_1 = 18,4 \text{ k}\Omega$: $U = - 2,50 \cdot 10^{-2} \text{ V} = - 25,0 \text{ mV}$.

5. Circuit avec plusieurs boucles et plusieurs nœuds

1. On réduit le circuit à une seule boucle.

La résistance $4R$ est en parallèle avec celle de $12R$, d'où une résistance équivalente :

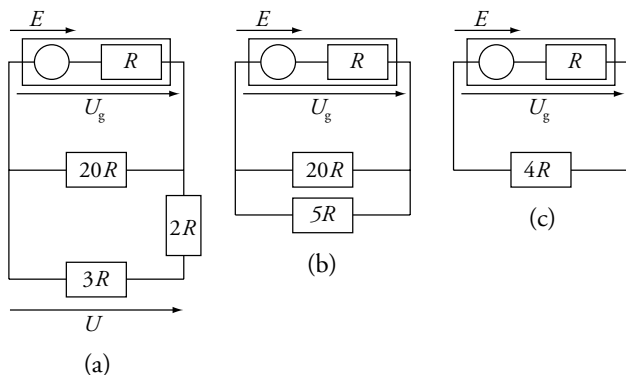
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{12R} = \frac{4}{12R} = \frac{1}{3R}, \text{ d'où } R_1 = 3R.$$

Cette résistance R_1 est en série avec la résistance $2R$, d'où une résistance équivalente :

$$R_2 = 3R + 2R = 5R.$$

Cette résistance R_2 est en parallèle avec la résistance $20R$, d'où une résistance équivalente :

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{5R} + \frac{1}{20R} = \frac{5}{20R} = \frac{1}{4R}, \text{ d'où } R_3 = 4R.$$



Le schéma (c) nous fournit : $U_g = E - RI = 4RI$, d'où :

$$I = \frac{E}{5R} \text{ et } U_g = \frac{4E}{5}.$$

Sur le schéma (a), on reconnaît un diviseur de tension :

$$U = \frac{3R \cdot U_g}{3R + 2R} = \frac{3}{5} U_g = \frac{12}{25} E.$$

C'est la condition d'équilibre du pont, elle correspond à l'égalité des produits en croix des résistances. On peut mesurer une résistance avec ce montage.

On pourrait, bien entendu, déterminer U par : $U = U_2 - U_3$.

La tension U change de signe lorsque R_1 varie autour de la valeur d'équilibre du pont.

Dans la question 1., on demande I et U_g . La tension U et les courants I_1 et I_2 ne nous intéressent pas pour l'instant. On peut se permettre cette perte d'information en réduisant le circuit à une seule boucle composée du générateur et du reste du circuit modélisé par une résistance équivalente.

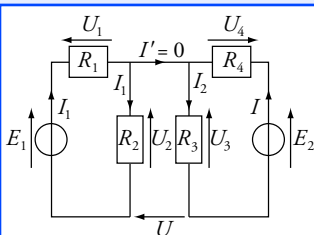
Remplacer $4R$ et $12R$ par $R_1 = 3R$, nous fait perdre I_1 et I_2 .
Remplacer $3R$ et $2R$ par $R_2 = 5R$, nous fait perdre U .

On peut utiliser le diviseur de tension en remarquant que la résistance R est en série avec la résistance $4R$, l'ensemble étant sous la tension E .

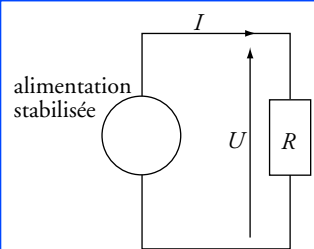
Les deux résistances $2R$ et $3R$ sont en série et sous la tension U_g . Elles ne sont pas chargées (aucun dipôle n'est connecté aux bornes de $3R$, il en est de même pour $2R$). La formule du diviseur de tension s'applique donc.

Seul le schéma de départ contient I_1 et I_2 .

Le courant arrivant et partant d'un générateur est le même. En utilisant la loi des nœuds, on trouve que le courant I' est dans ce cas nul.



On peut appliquer le diviseur de tension car les deux circuits considérés ne se chargent pas l'un sur l'autre (un seul fil de connexion entre les deux : $I' = 0$).



Pour R_1 , l'alimentation stabilisée se comporte comme un générateur idéal de tension $E = 10 \text{ V}$.

Pour R_2 , l'alimentation stabilisée se comporte comme un générateur délivrant un courant constant $I_0 = 100 \text{ mA}$ (on parle de générateur idéal de courant).

3. En utilisant le schéma de départ et la loi d'Ohm :

$$U = 4R \cdot I_1 = 12R \cdot I_2, \text{ d'où } I_1 = \frac{U}{4R} = \frac{3E}{25R} \text{ et } I_2 = \frac{U}{12R} = \frac{E}{25R}.$$

6. Circuit avec deux générateurs

1. Paramétrons le circuit.

Les deux mailles (E_1, U_1, U_2) et (E_2, U_4, U_3) sont indépendantes l'une de l'autre.

Sur la maille (E_1, U_1, U_2), on reconnaît un diviseur de tension :

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E_1.$$

De même, sur la maille (E_2, U_4, U_3), on obtient :

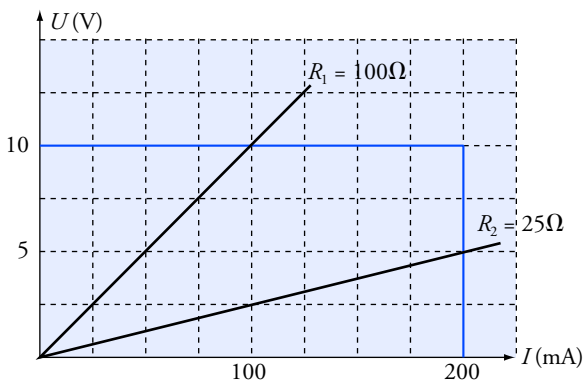
$$U_3 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot E_2.$$

2. En utilisant l'additivité des tensions, il vient :

$$U = U_3 - U_2 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot E_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E_1.$$

7. Alimentation stabilisée, point de fonctionnement

1., 2. a. et b.



En bleu, est tracée la caractéristique de l'alimentation stabilisée, en convention générateur. En noir, on superpose les caractéristiques des résistances en convention récepteur.

Pour R_1 , on en déduit que $I = 100 \text{ mA}$ et $U = 10 \text{ V}$.

Pour R_2 , on en déduit que $I = 200 \text{ mA}$ et $U = 5 \text{ V}$.

Ces valeurs correspondent au point de fonctionnement du circuit. Ce sont les valeurs des grandeurs caractéristiques U et I lorsque le générateur est connecté au conducteur ohmique.

3. Les équations caractéristiques de l'alimentation sont :

$$U = E \text{ si } I < I_0 \text{ ou } U < E \text{ si } I = I_0.$$

Prenons la première hypothèse : $U = E$. U est également la tension aux bornes du conducteur ohmique, qui est un dipôle linéaire tel que :

$$U = R \cdot I, \text{ donc } I = \frac{E}{R}.$$

• Pour $R = R_1 = 100 \, \Omega$: $I = 10/100 = 0,1 \, \text{A} = 100 \, \text{mA} < I_0 = 200 \, \text{mA}$; l'hypothèse est vraie. On en déduit que l'alimentation fonctionne en générateur idéal de tension : $U = 10 \, \text{V}$ et $I = 100 \, \text{mA}$.

• Pour $R = R_2 = 25 \, \Omega$, $I = 10/25 = 0,4 \, \text{A} > I_0 = 100 \, \text{mA}$; l'hypothèse est fautive, il faut donc considérer l'autre cas.

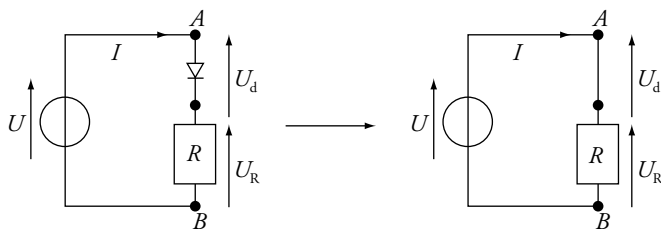
$$I = I_0 \text{ si } U < E.$$

De même $U = R \cdot I = 25 \times 0,2 = 5 \, \text{V}$; cette fois l'hypothèse est vraie, l'alimentation fonctionne comme un générateur délivrant un courant constant : $I = 200 \, \text{mA}$ et ainsi, $U = 5 \, \text{V}$.

Une alimentation stabilisée n'est pas un dipôle linéaire. C'est un *dipôle linéaire par morceau*. Il faut donc faire une hypothèse pour pouvoir écrire l'équation de sa caractéristique correspondant au mode de fonctionnement envisagé. Cette mise en équation permet de trouver le point de fonctionnement du circuit étudié.

8. Équations et caractéristique d'une diode

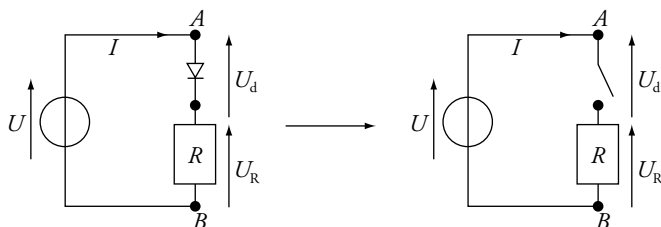
1. La borne + du générateur est au niveau de la pointe de la flèche représentant U . La diode laisse passer le courant, elle est équivalente à un interrupteur fermé.



Ainsi $U_d = 0$ et $U = E = R \cdot I$, d'où $I = \frac{E}{R} \geq 0$.

2. On inverse les bornes du générateur, donc $U = -E$.

Si nous supposons que la diode est passante, nous trouvons une intensité I négative, ce qui est impossible. La diode est donc bloquée et elle est équivalente à un interrupteur ouvert.



Cette fois, $I = 0$ et $U = -E = U_d \leq 0$.

On remplace la diode par son équivalent ; U_d est donc la tension aux bornes d'un interrupteur fermé. U_d et I sont en sens contraire, on est en convention récepteur.

La diode est bloquée, on la remplace par son équivalent. On a conservé la même orientation pour U_d et I .

Une diode n'est pas linéaire, la représentation de sa caractéristique n'est pas une *seule* droite, mais deux morceaux de droite. Elle est linéaire par morceau.

Pour traiter un problème comportant une diode, il faut faire une hypothèse pour pouvoir expliciter U et I . En fin de calcul, on vérifie si cette hypothèse est valide ou non.

La résistance interne d'un générateur de tension est généralement très inférieure à $10 \text{ M}\Omega$. Ainsi, on mesure facilement la valeur de E .

C'est la méthode de la charge adaptée utilisée ici pour déterminer la résistance interne du générateur (généralement inaccessible en tant que *composant*).

Cet extremum est un maximum. On peut chercher le signe de

$$\mathcal{P}' = \frac{d\mathcal{P}}{dR} :$$

$$- \text{pour } R = 0 : \mathcal{P}'(0) = \frac{1}{r^2} > 0 ;$$

$$- \text{pour } R = 2r :$$

$$\mathcal{P}'(2r) = -\frac{1}{27r^2} < 0.$$

$\mathcal{P}(R)$ est donc croissante, puis décroissante.

Dans le cas où $R \rightarrow \infty$, la puissance reçue est nulle. Ce qui est d'un intérêt plus que discutable !

Dans le cas où $R \rightarrow 0$, la puissance reçue est nulle (il n'y a plus de résistance), le rendement est nul.

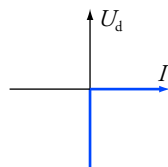
Attention : le générateur est alors en court-circuit !

Dans une résistance : la puissance électrique reçue est convertie en puissance thermique. C'est l'effet Joule.

3. Conclusion :

- La diode est passante si $U_d = 0$ et $I \geq 0$.
- La diode est bloquée si $I = 0$ et $U_d \leq 0$.

On obtient la représentation ci-contre.



9. Montage adapté

1. a. Il reste le générateur : $U = E - r \cdot I$.

$I = 0$, car le voltmètre électronique a une résistance très importante (typiquement $10 \text{ M}\Omega$).

D'où : $U = E$ (tension à vide).

b. En utilisant la loi des mailles $\left(E - r \cdot I = R \cdot I ; I = \frac{E}{r + R}\right)$ et la loi

d'Ohm aux bornes de R , ou mieux, en utilisant le diviseur de tension, il vient :

$$U = \frac{R}{r + R} \cdot E ;$$

$$U = \frac{E}{2}, \text{ soit } r + R = 2R ; \text{ d'où } R = r.$$

$$2. a. \mathcal{P} = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2 = \frac{R}{(r + R)^2} \cdot E^2.$$

b. La puissance \mathcal{P} apparaît comme une fonction de R , cette fonction présente un extremum si sa dérivée est nulle.

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{(r + R)^2 - 2R \cdot (r + R)}{(r + R)^4} = 0, \text{ d'où } r + R = 2R ; \text{ donc } R = r.$$

$$\text{La puissance maximale est donc : } \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4R}.$$

$$c. \eta = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} = \frac{R}{r + R} \text{ (ce que je gagne, c'est } \mathcal{P}, \text{ la puissance reçue par } R ;$$

ce que je paye, c'est la puissance fournie par E , la puissance dissipée par effet Joule dans r n'étant pas utilisée).

Pour $R = r$, $\eta = 0,5$ et la puissance est maximale.

L'efficacité est maximale si R tend vers l'infini, η tend vers 1.

Attention : une efficacité (rendement) maximale ne garantit pas une puissance disponible maximale et inversement.

10. Bilan de puissance pour un moteur

1. Raisonnons sur le schéma. La tension aux bornes du moteur est :

$$U_{\text{moteur}} = U_r + E' = r' \cdot I + E'.$$

La puissance totale dissipée par le moteur est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{moteur}} = U_{\text{moteur}} \cdot I = (r' \cdot I + E') \cdot I = r' \cdot I^2 + E' \cdot I.$$

La puissance dissipée sous forme thermique par la résistance r' (effet Joule) est :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = r' \cdot I^2.$$

Le bilan de puissance pour le moteur donne donc :

$$\mathcal{P}_{\text{moteur}} = \mathcal{P}_{\text{méca}} + \mathcal{P}_{\text{Joule}} ; \text{ on déduit } \mathcal{P}_{\text{méca}} = E' \cdot I.$$

2. a. La puissance joule dissipée au niveau de R nous permet de connaître le courant I dans le circuit.

$$\mathcal{P}_J = R \cdot I^2 = \frac{Q_1}{\Delta t}, \text{ d'où } I = \sqrt{\frac{Q_1}{R \cdot \Delta t}} = 5 \text{ A.}$$

Le moteur est bloqué, la puissance électromécanique ($E' \cdot I$) est donc nulle ; d'où $E' = 0$.

La loi des mailles nous donne :

$$E = r \cdot I + r' \cdot I + R \cdot I, \text{ d'où } r' = \frac{E}{I} - r - R = 3 \Omega.$$

b. De même :
$$I = \sqrt{\frac{Q_2}{R \cdot \Delta t}} = 1,58 \text{ A.}$$

La loi des mailles nous donne :

$$E = E' + r \cdot I + r' \cdot I + R \cdot I,$$

d'où :
$$E' = E - (r + r' + R) \cdot I = 47,9 \text{ V.}$$

3. a. Pour le moteur, *ce que l'on gagne*, vaut $E' \cdot I$ et *ce que l'on paye*, est égal à $(E' + r' \cdot I) \cdot I$ (tension aux bornes du moteur fois I).

D'où :
$$\eta_1 = \frac{E'}{E' + r' \cdot I}.$$

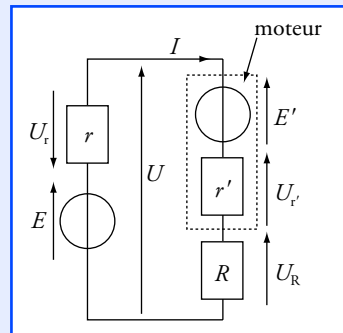
b. Cette fois : $E = E' + r \cdot I + r' \cdot I,$

d'où :
$$I = \frac{E - E'}{r + r'} = 5,52 \text{ A} \text{ et } U = E - r \cdot I = 64,5 \text{ V.}$$

c. Application numérique : $\eta_1 = 0,743$, soit 74,3 %.

Pour le circuit, *ce que l'on gagne*, vaut toujours $E' \cdot I$, mais *ce que l'on paye* vaut $E \cdot I$:

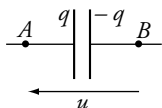
D'où :
$$\eta_2 = \frac{E'}{E} = 0,684, \text{ soit } 68,4 \text{ \%.}$$



La puissance électrique $E' \cdot I$ reçue, par le moteur, est convertie en puissance mécanique.

Pour faire fonctionner le moteur, *nous devons* lui fournir une puissance électrique $(E' + r' \cdot I) \cdot I$.

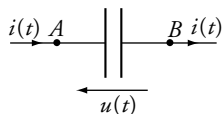
Cette fois, on s'intéresse au circuit dans son ensemble. *Ce que l'on paye* représente la puissance absorbée par le générateur pour le faire fonctionner, c'est-à-dire $E \cdot I$.



Doc. 1 Représentation conventionnelle d'un condensateur ; q est positive si u est positive.

Les condensateurs usuels ont des capacités très inférieures à 1 farad. On utilise en général le microfarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) ou le nanofarad ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$).

Les condensateurs électrochimiques ont une plus grande capacité mais celle-ci n'est pas constante et la tension u_{AB} doit toujours avoir le même signe.



Doc. 2 $i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$

avec les orientations de la figure.

Ce qu'il faut savoir...

1. Les condensateurs

■ Accumulation de charge électrique

Un condensateur est constitué de deux feuilles métalliques appelées *armatures* séparées par une mince couche d'isolant.

S'il existe une tension, ou différence de potentiel, entre les armatures, celles-ci accumulent de la charge électrique.

Cette accumulation s'explique par l'attraction réciproque des charges de signes opposés, présentes sur les deux armatures.

Les charges des deux armatures sont toujours opposées :

$$q_A = -q_B.$$

■ Capacité d'un condensateur

Pour un condensateur donné, les charges q_A et q_B sont proportionnelles à la tension entre les armatures. La capacité C du condensateur est définie par :

$$q_A = C \cdot u_{AB}.$$

Nous pouvons aussi écrire $q = C \cdot u$ si q représente la charge de l'armature située du côté de la flèche associée à la tension u ([doc. 1](#)).

Dans le système international d'unités (S.I.), la charge se mesure en coulomb, la tension en volt et la capacité en **farad (F)**.

■ Intensité en régime variable

Si la tension u_{AB} varie, les charges q_A et q_B dépendent du temps.

Orientons le courant comme sur le [document 2](#).

Par définition, l'intensité $i(t)$ est égale à la charge électrique arrivant en A par unité de temps.

La charge q_A augmente si $i(t)$ est positive et elle diminue si $i(t)$ est négative.

Si $i(t)$ est constante : $i = \frac{q_A(t + \Delta t) - q_A(t)}{\Delta t}.$

Si $i(t)$ dépend du temps, la relation précédente reste valable pour une durée Δt tendant vers 0 :

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_A(t + \Delta t) - q_A(t)}{\Delta t} = \frac{dq_A}{dt}.$$

Comme $q_A(t) = C \cdot u_{AB}(t)$, on peut écrire : $i(t) = C \cdot \frac{du_{AB}}{dt}.$

De la relation $q_B = -q_A$, on déduit : $i(t) = \frac{dq_A}{dt} = -\frac{dq_B}{dt}$.

Le même courant d'intensité $i(t) = C \cdot \frac{du_{AB}}{dt}$ arrive sur l'armature A

et sort de l'armature B .

Nous pouvons aussi écrire :

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

étant entendu que **les flèches associées à $u(t)$ et $i(t)$ sont de sens opposés (convention récepteur).**

2. Les bobines

■ Inductance d'une bobine

En régime variable, une bobine ne suit pas la loi d'Ohm :

$$u(t) = R \cdot i(t).$$

En convention récepteur, les flèches associées à $u(t)$ et $i(t)$ étant de sens opposés (doc. 3), la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine est liée à l'intensité $i(t)$ du courant qui la traverse par la loi :

$$u(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}.$$

r est la résistance de la bobine et L son **inductance**.

Dans le système international d'unités, la résistance s'exprime en ohm (Ω) et l'inductance en **henry (H)**.

■ Cas de la bobine idéale

Une bobine est dite idéale si sa résistance peut être négligée. Dans ce cas, nous pouvons écrire en convention récepteur :

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

■ Les résistances pures

Une résistance pure est un dipôle dont il est possible de négliger l'inductance. Elle suit la loi d'Ohm $u(t) = R \cdot i(t)$ même en régime variable.

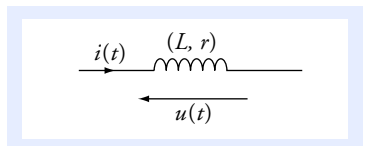
3. Charge et décharge d'un condensateur

Le circuit (doc. 4) est constitué d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E constante, d'un conducteur ohmique de résistance pure R et d'un condensateur de capacité C .

Pour éviter les erreurs sur le signe, nous pouvons le vérifier sur un cas particulier. Si $u(t)$ augmente :

- la dérivée $\frac{du}{dt}$ est positive ;
- q_A augmente, donc l'intensité $i(t)$ du courant arrivant en A est positive.

L'expression $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ est donc correcte.



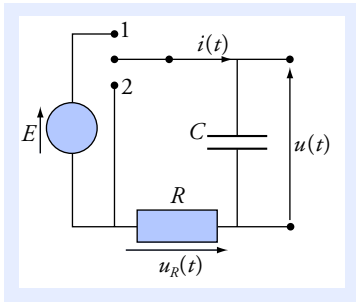
Doc. 3 Représentation conventionnelle d'une bobine. $u(t)$ et $i(t)$ sont orientés selon la convention récepteur.

Une bobine de 1 000 spires sans noyau de fer a une inductance de l'ordre de 10^{-2} H.

Avec un noyau de fer, on atteint des valeurs de l'ordre du henry.

Dans le cas particulier d'un courant constant, nous retrouvons la loi d'Ohm :

$$i \text{ constant, donc } \frac{di}{dt} = 0, \\ \text{d'où : } u = R \cdot i.$$



Doc. 4 Circuit d'étude de la charge et de la décharge d'un condensateur. Avec les orientations définies sur la figure :

$$i(t) = + C \cdot \frac{du}{dt} \text{ et } u_R(t) = R \cdot i(t).$$

■ Bilan d'énergie

Avec nos conventions d'orientation, le condensateur **reçoit** une puissance :

$$\mathcal{P} = u(t) \cdot i(t) = C \cdot u(t) \cdot \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} C \cdot u^2\right)}{dt}.$$

Cette puissance est égale à l'énergie par unité de temps reçue par le condensateur. Celui-ci accumule de l'énergie lorsqu'il se charge (si $|u|$ augmente) et il la restitue lorsqu'il se décharge. Notons \mathcal{E}_C cette énergie accumulée, qui est nulle lorsque le condensateur est déchargé ($u = 0$).

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} C \cdot u^2\right)}{dt}, \text{ d'où nous déduisons par intégration que}$$

l'énergie accumulée par un condensateur est :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot u^2.$$

Voir exercices n°s 2 et 7

■ Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

L'énergie accumulée \mathcal{E}_C est nécessairement une fonction continue du temps. Si l'énergie était discontinue, cela impliquerait un transfert d'énergie pendant une durée infiniment brève, donc une puissance infinie et une intensité infinie.

On en déduit, d'après la relation $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot u^2$ que **la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps.**

■ Étude de la charge

Le condensateur ayant été déchargé ($u = 0$), l'interrupteur est mis sur la position 1 à l'instant $t = 0$. En apportant un grand soin aux orientations, donc aux signes des expressions, nous pouvons écrire :

$$E = u_R(t) + u(t) \text{ (loi d'additivité des tensions) ;}$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad \text{et} \quad i(t) = + C \cdot \frac{du}{dt}.$$

• Nous en déduisons l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(t)$:

$$u(t) + R \cdot C \cdot \frac{du}{dt} = E.$$

Au bout d'un temps très long (théoriquement infini), le condensateur est chargé et $i = 0$. D'où : $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = E$.

La tension $u(t)$ étant une fonction continue, la solution doit vérifier la condition initiale : $u(0) = u(t < 0) = 0$.

- La solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale $u(0) = 0$ est (voir l'annexe 3) :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = R \cdot C. \quad (\text{doc. 5})$$

La durée $\tau = R \cdot C$ est la constante de temps du circuit. Bien que la durée théorique de la charge soit infinie, nous pouvons considérer que celle-ci est quasiment terminée au bout de quelques τ .

- L'intensité $i(t)$ se déduit de $u(t)$ par dérivation :

$$i(t) = + C \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Contrairement à la tension aux bornes du condensateur, l'intensité $i(t)$ peut être discontinue en $t = 0$.

■ Étude de la décharge

- L'interrupteur étant sur la position 1 depuis très longtemps, le condensateur est complètement chargé ($u = E$). L'interrupteur est basculé sur la position 2 à l'instant $t = 0$. Les équations deviennent :

$$E = u_R(t) + u(t); \quad u_R(t) = R \cdot i(t) \quad \text{et} \quad i(t) = + C \cdot \frac{du}{dt}.$$

- Nous en déduisons l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(t)$:

$$u(t) + R \cdot C \cdot \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad u(0) = E.$$

- La solution qui vérifie la condition initiale $u(0) = E$ est :

$$u(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = R \cdot C. \quad (\text{doc. 6})$$

- L'intensité $i(t)$ a pour expression : $i(t) = - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$

Comme la charge, la décharge est effective au bout de quelques τ .

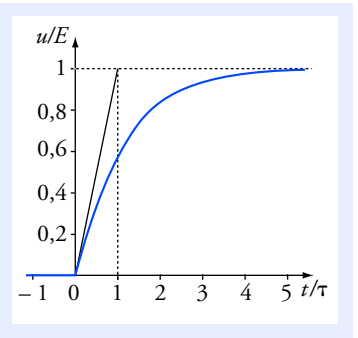
Pendant la charge, le condensateur a accumulé l'énergie $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot E^2$.

Cette énergie est intégralement dissipée dans la résistance pendant la décharge.

Voir exercice n° 3

4. Établissement et rupture du courant dans un circuit comportant une bobine

Le circuit (doc. 7) est constitué d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E constante, d'un conducteur ohmique de résistance pure r' et d'une bobine de résistance r et d'inductance L .



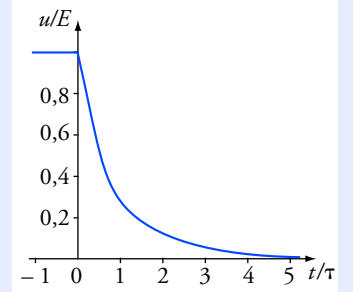
Doc. 5 Charge d'un condensateur.

La tangente à l'origine coupe l'asymptote pour $t = \tau$.

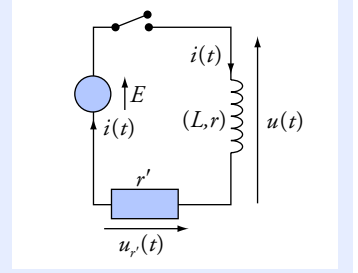
$u(\tau) = 0,632 E$; $u(2\tau) = 0,865 E$;
 $u(4\tau) = 0,982 E$; $u(6\tau) = 0,998 E$.

« très longtemps » signifie une durée grande devant τ .

Si $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, alors $\tau = 1 \text{ ms}$ et « très longtemps » signifie « $> 0,1 \text{ s}$ »



Doc. 6 Décharge d'un condensateur.



Doc. 7 Avec les orientations définies sur la figure :

$$u(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$$

et : $u_{r'}(t) = r' \cdot i(t).$

■ Bilan d'énergie

Avec les conventions d'orientation, la bobine reçoit une puissance :

$$\mathcal{P} = u(t) \cdot i(t) = \left(L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \right) \cdot i(t) = r \cdot i^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2} L \cdot i^2\right)}{dt}.$$

Le terme $r \cdot i^2$ correspond à l'énergie dissipée par la résistance de la bobine. L'autre terme correspond à une énergie accumulée par la bobine.

Notons \mathcal{E}_m l'énergie accumulée, qui est nulle lorsque l'intensité du courant est nulle ($i = 0$).

L'énergie reçue est égale à la somme de l'énergie dissipée par effet Joule et de l'énergie accumulée.

En termes de puissance (énergie échangée par unité de temps), ce bilan s'écrit :

$$\mathcal{P} = r \cdot i^2 + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} L \cdot i^2\right)}{dt}.$$

On en déduit que **l'énergie accumulée par une bobine est :**

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2.$$

Par définition, la puissance reçue est égale à l'énergie reçue (ou dissipée) par unité de temps :

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_i^{t+\Delta t}}{\Delta t} = \frac{dW}{dt},$$

avec $W_i^{t+\Delta t}$ = énergie reçue entre les dates t et $t + \Delta t$.

Ainsi, entre deux dates t_1 et t_2 :

• l'énergie dissipée est :

$$W_{\text{Joule}} = \int_{t_1}^{t_2} r \cdot i^2 dt;$$

• l'énergie reçue par le dipôle est :

$$W_{\text{reçue}} = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt;$$

• l'énergie accumulée est :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} dt.$$

■ Continuité de la fonction $i(t)$

L'énergie accumulée par une bobine est nécessairement une fonction continue du temps. Le raisonnement est identique à celui que nous avons fait à propos du condensateur : une discontinuité d'énergie se traduirait par une puissance échangée infinie et donc par un courant infini. **$i(t)$ est donc une fonction continue du temps.**

■ Établissement du courant

L'intensité du courant étant initialement nulle dans tout le circuit, l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

La loi d'additivité des tensions nous donne la relation :

$$E = u_{r'}(t) + u(t) = r' \cdot i(t) + r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt},$$

en posant $R = r' + r$: résistance totale du circuit.

L'intensité $i(t)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$E = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad i(t) + \tau \cdot \frac{di}{dt} = \frac{E}{R} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Au bout d'un temps très long (théoriquement infini), le courant est

établi : $\frac{di}{dt} = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R}$.

$i(t)$ étant une fonction continue, la valeur initiale est :

$$i(0) = i(t < 0) = 0.$$

La fonction qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale

est (voir l'annexe 3) : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ (doc. 8).

La durée $\tau = \frac{L}{R}$ est la constante de temps du circuit (R, L).

■ Rupture du courant

Si nous tentons d'étudier ce qui se produit lors de l'ouverture de l'interrupteur, nous nous trouvons confrontés à un paradoxe : l'ouverture

de l'interrupteur implique que i passe instantanément de la valeur $\frac{E}{R}$

à la valeur 0 ce qui est incompatible avec la continuité de $i(t)$. Nous ne pouvons qu'analyser qualitativement l'évolution des grandeurs $i(t)$ et $u(t)$.

L'ouverture de l'interrupteur n'est pas rigoureusement instantanée, mais très rapide ; $i(t)$ chute *très brusquement* ce qui se traduit par une

très grande valeur de $\left|\frac{di}{dt}\right|$ et donc par une tension $u(t)$ très grande.

Concrètement, cela se manifeste par une forte tension entre les contacts de l'interrupteur, susceptible de provoquer une étincelle.

Nous pouvons aussi analyser ces phénomènes du point de vue des échanges d'énergie. Pendant l'établissement du courant la bobine a

accumulé l'énergie $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \cdot \frac{E^2}{R^2}$. Cette énergie est dissipée pendant

la durée très brève de l'ouverture de l'interrupteur, d'où une grande valeur de la puissance et donc de la tension.

Voir exercices nos 1, 4 et 5

5. Circuit oscillant (R, L, C)

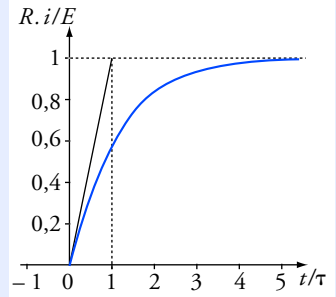
Nous étudions le circuit formé d'une résistance r' , d'une bobine de résistance r et d'inductance L et d'un condensateur de capacité C (doc. 9). L'interrupteur étant sur la position 1 depuis très longtemps, le condensateur est chargé sous une tension E et l'intensité $i(t)$ est nulle. Nous étudions l'évolution du circuit à partir du basculement de l'interrupteur sur la position 2 à la date $t = 0$.

Nous posons : $R = r + r'$, la résistance totale du circuit.

■ Équation différentielle

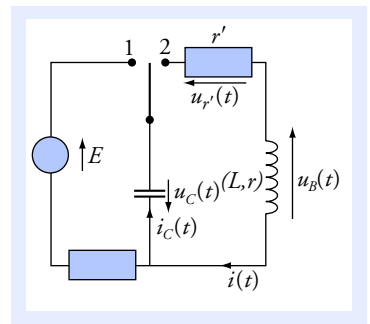
D'après la loi des mailles : $u_C(t) + u_B(t) + u_{r'}(t) = 0$;

soit : $u_C + r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + r' \cdot i(t) = u_C + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} = 0.$



Doc. 8 Établissement du courant dans un circuit (R, L).

L'inductance de la bobine est responsable d'un retard de l'ordre de quelques τ pour l'établissement du courant dans le circuit.



Doc. 9 Circuit (R, L, C).

Avec les orientations de la figure, on a :

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} ; \quad u_{r'}(t) = r' \cdot i(t)$$

$$u_B(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} ;$$

$$\text{d'où : } u_C(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0 ;$$

$$\text{ou encore : } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_C(t) = 0.$$

C'est l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u_C(t)$.

■ Résolution dans le cas idéal $R = 0$

$$\text{L'équation différentielle devient alors : } u_C(t) + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0.$$

Cette équation différentielle est identique à celle qui régit les oscillations d'un système masse-ressort (voir le *chapitre 4*). Sa solution est de la forme :

$$u_C(t) = u_m \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}} + \phi\right),$$

u_m et ϕ étant deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Dans le cas étudié, les conditions initiales sont :

$$u_C(0) = E \quad (\text{continuité de la tension } u_C) ;$$

$$i(0) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad (\text{continuité de l'intensité dans la bobine}).$$

$$\text{Donc } u_C(0) = E = U_0 \cos \phi \quad \text{et} \quad u'_C(0) = 0 = \frac{-U_0}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sin \phi.$$

De ces deux équations, nous tirons $U_0 = E$ et $\phi = 0$.

Après l'ouverture de l'interrupteur, $u_C(t)$ et $i(t)$ oscillent :

$$u_C(t) = E \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}}\right) ; \quad i(t) = -\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot E \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}}\right).$$

Cette solution est périodique, de période $T_0 = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$ (voir le *chapitre 4*). $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ est la **période propre** du circuit (L , C).

■ Étude énergétique dans le cas idéal $R = 0$

L'énergie accumulée dans le condensateur et dans la bobine est à chaque instant :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{C}{2} \cdot u_C^2(t) = \frac{C \cdot E^2}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}}\right)$$

$$\text{et : } \mathcal{E}_m(t) = \frac{L}{2} \cdot i^2(t) = \frac{C \cdot E^2}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}}\right).$$

$i(t)$ se déduit de $u_C(t)$ par

$$\text{dérivation : } i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}.$$

La conservation de l'énergie s'explique par l'absence de résistance. Dans un circuit électrique, c'est la résistance qui dissipe l'énergie.

Comme $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, l'énergie totale est constante :

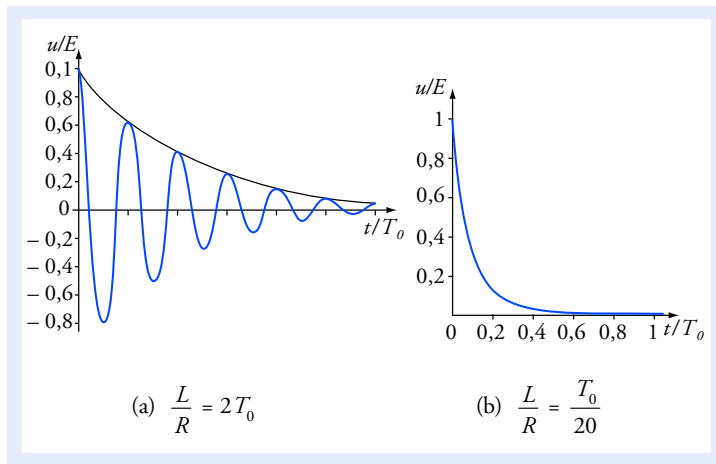
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_m = \frac{C \cdot E^2}{2}.$$

Au cours du temps, l'énergie est transférée de la bobine au condensateur et vice versa, l'énergie totale restant constante.

■ Oscillations amorties dans le cas $R \neq 0$

La résistance provoque une dissipation d'énergie et donc un amortissement. Si l'amortissement est faible, les oscillations sont pseudo périodiques (doc. 10 a). La pseudo-période est voisine de la période propre du circuit idéal sans résistance.

Si l'amortissement est élevé u_C tend vers 0 sans osciller (doc. 10 b).



Doc. 10 Tension aux bornes de la résistance dans deux cas : régime pseudo périodique (a) et régime apériodique (b).

Voir exercice n° 6

Plus précisément, on observe un régime pseudo périodique si :

$$\frac{L}{R} > 2\sqrt{L \cdot C} = \frac{T_0}{\pi}.$$

Le cas limite $\frac{L}{R} = 2\sqrt{L \cdot C}$ est celui

de l'amortissement critique.

Nous retrouvons le même type de solutions que pour l'étude des oscillateurs mécaniques (voir le chapitre 4).

On pourra se reporter à l'annexe 3 pour établir la solution des équations différentielles.

Pour faire le point...

1. Retard à l'établissement du courant

Un électroaimant se comporte comme une bobine d'inductance $L = 1,2 \text{ H}$ et de résistance $R = 10 \Omega$. On l'alimente avec un générateur continu de f.é.m. $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 2 \Omega$.

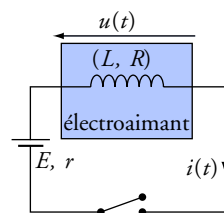
1. Quelle est la valeur finale i_∞ de l'intensité i ?

2. L'interrupteur est fermé à la date $t = 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $i(t)$. Donner sa solution.

Calculer la durée nécessaire pour que le courant atteigne 80 % de sa valeur maximale.

Que peut-on dire du temps de réponse de cet électroaimant ?

3. À l'ouverture de l'interrupteur, une étincelle se produit entre les contacts. Expliquer sans calcul.



Conseils

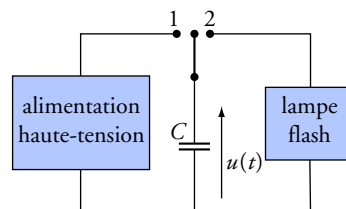
- Se souvenir que pour $t \rightarrow \infty$, les grandeurs électriques du circuit tendent vers une valeur constante.
- Ne pas oublier la résistance du générateur.
- Mettre l'équation différentielle sous la forme : $\tau \cdot \frac{di}{dt} + i(t) = i_\infty$.
- Quelle est la grandeur continue pour une bobine, $u(t)$ ou $i(t)$? On en déduit la valeur de $i(0)$.

2. Alimentation d'un flash

I. Un flash émet un éclair intense et bref : il consomme une énergie W de l'ordre de 10 joules pendant une durée Δt de l'ordre de 0,1 ms.

Quelle est l'ordre de grandeur de la puissance moyenne consommée pendant l'éclair ?

Est-ce réalisable avec une lampe directement alimentée par une pile de f.é.m égale à 6 V ?



II. On utilise en fait une alimentation « haute tension » qui, à partir de l'énergie débitée par la pile, produit une tension plus élevée de valeur $U_0 = 100 \text{ V}$.

Le condensateur est un condensateur électrochimique dont la capacité C est égale à 1 mF.

L'éclair se déclenche dès le basculement de l'interrupteur sur la position 2, et il cesse dès que la

tension u est tombée à une valeur $U_1 = \frac{U_0}{2}$.

Pendant l'éclair, la lampe est équivalente à une résistance R , et une fois l'éclair terminé aucun courant ne passe dans la lampe (R devient infinie).

1. Étude de la charge (l'interrupteur est sur la position 1)

On suppose que la pile débite un courant constant d'intensité constante $I_{\text{pile}} = 0,40 \text{ A}$ sous une tension constante $U_{\text{pile}} = 6,0 \text{ V}$ et que le rendement énergétique du circuit d'alimentation est de 83 %.

Calculer l'énergie accumulée par le condensateur lorsque sa tension atteint la valeur U_0 .

En déduire la durée de la charge :

- si le condensateur est initialement déchargé ;
- juste après un éclair.

2. Étude de la décharge (l'interrupteur est sur la position 2)

Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(t)$ pendant la durée de l'éclair. Donner sa solution littérale si l'interrupteur est basculé à la date $t = 0$. On supposera qu'à cette date, le condensateur est complètement chargé, soit $u(0) = U$.

Exprimer la durée Δt de l'éclair en fonction de R , C et $\ln 2$.

En déduire la valeur de R si $\Delta t = 0,10$ ms.

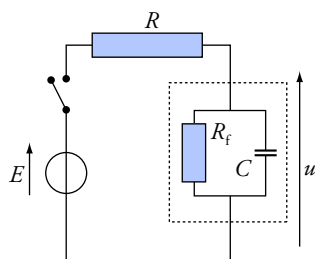
Conseils

- Quel est le lien entre puissance consommée et énergie consommée ?
- Revoir l'énergie accumulée par un condensateur. Bien poser le bilan d'énergie sans faute de signe :
énergie reçue = énergie finale – énergie initiale.
- Si $y = e^x$ alors $x = \ln y$.

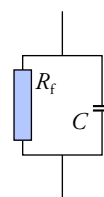
3. Résistance de fuite d'un condensateur réel

Un condensateur réel, chargé, puis laissé en circuit ouvert, se décharge lentement, en quelques minutes, ou plus s'il est de bonne qualité. Pour en rendre compte, on le modélise par un condensateur idéal de capacité C en parallèle sur sa *résistance de fuite* R_f ; cela permet de rendre compte du courant très faible qui passe d'une armature à l'autre à travers l'isolant.

On étudie le circuit représenté sur le schéma ci-dessous.



Circuit avec condensateur réel.



Modèle du condensateur réel.

1. On ferme l'interrupteur. Déterminer la valeur finale de la tension u , sans chercher à écrire d'équation différentielle. En donner une valeur approchée si $R_f \gg R$.

2. On ouvre l'interrupteur à la date $t = 0$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. En donner la solution.

3. La tension E est égale à 15 V et la capacité C est de

1,0 μF .

100 secondes après l'ouverture de l'interrupteur, la tension aux bornes de C vaut 10 V.

Déterminer R_f ainsi que la durée au bout de laquelle la tension sera tombée à 1,0 V.

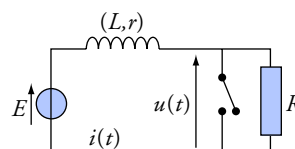
Conseils

- Quelle est la valeur finale de l'intensité dans la branche contenant la capacité idéale ?
- Quelle est la valeur de la tension u à la date $t = 0$?
- Si $y = e^x$ alors $x = \ln y$.

4. Surtension provoquée par l'ouverture d'un interrupteur

Une bobine d'inductance $L = 1,0$ H et de résistance $r = 100$ Ω est alimentée par un générateur de tension de f.é.m. $E = 12$ V et de résistance négligeable devant r .

Un conducteur ohmique de résistance R de 10 k Ω est monté en parallèle sur l'interrupteur.



1. Établissement du courant

L'interrupteur est fermé à la date $t = 0$.

1. Quelle est la valeur de l'intensité du courant dans la résistance R ?
2. Déterminer la valeur finale i_∞ de l'intensité $i(t)$, la valeur de la constante de temps τ du circuit et l'énergie accumulée par ce circuit au bout de 1 s.
3. On rappelle que $i(t) = i_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Comment détermine-t-on simplement la tangente à la courbe $i = f(t)$ en $t = 0$? Calculer sa pente. Tracer la courbe représentant la fonction $i(t)$.

2. Ouverture de l'interrupteur

Nous changeons pour simplifier l'origine des dates : l'interrupteur, fermé depuis longtemps, est ouvert à la date $t = 0$.

1. Calculer la nouvelle constante de temps τ_1 .
2. Quelles sont les valeurs finales $i_{\infty 1}$ et $u_{\infty 1}$ de l'intensité i et de la tension u pour $t \gg \tau_1$?
3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ et déterminer sa solution.
4. En déduire l'expression de la fonction $u(t)$. Quelle est la valeur maximale de u ? Commenter.

Conseils

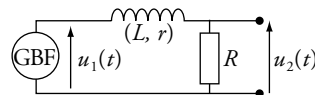
- Un interrupteur fermé est équivalent à un fil de résistance nulle : la tension à ses bornes est nulle.
- Voir l'étude énergétique du circuit (R , L).
- Voir l'annexe 3 pour la solution de l'équation différentielle.
- On rappelle que l'intensité du courant dans une bobine est une fonction continue du temps. Cela permet de déterminer la valeur initiale de $i(t)$.

Pour s'entraîner...

5. Lissage d'une tension en créneau

Le GBF (générateur de fonctions basse fréquence) délivre une tension en créneau $u_1(t)$ de période $T = 1,0$ ms.

$u_1 = 0$ pendant une demi-période, puis $u_1 = U_0 = 1$ V pendant la demi-période suivante et ainsi de suite.



Le circuit est constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance r et d'un conducteur ohmique de résistance R .

On mesure à l'oscilloscope les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$; les courbes obtenues sont représentées ci-après.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ pour chaque cas ($u_1 = 0$ et $u_1 = U_0$). Quelle est, dans les deux cas, la constante de temps τ du circuit ?
2. La situation représentée ici correspond au domaine de validité d'une approximation.

Est-ce $\frac{T}{2} \gg \tau$ ou $\frac{T}{2} \ll \tau$?

3. On constate que $u_2(t)$ reste voisine de sa valeur moyenne $\frac{U_0}{2}$. Exprimer une valeur approchée

de $\left| \frac{du_2}{dt} \right|$ en fonction de U_0 et τ , puis en fonction de Δu_2 et T .

En déduire l'amplitude crête à crête Δu_2 de $u_2(t)$ en fonction de τ , T et U_0 .

4. $R + r = 100 \, \Omega$ et la fréquence $f = \frac{1}{T}$ est toujours égale à 1,0 kHz.

Pour quelles valeurs de L , Δu_2 est-elle inférieure à 5 % de U_0 ?

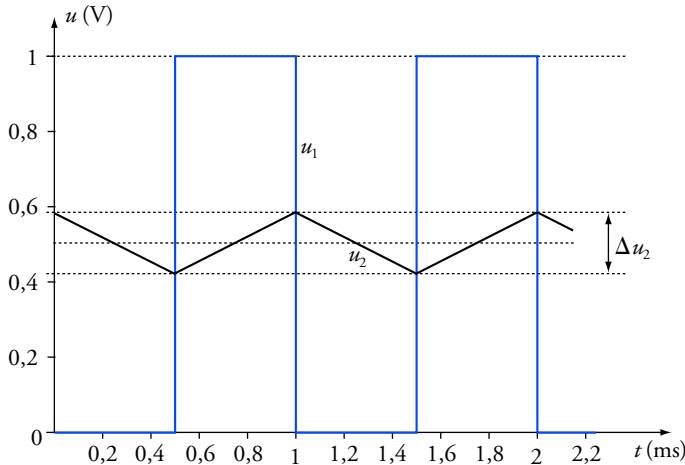
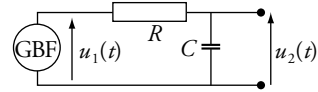
5. Il est possible d'arriver au même résultat avec un circuit (R , C).

Vérifier que l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ est identique.

Exprimer la nouvelle constante de temps.

Ce circuit est soumis à la même tension $u_1(t)$ que le précédent.

Si $R = 4,7 \, \text{k}\Omega$, pour quelles valeurs de C , Δu_2 est-elle inférieure à 5 % de U_0 ?



Remarque : La date initiale ne correspond pas à la fermeture d'un interrupteur. La situation décrite est établie depuis très longtemps.

Conseils

- Pour écrire l'équation différentielle en $u(t)$, il faut écrire des relations entre les tensions et l'intensité $i(t)$. Celle-ci n'étant pas précisée dans l'énoncé, commencer par refaire le schéma sur lequel on reportera toutes les grandeurs utilisées **avec leur orientation**.
- À la question 5., une fois connue la valeur de τ , il est inutile de reprendre tous les calculs : les deux circuits qui sont décrits par la même équation différentielle se comportent de la même façon.

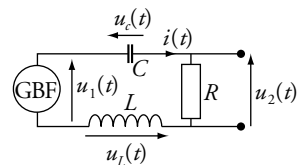
6. Réponse d'un circuit (R , L , C) à une tension en créneau

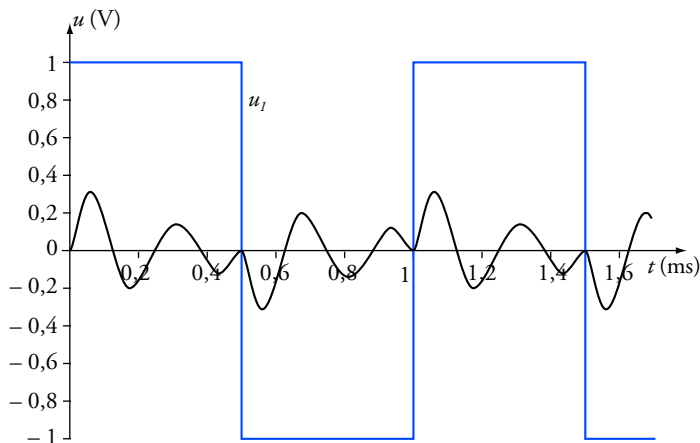
Le GBF délivre une tension en créneau $u_1(t)$ de période $T = 1,0 \, \text{ms}$.

$u_1 = U_0 = 1,0 \, \text{V}$ pendant une demi-période, puis

$u_1 = -U_0 = -1,0 \, \text{V}$ pendant la demi-période suivante et ainsi de suite. Le circuit est constitué d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable devant R et d'un condensateur de capacité C .

On mesure à l'oscilloscope les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$; les courbes obtenues sont représentées ci-après.





Remarque : La date initiale ne correspond pas à la fermeture d'un interrupteur. La situation décrite est établie depuis très longtemps.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ pour $u_1 = U_0$ et pour $u_1 = -U_0$. Quelle est, dans les deux cas, la période propre T_0 du circuit ?
2. Pourquoi $u_2(t)$ est-elle continue ? Comment qualifier le régime de $u_2(t)$ dans ce cas ? Estimer la valeur de l'inductance L si $C = 47 \text{ nF}$.

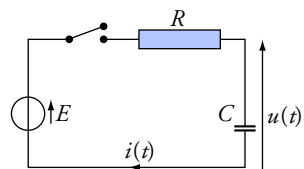
Conseil

Il faut établir l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$, aux bornes de R , et non celle de $u_c(t)$, comme dans le paragraphe 5 de Ce qu'il faut savoir. On y parviendra en dérivant la relation entre les tensions (loi des mailles).

7. Rendement énergétique de la charge d'un condensateur

On étudie la charge d'un condensateur avec un générateur de tension de f.é.m. constante E et de résistance négligeable. Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur à la date $t = 0$.

1. Rappeler les expressions de $u(t)$ et de $i(t)$.
2. Déterminer l'énergie \mathcal{E}_C reçue par le condensateur et l'énergie W_g cédée au circuit par le générateur.
3. Définir et calculer le rendement énergétique de la charge du condensateur. Où l'énergie perdue a-t-elle été dissipée ?



Conseils

- Quelle est l'expression de la puissance cédée par le générateur ?
- Quelle est la relation différentielle entre puissance et énergie ?

Solutions...

1. Retard à l'établissement du courant

1. Au bout d'un temps théoriquement infini, l'intensité $i(t)$ a acquis une valeur constante $\frac{di}{dt} = 0$ et l'étude du circuit se réduit à :

$$i_{\infty} = \frac{E}{R+r} ; \text{ soit } i_{\infty} = 1,0 \text{ A.}$$

2. Exprimons la tension aux bornes du générateur : $u(t) = E - r \cdot i(t)$.

La tension aux bornes de l'électroaimant est : $u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$;

en éliminant $u(t)$, on obtient : $E = (R+r) \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$

ou encore : $\tau \cdot \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R+r} = i_{\infty}$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.

La valeur initiale de i est $i(0) = i(t < 0) = 0$. La fonction $i(t)$ qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale est :

$$i(t) = \frac{E}{R+r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R+r} = 0,10 \text{ s.}$$

$i = 0,80 i_{\infty}$ si $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,80$, donc $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,20$;
d'où : $t = -\tau \cdot \ln 0,20 = 1,6 \tau$.

L'intensité atteint donc 80 % de sa valeur finale au bout de 0,16 s.
C'est l'ordre de grandeur du temps de réponse de l'électroaimant.

3. À l'ouverture de l'interrupteur, i chute très brusquement, donc $\left|\frac{di}{dt}\right|$

est très intense ; d'où une forte surtension aux bornes de la bobine et entre les contacts de l'interrupteur. On observe une *étincelle de rupture*.

2. Alimentation d'un flash

I. La puissance moyenne consommée est égale à l'énergie consommée

par unité de temps : $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{W}{\Delta t} = 10^5 \text{ W.}$

Avec une alimentation de 6 V, cela demanderait une intensité de l'ordre de $\mathcal{P}_{\text{moy}} / U$, soit environ 13 kA !

II. La pile fournit une puissance : $\mathcal{P}_{\text{pile}} = U_{\text{pile}} \cdot I_{\text{pile}} = 2,4 \text{ W.}$

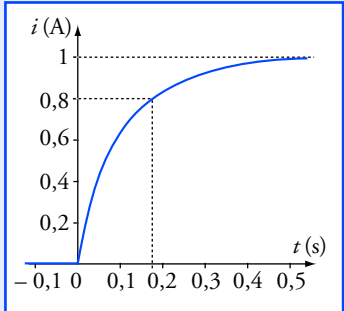
Avec un rendement de 83 %, la puissance fournie au condensateur est de 2,0 W, soit 2,0 joules par seconde.

L'énergie accumulée par le condensateur chargé est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = 10 \text{ J.}$$

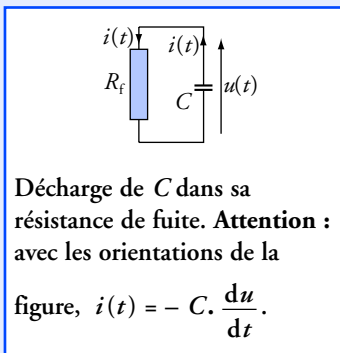
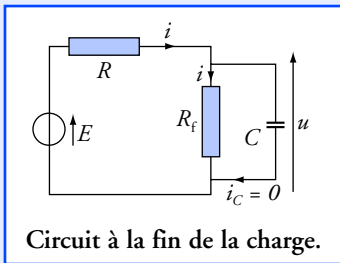
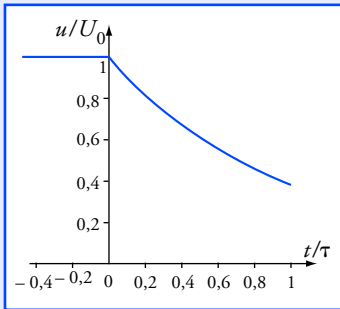
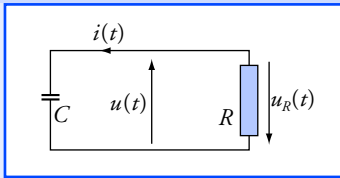
• Si le condensateur est initialement déchargé, il reçoit 10 joules à raison de 2 joules par seconde. **La charge dure donc 5,0 s.**

En fait i_{∞} est pratiquement atteinte après quelques τ .
Par exemple :
 $i = 0,99995 i_{\infty}$ au bout de 1 s.



La puissance n'étant pas constante pendant l'éclair, nous ne calculons pas une puissance instantanée mais une puissance moyenne.

On peut faire le parallèle avec la vitesse moyenne égale à la distance parcourue divisée par le temps de parcours.



• Juste après un éclair, $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot U_1^2 = 2,5 \text{ J}$. Le condensateur reçoit

$\Delta \mathcal{E}_C (10 - 2,5) = 7,5 \text{ J}$ à raison de 2 joules par seconde. **La charge dure donc 3,7 s.**

II.2. Pendant l'éclair, le circuit est équivalent à la décharge d'un condensateur dans une résistance R .

$$u(t) + u_R(t) = 0 \text{ (loi des mailles)} ; \quad u_R(t) = R \cdot i(t) \text{ et } i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}.$$

On en déduit l'équation différentielle : $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u(t) = 0$ avec $\tau = R \cdot C$.

Pour $t \rightarrow \infty$, $u(t)$ tend vers 0 ; la valeur initiale est $u(0) = U_0$.

La solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale

est :

$$u(t) = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right).$$

L'éclair s'arrête à la date $t = t_1$ définie par : $u(t_1) = U_1 = \frac{1}{2} U_0$.

Donc :

$$\frac{U_0}{2} = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right), \text{ soit } t_1 = R \cdot C \cdot \ln 2.$$

Or, t_1 représente la durée Δt de l'éclair ; donc :

$$\Delta t = R \cdot C \cdot \ln 2 = 0,69 R \cdot C.$$

D'où :

$$R = 0,28 \Omega.$$

3. Résistance de fuite d'un condensateur réel

1. À la fin de la charge (pour $t \rightarrow \infty$, soit $t \gg \tau$), la tension aux bornes du condensateur est constante et le courant qui le traverse est nul.

On a alors :

$$E = R \cdot i + R_f \cdot i, \text{ soit } I = \frac{E}{R_f + R} \text{ et } u = R_f \cdot i.$$

D'où :

$$u = E \cdot \frac{R_f}{R_f + R} = E \cdot \frac{1}{1 + R/R_f}.$$

Si $R_f \gg R$ (cas usuel), alors $u \approx E$.

2. Lorsque les deux interrupteurs sont ouverts, le circuit se réduit à la décharge du condensateur dans la résistance de fuite. Orientons le courant $i(t)$ comme sur le schéma représenté ci-contre ; les flèches associées à $u(t)$ et $i(t)$ étant dans le même sens, nous devons écrire pour le

condensateur :

$$i(t) = -C \cdot \frac{du}{dt}.$$

La résistance est vue en convention récepteur, donc : $u(t) = R_f \cdot i(t)$.

On en déduit l'équation différentielle :

$$\tau_f \cdot \frac{du}{dt} + u = 0 \text{ avec } \tau_f = R_f \cdot C.$$

Comme $u(0) = E$, nous obtenons : $u(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{R_f \cdot C}}.$

3. Pour $t = t_1 = 100 \text{ s}$: $u(t_1) = E \cdot e^{-\frac{t_1}{R_f C}}$ avec $u(t_1) = 10 \text{ V} = \frac{2}{3} E$.

$$\text{D'où : } -\frac{t_1}{R_f C} = \ln \frac{2}{3}, \text{ soit } t_1 = R_f C \cdot \ln \frac{3}{2} = 0,405 R_f C.$$

On en conclut que $R_f C = 247 \text{ s}$ et donc $R_f = 2,5 \cdot 10^8 \Omega$.

Cherchons la date t_2 pour laquelle $u(t) = 1 \text{ V} = \frac{E}{15}$:

$$\frac{1}{15} = e^{-\frac{t_2}{R_f C}}; \text{ d'où } t_2 = -R_f C \cdot \ln \frac{1}{15};$$

$$\text{soit : } t_2 = R_f C \cdot \ln 15 = 2,71 R_f C.$$

$$\text{On obtient : } t_2 = 6,7 \cdot 10^2 \text{ s.}$$

4. Surtension provoquée par l'ouverture d'un interrupteur

I.1. La tension aux bornes de l'interrupteur fermé est nulle. La tension aux bornes de R est nulle et donc le courant qui y circule a une intensité nulle.

2. Pour $t \rightarrow \infty$, $i \rightarrow i_\infty$ (constant) et $\frac{di}{dt} \rightarrow 0$.

$$\text{On a donc : } E = R \cdot i_\infty; \text{ soit } i_\infty = \frac{E}{r} = 2,0 \text{ A. } \tau = \frac{L}{r} = 10 \text{ ms.}$$

Après 1 s de fonctionnement, $i = i_\infty$ (presque) car $1 \text{ s} = 100 \tau$.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} L \cdot I_\infty^2, \text{ soit } \mathcal{E}_m = 2,0 \text{ J.}$$

3. $i(t)$ part de la valeur nulle pour $t = 0$ et tend vers i_∞ pour $t \rightarrow \infty$.

La pente de la tangente à l'origine est égale à $\frac{i_\infty}{\tau}$, soit $100 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$. La tan-

gente en O à la courbe $i(t)$ coupe l'asymptote en un point d'abscisse τ .

II.1. Une fois l'interrupteur ouvert la résistance totale du circuit est $R + r$.

$$\text{La nouvelle constante de temps est donc : } \tau_1 = \frac{L}{R + r} = 0,10 \text{ ms.}$$

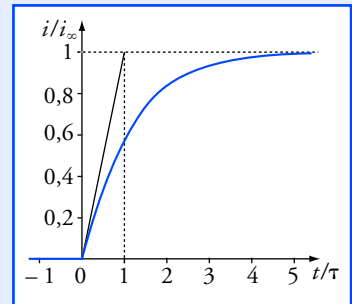
2. Pour $t \rightarrow \infty$, l'intensité tend vers une valeur constante $i_{\infty 1}$.

$$\text{Nous pouvons donc écrire : } E = R \cdot i_{\infty 1} + r \cdot i_{\infty 1}, \text{ soit } i_{\infty 1} = \frac{E}{R + r}.$$

$$\text{D'après la loi d'Ohm : } u_{\infty 1} = R \cdot i_{\infty 1}, \text{ soit } u_{\infty 1} = E \cdot \frac{R}{R + r}.$$

Application numérique : $i_{\infty 1} = 1,2 \text{ mA}$ et $u_{\infty 1} = 12 \text{ V}$.

$$3. E = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t), \text{ soit } \tau_1 \cdot \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R + r},$$



Juste après l'ouverture de l'interrupteur, la tension aux bornes de celui-ci est très supérieure à la tension de la source.

L'expérience est réalisable avec les valeurs données de L et R . Il faut prendre E de l'ordre de 100 mV pour pouvoir mesurer $u(t)$ à l'oscilloscope à mémoire.

Pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, la durée τ est trop brève pour pouvoir considérer que l'ouverture de l'interrupteur est instantanée. Le résultat obtenu ne correspond pas au calcul.

$i(t)$ étant une fonction continue, $i(0) = i(t < 0) = \frac{E}{r}$.

D'après la solution générale rappelée dans l'annexe 3 :

$$i(t) = \frac{E}{R+r} + \left(\frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{ou} \quad i(t) = \frac{E}{R+r} \cdot \left(1 + \frac{R}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

$$4. \quad u(t) = R \cdot i(t) \quad \text{soit} \quad u(t) = E \cdot \frac{R}{R+r} \cdot \left(1 + \frac{R}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

$$\text{Comme } R \gg r: \quad u(t) \approx E \cdot \left(1 + \frac{R}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

La valeur maximale de u est obtenue pour $t = 0$: $u_{\max} = 1,2 \text{ kV}$.

5. Lissage d'une tension en créneau

1. On oriente le courant d'intensité $i(t)$.

La loi d'additivité des tensions s'écrit : $u_1(t) = u_B(t) + u_2(t)$.

$$i(t) = \frac{u_2(t)}{R}, \quad \text{d'où} \quad u_B(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{r}{R} \cdot u_2(t).$$

$$\text{On en déduit :} \quad \frac{L}{R} \cdot \frac{du_2}{dt} + \left(\frac{r}{R} + 1 \right) \cdot u_2(t) = u_1(t).$$

$$\bullet \text{ Si } u_1 = 0 : \quad \tau \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+r}.$$

$$\bullet \text{ Si } u_1 = U_0 : \quad \tau \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{U_0 \cdot R}{R+r} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+r}.$$

2. Si $\tau \ll \frac{T}{2}$, $u_2(t)$ a le temps d'atteindre sa valeur asymptotique à chaque demi-période (voir la courbe ci-contre pour $T = 10 \tau$ et $R \gg r$).

Si $\tau \gg \frac{T}{2}$, il y a changement de régime alors que la solution $u_2(t)$

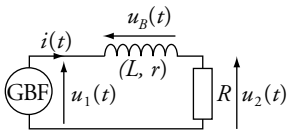
est très proche de ses conditions initiales. $u_2(t)$ est alors pratiquement confondue avec sa tangente à l'origine.

Le cas étudié correspond à l'approximation $\tau \gg \frac{T}{2}$.

3. D'après la courbe, $\left| \frac{du_2}{dt} \right|$ a la même valeur, constante, pour toutes les

demi-périodes. Considérons donc l'intervalle $0 < t < \frac{T}{2}$.

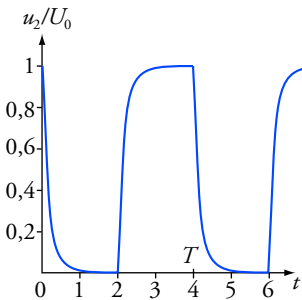
$$\text{D'après l'équation différentielle :} \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_2}{\tau}.$$



Avec les conventions d'orientation :

$$u_B(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i(t)$$

$$u_1(t) = R \cdot i(t)$$



Pour $T = 10 \tau$, $u_2(t)$ atteint presque son asymptote à chaque demi-période.

u_2 étant toujours voisine de $\frac{U_0}{2}$, $\frac{du_2}{dt}$ est pratiquement constante, soit :

$$\left| \frac{du_2}{dt} \right| = \frac{U_0}{2\tau}.$$

Par ailleurs, u_2 varie de Δu_2 pendant une demi-période : $\left| \frac{du_2}{dt} \right| = \frac{\Delta u_2}{\frac{T}{2}}.$

En égalant ces deux expressions, nous obtenons : $\Delta u_2 = \frac{U_0 \cdot T}{4\tau}.$

$$4. \Delta u_2 < \frac{5U_0}{100} \quad \text{si} \quad 4 \frac{\tau}{T} > 20, \quad \text{soit} \quad L > \frac{20(R + r)}{4f}.$$

Application numérique : $L > 0,50 \text{ H}$.

5. La loi des mailles se traduit par : $u_1(t) = u_R(t) + u_2(t).$

$$u_1(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2(t), \quad \text{soit} \quad u_1(t) = \tau \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2(t) \quad \text{avec} \quad \tau = R \cdot C.$$

Ce système est régi par les mêmes équations que le précédent. On en tire

donc les mêmes conclusions : $\Delta u_2 < \frac{5U_0}{100} \quad \text{si} \quad 4 \frac{R \cdot C}{T} > 20.$

Application numérique : $C > 1,1 \mu\text{F}$.

6. Réponse d'un circuit (R, L, C) à une tension en créneau

1. Avec les conventions d'orientation de la représentation du circuit :

$$u_1(t) = u_C(t) + u_2(t) + u_L(t)$$

$$\text{avec} \quad u_2 = R \cdot i(t); \quad i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Dérivons la première équation :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{du_C}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{du_L}{dt} = \frac{i(t)}{C} + \frac{du_2}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} \\ &= \frac{u_2(t)}{R \cdot C} + \frac{du_2}{dt} + \frac{L}{R} \cdot \frac{d^2 u_2}{dt^2}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u_2(t)$ est donc :

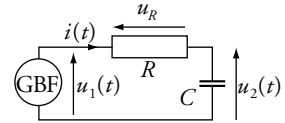
$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2(t) = \frac{R}{L} \cdot \frac{du_1}{dt}.$$

$$\frac{du_1}{dt} = 0 \quad \text{entre deux dates de discontinuité.}$$

Dans les deux cas, $u_2(t)$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2(t) = 0.$$

Si la résistance était nulle, la période propre serait $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}.$



Avec ces conventions
d'orientation :

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$\text{et} \quad i(t) = C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

La dérivée de $u_1(t)$ n'est pas définie aux dates où u_1 change de valeur. L'équation ne pourra se résoudre que par demi-période.

On note sur la courbe que u_2 est continue mais que sa dérivée est discontinue

Si $f'(t) = g'(t)$,
alors $f(t) = g(t) + \text{cte.}$

La constante se détermine à
partir des valeurs connues de
 $f(0)$ et $g(0)$.

Il est possible de calculer
directement l'énergie dissipée
par la résistance :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}}(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}}(t) = \frac{dW_d}{dt} ;$$

$$W_d = \int_{t=0}^{\infty} \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot dt.$$

Après calcul, nous trouvons
bien :

$$W_d = \frac{1}{2} C \cdot E^2.$$

2. L'intensité $i(t)$ est continue car le courant traverse une bobine.

$u_2(t) = R \cdot i(t)$ est donc également continue.

On observe un régime pseudo périodique dont la période est très voisine

de T_0 . D'après la courbe : $T_0 = \frac{1}{4} T = 0,25 \text{ ms.}$

On en déduit : $L = 34 \text{ mH.}$

7. Rendement énergétique de la charge d'un condensateur

1. C'est exactement la situation étudiée dans *Ce qu'il faut savoir*.

$$u(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = R \cdot C.$$

2. Le condensateur a accumulé une énergie : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot E^2.$

La tension aux bornes du générateur est égale à E . Le générateur a donc
cédé une puissance : $\mathcal{P}_g(t) = E \cdot i(t).$

Par définition :

$$\mathcal{P}_g = \frac{dW_g}{dt}.$$

$$\frac{dW_g}{dt} = E \cdot i(t) = E \cdot \frac{dq}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dW_g}{dt} = C \cdot E \cdot \frac{du}{dt}.$$

À la date $t = 0$, $u(0) = 0$ et l'énergie cédée par le générateur est encore
nulle. On en conclut que : $W_g = C \cdot E \cdot u_{\text{finale}}$, soit $W_g = C \cdot E^2.$

3. Le rendement, est défini par : $\rho = \frac{\text{énergie accumulée}}{\text{énergie dépensée}} ;$

donc :

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} C \cdot E^2}{C \cdot E^2}, \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

L'énergie manquante, égale à $\frac{1}{2} C \cdot E^2$ a été dissipée dans la résistance.

La résistance dissipe de la puissance par effet Joule.

9 Champ magnétique

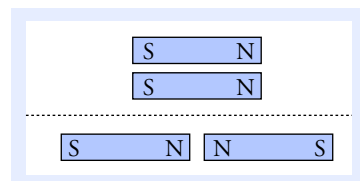
Ce qu'il faut savoir...

1. Interaction entre deux aimants

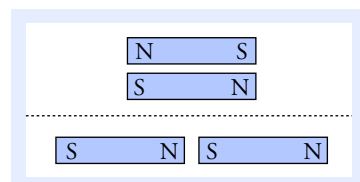
■ Chaque aimant a deux *pôles* conventionnellement appelés « pôle nord » et « pôle sud ».

■ Deux pôles de même nature se repoussent (doc. 1) et deux pôles de nature différente s'attirent (doc. 2).

■ Il n'est pas possible d'isoler un pôle nord ou un pôle sud ; si on coupe l'aimant en deux, chaque partie possède un pôle nord et un pôle sud.



Doc. 1 Dans les deux cas, les aimants se repoussent.



Doc. 2 Dans les deux cas, les deux aimants s'attirent.

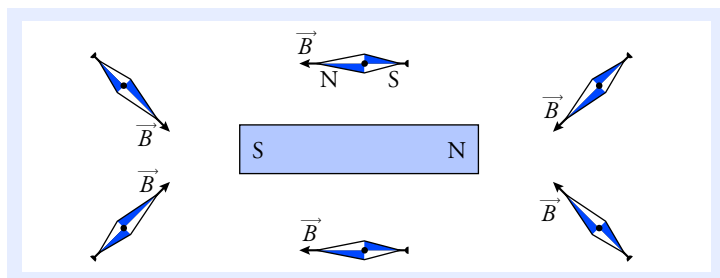
2. Vecteur champ magnétique

■ Une aiguille aimantée (un petit aimant mobile autour de son axe) placée près d'un aimant **s'oriente** spontanément selon une direction et un sens qui dépendent du point auquel elle est placée.

Interprétation

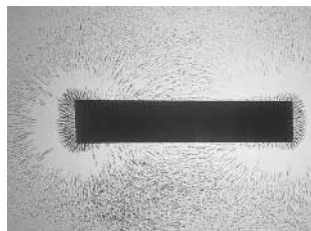
L'aimant crée en chaque point M un *vecteur champ magnétique* noté $\vec{B}(M)$ (doc. 3).

- La direction de $\vec{B}(M)$ est donnée par l'aiguille aimantée placée en M .
- Le sens de $\vec{B}(M)$ est tel que \vec{B} entre par le pôle sud de l'aiguille et sort par son pôle nord.
- La valeur ou norme de \vec{B} se manifeste par l'intensité des actions mécaniques qui tendent à orienter l'aiguille. $\|\vec{B}\|$ est le plus intense près des pôles de l'aimant.



Doc. 3 L'aimant crée en tout point un champ \vec{B} . Les aiguilles aimantées s'orientent comme le champ \vec{B} .

■ Un champ magnétique \vec{B} a également pour effet d'orienter les petites aiguilles de la limaille de fer. On peut ainsi visualiser les *lignes de champ*, qui sont les lignes tangentes au champ \vec{B} en tout point (doc. 4).



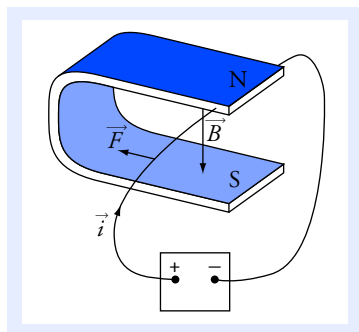
Doc. 4 La limaille de fer permet de visualiser les lignes de champ.

■ Le champ \vec{B} est plus intense dans les régions où les lignes de champ sont plus resserrées. Il est uniforme dans les régions où les lignes de champ sont parallèles.

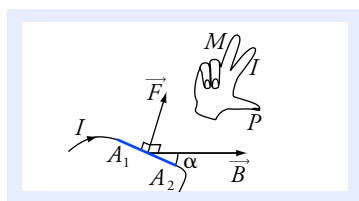
■ Le vecteur champ magnétique créé en un point par deux aimants est égal à la somme vectorielle des deux vecteurs champ magnétique créés en ce point par chaque aimant.

■ Dans le système international d'unités (S.I.), le champ magnétique s'exprime en **tesla (T)**.

Un champ uniforme a la même valeur et la même orientation en tout point du domaine considéré. C'est évidemment impossible à réaliser. Il faut simplement supposer que les variations de \vec{B} sont petites tout au long du tronçon de fil étudié.



Doc. 5 La portion de fil plongée dans le champ magnétique est soumise à la force de Laplace \vec{F} .



Doc. 6 Orientation de la force de Laplace.

3. Force exercée sur un fil parcouru par un courant

■ On observe avec les courants électriques des phénomènes magnétiques identiques à ceux que l'on obtient avec des aimants.

La force exercée par un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant est la **Force de Laplace**.

■ Considérons, dans un circuit électrique, le tronçon **rectiligne** de fil de longueur ℓ , compris entre les points A_1 et A_2 , soumis à un champ magnétique **uniforme** (doc. 5). Soit I l'intensité du courant dans ce fil, $\vec{\ell} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ le vecteur orienté dans le sens du courant et α l'angle entre \vec{B} et $\vec{\ell}$ (doc. 6).

La force de Laplace \vec{F} subie par le tronçon de fil présente les caractéristiques suivantes :

- **un point d'application** : elle est appliquée au milieu du segment $A_1 A_2$;
- **une direction** : elle est orthogonale au vecteur \vec{B} et au vecteur $\vec{\ell}$;
- **un sens** : $\vec{\ell}$, \vec{B} et \vec{F} forment un trièdre direct : leurs orientations respectives sont données par le pouce, l'index et le majeur de la main droite (doc. 6) ;
- **une valeur** (ou norme) : $\vec{F} = \|\vec{F}\| = I \cdot B \cdot \ell \cdot \sin \alpha$.

Voir exercice n° 2

4. Champ magnétique créé par un courant rectiligne

■ Un fil rectiligne très long, parcouru par un courant I , crée un champ dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous (doc. 7).

- Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil.
- Le vecteur champ magnétique \vec{B} en un point M est orthogonal au plan qui contient M et le fil.
- Le sens du champ \vec{B} est donné par la règle du « tire-bouchon » : le sens de \vec{B} est donné par le sens de rotation d'un tire-bouchon (ou d'une vis) qui avance le long du fil dans le sens du courant.
- La valeur du champ est inversement proportionnelle à la distance r entre le fil et le point M :

$$B(M) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}.$$

Cette relation est vraie tant que la distance r est petite devant la longueur du tronçon rectiligne.

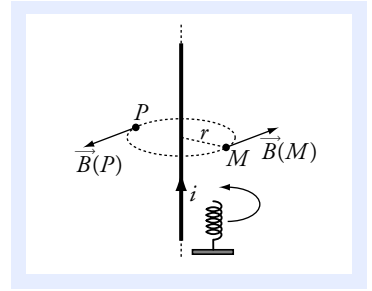
■ μ_0 est une constante qui permet de calculer la valeur du champ \vec{B} à partir de l'intensité du courant qui le crée.

Dans le système légal (S.I.), sa valeur est : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

■ Notons que le champ magnétique créé par un courant :

- est proportionnel à son intensité ;
- change de sens si on inverse le sens du courant.

Voir exercices n°s 2 et 3



Doc. 7 Le fil est « très long » si la distance r est petite devant la distance entre M et les extrémités du tronçon rectiligne.

La valeur de μ_0 est exactement de $4\pi \cdot 10^{-7}$ (S.I.).

Cela ne résulte pas d'un hasard. On a arbitrairement décidé de la valeur de μ_0 , ce qui a eu pour conséquence de déterminer toutes les unités légales liées à l'électromagnétisme.

5. Champ magnétique créé par un solénoïde

Un solénoïde est une bobine de section constante sur laquelle le fil est enroulé, avec des spires régulièrement espacées (doc. 8).

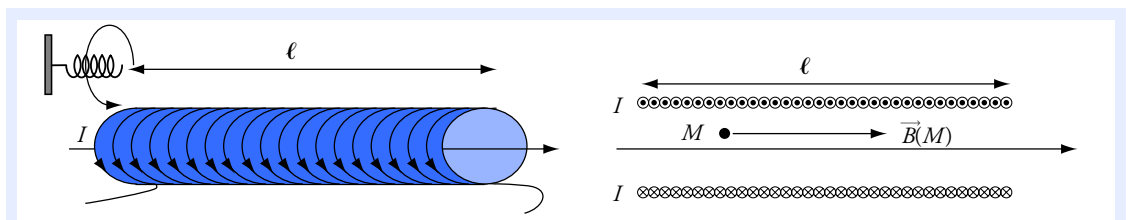
Le fil est entouré d'une gaine isolante qui interdit les contacts électriques entre deux spires qui se touchent.

Un solénoïde très long, de longueur ℓ , constitué de N spires régulièrement réparties et parcouru par un courant d'intensité I , crée un champ qui, à l'extérieur, est semblable à celui d'un aimant droit.

Rappelons les conventions de représentation d'une flèche indiquant une direction orthogonale au plan de la figure :

⊗ : orientée vers la feuille ;

⊙ : orientée vers le lecteur.



Doc. 8 (a) Le solénoïde est « très long » si sa longueur ℓ est très grande devant sa largeur.

(b) Le solénoïde vu en coupe. À l'intérieur et loin des bords, \vec{B} est uniforme.

À l'intérieur du solénoïde et loin des extrémités, le vecteur champ magnétique \vec{B} présente les caractéristiques suivantes :

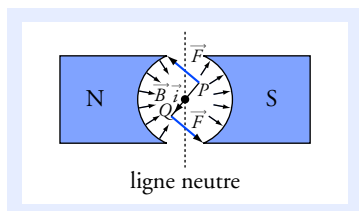
- \vec{B} est uniforme et colinéaire à l'axe du solénoïde ;
- le sens du champ \vec{B} est donné par la règle du « tire-bouchon » : le sens de \vec{B} est donné par l'avancement d'un tire-bouchon qui tourne le long du fil dans le sens du courant ;
- la valeur du champ est :

$$B(M) = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I.$$

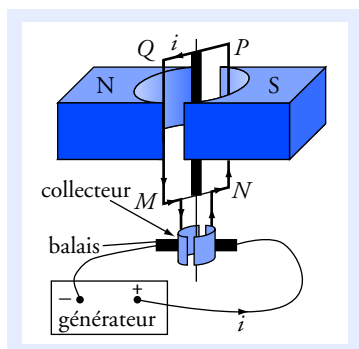
Voir exercices n°s 1 et 4

Notons l'homogénéité de l'expression de B pour le fil rectiligne et pour le solénoïde. Dans tous les cas,

$$B \text{ est homogène à } \frac{\mu_0 \times \text{intensité}}{\text{longueur}}.$$



Doc. 9 Vue de dessus d'un moteur à courant continu.



Doc. 10 Schéma de principe d'un moteur à courant continu.

6. Quelques ordres de grandeur

- Un bon aimant de type usuel crée près de ses pôles un champ de l'ordre de quelques dixièmes de tesla.
- 1 cm de fil parcouru par un courant d'intensité 1 A et soumis à un champ magnétique de 0,1 T subit une force de 10^{-3} N.
- Le champ magnétique terrestre a une valeur de l'ordre de $5 \cdot 10^5$ T.

7. Principe d'un moteur électrique

Nous étudions ici le principe de fonctionnement du moteur à courant continu.

■ Champ magnétique

Au niveau des fils verticaux, le champ magnétique créé par les aimants est radial (doc. 9). Il est orienté vers le centre dans la zone de gauche et vers la périphérie dans la zone de droite. Nous ne tenons pas compte du champ dans la zone intermédiaire, près de la *ligne neutre*.

■ Analyse des forces de Laplace

Sur le cadre $MNPQ$, en rotation autour de son axe, sont bobinés n tours de fil de cuivre. Pour simplifier, $n = 1$ sur le document 10. Les deux extrémités de la bobine sont reliées à des *collecteurs* qui tournent avec le cadre. Ces collecteurs sont en contact électrique avec deux *balais* fixes reliés aux bornes du générateur.

À chaque demi-tour, le sens du courant dans la bobine s'inverse. Ainsi, le courant est toujours descendant dans le fil situé près du pôle nord, et montant dans le fil situé près du pôle sud.

Les forces de Laplace exercées sur les fils horizontaux sont verticales et n'ont aucun effet sur la rotation du cadre.

Les forces de Laplace exercées sur les fils verticaux sont représentées sur le document 9. Elles entraînent toujours la rotation du cadre dans le même sens.

Pour faire le point...

1. Champ magnétique d'une bobine longue

On désire produire un champ magnétique de valeur $B_0 = 0,10 \text{ T}$ à l'intérieur d'une bobine enroulée sur un tube cylindrique de rayon $a = 1,0 \text{ cm}$ et de longueur $\ell = 20 \text{ cm}$.

Le fil a un diamètre $d = 0,50 \text{ mm}$ et il est parcouru par un courant d'intensité $I = 4,0 \text{ A}$.

1. Déterminer le nombre de spires nécessaires.

2. On suppose que les spires se touchent ; elles sont isolées par une mince couche de vernis.

Combien de couches de fil faut-il superposer ? Peut-on réellement supposer que toutes les spires ont le même rayon ?

3. Pour le calcul qui suit, on supposera que toutes les spires ont un rayon de 12 mm . Le fil a une résistance linéique (résistance par unité de longueur) égale à $0,010 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

Calculer la résistance du fil et la puissance thermique dissipée.

Expliquer pourquoi il est impossible de produire un champ de 10 T avec cette bobine.

Conseils

- Voir l'expression du champ B à l'intérieur d'un solénoïde et la loi de Joule au chapitre 7.
- Il faudra déterminer le nombre de spires que l'on peut juxtaposer sur la longueur du tube.

2. Interaction entre un fil et une bobine

Un fil rectiligne très long est parcouru par un courant $I_1 = 10 \text{ A}$.

Une bobine de $N = 100$ spires est enroulée sur un cadre rectangulaire $CDEF$ de dimensions : $a = 2,0 \text{ cm}$ et $b = 4,0 \text{ cm}$.

Le fil est dans le même plan que la bobine ; les côtés DE et FC sont parallèles au fil ; le côté FC est à une distance $d = 1,0 \text{ cm}$ du fil.

La bobine est parcourue par un courant d'intensité $I_2 = 3,0 \text{ A}$ orienté comme sur la figure ci-contre.

1. Considérons deux petits morceaux de fil de longueur $\delta \ell$, situés l'un sur le côté CD et l'autre sur le côté EF , et dont les centres sont tous deux à la distance r du fil (voir la figure ci-contre).

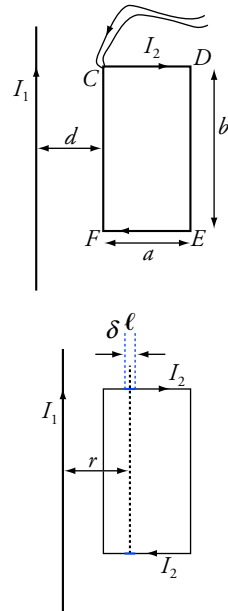
Représenter le vecteur champ magnétique \vec{B}_1 créé par le courant I_1 au milieu de ces segments et calculer sa valeur.

Représenter et calculer la force exercée sur chacun de ces morceaux de fil. On supposera que $\delta \ell$ est suffisamment petit pour pouvoir considérer que \vec{B}_1 est uniforme sur le petit segment.

En déduire que la force de Laplace totale sur les côtés CD et EF est nulle.

2. Calculer la force de Laplace sur les côtés DE et FC , puis la force totale exercée par le courant d'intensité I_1 sur la bobine. On donnera une expression littérale en fonction des données, puis la valeur numérique.

3. Que devient cette force si on inverse I_1 , ou I_2 ou I_1 et I_2 ?



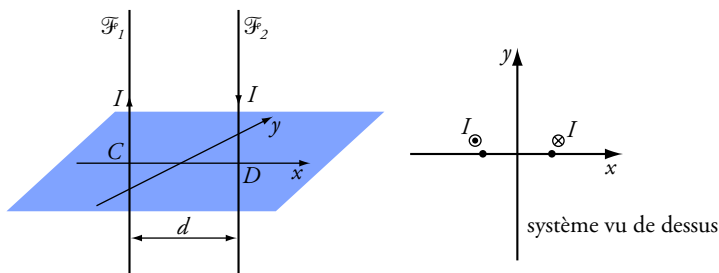
Conseils

- Voir les expressions du champ magnétique créé par un courant rectiligne et de la force de Laplace.
- Le calcul de la force magnétique sur un élément de fil se fait en deux étapes :
a) on détermine le vecteur champ \vec{B}_1 créé par le fil rectiligne au niveau de l'élément de fil ;
b) on calcule la force en appliquant la loi de Laplace.

Pour s'entraîner...

3. Ligne bifilaire

Une ligne électrique est constituée de deux longs fils \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 parallèles parcourus en sens inverse par un courant d'intensité I . Les deux fils sont distants de d . Ils sont orthogonaux au plan (xOy) qu'ils coupent sur l'axe (Ox) , aux points $C\left(x_C = -\frac{d}{2}\right)$ et $D\left(x_D = \frac{d}{2}\right)$.



1. Déterminer le vecteur champ magnétique \vec{B}_1 créé par \mathcal{F}_1 au point D , puis en tout point du fil \mathcal{F}_2 . *Application numérique* : $d = 5,0$ mm ; $I = 10$ A.

2. Déterminer le vecteur force \vec{F} qui s'exerce sur un segment de fil \mathcal{F}_2 de longueur ℓ . Déterminer de même le vecteur force \vec{F}' sur un segment de fil \mathcal{F}_1 de longueur ℓ .

Calculer la valeur de la force dans deux cas :

- $\ell = 1,0$ m ; $d = 5,0$ mm ; $I = 10$ A (fil électrique pour usage domestique) ;
- $\ell = 50$ m ; $d = 1,0$ m ; $I = 200$ kA (court-circuit accidentel sur une ligne haute-tension).

3. Déterminer le vecteur champ magnétique total \vec{B} au point $M(a, 0)$.

Application numérique : pour $d = 5,0$ mm ; $I = 10$ A ; $a = 10$ mm, puis 10 cm.

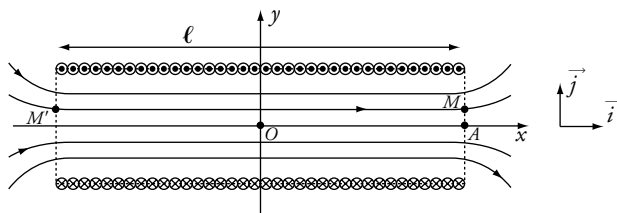
Comparer au champ magnétique terrestre.

Conseil

Voir l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne et l'expression de la force de Laplace.

4. Champ magnétique sur l'extrémité d'un solénoïde

Un solénoïde possède N spires circulaires régulièrement réparties sur la longueur ℓ . Il est représenté avec ses lignes de champ magnétique sur la figure ci-dessous. L'axe (Ox) est l'axe de révolution du solénoïde ; c'est aussi une ligne de champ.



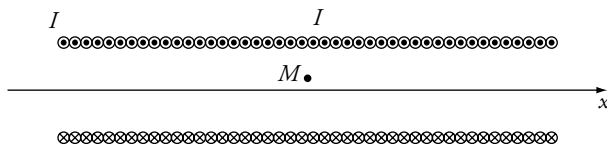
Le solénoïde vu en coupe longitudinale.

1. Comparer les coordonnées $B_x(M)$ et $B_x(M')$, puis $B_y(M)$ et $B_y(M')$.

2. On met bout à bout deux solénoïdes identiques (même longueur ℓ , même nombre N de spires), et on les branche en série (voir la figure ci-dessous).

Déterminer le champ total \vec{B}_0 en M .

En déduire la coordonnée $B_x(M)$ du champ créé en M par le seul solénoïde de gauche.



Deux solénoïdes branchés en série.

3. En revenant au solénoïde seul, déterminer le vecteur champ magnétique \vec{B} en A .

Conseils

- Quel champ obtiendrait-on en faisant pivoter le solénoïde de 180° autour de l'axe (Oy) ? On peut analyser la figure pour en déduire les relations entre les coordonnées.
- Le champ total est égal à la somme vectorielle des champs créés par les deux petits solénoïdes.

5. Bilan d'énergie pour un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est alimenté par une source stabilisée de tension $U = 6,0$ V.

Lorsqu'il tourne à $600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, il fournit une puissance mécanique $\mathcal{P}_m = 10$ W et l'intensité du courant est de $2,0$ A. \mathcal{P}_m est égale à la puissance des forces de Laplace.

1. Faire un schéma électrique dans lequel apparaissent la résistance R et la f.é.m. E du moteur.

2. Par un bilan d'énergie, établir une relation entre R , I , U et \mathcal{P}_m .

À partir du schéma électrique, donner une autre relation entre U , E , R et I .

En déduire la valeur de E pour un régime de 600 tours par minute, puis celle de la résistance.

3. Calculer la puissance dissipée par effet Joule si on bloque la rotation du moteur. Commenter.

4. Justifier les affirmations suivantes :

a. La puissance des forces de Laplace est proportionnelle à l'intensité I et à la vitesse angulaire de rotation ω (utiliser le schéma de principe donné en début de chapitre).

b. La f.é.m. du moteur est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation ω : $E = K \cdot \omega$.

On donnera la valeur numérique de K en $\text{V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$.

Conseils

- Voir les chapitres 5, 7 et 8.
- Une vitesse angulaire se mesure en radian par seconde. Les notices techniques parlent plus volontiers en tour par minute. Comment passe-t-on de l'un à l'autre ?
- Il faut arriver à montrer que $\mathcal{P}_m = E \cdot I$.
- Pour une vitesse de rotation nulle, les forces de Laplace s'appliquent à des conducteurs immobiles. Quelle est la puissance d'une force dont le point d'application est immobile ?

Solutions...

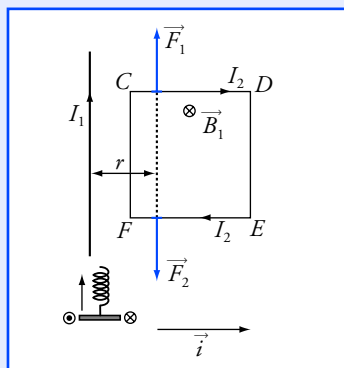
On remarquera que la valeur du champ B à l'intérieur d'un solénoïde long est indépendante du rayon des spires et de leur forme.

- Le dernier calcul illustre la difficulté de produire des champs intenses. Pour produire des champs de plusieurs teslas, on utilise des bobines avec un circuit réfrigérant.

Les systèmes les plus récents, mais aussi les plus coûteux, utilisent des bobines supraconductrices.

- On sait produire actuellement des champs jusqu'à environ 15 T.

- Les supraconducteurs sont des matériaux dont la résistance électrique devient nulle lorsqu'ils sont portés à très basse température.



1. Champ magnétique d'une bobine longue

$$1. B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I; \text{ d'où } N = \frac{0,10 \times 0,20}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 4,0};$$

soit :

$$N = 4,0 \cdot 10^3 \text{ spires.}$$

2. Sur le tube de longueur de 200 mm, il est possible de juxtaposer

$$\frac{200}{0,5} = 400 \text{ spires. Il faut donc superposer 10 couches. L'épaisseur de la}$$

bobine est environ : $10 \times 0,5 = 5 \text{ mm.}$

Comme le rayon des spires est compris entre 10 cm et environ 15 mm, nous ne pouvons pas supposer qu'elles ont toutes le même rayon. La longueur réelle de fil est donc plus grande que celle qui a été calculée.

3. Chaque spire mesure $2\pi \cdot a$, ce qui donne une longueur totale :

$$L = 4,0 \cdot 10^3 \times 2 \times \pi \times 12 \cdot 10^{-3} \text{ m, soit } L = 300 \text{ m.}$$

La résistance est égale à $3,0 \Omega$.

La tension aux bornes de la bobine vaut donc $U = R \cdot I$, soit $U = 12 \text{ V.}$

La puissance est $\mathcal{P} = R \cdot I^2$, soit $\mathcal{P} = 48 \text{ W.}$

Pour produire un champ cent fois plus intense, il faudrait un courant cent fois plus intense, et la puissance dissipée $\mathcal{P} = R \cdot I^2$ serait multipliée par 10^4 . La tension serait de 1,2 kV et la puissance dissipée de 480 kW. Une bobine de cette taille ne peut évacuer une telle énergie thermique ; elle se détériore presque instantanément.

2. Interaction entre un fil et une bobine

1. Le champ \vec{B}_1 en un point M est orthogonal au plan formé par le point M et le fil. Il est donc orthogonal au plan de la figure.

Par application de la « règle du tire-bouchon », le champ est entrant dans la figure en tout point de la bobine.

$$\text{Sur les deux segments, la valeur du champ est : } B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi r}.$$

Appliquons la règle des trois doigts : $\vec{\delta\ell}$ selon le pouce, \vec{B}_1 selon l'index et \vec{F} selon le majeur.

- Sur CD : $\vec{\delta\ell}$ est orienté vers la droite, \vec{B}_1 vers la figure et \vec{F}_1 vers le haut.

- Sur EF : $\vec{\delta\ell}$ est orienté vers la gauche, \vec{B}_1 vers la figure et \vec{F}_2 vers le bas. Ces deux forces ont même valeur : $F = B_1 \cdot I_2 \cdot \ell$ car l'angle α entre $\vec{\delta\ell}$

et \vec{B}_1 est égal à $\frac{\pi}{2}$ dans les deux cas.

- La somme vectorielle des forces sur ces deux morceaux de fil est nulle. En regroupant deux par deux tous les éléments de fil situés sur les côtés CD et EF , on conclut que la force de Laplace totale sur les côtés CD et EF est nulle.

$$2. \text{ En tout point du côté } DE, \vec{B}_1 \text{ a la même valeur : } B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi(d+a)}.$$

\vec{B}_1 est orthogonal au segment DE . La force sur un tronçon de fil DE a donc pour valeur : $F_{DE} = B_1 \cdot I_2 \cdot b = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot b}{2\pi(d+a)}$.

La règle des trois doigts donne \vec{F}_{DE} orientée vers la droite de la figure.

• De même, la force sur un tronçon de fil FC est orientée vers la gauche et a pour valeur :

$$F_{FC} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot b}{2\pi d}.$$

La force totale sur la bobine est égale à la somme vectorielle des forces exercées sur les N spires :

$$\vec{F} = N \cdot \vec{F}_{DE} + N \cdot \vec{F}_{FC} + 0 = N \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot b}{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{d+a} \right) \cdot \vec{i}.$$

Soit : $\vec{F} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot N \cdot a \cdot b}{2\pi d \cdot (d+a)} \cdot \vec{i}$. **La bobine est attirée vers le fil.**

Application numérique : $F = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ N}$: à peine plus que le poids d'une masse de 0,1 g.

3. Inverser le sens de I_1 revient à changer I_1 en $(-I_1)$. La force devient :

$$\vec{F} = +\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot N \cdot a \cdot b}{2\pi d \cdot (d+a)} \cdot \vec{i}.$$

La bobine est repoussée.

On obtient le même résultat en changeant le signe de I_2 .

Si on inverse à la fois I_1 et I_2 , alors le signe du produit $I_1 \cdot I_2$ est inchangé et on retrouve une force attractive.

3. Ligne bifilaire

1. Le point D est à une distance d du fil \mathcal{F}_1 . La ligne de champ du champ \vec{B}_1 passant par D est un cercle de rayon d . Un tire-bouchon montant dans le sens de I tourne dans le sens indiqué sur la figure. On en déduit la direction et le sens de \vec{B}_1 .

Sa valeur est : $B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi d}$.

Le point D est en fait un point quelconque du fil \mathcal{F}_2 . Le champ \vec{B}_1 a donc même valeur, même direction et même sens en tout point de \mathcal{F}_2 .

Application numérique : $B_1 = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

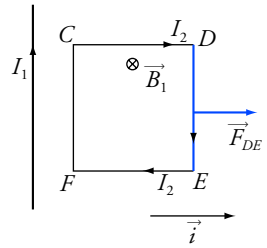
2. Prenons un tronçon de fil \mathcal{F}_2 avec le point D en son milieu.

• La force de Laplace \vec{F} est orthogonale au fil et à \vec{B}_1 : \vec{F} est donc colinéaire à l'axe (Ox) .

• D'après la règle des trois doigts de la main droite \vec{F} est orientée comme l'axe (Ox) . **La force entre les deux fils est répulsive.**

• L'angle α entre \vec{B}_1 et le fil est égal à $\frac{\pi}{2}$; $\sin \alpha = 1$ et donc :

$$F = B_1 \cdot I \cdot \ell = \mu_0 \cdot \frac{I^2 \cdot \ell}{2\pi d}, \text{ soit } \vec{F} = \mu_0 \cdot \frac{I^2 \cdot \ell}{2\pi d} \cdot \vec{i}.$$

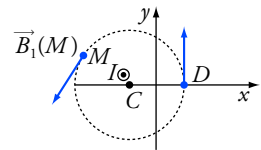


Orientation de la force de Laplace sur le segment DE .

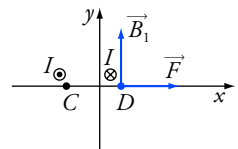
• Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent.

• Deux fils parallèles parcourus par des courants de sens opposés se repoussent.

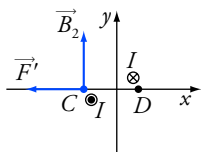
• Dans le cas étudié ici, c'est le segment FC , le plus proche du fil long qui subit la force la plus intense.



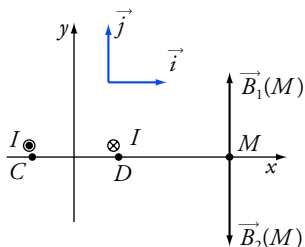
Champ magnétique créé par le courant I .



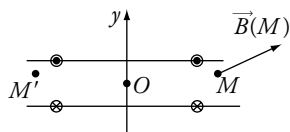
Force de Laplace sur un tronçon du fil \mathcal{F}_2 .



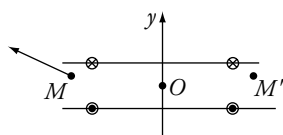
Force de Laplace sur un tronçon du fil \mathcal{F}_1 .



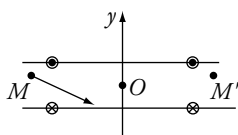
$\|\vec{B}_2\|$ est légèrement supérieur à $\|\vec{B}_1\|$. Le champ résultant est donc orienté comme \vec{B}_2 .



Situation initiale.



Après pivotement.



Après pivotement et inversion du courant. Le point M correspond au point M' de la situation initiale.

• On procède de la même façon pour déterminer la force \vec{F}' . On obtient une force opposée et de même valeur : $\vec{F}' = -\vec{F}$.

Application numérique : $F = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ et $F = 4,0 \cdot 10^5 \text{ N}$.

La force magnétique est négligeable pour un fil électrique courant. Les fils sont violemment repoussés dans le cas du court-circuit sur la ligne à haute tension.

3. Le champ \vec{B}_1 se détermine comme précédemment.

La distance au fil \mathcal{F}_1 est $\left(a + \frac{d}{2}\right)$ et donc : $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \left(a + \frac{d}{2}\right)} \cdot \vec{j}$.

Le champ \vec{B}_2 créé par le fil \mathcal{F}_2 a la même direction, mais un sens opposé.

La distance au fil \mathcal{F}_2 est $\left(a - \frac{d}{2}\right)$ et donc : $\vec{B}_2(M) = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \left(a - \frac{d}{2}\right)} \cdot \vec{j}$.

$\vec{B}(M)$ est égal à la somme vectorielle des deux champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 .

$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$ soit : $\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(\frac{d}{a^2 - \frac{d^2}{4}}\right) \cdot \vec{j}$.

Application numérique : $B(M) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ (un peu supérieur au champ terrestre), puis $B(M) = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ (nettement plus faible).

4. Champ magnétique sur l'extrémité d'un solénoïde

1. Si on fait pivoter le solénoïde autour de l'axe (Oy) , on échange les positions de M et de M' , mais les courants ont changé de sens. M et M' sont donc équivalents, à un changement de sens des courants près. Le champ B a donc la même valeur en M et en M' .

D'après la structure des lignes de champ donnée sur le schéma d'un solénoïde, on voit que : $B_x(M) = B_x(M')$ et $B_y(M) = -B_y(M')$.

Nous pouvons aussi suivre le raisonnement indiqué sur les figures ci-contre et ci-après.

2. Le point M se trouve à l'intérieur du grand solénoïde de longueur 2ℓ et de $2N$ spires. M étant éloigné des bords, on peut donc appliquer la formule :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \frac{2N}{2\ell} \cdot I \cdot \vec{i} = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I \cdot \vec{i}.$$

Le champ total \vec{B}_0 est égal à la somme vectorielle des champs créés par les deux petits solénoïdes : $\vec{B}(M)$ pour le solénoïde de gauche et $\vec{B}(M')$ pour le solénoïde de droite. Donc : $\vec{B}_0 = \vec{B}(M) + \vec{B}(M')$.

En projetant : $B_{0x} = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I = 2B_x(M)$ et $B_{0y} = 0$.

On en déduit : $B_x(M) = \mu_0 \cdot \frac{N}{2\ell} \cdot I$.

3. Le résultat précédent est valable au point A pour lequel $B_y(A) = 0$.

On en conclut que : $\vec{B}(A) = \mu_0 \cdot \frac{N}{2\ell} \cdot I \cdot \vec{i}$.

5. Bilan d'énergie pour un moteur à courant continu

1. Voir la figure ci-contre.

2. Effectuons un bilan d'énergie pour le système constitué du moteur.

La puissance électrique reçue, venant du générateur est : $\mathcal{P}_g = U \cdot I$.

La puissance dissipée par effet Joule et cédée est : $\mathcal{P}_j = R \cdot I^2$.

La puissance mécanique cédée à l'extérieur est \mathcal{P}_m .

Le bilan s'écrit donc : $U \cdot I = \mathcal{P}_j + \mathcal{P}_m$ soit $\mathcal{P}_m = U \cdot I - R \cdot I^2$.

Par ailleurs, dans le schéma électrique, la tension aux bornes de la résistance est égale à $U - E$ et donc : $R \cdot I = U - E$.

De ces deux relations, on tire : $\mathcal{P}_m = U \cdot I - (U - E) \cdot I = E \cdot I$.

Soit : $E \cdot I = \mathcal{P}_m$ et donc $E = \frac{\mathcal{P}_m}{I}$.

Application numérique : $E = 5,0 \text{ V}$; $R = \frac{U - E}{I} = 0,50 \Omega$.

3. La puissance d'une force appliquée \vec{F} à un mobile de vitesse \vec{V} est :
 $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$.

Si le moteur est bloqué, les forces de Laplace s'appliquent à des fils de vitesse nulle ; leur puissance est nulle et donc $E = 0$.

$\mathcal{P}_j = R \cdot I^2$ avec dans cette situation $I = \frac{U}{R}$. $\mathcal{P}_j = \frac{U^2}{R} = 72 \text{ W}$. Les fils s'échauffent, l'isolant fond et le moteur est détruit.

4. La puissance d'une force est égale à : $\vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V \cdot \cos \alpha$.

- La force de Laplace est proportionnelle à I .
- La vitesse V des fils QM et NP (voir le schéma en début de chapitre) est proportionnelle à ω .
- La force qui s'exerce sur les fils QM et NP est parallèle à leur vitesse : $\alpha = 0$.

La puissance des forces de Laplace est donc proportionnelle à I et à ω :

$$\mathcal{P}_m = K \cdot I \cdot \omega.$$

Application numérique : à $600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$:

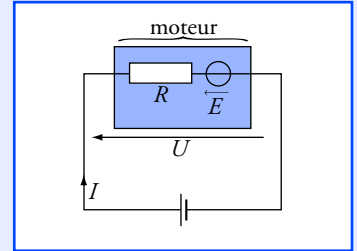
$$\omega = \frac{600 \times 2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 20 \pi \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

On identifie les deux expressions de la puissance mécanique :

$$\mathcal{P}_m = E \cdot I = K \cdot I \cdot \omega.$$

D'où : $E = K \cdot \omega$;

$$K = \frac{E}{\omega}, \text{ soit } K = 80 \text{ mV} \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$



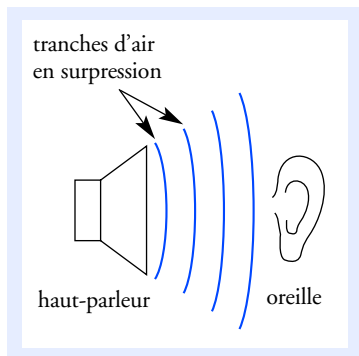
L'expression $E \cdot I = \mathcal{P}_m$ est bien homogène car E est homogène à une tension.

1 tour = 2π radians ;

$$1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{1 \text{ tour}}{1 \text{ minute}} = \frac{2\pi \text{ radians}}{60 \text{ seconde}} ;$$

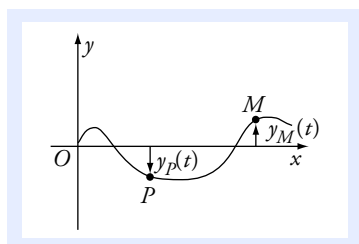
$$1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{\pi}{30} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

10 Ondes mécaniques progressives



Doc. 1 L'onde sonore qui se propage dans l'air transmet au tympan les vibrations de la membrane du haut-parleur.

La célérité d'une onde est différente de la vitesse de déplacement des points du système matériel dans lequel l'onde se propage.



Doc. 2 « Photographie instantanée » de la corde à la date t .
En l'absence de perturbation, la corde est sur l'axe (Ox) .

Ce qu'il faut savoir...

1. Propriétés générales

■ Une **onde mécanique** est constituée par la propagation d'une perturbation dans un système matériel.

■ L'onde est dite **progressive** si elle se propage dans un seul sens.

■ Une onde progressive transmet de l'énergie et de l'information **sans transport de matière**.

Explicitons ces notions sur l'exemple d'une onde sonore émise par un haut-parleur (doc. 1).

• **L'onde sonore a transmis de l'information** : l'auditeur sait quel son a été émis par le haut-parleur.

• **L'onde sonore a transmis de l'énergie** : l'air en vibration possède une énergie cinétique, ainsi que le tympan de l'auditeur.

• **Les tranches d'air oscillent autour d'une position moyenne fixe** ; elles restent confinées autour de cette position moyenne. Il n'y a pas de « courant d'air » allant du haut-parleur vers l'oreille de l'auditeur.

• Après le passage de l'onde, les tranches d'air retrouvent leur position de repos. Globalement, le transfert d'information ne s'est accompagné d'aucun transfert de matière.

■ L'onde se propage à partir de la source. Selon le système considéré, cette propagation peut se faire :

- à une dimension : vibration d'une corde ;
- à deux dimensions : ondes à la surface de l'eau ;
- à trois dimensions : ondes sonores.

■ La **célérité de l'onde** représente la vitesse à laquelle la perturbation se propage.

Elle est indépendante de l'amplitude de l'onde si celle-ci reste faible.

Elle dépend des caractéristiques du système et pour un système donné de la nature de l'onde.

Par exemple, la célérité d'une onde le long d'une corde tendue vaut :

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

avec T la valeur de la tension et μ la masse linéique de la corde.

• Un point M d'un système matériel est animé d'un mouvement qui reproduit (éventuellement atténué) celui de la source S avec un retard τ tel que :

$$\tau = \frac{SM}{V}$$

$\xrightarrow{\text{distance entre la source et le point } M}$
 $\xrightarrow{\text{célérité de l'onde}}$

2. Propagation à une dimension

Nous étudions le cas où la perturbation du système matériel ne dépend que de la seule coordonnée x et de la date t (par exemple, une corde tendue, une oscillation le long d'un ressort).

Nous plaçons l'origine des coordonnées sur la source.

- L'élongation $y_M(t)$ est égale au déplacement (algébrique) du point du système matériel de position $M(t)$ (doc. 2).
- En absence d'amortissement, si l'élongation au niveau de la source est décrite par $y_S(t)$, celle du point M (doc. 3) est décrite par :

$$y_M(t) = y_S(t - \tau) = y_S\left(t - \frac{x_M}{V}\right).$$

- Lorsque plusieurs ondes se propagent dans un même système matériel, elles peuvent se superposer en conservant leurs caractéristiques. Ainsi, l'élongation $y_M(t)$ du point M soumis à l'action des ondes 1 et 2 est telle que $y_M(t) = y_{M_1}(t) + y_{M_2}(t)$, avec $y_{M_1}(t)$ élongation du point M si l'onde 1 était seule et $y_{M_2}(t)$ élongation du point M si l'onde 2 était seule (doc. 4).

Voir exercices n^{os} 1, 2, 3

3. Ondes mécaniques progressives périodiques

■ Une onde mécanique progressive est périodique si la perturbation est périodique. L'onde présente alors une double périodicité.

■ **La période temporelle de l'onde**, notée T , est la plus petite durée au bout de laquelle tous les points du milieu matériel retrouvent la même élongation. Cette période est égale à celle de la source.

■ **La période spatiale de l'onde** ou longueur d'onde, notée λ , est la plus petite distance séparant deux points vibrant en phase (doc. 5). La longueur d'onde représente la distance parcourue par l'onde au cours d'une période temporelle T , d'où :

$$\lambda = V \cdot T \quad \begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \text{m} \quad \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{array}$$

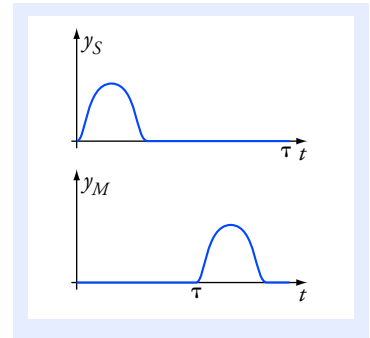
■ Une onde mécanique progressive est **sinusoïdale** (doc. 6) si l'élongation $y_S(t)$ à la source est une fonction sinusoïdale du temps de période T et d'amplitude a :

$$y_S(t) = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

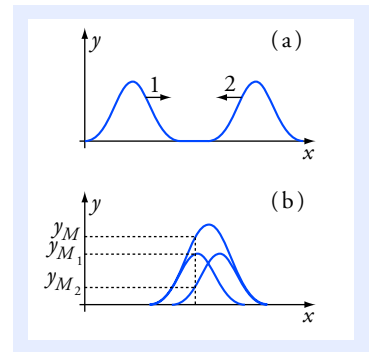
avec un choix convenable de l'origine des dates pour que la phase initiale soit nulle.

Sans amortissement, l'élongation $y_M(t)$ en un point M d'abscisse x à

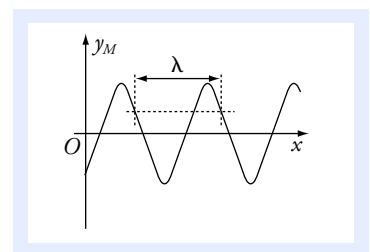
la date t est égale à celle en S à la date $t - \tau$ avec $\tau = \frac{x}{V}$.



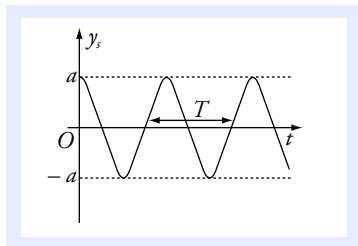
Doc. 3 Le point M reproduit le mouvement de la source S avec un retard τ .



Doc. 4 Ondes 1 et 2 : avant la superposition (a) ; à une date où les deux perturbations se superposent (b).



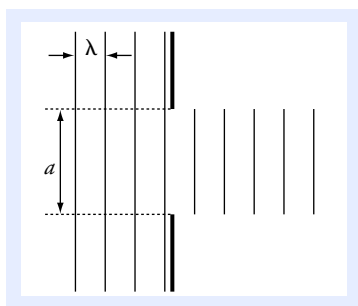
Doc. 5 y_M en fonction de x à une date t fixée. La période spatiale λ est appelée longueur d'onde.



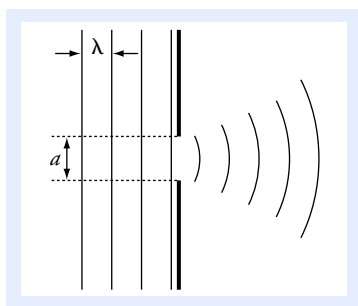
Doc. 6 L'élongation au niveau de la source $y_s(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps :

$$y_s(t) = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right).$$

La surface de l'eau est un milieu dispersif pour les ondes mécaniques, alors que l'air est un milieu non dispersif pour les ondes sonores peu intenses.



Doc. 7 Pour $a \gg \lambda$, l'onde est diaphragmée.



Doc. 8 Si $a \sim \lambda$, l'onde est diffractée.

$$y_M(t) = a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T} \cdot (t - \tau)\right], \text{ soit } y_M(t) = a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{V}\right)\right];$$

d'où :

$$y_M(t) = a \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

période temporelle

période spatiale ou longueur d'onde

Deux points M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 vibrent :

– en phase, si $x_2 - x_1 = k \cdot \lambda$;

– en opposition de phase, si $x_2 - x_1 = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Voir exercice n° 4

4. Dispersion d'une onde

■ Un milieu matériel est **dispersif** si la célérité de propagation d'une onde sinusoïdale dépend de la fréquence.

■ Pour **une onde complexe** composée de plusieurs ondes sinusoïdales de fréquence différentes, il y a **déformation de l'onde** lors de sa propagation dans un milieu dispersif.

Voir exercice n° 6

5. Phénomène de diffraction

■ **La diffraction** est une modification de la direction de propagation d'une onde. Elle se manifeste en particulier dans le cas d'ondes progressives sinusoïdales rencontrant une ouverture ou un obstacle du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

■ **L'onde diffractée est déformée**, mais sa longueur d'onde et sa fréquence ne sont pas modifiées.

■ **Influence des dimensions de l'ouverture ou de l'obstacle :**

• Si $a \gg \lambda$, une onde arrivant sur l'objet ne subit pas de phénomène de diffraction : elle est simplement diaphragmée (**doc. 7**).

• Si $a \sim \lambda$, l'onde est diffractée. Une onde qui, avant l'ouverture, se propageait dans une seule direction, se propage ensuite dans toutes les directions contenues dans un secteur angulaire d'ouverture

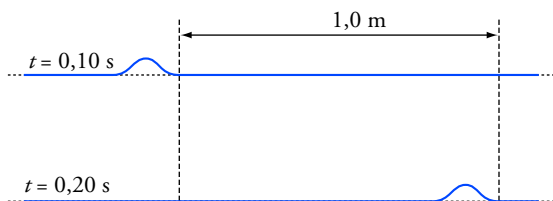
angulaire approximativement égale à 2θ avec $\sin \theta \sim \frac{\lambda}{a}$ (**doc. 8**).

Voir exercice n° 4

Pour faire le point...

1. Ondes le long d'une corde tendue

Une corde tendue entre deux points S_1 et S_2 distants de 5,0 m est soumise à une perturbation en S_1 . Les photographies d'une partie de la corde aux dates $t_1 = 0,10$ s et $t_2 = 0,20$ s ont l'aspect représenté sur le schéma ci-contre.



- Déterminer, à partir du schéma, la célérité de l'onde se propageant le long de la corde.
- La célérité des ondes le long d'une corde vérifie la relation $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec T la valeur de la tension de la corde et μ la masse linéique de la corde. Les unités S.I. sont utilisées. Vérifier l'homogénéité de cette relation. Calculer la valeur de la célérité sachant que la corde a une masse $m = 500$ g et que la tension vaut $T = 10,0$ N. Comparer avec la valeur déterminée expérimentalement.

3. La variation de l'élongation du point S_1 au cours du temps est représentée sur le schéma (a).

a. Quelle est la longueur de corde affectée par la perturbation ?

b. Représenter l'aspect de la corde aux dates suivantes :

0,010 s ; 0,020 s ; 0,030 s ;

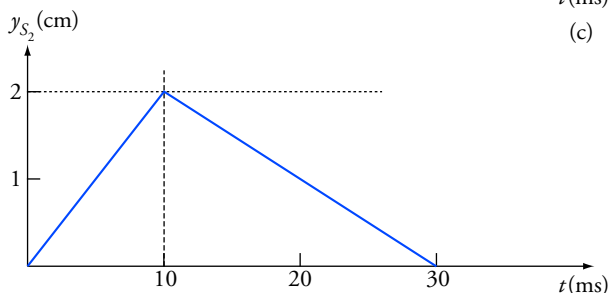
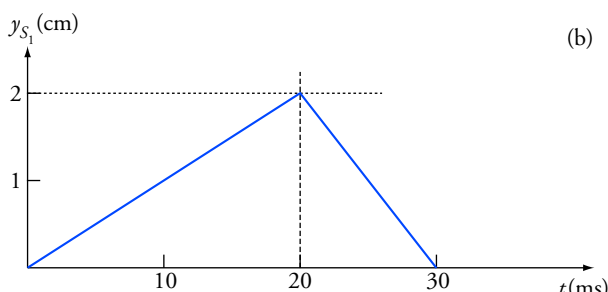
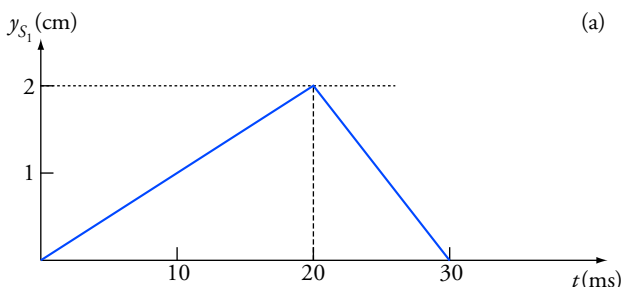
0,040 s ; 0,050 s ; 0,060 s ;

l'amortissement est supposé négligeable.

c. Représenter l'élongation du point M d'abscisse $x_M = 0,20$ m en fonction du temps.

4. On provoque maintenant à la date $t = 0$ deux perturbations simultanées en S_1 et S_2 représentées respectivement sur les schémas (b) et (c).

Représenter l'aspect de la corde à la date $t = 0,265$ s.



Conseil

Ne pas confondre la représentation de l'élongation en fonction du temps et l'aspect de la corde à différentes dates.

2. Ondes sonores dans différents milieux

Un tube de pipeline en cours d'installation a été déposé au fond de la mer. Il est encore fermé aux deux extrémités et rempli d'air. Un plongeur frappe avec un marteau sur l'une des extrémités du tube du pipeline. Un second plongeur situé à l'autre extrémité du tube du pipeline perçoit trois coups.

1. Expliquer pourquoi le plongeur entend trois coups.

2. La célérité d'une onde sonore dans un gaz vérifie la relation suivante : $V = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$;

γ est une constante qui vaut 1,4 dans le cas de l'air, R est la constante des gaz parfaits, T est la température absolue et M la masse molaire du gaz. Les unités S.I. sont utilisées.

a. L'air est-il un milieu dispersif ?

b. Vérifier l'homogénéité de l'expression de V .

c. Calculer la célérité du son dans l'air contenu dans le pipeline.

3. Les deux premiers coups sont perçus avec un décalage $\Delta t = 0,18$ s. En déduire la longueur L du pipeline.

Données : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\theta = 5,0 \text{ }^\circ\text{C}$; $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $V_{\text{acier}} = 5\,800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $V_{\text{eau}} = 1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conseil

La célérité d'une onde dépend de la nature du système matériel propagateur.

3. Ondes ultrasonores

Un émetteur ultrasonore et deux récepteurs R_1 et R_2 placés en M_1 et M_2 sont alignés. Les deux récepteurs sont reliés aux deux voies d'entrée 1 et 2 d'un oscilloscope.

La plus petite distance M_1M_2 pour laquelle l'oscillogramme des tensions aux bornes des récepteurs a l'allure ci-contre vaut 8,5 mm.

1. a. Identifier les deux oscillogrammes.

b. Quelle est la fréquence du signal ultrasonore ?

c. Quelle est la valeur de sa longueur d'onde ?

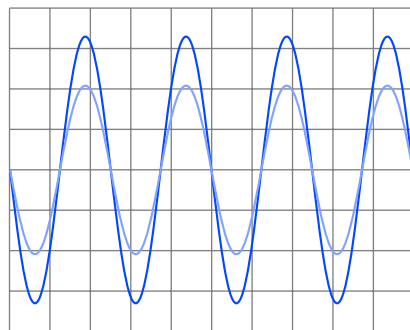
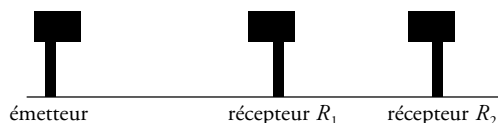
d. Calculer sa célérité.

2. Pour $M_1M_2 = 17$ mm, puis 21,25 mm, représenter les oscillogrammes correspondants.

3. Un télémètre, appareil permettant de mesurer une distance, comprend entre autres un émetteur d'ultrasons et un récepteur associé. Une horloge électronique intégrée au dispositif permet de déterminer la durée Δt nécessaire pour qu'un signal émis en direction d'un obstacle soit réfléchi par celui-ci, puis reçu par le récepteur.

a. Quelle relation existe-t-il entre d , distance émetteur-obstacle, et Δt ?

b. La plus petite variation de durée détectable vaut 0,10 ms. En déduire la plus petite variation de distance mesurable.



Échelle : base de temps : $10 \mu\text{s}$ / division.

Conseil

Deux points vibrent en phase s'ils sont séparés par un nombre entier de longueurs d'onde.

Pour s'entraîner...

4. Onde rectiligne à la surface de l'eau

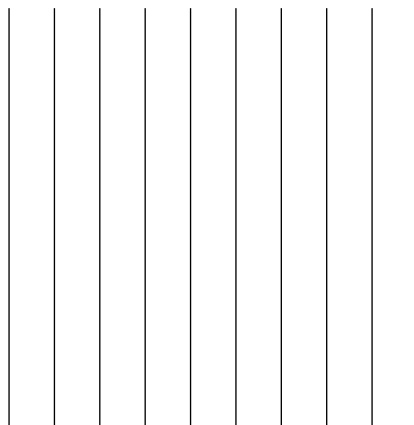
Un vibreur rectiligne et horizontal frappe la surface de l'eau contenue dans une cuve à ondes, avec une fréquence $f = 20$ Hz. La cuve est éclairée par une source lumineuse. L'image de la surface de l'eau, obtenue sur un écran, est reproduite sur le schéma ci-contre à une date t . Les traits correspondent aux « creux » de l'onde progressive.

1. a. Déterminer, compte tenu de l'échelle indiquée, la longueur d'onde de l'onde progressive.

b. En déduire la célérité de l'onde.

2. L'équation horaire du mouvement d'un point du vibreur est de la forme $y_S = 0$ pour $t < 0$;

$$y_S = a \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \text{ pour } t > 0, \text{ avec } a = 2,0 \text{ mm.}$$



Échelle = 1/2.

L'axe (Oy) est orthogonal à la surface de l'eau au repos et orienté vers le haut.

Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M situé à $d = 15$ cm du vibreur en supposant l'amortissement négligeable. Comparer le mouvement de ce point à celui d'un point du vibreur.

3. Représenter une vue en coupe de la surface de l'eau à la date $t = 0,25$ s.

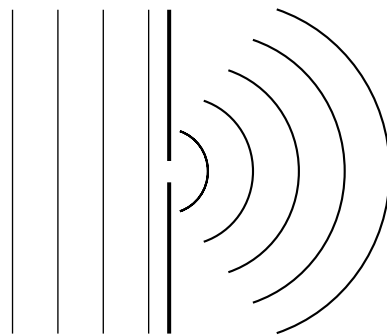
4. On place sur le trajet des ondes progressives un obstacle percé d'une petite ouverture de largeur $a = 1,0$ cm. On observe à une date t sur l'écran l'image reproduite sur le schéma ci-contre.

a. Quel phénomène est-il ainsi mis en évidence ?

b. Comparer la longueur d'onde avant et après l'obstacle.

c. La célérité de l'onde est-elle modifiée par la traversée de l'obstacle ?

d. Représenter l'image obtenue sur l'écran si la largeur de l'ouverture vaut 4,0 cm.



Échelle : 1/2.

Conseil

Revoir les paragraphes 3 et 4 de Ce qu'il faut savoir.

5. Onde sinusoïdale le long d'une corde

Une corde est tendue entre deux points S et P . L'extrémité S , immobile jusqu'à la date $t = 0$, est animée pour $t > 0$ d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude a , de période T et de direction perpendiculaire à celle de la corde. Un dispositif permet d'amortir l'onde à son arrivée au voisinage de P , afin de supprimer l'onde réfléchie.

1. Exprimer littéralement l'élongation y_S du point S en fonction du temps en supposant, qu'à la date $t = 0$, son élongation est nulle et que le point S se déplace dans le sens négatif.

- On donne $a = 1,0 \text{ cm}$ et $T = 40 \text{ ms}$. Tracer la représentation graphique de l'élongation du point S en fonction du temps.
- La célérité de l'onde le long de la corde valant $12,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, calculer la longueur d'onde. En déduire les abscisses des points vibrant en phase avec S et celles des points vibrant en opposition de phase avec S .
- Pour un point M d'abscisse $x_M = 72 \text{ cm}$, exprimer son élongation en fonction du temps, l'amortissement en ce point est négligeable. Tracer la représentation graphique correspondante.
- Représenter l'aspect de la corde aux dates $t : 0,060 \text{ s} ; 0,080 \text{ s} ; 0,10 \text{ s}$.

Conseil

Les conditions initiales permettent de déterminer la valeur de la phase initiale. Ne pas confondre la représentation de l'élongation en fonction du temps et l'aspect de la corde à différentes dates.

6. Un milieu dispersif

Un dispositif vibrant permet de produire des ondes rectilignes et périodiques à la surface de l'eau, contenue dans une cuve à ondes. Grâce à un dispositif optique adapté, on visualise l'image de la surface de l'eau avec un grandissement $\gamma = 1,4$. La distance, sur l'écran de visualisation, entre la première et la onzième crête est notée d .

- Exprimer la longueur d'onde en fonction de d et γ .
- On mesure pour différentes valeurs de f la distance d . Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-contre.

| $f \text{ (Hz)}$ | 15 | 20 | 25 | 30 |
|------------------|------|------|------|------|
| $d \text{ (cm)}$ | 17,8 | 14,7 | 12,6 | 11,2 |

Déterminer pour chaque fréquence la célérité de l'onde et conclure sur la nature du milieu de propagation.

- a. Pour des ondes sinusoïdales de type capillaire se propageant à la surface d'une faible épaisseur d'eau la célérité s'exprime par la relation suivante :

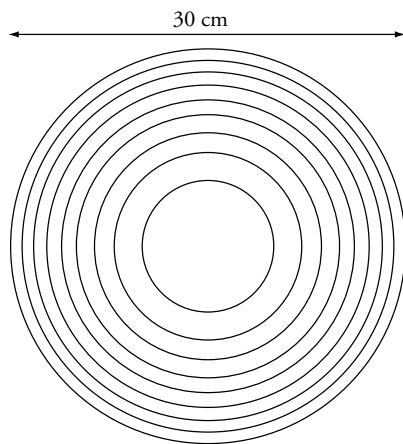
$$V = \sqrt{\frac{2\pi \cdot A}{\mu \cdot \lambda}}$$

avec A la tension superficielle de l'eau et μ la masse volumique de l'eau. Sachant que A s'exprime dans le système S.I. en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, vérifier l'homogénéité de la relation.

- Vérifier graphiquement la compatibilité de la relation avec les résultats expérimentaux.

- Lors de la chute d'une goutte d'eau sur la surface d'une eau au repos, on observe l'apparition de rides circulaires concentriques ayant, à la date $t = 0,50 \text{ s}$, l'allure représentée sur le document ci-contre.

Justifier le resserrement des rides extérieures. On considère que la perturbation provoquée par la chute de la goutte d'eau est équivalente à la superposition d'un grand nombre de perturbations sinusoïdales de fréquences comprises entre 0 et une trentaine de hertz.



Aspect des rides circulaires, une demie seconde après la chute de la goutte.

Conseil

Revoir le paragraphe 4 de Ce qu'il faut savoir. Une représentation graphique linéaire permet de vérifier la compatibilité de la relation avec les résultats expérimentaux.

Solutions...

1. Ondes le long d'une corde tendue

1. La célérité V est calculée avec la relation $V = \frac{d}{t_2 - t_1}$, d étant la distance parcourue par la perturbation entre les deux dates :

$$V = \frac{1,0}{0,20 - 0,10} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. $[V] = \left(\frac{[T]}{[\mu]} \right)^{1/2} = \left(\frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-1}} \right)^{1/2} = L \cdot T^{-1}$. La relation est homogène.

Par définition, la masse linéique de la corde vaut $\mu = \frac{m}{L}$, L étant la

longueur de la corde. On obtient : $\mu = \frac{0,500}{5,0} = 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$;

d'où : $V = \sqrt{\frac{10,0}{0,10}} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

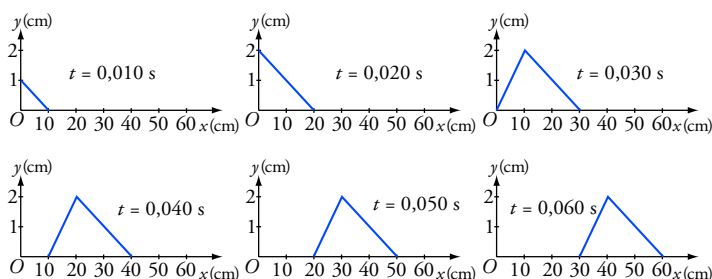
Cette valeur est concordante avec l'étude expérimentale.

3. a. La durée de la perturbation est $\Delta t = 0,030 \text{ s}$, la longueur de corde affectée par la perturbation vaut $\ell = V \cdot \Delta t = 10 \times 0,030 = 0,30 \text{ m}$.

b. Pour représenter l'aspect de la corde aux différentes dates, il est nécessaire de calculer l'abscisse x_c du front de l'ébranlement.

| date (s) | 0,010 | 0,020 | 0,030 | 0,040 | 0,050 | 0,060 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_c (m) | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 |

En tenant compte de la variation de l'élongation de S_1 , on obtient les représentations suivantes :



c. L'élongation du point M , à la date t , est la même que celle de S_1 à la date $t - \frac{x_M}{V} = t - \frac{0,20}{10} = t - 0,02 \text{ s}$. Les valeurs de y_M s'en déduisent.

| t (s) | 0 | 0,010 | 0,020 | 0,030 | 0,040 | 0,050 | 0,060 |
|------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_M (cm) | 0 | 0 | 0 | 1,0 | 2,0 | 0 | 0 |

$[X]$ signifie dimension de la grandeur X .

On peut aussi calculer l'élongation en chaque point. Par exemple, à la date $t = t_1 = 0,030 \text{ s}$, le point P d'abscisse $x_P = 0,20 \text{ m}$ a pour élongation :

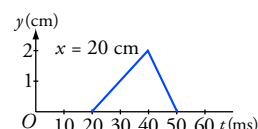
$$y_P(t_1) = y_{S_1} \left(t_1 - \frac{x_P}{V} \right).$$

Avec $t_1 = 0,030 \text{ s}$,
 $V = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

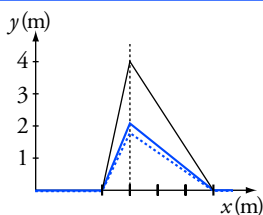
et $x_P = 0,20 \text{ m}$,
nous obtenons :

$$y_P(t_1) = y_{S_1}(0,010 \text{ s}) ;$$

soit : $y_P(t_1) = 1,0 \text{ cm}$.



$y_M(t)$ pour $x = 20 \text{ cm}$.

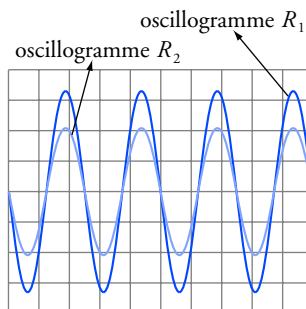


.... onde provenant de S_1
 — onde provenant de S_2
 --- aspect de la corde
 à la date $t = 0,265$ s.

Pour les équations aux dimensions :

- la grandeur masse est notée M ;
- la grandeur quantité de matière est notée q_{dm} ;
- la grandeur température est notée θ .

Utiliser les unités S.I. pour le calcul de la célérité.



Identification des
oscillogrammes.

4. Sur un même schéma, on représente la corde soumise à la seule perturbation provenant de S_1 et la même corde soumise à la seule perturbation provenant de S_2 . Le front de l'onde issu de S_1 ou S_2 a parcouru 2,65 m. À $t = 0,265$ s, les deux perturbations se superposent exactement. L'élongation y_N d'un point N quelconque de la corde est obtenue en effectuant la somme $y_{N_1} + y_{N_2}$.

2. Ondes sonores dans différents milieux

1. Le son se propage dans trois matériaux différents : l'acier, l'eau, l'air. La célérité du son est différente dans chacun de ces matériaux.

Il percevra trois sons distincts.

2. a. La célérité du son dans l'air est indépendante de la fréquence : l'air n'est pas un milieu dispersif.

$$b. [V] = \left(\frac{[R \cdot T]}{[M]} \right)^{1/2} = \left(\frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot q_{dm}^{-1} \cdot \theta^{-1} \cdot \theta}{M \cdot q_{dm}^{-1}} \right)^{1/2} = L \cdot T^{-1}.$$

La relation est homogène.

c. La température absolue vaut :

$$T = 273 + 5,0 = 278 \text{ K} \text{ et } M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

$$V = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times 278}{29 \cdot 10^{-3}}} = 3,3 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$3. \Delta t = \frac{L}{V_{\text{eau}}} - \frac{L}{V_{\text{acier}}} ;$$

$$\text{d'où : } L = \frac{\Delta t}{\frac{1}{V_{\text{eau}}} - \frac{1}{V_{\text{acier}}}} = \frac{0,18}{\frac{1}{1\,500} - \frac{1}{5\,800}} = 3,6 \cdot 10^2 \text{ m}.$$

3. Ondes ultrasonores

1. a. Le récepteur R_2 étant plus éloigné, il reçoit une puissance inférieure à celle reçue par R_1 . L'amplitude de la tension aux bornes du récepteur R_2 est donc la plus faible.

b. D'après la représentation graphique, la période vaut $2,5 \cdot 10^{-5}$ s. On en déduit la fréquence :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-5}} = 40 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 40 \text{ kHz}.$$

c. La distance $M_1 M_2 = 8,5$ mm est la plus petite distance séparant deux points vibrant en phase : ils sont séparés par une longueur d'onde $\lambda = 8,5$ mm.

$$d. \lambda = \frac{V}{f}, \text{ donc } V = \lambda \cdot f = 8,5 \cdot 10^{-3} \times 40 \cdot 10^3 = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Deux points séparés par une distance de 17 mm sont éloignés de 2λ . Ils vibrent en phase. L'oscillogramme est donc identique au premier.

Deux points séparés par une distance de 21,25 mm sont éloignés de $\frac{5}{2} \lambda$.

Ils vibrent en opposition de phase.

3. a. L'onde ultrasonore a parcouru la distance $2d$ au cours d'une durée Δt , d'où : $2d = V \cdot \Delta t$.

b. La plus petite variation de distance détectable vaut :

$$d_m = \frac{V \cdot \Delta t}{2} = \frac{3,4 \cdot 10^2 \times 0,10 \cdot 10^{-3}}{2} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,7 \text{ cm}.$$

4. Onde rectiligne à la surface de l'eau

1. a. La distance entre deux creux est égale à une longueur d'onde. D'après le document et compte tenu de l'échelle, 5λ correspond à 6,0 cm. On en déduit : $\lambda = 1,2 \text{ cm}$.

b. La célérité V , vaut $V = \lambda \cdot f$, soit $V = 1,2 \cdot 10^{-2} \times 20 = 0,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Le point M a un mouvement qui correspond à celui d'un point du vibreur avec un retard $\tau = \frac{d}{V}$.

L'équation horaire du mouvement du point M s'écrit :

$$y_M = a \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot (t - \tau)}{T} \right),$$

$$\text{soit : } y_M = a \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{V \cdot T} \right) \right] = a \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \right].$$

Dans ce cas, $\frac{d}{\lambda} = 12,5$; donc $y_M = a \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - 12,5 \right) \right]$, avec

$a = 2,0 \text{ mm}$ (en supposant l'amortissement négligeable) et

$T = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

La différence de phase entre le mouvement du point M et celui d'un point du vibreur vaut 25π : les deux points vibrent en opposition de phase.

3. À la date $t = 0,25 \text{ s}$, l'onde s'est propagée de :

$$x = V \cdot t = 0,24 \times 0,25 = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5 \lambda.$$

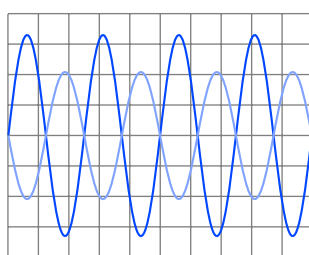
L'élongation d'un point du vibreur est nulle. Le front de l'onde se trouve à une distance égale à 5λ du vibreur et il correspond à un soulèvement. En effet, le point S du vibreur commence par se soulever.

4. a. Après passage de l'ouverture, les ondes deviennent circulaires et se propagent sur une surface de largeur supérieure à celle de l'ouverture. Le phénomène de diffraction est mis en évidence.

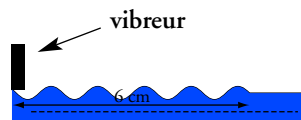
b. On constate que la longueur d'onde n'est pas modifiée.

c. La diffraction ne modifie pas la fréquence. Puisque la longueur d'onde reste la même, la célérité est inchangée.

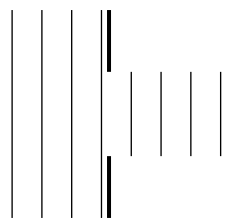
d. Pour une ouverture de largeur 4,0 cm, le phénomène de diffraction disparaît. L'onde est simplement diaphragmée.



Oscillogrammes pour les points distants de 21,25 mm.



Représentation de la surface à $t = 0,25 \text{ s}$.



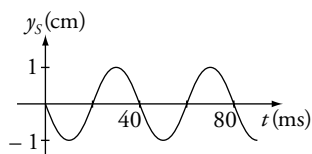
Onde diaphragmée.

Deux conditions initiales sont nécessaires pour déterminer la valeur de ϕ .

Dans cette expression, ϕ s'exprime en radian.

On pourrait aussi utiliser comme expression :

$$y_S(t) = a \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} + \phi \right).$$



Graph de $y_S = f(t)$.

5. Onde sinusoïdale le long d'une corde

1. L'élongation du point S est sinusoïdale. Les conditions initiales permettent de déterminer la valeur de ϕ .

À une date t :

$$y_S(t) = a \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} + \phi \right);$$

$$\frac{dy_S}{dt} = -\frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} + \phi \right).$$

À $t = 0$: $y_S(0) = 0 = a \cdot \cos \phi$; $\left(\frac{dy_S}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot \sin \phi < 0$.

D'où $\cos \phi = 0$ et $\sin \phi > 0$. On en déduit les valeurs possibles pour ϕ :

$$\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Prenons par exemple $\phi = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$y_S(t) = a \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) = -a \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right).$$

2. L'amplitude étant égale à 1,0 cm et la période valant 40 ms, il est possible de tracer le graphe représentatif de $y_S(t) = f(t)$.

3. La longueur d'onde vaut $\lambda = V \cdot T = 12,0 \times 0,040 = 0,48$ m.

Les abscisses des points vibrant en phase avec S sont telles que :

$$x_M - x_S = k \cdot \lambda.$$

Les abscisses des points vibrant en opposition de phase avec S sont telles

que :

$$x_M - x_S = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

4. Le point M reproduit le mouvement du point S avec un retard

$$\tau = \frac{x_M}{V} = 60 \text{ ms. Son élongation vaut :}$$

• pour $t < \tau$: $y_M = 0$;

• pour $t > \tau$: $y_M = a \cdot \cos = \left[2\pi \cdot \left(\frac{t - \tau}{T} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$

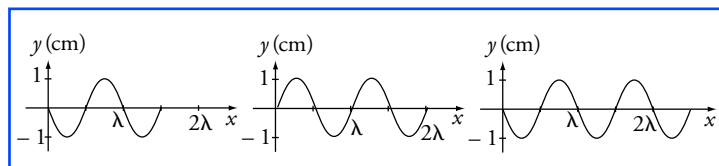
$$y_M = a \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right];$$

avec $\frac{x_M}{\lambda} = \frac{3}{2}$, on obtient :

$$y_M = a \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - 3\pi + \frac{\pi}{2} \right) = a \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y_M = -a \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right) \text{ avec } a = 1,0 \text{ cm et } T = 40 \text{ ms.}$$

| | | | | |
|----|---|---------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| 5. | Date t (s) | 0,060 | 0,080 | 0,10 |
| | Distance parcourue par le front de l'onde | $\frac{3\lambda}{2} = 0,72 \text{ m}$ | $2\lambda = 0,96 \text{ m}$ | $\frac{5\lambda}{2} = 1,2 \text{ m}$ |



Le front de l'onde est un abaissement de la corde, car y_S est décroissante à la date $t = 0$.

6. Un milieu dispersif

1. La distance entre deux crêtes successives est égale à la longueur d'onde.

La distance d est donc égale à $d = 10\lambda \cdot \gamma$; d'où $\lambda = \frac{d}{10\gamma}$.

$$2. \lambda = \frac{V}{f} = \frac{d}{10\gamma}; \text{ d'où } V = \frac{d \cdot f}{10\gamma}.$$

La célérité des ondes dépend de la fréquence. La surface de l'eau est donc un milieu dispersif.

3. a. Notons $[V]$ la dimension de V .

On peut ainsi écrire :

$$[V] = \left(\frac{[A]}{[\mu] \cdot [\lambda]} \right)^{1/2} = \left(\frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-1}}{M \cdot L^{-3} \cdot L} \right)^{1/2} = L \cdot T^{-1};$$

ce qui correspond bien à la dimension d'une célérité.

b. En remplaçant dans l'expression de la célérité λ par $\frac{V}{f}$, on en déduit :

$$V = \sqrt{\frac{2\pi \cdot A \cdot f}{\mu \cdot V}};$$

soit :

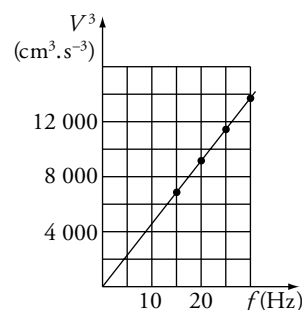
$$V^{3/2} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot A \cdot f}{\mu}}.$$

La compatibilité de l'expression de la célérité est vérifiée car la représentation graphique de V^3 en fonction de f est une droite passant par l'origine du repère.

| | | | | |
|---|-------|-------|--------|--------|
| $f(\text{Hz})$ | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $V^3 (\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})^3$ | 6 859 | 9 261 | 11 390 | 13 824 |

4. La chute d'une goutte d'eau produit une perturbation qui peut être considérée comme la superposition d'ondes sinusoïdales de différentes fréquences. D'après les résultats précédents, les ondes de fréquences plus élevées ont une célérité plus grande et une longueur d'onde plus faible. Les rides les plus excentrées correspondent donc aux ondes de plus grande célérité, elles sont plus resserrées car leur longueur d'onde est plus faible.

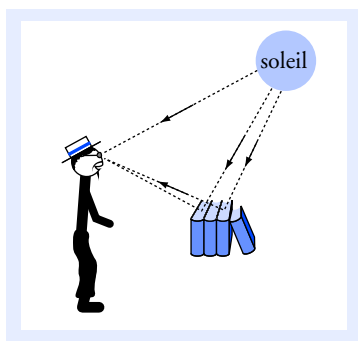
| | | | | |
|------------------------------------|----|----|------|----|
| $f(\text{Hz})$ | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $V(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$ | 19 | 21 | 22,5 | 24 |



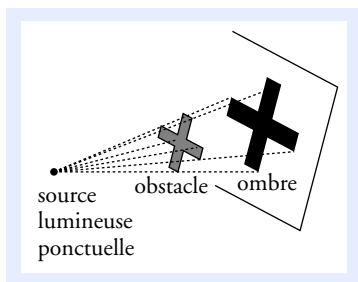
Graph de $V^3 = g(f)$.

11 Optique géométrique

Les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière n'interviennent pas en optique géométrique.



Doc. 1



Doc. 2 L'ombre d'un objet nous montre que dans un milieu homogène la lumière se propage en ligne droite.

Ce qu'il faut savoir...

L'optique géométrique permet de décrire la marche des rayons lumineux à l'aide de lois géométriques simples. L'optique géométrique reste valable tant que les dimensions du système sont très supérieures aux longueurs d'onde de la lumière.

1. Sources de lumière et visibilité d'un objet

■ Sources de lumière

On distingue deux types de sources de lumière (doc.1) :

- les sources primaires qui produisent elles-mêmes la lumière qu'elles émettent : étoile, Soleil, lampe à incandescence, laser, ...
- les sources secondaires qui diffusent dans toutes les directions une partie de la lumière qu'elles reçoivent : une planète, la Lune, le livre que vous lisez, ...

■ Visibilité d'un objet

Un objet n'est visible pour un observateur que si de la lumière issue de l'objet pénètre dans l'œil de l'observateur. La rétine de l'œil est un capteur sensible à la lumière ; il convertit les signaux lumineux en influx nerveux pour le cerveau qui se charge de l'interprétation.

2. Principe de propagation rectiligne de la lumière et modèle du rayon lumineux

■ Propagation rectiligne de la lumière

Dans le vide ou dans un milieu transparent et homogène, la lumière se propage en ligne droite.

Les techniques de visée, de triangulation ainsi que l'interprétation de la formation des images, des ombres, ..., sont fondées sur le principe de propagation rectiligne de la lumière (doc. 2).

Voir exercices n^{os} 1 et 2

■ Rayon lumineux

Dans un milieu transparent et homogène, un point-objet (source ponctuelle) émet de la lumière dans toutes les directions. On peut les représenter par une infinité de traits rectilignes appelés rayons lumineux qui modélisent le trajet suivi par la lumière.

■ Faisceau lumineux

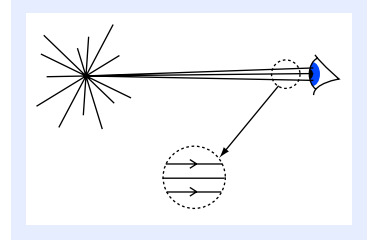
Un faisceau lumineux est constitué d'une infinité de rayons lumineux voisins. Il peut être représenté sur un schéma par les deux rayons délimitant le faisceau.

Voir exercice n° 3

■ Objet à l'infini

Dans le cas d'un objet ponctuel placé à grande distance, les rayons lumineux reçus par l'observateur forment un faisceau de rayons presque parallèles. Dans le cas limite d'un objet ponctuel situé à l'infini, les rayons lumineux reçus par l'observateur forment un faisceau parallèle (doc. 3).

Inversement, à un faisceau parallèle, on fait correspondre un objet ponctuel à l'infini.



Doc. 3 Dans le cas d'un objet ponctuel placé à l'infini, les rayons lumineux reçus par l'observateur forment un faisceau de lumière parallèle.

3. La vitesse de propagation de la lumière

■ Vitesse de propagation dans le vide

Dans le vide, la lumière se propage à la vitesse constante :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sa valeur approchée est :

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (300\,000 \text{ km/s}).$$

Cette vitesse est la limite supérieure pouvant être atteinte par une particule ou un objet.

■ Vitesse de propagation dans un milieu matériel

La vitesse v de la lumière dans un milieu transparent est toujours plus faible que dans le vide. L'indice optique n d'un milieu transparent est défini par la relation :

$$v = \frac{c}{n}, \quad \text{soit} \quad n = \frac{c}{v}.$$

| Milieu | Indice moyen | Vitesse de propagation ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) |
|--------|-----------------------|---|
| vide | 1 | $2,99\,792\,458 \cdot 10^8 \approx 3,00 \cdot 10^8$ |
| air | $1,000\,29 \approx 1$ | $\approx 3,00 \cdot 10^8$ |
| verre | entre 2 et 1,4 | de $1,5$ à $2,1 \cdot 10^8$ respectivement |

n est un nombre sans unité toujours supérieur ou égal à 1.

On parle d'indice moyen car le phénomène de dispersion de la lumière montre que la vitesse de propagation dans un milieu autre que le vide dépend de la fréquence de la radiation.

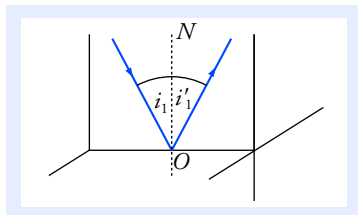
■ L'année de lumière

L'année de lumière (a.l.) correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année :

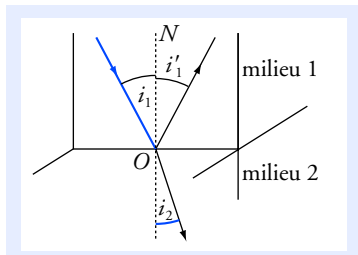
$$1 \text{ a.l.} \approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}.$$

Voir exercices n°s 1 et 9

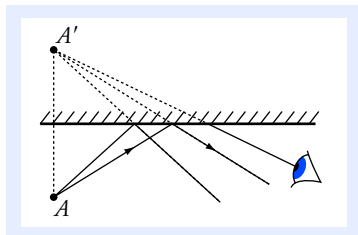
L'année lumière est une unité de longueur utilisée en astronomie, car elle est adaptée aux mesures des très grandes distances.



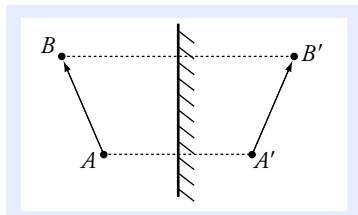
Doc. 4 Lois de Snell-Descartes pour la réflexion.



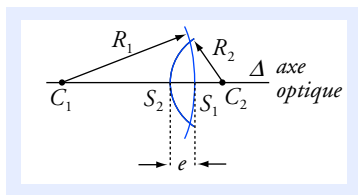
Doc. 5 Lois de Snell-Descartes pour la réfraction. La réfraction s'accompagne toujours d'une réflexion partielle.



Doc. 6 Pour l'observateur, tout se passe comme si les rayons lumineux provenaient de A' . S'il n'est pas informé de la présence du miroir, il croit que l'objet se trouve en A' .



Doc. 7 $A'B'$ est l'image de AB par le miroir.



Doc. 8

4. Les lois de Snell-Descartes

■ Lois de Snell-Descartes pour la réflexion (doc. 4)

- **Première loi** : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale ON à la surface réfléchissante.
- **Seconde loi** : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

$$i_1 = i'_1.$$

Voir exercice n° 3

■ Lois de Snell-Descartes pour la réfraction (doc. 5)

- **Première loi** : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale ON à la surface de séparation.
- **Seconde loi** : les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont liés par la relation :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2,$$

avec n_1 l'indice optique du milieu 1 contenant le rayon incident et n_2 l'indice optique du milieu 2 contenant le rayon réfracté.

Voir exercices n°s 5, 8 et 9

5. Miroir plan

■ Définition

Un miroir plan est constitué d'une surface plane réfléchissante.

■ Image d'un point

Pour l'observateur, tous les rayons issus du point-objet A semblent, après réflexion, provenir d'un même point A' appelé point-image. Les lois de Snell-Descartes sur la réflexion permettent de déterminer la position du point-image : A' est le symétrique de A par rapport au miroir (doc. 6).

Voir exercices n°s 3, 4 et 11

■ Image d'un objet

Un objet étendu AB étant constitué d'une infinité de points-objets, l'image $A'B'$ de AB par un miroir plan est le symétrique de AB par rapport à ce miroir (doc. 7).

6. Les lentilles minces

■ Présentation

- Une lentille est constituée d'un milieu transparent limité par deux surfaces sphériques (ou une sphérique et une plane). L'axe de symétrie de la lentille s'appelle l'**axe optique**.

• On parle de lentille mince si son épaisseur e est petite par rapport aux autres longueurs caractéristiques de la lentille.
Pour une lentille mince, S_1 et S_2 sont pratiquement confondus avec un point O appelé **centre optique**.

• On distingue deux types de lentilles :

– les lentilles convergentes qui modifient un faisceau de lumière parallèle en un faisceau convergent. Celles-ci sont plus minces aux bords qu'au centre (doc. 9a) ;

– les lentilles divergentes qui modifient un faisceau de lumière parallèle en un faisceau divergent. Celles-ci sont plus épaisses aux bords qu'au centre (doc. 9b).

Voir exercice n° 9

■ Caractéristiques et propriétés des lentilles minces convergentes

Foyer objet F : tous les rayons incidents passant par le foyer objet F ressortent de la lentille **parallèlement** à l'axe optique (doc. 10a).

Foyer image F' : tous les rayons incidents **parallèles à l'axe optique** passent, après la lentille, par le foyer image F' (doc. 10b).

Plan focal objet : c'est le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F .

Tous les rayons incidents passant par un point F_1 appartenant au plan focal objet ressortent de la lentille sous la forme d'un faisceau parallèle incliné par rapport à l'axe optique (doc. 10c).

Plan focal image : c'est le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F' .

Un faisceau incident parallèle incliné par rapport à l'axe optique converge, après la lentille, en un point F'_1 appartenant au plan focal image (doc. 10d).

Représentation d'une lentille : une lentille mince convergente utilisée par des rayons incidents faiblement inclinés et peu éloignés de l'axe optique peut être représentée par un segment de centre O fléchi à ses deux extrémités.

Une lentille mince convergente est donc caractérisée par :

- son centre optique O et son axe optique Δ ;
- son foyer objet F et son foyer image F' symétriques l'un de l'autre par rapport à O ;

• sa distance focale objet :

$$f = OF < 0 ;$$

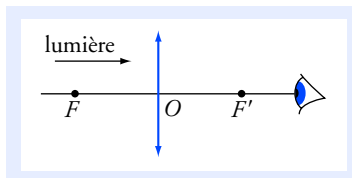
• sa distance focale image :

$$f' = OF' = -f > 0 ;$$

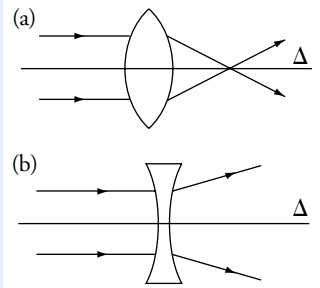
• sa vergence :

$$V = \frac{1}{f'} ;$$

c'est l'inverse d'une distance, l'unité usuelle est la dioptrie ($1\text{d} = 1\text{m}^{-1}$).

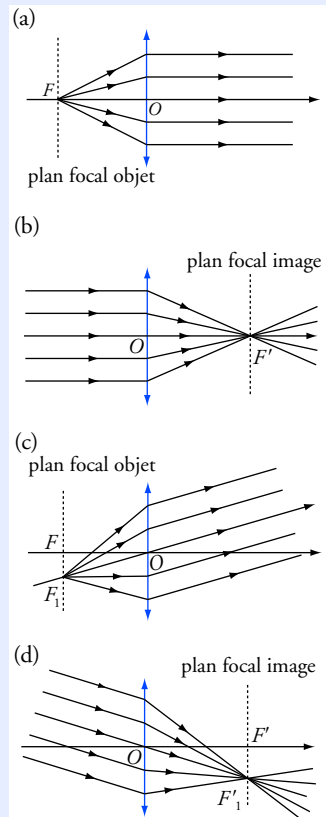


Les distances sont algébriques et c'est le sens de propagation de la lumière qui définit le sens positif.

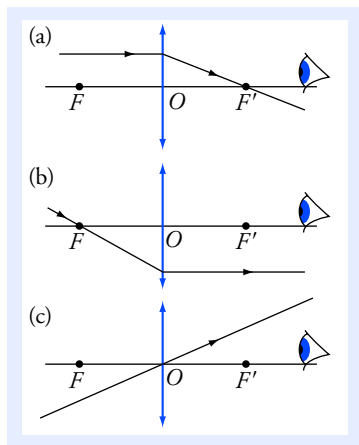


Doc. 9

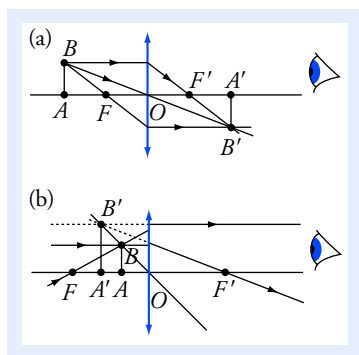
Ces notions n'ont de sens que pour des rayons incidents faiblement inclinés (typiquement inférieurs à 10°) et peu éloignés de l'axe optique.



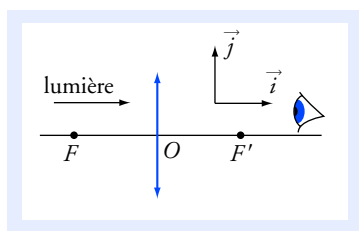
Doc. 10 Modélisation d'une lentille mince convergente.



Doc. 11 Rayons remarquables.



Doc. 12 Exemples courants de constructions d'images.



Les mesures sont algébriques dans un espace orienté par \vec{i} et \vec{j} .

- Si $\gamma > 0$, l'image est dans le même sens que l'objet.
- Si $\gamma < 0$, l'image est dans le sens inverse de l'objet.
- Si $|\gamma| > 1$, l'image est plus grande que l'objet.

■ Rayons remarquables

Pour les constructions géométriques des images, on utilise les propriétés remarquables de trois types de rayons incidents :

- un rayon incident parallèle à l'axe optique converge au foyer image F' de la lentille (doc. 11a) ;
- un rayon incident passant par le foyer objet F sort de la lentille parallèlement à l'axe optique (doc. 11b) ;
- un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié (doc. 11c).

■ Construction d'image (doc. 12)

L'image $A'B'$ d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique est elle-même perpendiculaire à l'axe optique.

On détermine tout d'abord l'image B' d'un objet B situé hors de l'axe par l'intersection de deux rayons remarquables. L'image A' d'un objet situé sur l'axe s'en déduit par projection (doc. 12).

Pour un observateur situé derrière la lentille, tout se passe comme si les rayons issus du point A (ou B) provenaient du point A' (ou B').

Sur le document 12b, le point image B' se trouve sur le prolongement de rayons réels. L'observateur voit une image $A'B'$ plus grande que l'objet AB : la lentille est utilisée comme loupe.

Voir exercices nos 6 et 11

■ Relations de conjugaison et de grandissement

Les positions de l'objet \overline{OA} et de l'image $\overline{OA'}$ sont liées par la relation de conjugaison :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}.$$

f' est positive pour une lentille convergente.

Le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est aussi lié à la position de l'objet et de l'image par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

Voir exercices nos 6 et 11

Pour faire le point...

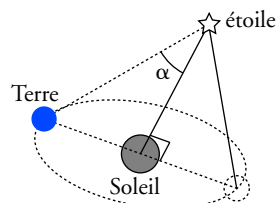
1. Parallaxe

La parallaxe d'un astre (ou angle de parallaxe) est l'angle sous lequel on verrait le rayon de l'orbite terrestre R_T depuis cet astre ($R_T = 150 \cdot 10^6$ km).

Expérimentalement, le changement d'angle avec lequel on observe un astre à six mois d'intervalle correspond à deux fois la parallaxe α .

1. La parallaxe d'Altaïr (α Aquilae) dans la constellation de l'Aigle est $\alpha = 0,204''$. Déterminer la distance D entre notre Soleil et Altaïr en kilomètre.

2. Vous observez Altaïr pendant l'été 2003 ; en quelle année la lumière reçue a-t-elle été émise par l'étoile ?

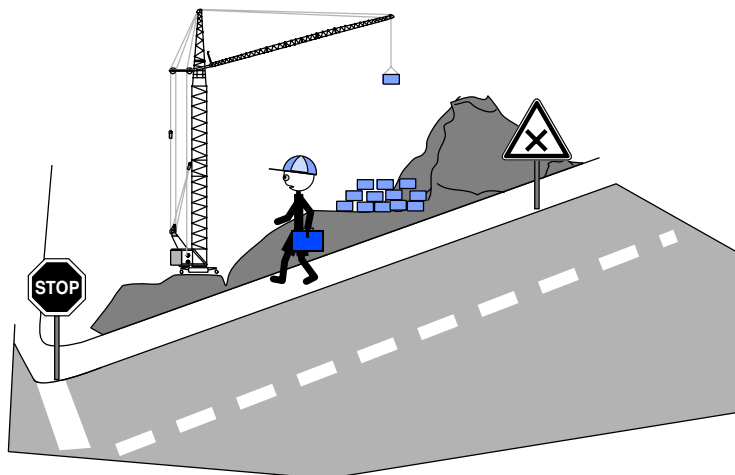


Conseils

- Travailler dans un triangle rectangle et faire les simplifications adéquates.
- Revoir la définition de l'année lumière.
- Combien y a-t-il de secondes d'arc dans un radian ?

2. Distance et hauteur d'une grue de chantier

Sur le trajet du lycée, Quentin passe dans une rue bordant un chantier de construction et se demande comment déterminer la distance le séparant de la grue. Il décide pour cela de réaliser une mesure par triangulation en s'aidant de deux panneaux de signalisation routière distants de 50 m.



L'angle mesuré entre le trottoir et la grue au niveau du panneau stop est $\alpha = 65^\circ$ et celui mesuré au niveau du panneau danger est $\beta = 55^\circ$.

1. Faire un schéma de la situation avec une échelle de 1 cm pour 10 m.
2. En déduire la distance D entre la rue et la grue en utilisant les deux méthodes suivantes :
 - a. par mesure directe sur votre schéma ;
 - b. par calcul trigonométrique.

Quentin se décide alors de faire une estimation de la hauteur H de la grue en effectuant une visée avec sa règle de 30 cm. Celle-ci cache complètement la grue pour une distance œil-règle égale à $d = 45\text{ cm}$.

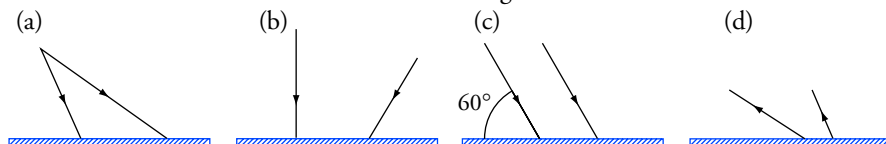
3. Faire un schéma en précisant le sens de propagation de la lumière.
4. Déterminer la hauteur H de la grue.

Conseils

- Faire un schéma clair de la situation en respectant l'échelle (un schéma n'est pas un dessin !).
- Revoir la relation qui existe, dans un triangle quelconque, entre les longueurs des côtés et les sinus des angles.

3. Réflexion de faisceaux lumineux sur un miroir plan

Déterminer le faisceau réfléchi ou incident sur les figures ci-dessous :

**Conseils**

- Revoir les propriétés du miroir plan.
- Pour déterminer le faisceau réfléchi, il est souvent plus simple d'utiliser les propriétés du couple objet-image : tout rayon passant par le point-objet est réfléchi comme s'il provenait du point-image.

4. Champ d'un miroir

Votre œil est placé à $\ell = 2,0\text{ m}$ dans l'axe d'un miroir plan circulaire de rayon $r = 40\text{ cm}$. On cherche à déterminer la partie circulaire visible dans un plan perpendiculaire à l'axe du miroir et situé à $L = 50\text{ m}$ du miroir.

1. Faire un schéma de la situation sans souci d'échelle.
2. Déterminer le rayon R de la partie visible.

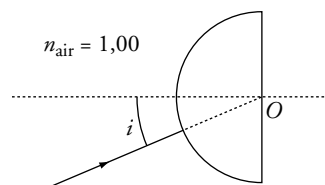
Conseils

- Quel est le point de convergence des rayons qui, après réflexion, passent par l'œil de l'observateur ?
- Penser au théorème de Thalès.

5. Réflexion totale

On dirige un faisceau laser sur un hémicylindre en altuglas ($n = 1,50$) de rayon $R = 10,0\text{ cm}$. On fait en sorte que le faisceau soit orthogonal à l'axe de l'hémicylindre et qu'il passe par cet axe.

1. Quelle est la direction du faisceau dans l'altuglas ?
2. Montrer qu'il existe un angle d'incidence λ limite au-delà duquel il ne peut exister de rayon réfracté en O .
3. Calculer la valeur de λ .
4. Pour $i > \lambda$, que devient le rayon entrant dans l'hémicylindre ?
5. Conclure.

**Conseils**

- Revoir les deux lois de la réfraction.
- La fonction sinus a des valeurs comprises entre -1 et 1 .

6. Construction d'image

On observe sur un écran l'image produite par une lentille convergente d'un objet \overline{AB} de 5,0 cm. La distance lentille-objet est $\overline{OA} = -30$ cm. La distance focale de la lentille est $f' = 10$ cm.

1. À l'aide d'un schéma à l'échelle, déterminer la distance lentille-image $\overline{OA'}$ ainsi que le grandissement γ .
2. Comparer vos résultats avec ceux obtenus par le calcul.

Conseils

- Pour la construction géométrique de l'image, il suffit de tracer deux rayons remarquables issus d'un point-objet situé hors de l'axe. Le rayon qui passe par le centre optique est le plus simple à tracer.
- On utilisera la relation de conjugaison en se souvenant que les mesures des segments sont algébriques.

7. Image de la Lune

On observe la Lune par projection sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de vergence $V = 2,0 \delta$. La taille de l'image est $d = 4,5$ mm.

1. Quelle doit être la distance lentille-écran pour avoir une image nette de la Lune sur l'écran ?
2. Schématiser la situation. En déduire le diamètre angulaire apparent θ de la Lune vue de la Terre.
3. Sachant que la distance Terre-Lune est $L = 3,8 \cdot 10^5$ km, déterminer le diamètre D de la Lune.

Conseils

- La Lune est un objet étendu placé à une distance infinie.
- Revoir les caractéristiques et propriétés des lentilles minces convergentes.

Pour s'entraîner...

8. Lentille hémicylindrique

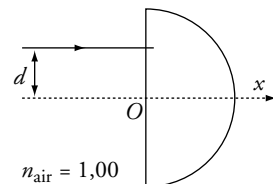
I. On dirige un faisceau laser parallèlement à l'axe de symétrie d'un hémicylindre en altuglas ($n = 1,50$) de rayon $R = 10,00$ cm.

1. Quelle est la direction du faisceau entrant dans l'altuglas ?
2. Déterminer la distance maximale d_M entre le faisceau incident et l'axe de symétrie de l'hémicylindre permettant d'obtenir un rayon sortant à droite de l'hémicylindre.

Calculer d_M .

3. Soit M , l'intersection du rayon émergent avec l'axe (Ox).

Calculer $OM = x$ pour $d = \frac{d_M}{2}$.



II. Dans la suite du problème, on cherche à étudier les propriétés de l'hémicylindre en altuglas comme lentille.

$OM = x$ est fonction de d ; on donne le tableau de valeurs suivant :

| d (cm) (cm) | $\frac{d_M}{1\ 000}$ | $\frac{d_M}{100}$ | $\frac{d_M}{10}$ | $\frac{2d_M}{10}$ | $\frac{3d_M}{10}$ | $\frac{4d_M}{10}$ | $\frac{5d_M}{10}$ | $\frac{6d_M}{10}$ | $\frac{7d_M}{10}$ | $\frac{8d_M}{10}$ | $\frac{9d_M}{10}$ | d_M |
|---------------|----------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------|
| $OM = x$ (cm) | 30,00 | 30,00 | 29,90 | 29,70 | 29,08 | 28,35 | 27,36 | 26,10 | 24,49 | 22,43 | 19,63 | 13,42 |

1. Peut-on considérer l'hémicylindre comme une lentille convergente ou divergente ?
2. Tracer quelques rayons lumineux sur un schéma.
3. Expliquer pourquoi l'ensemble de ces rayons incidents peut être considéré comme le faisceau incident d'un objet ponctuel placé à l'infini sur l'axe (Ox) ?
4. Définir le foyer image d'une lentille. Que pensez-vous du foyer image F' de l'hémicylindre ?
5. Calculer la longueur ℓ séparant les deux positions extrêmes des intersections d'un rayon avec l'axe (Ox). Conclure.

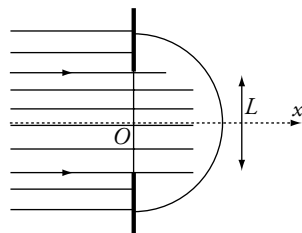
III. On utilise maintenant cette lentille avec des rayons proches de l'axe optique (Ox) en plaçant un cache muni d'une fente de largeur L devant l'hémicylindre.

1. Il est possible de démontrer mathématiquement que

$$\lim_{d \rightarrow 0} x = \frac{n \cdot R}{n - 1}. \text{ Vérifier que ce résultat est cohérent}$$

avec le tableau de valeurs de x . Déterminer l'abscisse $x_{F'_0}$ du foyer image F'_0 défini pour $d \rightarrow 0$.

2. À quelle condition sur L , la distance OM varie de moins d'un pour cent par rapport à OF'_0 ?
3. Conclure.



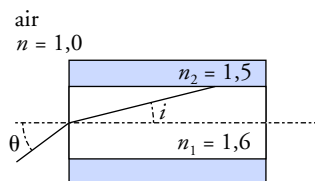
Conseils

- Penser au phénomène de réflexion totale (voir l'exercice 5).
- Revoir la définition du foyer image d'une lentille.

9. Fibre optique

Les fibres optiques guident la lumière dans leur cœur jusqu'à leurs extrémités. Un rayon lumineux se propageant dans l'air pénètre dans une fibre optique à saut d'indice.

1. Quel phénomène physique permet d'interpréter la capacité d'une fibre à guider un rayon lumineux ?
2. Déterminer l'angle maximum i_M pour qu'un rayon puisse être guidé dans le cœur de la fibre.
3. En déduire l'angle d'incidence maximum θ_M .
4. À l'instant $t = 0$, un flash envoie une impulsion lumineuse à l'entrée de la fibre de longueur $L = 10$ m. Calculer la différence de temps de parcours δt entre un rayon sur l'axe et un autre faisant l'angle i_M avec l'axe.



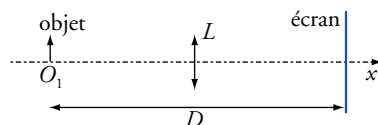
Conseils

- Revoir les lois de la réfraction et faire l'exercice 5 en préambule.
- Quelle est la relation entre vitesse, distance parcourue et temps de parcours ?
- Quelle est la longueur du rayon lumineux qui traverse la fibre par réflexions successives avec un angle i ?

10. Mesure de distance focale par la méthode de Bessel

Une lentille convergente est libre de se déplacer sur un banc optique entre un objet AB placé en $x = 0$ et un écran fixe placé en $x = D$.

1. Montrer qu'il existe dans certaines conditions, que vous préciserez, une ou deux positions x de la lentille permettant d'avoir une image nette sur l'écran.

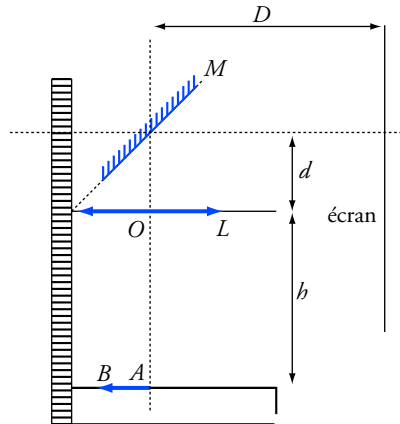


2. Soit $d = x_2 - x_1 > 0$ la distance séparant les deux positions possibles de la lentille. Donner l'expression de la distance focale f' en fonction de D et d .

Conseils

- Revoir la relation de conjugaison d'une lentille convergente.
- À quelle condition une équation du second degré admet-elle deux solutions réelles ?

11. Étude d'un rétroprojecteur



On désire projeter l'image de AB (feuille transparente) sur un écran placé à $D = 3,0$ m de l'axe optique de la lentille.

L'ensemble lentille-miroir du rétroprojecteur est réglable en hauteur. Le miroir plan est incliné de 45° , la lentille a une vergence $V = 2,0 \delta$ et la distance lentille-miroir est $d = 10$ cm.

1. Déterminer la distance objet-lentille h permettant d'obtenir une image nette sur l'écran.
2. Calculer le grandissement.

Conseils

- Penser que l'image d'un objet par un miroir plan est le symétrique de l'objet par rapport à ce miroir.
- Revoir les relations de conjugaison et de grandissement.
- On a ici un système optique complexe : la lentille donne de l'objet AB une première image $A'B'$; $A'B'$ est objet pour le miroir qui en donne une image finale $A''B''$ sur l'écran.

La parallaxe α est donnée en seconde d'angle.

Il faut $60''$ pour faire une minute d'angle et $60'$ pour faire un degré, soit $3\,600''$ pour un degré.

$$\alpha \text{ (rad)} = \frac{\alpha ('')}{3\,600} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

1. Parallaxe

1. Dans le triangle rectangle Terre, Soleil, Altaïr, on a :

$$\tan \alpha = \frac{R_T}{D}$$

et, à condition d'exprimer α en radian, $\tan \alpha \approx \alpha$ car l'angle est petit.

On obtient :

$$D = \frac{R_T}{\alpha}.$$

Application numérique : il faut prendre α en radian.

$$D = 1,51 \cdot 10^{14} \text{ km.}$$

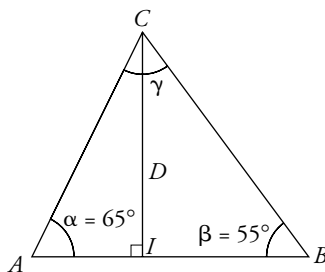
2. La distance d'Altaïr en année de lumière vaut :

$$D \cong 16,0 \text{ a.l. avec } 1 \text{ a.l.} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m.}$$

La lumière reçue au cours de l'été 2003 a été émise seize ans plus tôt par l'étoile, c'est-à-dire pendant l'été 1987.

2. Distance et hauteur d'une grue de chantier

1. Voir le schéma.



2. a. La mesure directe de D donne $4,3 \text{ cm}$. En tenant compte de l'échelle, on trouve : $D = 43 \text{ m}$.

b. Dans le triangle rectangle ACI , on a : $\sin \alpha = \frac{D}{AC}$,

donc :

$$D = AC \cdot \sin \alpha.$$

Pour exprimer la longueur AC , on utilise les relations dans le triangle

$$ABC : \quad \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha}.$$

On peut donc exprimer AC en fonction de AB ($AB = 50 \text{ m}$) et des angles

$$\beta \text{ et } \gamma : \quad AC = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

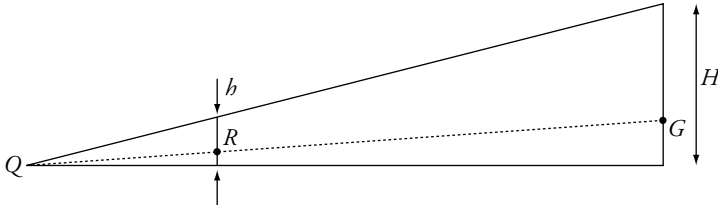
On trouve alors :

$$D = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha.$$

Application numérique : avec $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 60^\circ$, $D = 42,8 \text{ m}$, soit environ 43 m .

La distance séparant Quentin de la grue est $D = 43 \text{ m}$.

3.



4. D'après le théorème de Thalès, le rapport des hauteurs H/h est égal au rapport des distances QG et QR :

$$\frac{H}{h} = \frac{QG}{QR},$$

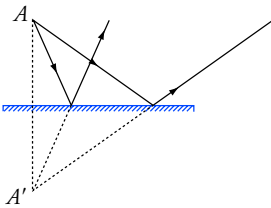
or : $QG = D$ et $QR = d$;

donc : $H = h \cdot \frac{D}{d}.$

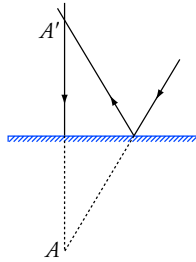
Application numérique : $H = 29$ m. La hauteur de la grue est $H = 29$ m.

3. Réflexion de faisceaux lumineux sur un miroir plan

(a)



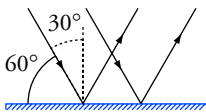
(b)



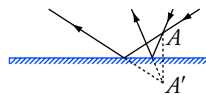
(a) Le faisceau incident passe par un point-objet A , le faisceau réfléchi semble donc émis par l'image A' de A (A' symétrique de A par rapport au miroir).

(b) Le faisceau incident converge vers le point-objet A . Tous les rayons du faisceau réfléchi passent donc par l'image A' de A (A' symétrique de A par rapport au miroir).

(c)



(d)



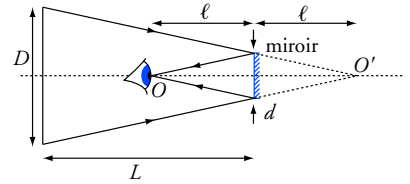
(c) Le faisceau incident est parallèle, le faisceau réfléchi est donc lui aussi parallèle. On le trouve en appliquant directement les lois de Descartes sur la réflexion. Attention, l'angle d'incidence est défini par rapport à la normale au miroir, soit 30° .

(d) Le faisceau réfléchi semble émis par le point-image A' . Le faisceau incident passe donc par un point-objet A , tel que A' soit l'image de A (A' symétrique de A par rapport au miroir).

4. Champ d'un miroir

1. Voir le schéma ci-contre.

La pupille de l'œil O est l'image par le miroir du point O' . Tous les rayons arrivant en O convergent vers O' avant de toucher le miroir.



2. Les points visibles depuis O par réflexion sont tous dans un cône de sommet O' s'appuyant sur le contour extérieur du miroir circulaire. On détermine le diamètre de la partie visible à $L = 50$ m du miroir en appliquant le théorème de Thalès :

$$\frac{D}{L + \ell} = \frac{d}{\ell}, \text{ donc } D = (L + \ell) \frac{d}{\ell}.$$

Application numérique : $D = 21$ m.

La partie visible à 50 m est un disque de diamètre $D = 21$ m.

5. Réflexion totale

1. Le rayon n'est pas dévié car on le dirige vers l'axe de l'hémicylindre. L'angle d'incidence pour l'interface air-altuglas reste toujours égal à zéro.

2. On applique la deuxième loi de la réfraction :

$$n \cdot \sin i = \sin r \text{ avec } r \text{ l'angle du rayon réfracté.}$$

Or $\sin r \leq 1$. Il existe donc un angle d'incidence limite $i = \lambda$ tel que :

$$r = \frac{\pi}{2}, \text{ soit } \sin r = 1.$$

On a donc :

$$\sin \lambda = \frac{1}{n}.$$

3. Application numérique : $\lambda = \text{Arcsin} \frac{1}{n} = 41,8^\circ$.

4. Si $i > \lambda$, alors $\sin r > 1$, ce qui est impossible. Il n'existe donc plus de rayon réfracté.

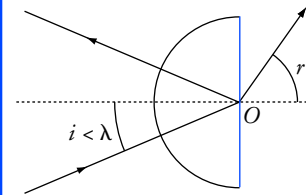
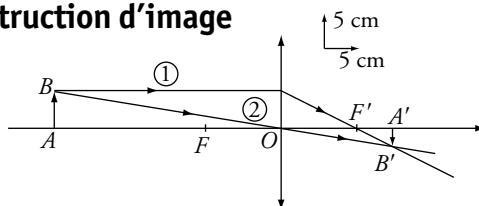
On assiste alors à la réflexion totale du rayon au niveau de l'interface altuglas-air.

5. Ce raisonnement montre qu'un rayon passant d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice $n_2 < n_1$ peut être totalement réfléchi. Pour cela, l'angle d'incidence doit être supérieur à l'angle d'incidence limite λ ,

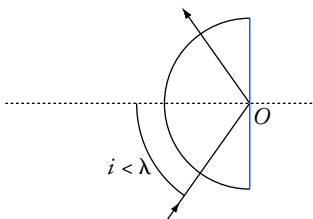
défini par :

$$\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}.$$

6. Construction d'image



La réfraction est possible pour $i < \lambda$. Il existe aussi un rayon réfléchi.



La réfraction est impossible pour $i > \lambda$. Toute la lumière incidente est réfléchi.

1. Sur la construction, on trouve : $\overline{OA'} = 15 \text{ cm}$ et $\overline{A'B'} = -2,5 \text{ cm}$.

Le grandissement vaut : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -0,5$; l'image est plus petite et inversée.

2. La relation de conjugaison donne $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{\overline{OA} + f'} = 15 \text{ cm}$.

Pour le grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, on obtient $\gamma = -0,5$.

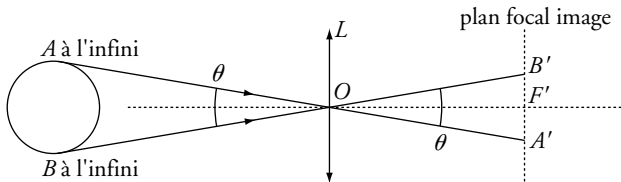
Les résultats trouvés par les deux méthodes sont donc concordants.

7. Image de la Lune

1. Chaque point de la lune se comporte comme un point objet situé à l'infini. L'image d'un objet placé à l'infini ($\overline{OA} \rightarrow -\infty$) se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le foyer image F' appelé plan focal image. On obtient donc une image nette de la Lune si la distance lentille-écran est la distance focale image de la lentille f' , soit :

$$f' = \frac{1}{V} = 50 \text{ cm}.$$

2.



Dans le triangle $OF'B'$: $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d}{2f'}$ et $\tan \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ car θ est petit.

On trouve donc : $\theta = \frac{d}{f'}$ (en radian).

Application numérique : $\theta = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ ou $\theta = 0,51^\circ$.

Le diamètre apparent θ de la Lune vu de la Terre est $\theta = 0,51^\circ$.

3. Le grandissement vaut $|\gamma| = \frac{d}{D} = \frac{f'}{L}$ avec D le diamètre de la Lune, soit :

$$D = L \cdot \frac{d}{f'} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

Le diamètre D de la Lune est $D = 3,4 \cdot 10^3 \text{ km}$.

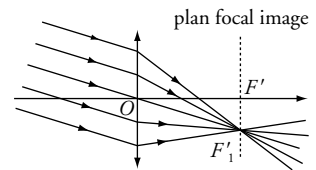
8. Lentille hémicylindrique

1.1. Le rayon entrant n'est pas dévié car l'incidence est nulle.

2. Dans le triangle OIJ , on a :

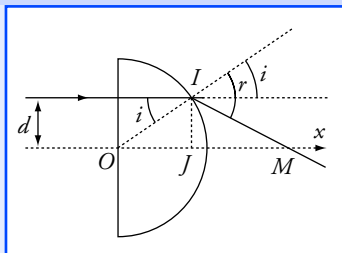
$$\sin i = \frac{d}{R} \text{ avec } OI = R \text{ et } JI = d.$$

L'image d'une source ponctuelle à l'infini est un point dans le plan focal image.



Comme un objet étendu est constitué d'une infinité de sources ponctuelles, son image se trouve donc elle aussi dans ce même plan.

L'application numérique permet d'obtenir θ en radian. On le convertit ensuite en degré pour mieux évaluer son ordre de grandeur.



On a un rayon émergent si $i \leq \lambda$, ou $\sin i \leq \sin \lambda$, avec $\sin \lambda = \frac{1}{n}$.

Donc la condition d'émergence d'un rayon est :

$$\frac{d}{R} \leq \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad d \leq \frac{R}{n}.$$

On trouve :

$$d_M = \frac{R}{n} = 6,66 \text{ cm}.$$

3. $OM = x = OJ + JM$. Dans le triangle OIJ rectangle, on a :

$$OJ = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Application numérique : avec $d = \frac{d_M}{2}$, on trouve $OJ = 9,43 \text{ cm}$.

De plus, l'angle $\widehat{JMI} = r - i$, et $\tan(r - i) = \frac{d}{JM}$, donc :

$$JM = \frac{d}{\tan(r - i)}.$$

Application numérique : avec $\sin i = \frac{d_M}{2 \cdot R}$, on trouve, en utilisant la

fonction Arcsin : $i = 19,45^\circ$.

Comme $n \cdot \sin i = \sin r$, $r = 30^\circ$, et donc $JM = 17,93 \text{ cm}$.

Or $OM = x = OJ + JM$, donc la distance OM pour $d = \frac{d_M}{2}$ est :

$$OM = 27,36 \text{ cm}.$$

II.1. L'hémicylindre peut être considéré comme une lentille convergente. En effet, celui-ci est plus mince aux bords qu'au centre.

2. Voir le schéma ci-contre.

3. Un faisceau de lumière émis par un objet ponctuel placé à l'infini est un ensemble de rayons parallèles. De plus, si l'objet est placé sur l'axe optique, le faisceau est parallèle à l'axe optique.

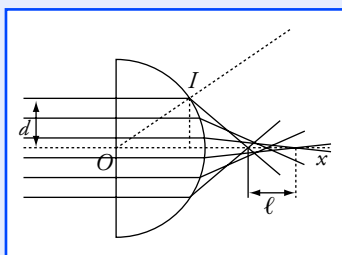
4. Définition du foyer image F' : les rayons incidents parallèles à l'axe optique coupent, après la lentille convergente, l'axe optique en un point appelé le foyer image F' . Le foyer image F' est donc l'image d'un objet ponctuel à l'infini placé sur l'axe optique.

Dans le cas de l'hémicylindre, on constate qu'il n'existe pas de foyer unique mais une tache comprise entre 30 cm et 13,42 cm.

5. Entre les deux positions extrêmes, on a : $\ell = 30 - 13,42 = 16,58 \text{ cm}$. L'image d'un point-objet placé à l'infini sur l'axe optique n'est pas un point mais une tache ayant une longueur $\ell = 16,58 \text{ cm}$.

III.1. En observant le tableau de valeurs, on constate que la distance OM tend vers 30 cm quand d diminue.

L'abscisse $x_{F'_0}$ du foyer image F'_0 pour $d \rightarrow 0$ est donc : $x_{F'_0} = 30,00 \text{ cm}$.



a. La position du point M ne doit pas s'éloigner de plus de 0,30 cm de F'_0 . Cette condition est réalisée pour des distances d inférieures à $\frac{2d_M}{10}$,

soit pour la longueur L du diaphragme :

$$L \leq 2 \cdot \frac{2d_M}{10}.$$

Application numérique : avec $d_M = 6,66$ cm, on trouve $L \leq 2,66$ cm.

3. On diminue nettement la taille de la tache correspondant au foyer image en n'utilisant que les rayons proches de l'axe. La tache image est d'autant plus ponctuelle que les rayons incidents sont proches de l'axe optique. Ce n'est qu'à cette condition que ce système réel se rapproche de la lentille mince idéale.

9. Fibre optique

1. Il peut y avoir réflexion totale sur l'interface séparant le cœur et la gaine de la fibre. En effet, l'indice de la gaine est inférieur à celui du cœur. Il existe donc un angle d'incidence limite λ au-delà duquel il y aura réflexion totale des rayons.

L'angle d'incidence limite λ est donné par $\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}$, soit :

$$\lambda = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}.$$

Application numérique : on trouve $\lambda = 70^\circ$.

2. D'après le schéma : $i_M = 90^\circ - \lambda = 20^\circ$.

Il y aura propagation des rayons dans la fibre pour des angles $i < i_M$, soit $i < 20^\circ$.

3. En appliquant la loi de Snell-Descartes sur l'interface air-cœur, on obtient :

$$n_{\text{air}} \cdot \sin \theta_M = n_1 \cdot \sin i_M \text{ avec } n_{\text{air}} = 1,0 ;$$

donc : $\theta_M = \text{Arcsin} (n_1 \cdot \sin i_M) = 33^\circ$.

4. Le rayon sur l'axe ($i = 0^\circ$) parcourt la fibre de longueur L dans un

temps $t_0 = \frac{L}{v_1} = \frac{n_1 \cdot L}{c}$ avec $v_1 = \frac{c}{n_1}$, la vitesse de propagation de la

lumière dans la fibre.

Le rayon faisant l'angle i_M avec l'axe doit parcourir une distance L' plus

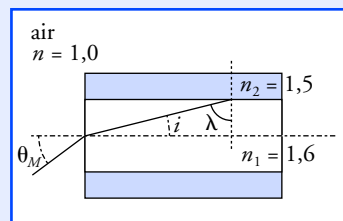
grande que L avec $L' = \frac{L}{\cos i_M}$.

Le temps de parcours dans la gaine est donc :

$$t_{i_M} = \frac{L'}{v_1} = \frac{n_1 \cdot L}{c \cdot \cos i_M} > t_0.$$

La différence de temps δt entre un rayon sur l'axe et un rayon faisant l'angle i_M avec l'axe pour parcourir une longueur L est donc :

$$\delta t = t_{i_M} - t_0 = \frac{n_1 \cdot L}{c} \left(\frac{1}{\cos i_M} - 1 \right).$$



Si $\Delta < 0$, soit $D < 4f'$, on n'obtient aucune image sur l'écran quelque soit la position de la lentille.

Dans la relation de conjugaison, les mesures sont algébriques. Il ne faut pas oublier d'orienter l'espace sur votre schéma.

Application numérique : pour $L = 10$ m, on trouve $\delta t = 3,4 \cdot 10^{-9}$ s. Le flash lumineux subit donc un étalement temporel à la sortie de la fibre optique. Ce phénomène limite le nombre maximum d'informations pouvant transiter à travers la fibre.

10. Mesure de distance focale par la méthode de Bessel

1. On applique la relation de conjugaison avec $\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'}$,

avec $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = D-x$.

Après développement, on obtient le polynôme suivant :

$$x^2 - D \cdot x + D \cdot f' = 0.$$

Il y a donc des solutions réelles si :

$$\Delta = D \cdot (D - 4f') \geq 0.$$

• Si $\Delta > 0$, soit $D > 4f'$, les deux positions de la lentille sont :

$$x_1 = \frac{D - \sqrt{D \cdot (D - 4f')}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D + \sqrt{D \cdot (D - 4f')}}{2}.$$

• Si $\Delta = 0$, soit $D = 4f'$, alors l'unique position de la lentille est :

$$x = \frac{D}{2} = 2f'.$$

2. On se place dans le cas où $D > 4f'$.

La distance séparant les deux positions possibles de la lentille est :

$$d = x_2 - x_1 > 0, \quad \text{soit} \quad d = \sqrt{D \cdot (D - 4f')}.$$

En élevant au carré, on trouve : $d^2 = D^2 - 4 \cdot D \cdot f'$,

$$\text{d'où :} \quad f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}.$$

11. Étude d'un rétroprojecteur

1. Le rétroprojecteur est constitué d'une lentille et d'un miroir plan. On appelle $A'B'$ l'image de AB par la lentille et $A''B''$ l'image de $A'B'$ par le miroir plan.

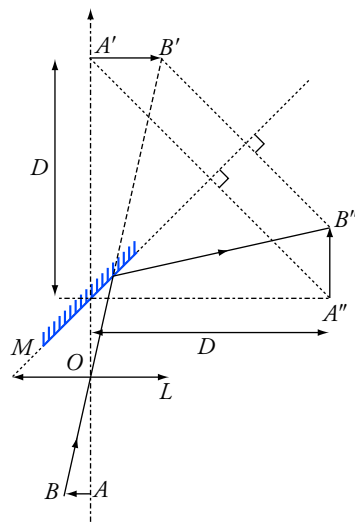
$$AB \xrightarrow{L} A'B' \xrightarrow{M} A''B''$$

Or l'image $A''B''$ de $A'B'$ par un miroir plan est le symétrique de $A'B'$ par rapport à ce miroir.

D'après les propriétés de la symétrie, la distance miroir- $A''B''$ est la même que la distance miroir- $A'B'$, soit $D = 3,0$ m.

On en déduit que la distance lentille- $A'B'$ est :

$$\overline{OA'} = D + d = 3,1 \text{ m}.$$



La relation de conjugaison de la

lentille $-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'}$, avec $f' = \frac{1}{V} = 50 \text{ cm}$, permet de

trouver la distance lentille-objet \overline{OA} :

$$\overline{OA} = \frac{f' \cdot \overline{OA'}}{f' - \overline{OA'}} = -60 \text{ cm}.$$

La distance objet-lentille h permettant d'obtenir une image nette sur l'écran est : $h = |\overline{OA}| = 60 \text{ cm}$.

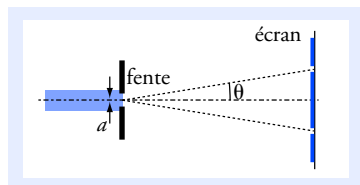
2. Pour un miroir plan, l'objet et l'image sont symétriques par rapport à ce miroir et de même taille. $A'B'$ et $A''B''$ ont donc la même longueur. Le grandissement est alors :

$$|\gamma| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

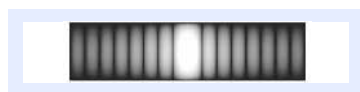
avec $OA' = D + d = 3,1 \text{ m}$ et $OA = h = 60 \text{ cm}$, soit $|\gamma| = 5,2$.

L'image sur l'écran est 5,2 fois plus grande que l'objet AB sur le transparent.

12 La lumière



Doc. 1 Diffraction d'un faisceau parallèle par une fente fine.



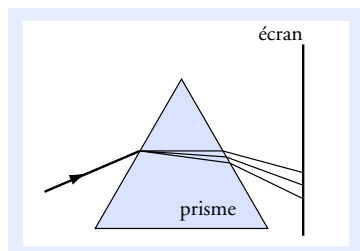
Doc. 2 Aspects de l'écran.

Contrairement aux ondes sonores, les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le vide.

L'onde émise par un laser est monochromatique

| Couleur | Longueur d'onde (nm) | Fréquence (10^{14} Hz) |
|-------------|----------------------|---------------------------|
| ultraviolet | < 400 | > 7,5 |
| violet | 420 | 7,1 |
| bleu | 470 | 6,4 |
| vert | 560 | 5,7 |
| jaune | 580 | 5,2 |
| rouge | 650 | 4,6 |
| infrarouge | > 800 | < 3,7 |

Doc. 3 Correspondance entre les fréquences, les longueurs d'onde dans le vide et les couleurs.



Doc. 4 Le verre étant un milieu dispersif, un prisme peut décomposer la lumière afin d'obtenir son spectre.

Ce qu'il faut savoir...

1. La lumière : modèle ondulatoire

■ Le caractère ondulatoire de la lumière

On peut observer avec la lumière le même phénomène de diffraction que celui déjà rencontré avec les ondes mécaniques (voir le *chapitre* 10, *doc.* 8). Cette analogie conduit à décrire la lumière comme une **onde**. Dans le cas de la diffraction d'un faisceau parallèle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ par une fente de largeur a , l'écart angulaire θ entre le milieu de la tache centrale et la première extinction est donné par (*doc.* 1 et 2) :

$$\theta = \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } \theta \text{ en radian (rad).}$$

- L'onde lumineuse se propage **dans le vide** avec la célérité c .

Sa valeur exacte est : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On utilise généralement sa valeur approchée : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

■ L'onde (ou radiation) lumineuse monochromatique

Une onde lumineuse **monochromatique** (voir le *chapitre* 10) est caractérisée par sa fréquence ν et sa longueur d'onde **dans le vide** λ . Ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

La couleur d'une onde lumineuse monochromatique est déterminée par sa fréquence ν ou sa longueur d'onde dans le vide λ (*doc.* 3).

Voir exercices n°s 2 et 3

■ Propagation de la lumière dans un milieu transparent

- La vitesse de propagation v de la lumière dans un milieu transparent est toujours plus faible que dans le vide. Si elle dépend de la fréquence ν de l'onde, le milieu est un **milieu dispersif** (*doc.* 4).
- L'indice optique du milieu pour une onde lumineuse monochromatique de fréquence ν et qui se propage à la vitesse $v(\nu)$ est donné par :

$$n(\nu) = \frac{c}{v(\nu)}.$$

Voir exercice n° 1

■ Lumières polychromatiques

Une lumière polychromatique est composée de plusieurs ondes lumineuses monochromatiques de fréquences différentes, soit plusieurs couleurs.

Son spectre se compose donc d'un ensemble de raies correspondant à chaque fréquence et donc à chaque longueur d'onde dans le vide.

- La lumière émise par une lampe à vapeur de mercure est un exemple de lumière polychromatique (doc. 5).
- La lumière blanche émise par une lampe à incandescence est une lumière polychromatique composée de toutes les couleurs visibles. Le spectre de la lumière blanche est un spectre continu (doc. 6).

Voir exercice n° 1

2. La lumière : modèle corpusculaire

■ Le photon

En 1905, A. Einstein associe à une onde lumineuse monochromatique de fréquence ν un flux de particules appelées **photons** transportant chacun une quantité élémentaire d'énergie E .

Le photon est un corpuscule de masse et de charge nulle se propageant dans le vide avec la célérité c de la lumière. Le quantum d'énergie E de chaque photon est lié à la fréquence ν , ou à la longueur d'onde dans le vide λ , de l'onde lumineuse par :

$$E = h \cdot \nu \quad \text{ou} \quad E = h \cdot \frac{c}{\lambda}.$$

h est la constante de Planck ; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s.

■ Spectre atomique et niveaux d'énergie

L'étude des spectres d'émission des atomes montre que ceux-ci sont toujours des spectres de raies. Les ondes lumineuses correspondant à chaque raie ont des fréquences bien déterminées qui permettent de caractériser l'élément émettant la lumière.

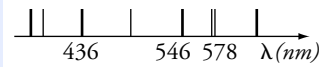
Afin d'interpréter le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène (doc. 7), Bohr postula en 1913 que l'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs discrètes appelées *niveaux d'énergie* ; on dit alors que l'énergie de l'atome est quantifiée.

Le passage de l'atome d'un niveau d'énergie E_m à un autre E_n se fait par *émission* ou *absorption d'un photon* dont l'énergie E est donnée par :

$$E = |E_m - E_n| = h \cdot \nu.$$

Ce postulat se généralise à tous les atomes, aux molécules ainsi qu'aux noyaux d'atome et permet d'interpréter leurs spectres de raies respectifs.

Voir exercices n°s 2 et 3



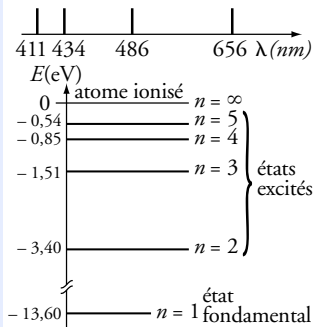
Doc. 5 Spectre de raies du mercure.



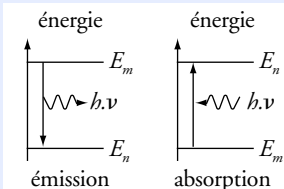
Doc. 6 Spectre continu de la lumière blanche.

Dans le domaine du visible, les énergies transportées par les photons sont comprises entre $2,5 \cdot 10^{-19}$ J (ou 1,5 eV) pour le rouge sombre à 800 nm, et $5 \cdot 10^{-19}$ J (ou 3,1 eV) pour le violet à 400 nm.

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$



Doc. 7 Spectre et diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène. Par convention, $E = 0$ pour l'atome ionisé.



Doc. 8 Le passage de l'atome d'un niveau d'énergie E_m à un niveau inférieur E_n s'accompagne de l'émission d'un photon. Dans le cas contraire, il y a absorption d'un photon.

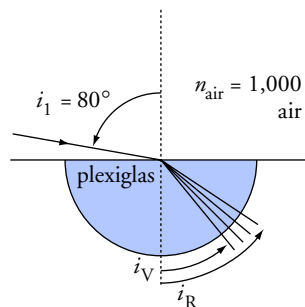
Pour faire le point...

1. Indice du plexiglas

Un rayon de lumière issu d'une lampe à hydrogène se propage dans l'air, puis pénètre dans un bloc de plexiglas hémicylindrique sous une incidence de 80° avec la normale à la surface. Le rayon entre dans le demi-cylindre au niveau de l'axe de celui-ci.

Les valeurs des angles des différents rayons réfractés, mesurés sur un goniomètre, sont données dans le tableau ci-dessous :

| λ dans le vide (nm) | 410,7 | 434,0 | 486,1 | 656,3 |
|----------------------------------|----------|--------|-------|-------|
| Couleur | violette | indigo | bleu | rouge |
| Angle de réfraction ($^\circ$) | 40,90 | 41,04 | 41,20 | 41,58 |



1. Comment appelle-t-on le phénomène mis en évidence ? Quelle en est la raison ?
2. Déterminer les indices n_C du plexiglas pour les différentes radiations émises par l'hydrogène.
3. Exprimer la longueur d'onde λ_C dans l'hémicylindre en fonction de l'indice n_C et de la longueur d'onde dans le vide λ . Calculer leurs valeurs respectives.
4. L'indice de la plupart des milieux transparents peut être modélisé par la relation de Cauchy :

$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Calculer les valeurs de A et B dans le système international d'unités.

Conseils

- Il faut utiliser les lois de Descartes relatives à la réfraction (voir le chapitre 11).
- Combien d'équations faut-il écrire pour calculer les valeurs de A et de B ?

Pour s'entraîner...

2. Spectre de l'atome d'hydrogène

Les niveaux d'énergie E_n de l'atome d'hydrogène sont donnés par :

$$E_n = \frac{-E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = 13,60 \text{ eV} \quad \text{et} \quad n \text{ un entier positif.}$$

1. Calculer en électronvolt (eV) l'énergie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental et dans les quatre premiers niveaux excités. Les représenter sur un diagramme sans souci d'échelle.
2. Quelle énergie minimale doit transporter un photon pour ioniser un atome d'hydrogène initialement dans son état fondamental ? Préciser si l'onde lumineuse associée à ce photon appartient au domaine du visible en calculant sa fréquence et sa longueur d'onde dans le vide.
3. Montrer que certaines transitions d'énergie aboutissant au premier niveau excité se manifestent par l'émission d'une onde lumineuse appartenant au domaine du visible.
4. Bien avant de connaître les hypothèses de N. Bohr, on avait constaté que les longueurs d'ondes du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène suivent la formule de Ritz :

$$\frac{1}{\lambda_{m \rightarrow n}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \lambda_{m \rightarrow n} \text{ étant la longueur d'onde correspondant à une transition de}$$

l'état m vers l'état n ($m > n$) et R_H la constante de Rydberg pour l'atome d'hydrogène.

Retrouver la formule de Ritz et donner la valeur de R_H dans le système international d'unités.

Données : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conseils

- L'atome est ionisé quand son énergie vaut $E = 0$.
- Quelle est la valeur de n pour le premier niveau excité ?
- Faire attention aux unités pour les applications numériques.

3. Laser He-Ne

Le laser hélium-néon (He-Ne) est réalisé à partir d'une cavité optique contenant un mélange gazeux essentiellement constitué de néon (15 %) et d'hélium (85 %).

L'émission laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ résulte de la transition entre deux niveaux d'énergie du néon E_2 et E_1 . Par des décharges électriques, on excite les atomes d'hélium dans un niveau d'énergie E_3 très proche de l'état E_2 du néon. Les collisions entre atomes de néon et d'hélium permettent un transfert d'énergie entre ces atomes, ce qui permet de maintenir une population constante d'atomes de néon dans l'état E_2 .

1. Déterminer la couleur, la fréquence et l'énergie des photons émis par la transition des atomes de néon entre ses niveaux d'énergie E_2 et E_1 .

2. En déduire, en électronvolt, la valeur du niveau d'énergie E_1 de l'atome de néon.

3. La puissance typique de ce type de laser est $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$. En déduire le nombre de photons émis par le laser chaque seconde.

4. L'un des miroirs de la cavité n'étant pas totalement réfléchissant, une partie de la lumière peut alors sortir par cette « fenêtre » circulaire de diamètre $d = 0,6 \text{ mm}$. Il se forme alors le faisceau lumineux dont l'angle au sommet du cône de divergence est égal 2θ .

Quel phénomène physique peut-être à l'origine de la divergence du faisceau laser ?

Déterminer alors l'ordre de grandeur du demi-angle au sommet θ du cône formé par le faisceau divergent représenté ci-contre.

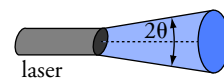
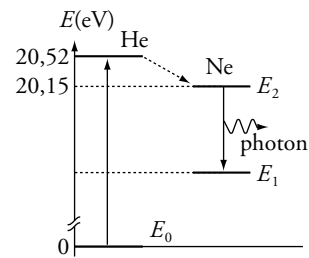
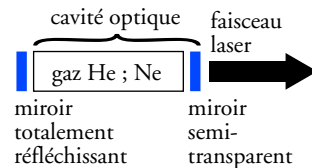
5. Avec ce laser, l'œil humain risque des lésions irréversibles si la puissance lumineuse par unité de surface est supérieure à $\Pi_s = 170 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$. Déterminer la distance minimale de sécurité permettant une vision directe du faisceau laser. Conclure.

Données : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On admettra que l'ouverture angulaire d'un faisceau diffracté par un trou circulaire de diamètre D est du même ordre de grandeur que celle qui est observée lors de la diffraction par une fente de largeur D .

Conseils

- La puissance correspond à une quantité d'énergie par unité de temps, soit $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Calculer la surface minimale S_{\min} de la section droite du faisceau permettant d'avoir une puissance surfacique $\Pi_s = 170 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$. Ne pas hésiter à faire un petit schéma !



Pour vérifier que la relation entre l'indice et la longueur d'onde suit bien la loi de Cauchy, on peut tracer sur un graphe n en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$ et vérifier que les points sont sur une droite de pente B .

1. Indice du plexiglas

1. Ce montage réalise la décomposition de la lumière issue de la lampe à hydrogène. Le plexiglas est donc un milieu *dispersif*.

2. On applique la deuxième loi sur la réfraction avec n_C et i_C respectivement indice et angle de réfraction pour une couleur :

$n_{\text{air}} \cdot \sin i_1 = n_C \cdot \sin i_C$, soit $n_C = \frac{n_{\text{air}} \cdot \sin i_1}{\sin i_C}$ (voir les valeurs sur le tableau ci-dessous).

3. La longueur d'onde λ_C d'une onde lumineuse monochromatique de fréquence ν est :

$$\lambda_C = \frac{v(\nu)}{\nu}.$$

Or la vitesse $v(\nu)$ de propagation de l'onde dans le milieu transparent est définie par :

$$v(\nu) = \frac{c}{n_C}.$$

Par combinaison, on trouve :

$$\lambda_C = \frac{v(\nu)}{n_i} = \frac{c}{n_C \cdot \nu},$$

soit $\lambda_C = \frac{\lambda}{n_C}$ avec λ la longueur d'onde dans le vide.

Application numérique : voir les valeurs dans le tableau ci-dessous

| λ dans le vide (nm) | Couleur | Indice n_C | λ_C dans le plexiglas (nm) |
|-----------------------------|----------|--------------|------------------------------------|
| 410,7 | violette | 1,504 | 273,1 |
| 434,0 | indigo | 1,500 | 289,3 |
| 486,1 | bleu | 1,495 | 325,2 |
| 656,3 | rouge | 1,484 | 442,3 |

4. Pour déterminer les constantes A et B du plexiglas, soit deux inconnues, il suffit de deux équations obtenues en écrivant la relation de Cauchy pour deux valeurs de l'indice :

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \quad \text{et} \quad n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}.$$

On obtient B avec la différence :

$$n_2 - n_1 = \left(A + \frac{B}{\lambda_2^2} \right) - \left(A + \frac{B}{\lambda_1^2} \right);$$

soit :

$$B = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)^{-1},$$

puis :

$$A = n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2}.$$

Application numérique : avec $n_2 = n_1 = 1,500$ (pour $\lambda_2 = 434,0$ nm) et $n_1 = n_R = 1,484$ (pour $\lambda_1 = 656,3$ nm).

On obtient : $B = 5,356 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$ et $A = 1,472$ (sans dimension).

2. Spectre de l'atome d'hydrogène

1. L'énergie dans l'état fondamental ($n = 1$) ainsi que dans les quatre premiers niveaux excités ($n = 2 ; 3 ; 4 ; 5$) s'obtient par :

$$E_n = \frac{-E_0}{n^2}.$$

$$E_1 = -13,60 \text{ eV} ; E_2 = -3,40 \text{ eV} ; E_3 = -1,51 \text{ eV} ; E_4 = -0,85 \text{ eV} ; E_5 = -0,54 \text{ eV}.$$

2. Pour ioniser l'atome d'hydrogène, le photon incident doit fournir une énergie au moins égale à la différence d'énergie $E_\infty - E_1$.

L'énergie du photon absorbé est donc supérieure à $E_{\min} = E_\infty - E_1$;

$$\text{soit : } E_{\min} = 13,60 \text{ eV} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

La fréquence de l'onde associée est donnée par $E = h \cdot \nu$, soit $\nu = \frac{E}{h}$.

$$\text{On obtient } \nu = 3,28 \cdot 10^{15} \text{ Hz et } \lambda = \frac{c}{\nu} = 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m},$$

$$\text{soit } \lambda = 91,4 \text{ nm}.$$

Cette radiation fait partie des ultraviolets, car $\lambda < 400 \text{ nm}$.

3. Les transitions énergétiques aboutissant au premier niveau excité ($n = 2$) émettent des photons dont les énergies sont comprises entre :

$$E_{\min} = E_3 - E_2 = 1,89 \text{ eV et } E_{\max} = E_\infty - E_2 = 3,40 \text{ eV}.$$

Les longueurs d'onde dans le vide sont respectivement :

$$\lambda_{\max} = h \cdot \frac{c}{E_{\min}} = 657 \cdot 10^{-9} \text{ m et } \lambda_{\min} = h \cdot \frac{c}{E_{\max}} = 365 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

Soit un domaine de longueurs d'onde : $365 \text{ nm} \leq \lambda \leq 657 \text{ nm}$.

Pour certaines de ces radiations, λ est compris entre 400 nm et 800 nm.

Elles sont donc visibles.

4. La transition de l'atome d'un niveau d'énergie E_m vers un niveau d'énergie E_n ($E_n < E_m$) s'accompagne de l'émission d'un photon

$$\text{d'énergie : } E_{m \rightarrow n} = E_m - E_n \text{ avec } E_{m \rightarrow n} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{m \rightarrow n}},$$

$$\text{soit : } \frac{1}{\lambda_{m \rightarrow n}} = \frac{E_{m \rightarrow n}}{h \cdot c}.$$

L'énergie de l'atome étant $E_n = \frac{-E_0}{n^2}$, on obtient par combinaison :

$$\frac{1}{\lambda_{m \rightarrow n}} = \frac{E_0}{h \cdot c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

$$\text{Par identification, on trouve : } R_H = \frac{E_0}{h \cdot c}.$$

$$E_0 = 13,60 \times 1,60 \cdot 10^{-19} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} ; \text{ d'où } R_H = 10,9 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}.$$

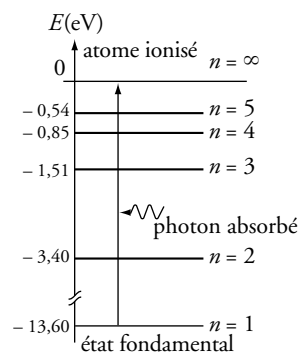
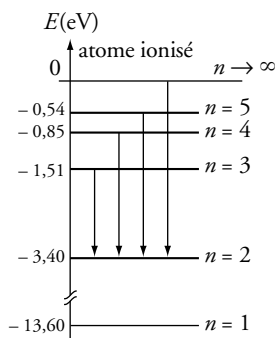


Diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène.

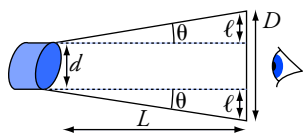
La constante de Planck étant donnée en J.s (unité S.I.) , il faut impérativement exprimer l'énergie en Joule pour le calcul de la fréquence ou de la longueur d'onde.

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{donc} \quad 13,60 \text{ eV} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$



Transitions vers le premier niveau excité de l'atome d'hydrogène.

Un calcul simple montrerait que seules les quatre premières (jusqu'à $6 \rightarrow 2$) sont visibles.



Le diamètre de la surface éclairée augmente avec la distance L .

On peut appliquer $\tan \theta \approx \theta$

si θ est petit et si on l'exprime en radian.

Cette approximation est très bonne pour $\theta \approx 10^{-3}$ rad.

Cette distance est très importante comparée à la taille des montages d'optique habituellement faits en classe. Il ne faut donc jamais regarder directement un faisceau laser sous peine de lésions irréversibles pour la cornée ou la rétine, et ce malgré le réflexe de clignotement dû à l'éblouissement de l'œil.

3. Laser He-Ne

1. Avec $\lambda = 632,8$ nm, la couleur du faisceau lumineux est rouge.

La fréquence de l'onde est $\nu = \frac{c}{\lambda} = 4,74 \cdot 10^{14}$ Hz.

Les photons associés à cette onde lumineuse transportent une énergie E donnée par $E = h \cdot \nu$; soit :

$$E = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,96 \text{ eV.}$$

2. L'énergie E de ces photons émis est :

$$E = E_2 - E_1, \text{ d'où } E_1 = E_2 - E.$$

$$E_1 = 20,15 \text{ eV} - 1,96 \text{ eV} \text{ et donc } E_1 = 18,19 \text{ eV.}$$

3. Pendant le temps $\tau = 1$ s, le laser émet une énergie radiative :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{P} \cdot \tau = 1 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

L'énergie de chaque photon étant $E = 3,14 \cdot 10^{-19}$ J,

le nombre N de photon émis chaque seconde est :

$$N = \frac{\mathcal{E}_r}{E} = \frac{1,00 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-19}}.$$

On trouve : $N = 3,2 \cdot 10^{15}$ photons par seconde.

4. Le faisceau laser est diffracté par la « fenêtre » circulaire.

L'ordre de grandeur du demi-angle au sommet θ peut être déterminé par

$$\theta \approx \frac{\lambda}{d}. \text{ Avec } \lambda \approx 0,6 \text{ } \mu\text{m} \text{ et } d = 0,6 \text{ mm, on obtient : } \theta \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

La divergence du faisceau (2θ) peut alors être évaluée à 2 milliradians.

5. La section S du faisceau augmente avec la distance L .

Pour avoir une puissance surfacique inférieure à $170 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$,

$$\text{la section minimale doit être : } S_{\min} = \frac{\mathcal{P}}{\pi_s} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

$$\text{Or } S_{\min} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \text{ avec } D \text{ le diamètre du faisceau, et } D = d + 2\ell.$$

$$\text{On détermine } \ell \text{ avec l'approximation } \tan \theta = \frac{\ell}{L} \approx \theta, \text{ soit } \ell \approx L \cdot \theta.$$

La distance L_{\min} au-delà de laquelle la puissance surfacique est inférieure à $170 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ est donnée par :

$$D = 2\sqrt{\frac{S_{\min}}{\pi}} = d + 2 \cdot L \cdot \theta, \text{ soit } L = \frac{1}{\theta} \left(\sqrt{\frac{S_{\min}}{\pi}} - \frac{d}{2} \right).$$

Application numérique : avec $\theta \approx 1 \cdot 10^{-3}$ rad, $d = 0,6$ mm

et $S_{\min} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, on obtient $L_{\min} \approx 40$ m.

1. Grandeurs physiques et dimensions

1. Dimension d'une grandeur physique

■ Pour **mesurer une grandeur**, on la compare à un *étalon*, c'est-à-dire à une grandeur de même nature prise pour unité. **Le résultat de la mesure dépend de l'unité choisie.**

Exemple : $L = 1,00 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ pouces}$.

La valeur numérique associée à une grandeur n'a donc de sens que si elle est suivie de son unité.

■ Deux grandeurs ont même *dimension* si leur rapport est un *nombre sans dimension* indépendant du système d'unités. Dans ce cas, elles sont *comparables*.

■ Deux grandeurs qui n'ont pas la même dimension ne sont **jamais** comparables. Il est **faux** d'écrire :

« si $L = 1,0 \cdot 10^6$ mètre et $t = 1,0$ seconde, alors $L > t$ » car L est aussi égal à $1,06 \cdot 10^{10}$ année-lumière !

■ Si on écrit : $\ln x$ ou $\exp x$, x est nécessairement un nombre sans dimension. Il ne serait pas possible de répondre à la question : « en quelle unité s'exprime $\ln L$, si L est une longueur ? ».

2. Homogénéité d'une formule

On ne peut additionner, soustraire ou égaler que deux grandeurs de même dimension.

Le **contrôle de l'homogénéité** d'une expression est un outil puissant de détection des erreurs de calcul.

Exemple : Si v est une vitesse, x une abscisse et t une date l'expression littérale : « $x = x_0 + v \cdot t - \sqrt{v} \cdot t^2$ » ne peut être que fausse car le terme $\sqrt{v} \cdot t^2$ n'est pas comparable à une longueur.

Pour pouvoir faire ce contrôle d'homogénéité, il faut donc poursuivre les calculs littéraux jusqu'à l'expression finale et ne faire l'application numérique qu'à la fin.

3. Équation aux dimensions

■ Notations

Une grandeur entre crochets signifie « dimension de cette grandeur ». *Par exemple :* $[a]$ = accélération.

Les dimensions fondamentales sont repérées par des majuscules :

M pour masse, L pour longueur, T pour temps et I pour intensité. Ainsi : $[a] = L \cdot T^{-2}$.

■ **L'équation aux dimensions** exprime une dimension à partir des dimensions fondamentales.

Exemple : Un travail est défini par : $W = F \cdot \ell$ donc :

$$[W] = [F] \cdot [\ell] = (M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}.$$

On en déduit que 1 joule = $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Il est ainsi possible de vérifier que tous les termes d'une somme ont même dimension.

• Les longueurs $L_1 = 4,50$ pouces et $L_2 = 2,60$ mètres sont comparables :
 $L_1 = 4,50 \times 2,54 \cdot 10^{-2} = 0,114 \text{ m}$;
 $L_2 = 2,60 \times 39,4 = 102 \text{ pouces}$;
 $\frac{L_1}{L_2} = 0,044$ dans les deux systèmes d'unités.

• Le poids (terrestre) d'un objet n'est ni égal, ni inférieur, ni supérieur à sa masse : ces deux grandeurs ne sont pas comparables.

En effet, $\frac{P}{m} = g$ dont la valeur

dépend du système d'unités utilisé. Si on décide d'exprimer les accélérations en $\text{km} \cdot \text{heure}^{-2}$:

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ = 9,8 \times \frac{10^{-3} \text{ km}}{\left(\frac{1 \text{ heure}}{3600}\right)^2} \\ = 1,3 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-2}.$$

Si x est une abscisse et t une date, une formule telle que :

$$« x = 2t + t^2 »$$

est qualifiée **d'inhomogène**, car on ne peut comparer une longueur à un temps ou un temps au carré.

Même si elle donne la bonne valeur de l'abscisse lorsque x est exprimé en mètre et t en seconde, le résultat est bien évidemment faux si x est exprimé en centimètre.

En revanche, l'expression :

$$« x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2, \text{ avec}$$

$$v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} »$$

est homogène, puisque $v_0 \cdot t$ et $a \cdot t^2$ ont la dimension d'une longueur.

2. Écriture d'un résultat numérique

| | Nombre de chiffres significatifs |
|----------------------|----------------------------------|
| 3300 | 4 |
| 0033 | 2 |
| 0,0030 | 2 |
| $3 \cdot 10^3$ | 1 |
| $3,00 \cdot 10^3$ | 3 |
| $0,03 \cdot 10^{-5}$ | 1 |

La puissance de dix n'a pas d'influence sur le nombre de chiffres significatifs.

Le résultat d'une mesure ou d'un calcul est nécessairement associé à une incertitude, quantité inconnue que l'on peut seulement encadrer.

Avec un double décimètre, l'incertitude de mesure est de l'ordre du millimètre. On peut donc écrire :
« $L = 62 \text{ mm}$ » mais pas
« $L = 62\,000 \mu\text{m}$ » car les trois derniers zéros sont **faux**.

Dans ce cas :

- l'**incertitude absolue** est égale à 1 mm ;
- l'**incertitude relative** est égale à

$$\frac{1}{62} = 0,16 = 16 \text{ \%}$$

La précision d'une mesure dépend de l'attente de l'expérimentateur et du matériel qu'il utilise.

Si on veut vérifier que la tension aux bornes d'un appareil ne dépasse pas 100 V (avec marge de sécurité), un contrôleur acheté 10 euros, précis à 5 % près, fera l'affaire.

Si on veut mesurer très précisément une tension, un voltmètre numérique perfectionné (et cher) pourra donner quatre chiffres significatifs exacts.

1. Chiffres significatifs et précision

Le nombre de chiffres significatifs d'un nombre décimal est égal au nombre de chiffres, comptés à partir du premier chiffre non nul.

Si tous les chiffres significatifs sont exacts, l'incertitude est de l'ordre de grandeur de l'unité associée au dernier chiffre.

Exemples :

- $L = 1,03 \text{ km}$: l'incertitude est de l'ordre de $0,01 \text{ km} = 10 \text{ m}$, soit environ 1 % de L .
- $L = 1,0312 \text{ km}$: l'incertitude est de l'ordre de $0,00001 \text{ km} = 10 \text{ cm}$, soit environ $0,01 \text{ \%}$ de L .
- $L = 1,03 \text{ m}$: l'incertitude est de l'ordre de $0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$, soit environ 1 % de L .

Le nombre de chiffres significatifs est lié à la *précision relative*, souvent exprimée en pourcentage, sur le résultat donné.

2. Écriture du résultat d'un calcul

Les grandeurs mesurées ou les données de l'énoncé d'un problème permettent, au moyen de calculs, de déterminer d'autres grandeurs.

■ Principes généraux

Un résultat trop précis est faux car ses derniers chiffres n'ont aucune signification.

Le résultat d'un calcul ne peut être plus précis que la moins précise des données utilisées.

■ Produit (ou quotient)

Le résultat d'un calcul doit avoir un nombre de chiffres égal au plus petit nombre de chiffres significatifs de l'ensemble des données.

Exemple : $\frac{1\,033}{3,0} = 3,4 \cdot 10^2$ et non $344,333$ (!!).

Sachez rester maître de votre calculatrice.

Attention : Si un chiffre est un multiplicateur exact, et non une donnée, il ne faut pas tenir compte du nombre de ses chiffres significatifs.

C'est par exemple le cas du facteur $\frac{1}{2}$ dans l'expression « $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ ».

■ Somme (ou différence)

La précision est fixée par le terme qui a la moins grande précision **absolue**.

Exemples :

- $0,00555 + 1,01000 = 1,01555$, mais $0,00555 + 1,00 = 1,01$;
- $3,6532 - 3,5 = 0,1$ et $3,6532 - 3,5221 = 0,1311$.

Si nous écrivions « $3,6532 - 3,5 = 0,1532$ » les trois derniers chiffres n'auraient aucune signification et le résultat serait **faux**.

Cet exemple illustre le fait que la différence de deux valeurs A et B très voisines a une précision relative bien plus faible que celle de A et de B .

3. Équations différentielles du premier ordre

L'étude d'un système physique amène souvent à poser une équation différentielle, c'est-à-dire une relation entre une fonction et ses dérivées. Dans le cadre de cet ouvrage, nous devons résoudre des *équations différentielles du premier ordre à coefficients constants* vérifiées par fonction du temps $f(t)$. Elles sont de la forme :

$$a \cdot \frac{df}{dt} + b \cdot f = c.$$

$f(t)$ peut désigner une tension, une intensité, une vitesse, une température, ou toute autre grandeur physique fonction du temps.

De plus, nous n'envisagerons que le cas où les constantes a et b ont le même signe.

■ Mise en forme

En divisant par b , on met l'équation différentielle sous la forme :

$$\tau \cdot \frac{df}{dt} + f(t) = f_{\infty} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{a}{b} > 0 ; \quad (1)$$

l'équation sans second membre associée à (1) est :

$$\tau \cdot \frac{df}{dt} + f(t) = 0. \quad (2)$$

τ , homogène à un temps est la *constante de temps* du système.

f_{∞} est une constante homogène à f .

■ Solution générale

$f_1(t) = f_{\infty}$ (constante) est une solution possible de l'équation (1).

$f_2(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}}$ où C est une constante arbitraire est la solution générale de l'équation (2).

La solution générale de (1) s'obtient en ajoutant la solution générale de (2) et la solution constante de (1) :

$f(t) = f_{\infty} + C e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec C constante quelconque homogène à f .

■ Condition initiale

La constante C est déterminée si on connaît la valeur initiale $f_0 = f(0)$.

En effet :

$$f(0) = f_0 = f_{\infty} + C e^0 = f_{\infty} + C ;$$

d'où :

$$C = f_0 - f_{\infty}.$$

■ Comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$

f_{∞} représente la limite de $f(t)$ pour $t \rightarrow \infty$ (d'où la notation f_{∞}).

■ Expression de la solution

D'après ce qui précède : $f(t) = f_{\infty} + (f_0 - f_{\infty}) e^{-\frac{t}{\tau}}$.

$f(t)$ atteint pratiquement sa valeur finale f_{∞} après quelques τ . La *constante de temps* τ donne un ordre de grandeur de la durée de l'évolution.

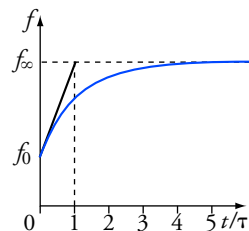
La dérivée à l'origine est : $f'(0) = \frac{f_{\infty} - f_0}{\tau}$. Sur le graphe, la tangente

à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$.

Il est fortement conseillé de revoir attentivement l'aspect purement mathématique de cette question. Nous nous contentons ici de décrire la méthode systématique qu'il faut suivre pour déterminer la solution.

Il n'est pas nécessaire de résoudre complètement l'équation différentielle pour connaître la limite de $f(t)$ pour $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire l'état final du système étudié.

Notons aussi que cette limite ne dépend pas de la condition initiale.



Graphes de $f(t)$ avec sa tangente à l'origine.

Index

A

Accélération 7
Aimant 141
Année de lumière 164

B

Bilan thermodynamique 90
Bobine 123, 126, 127

C

Capacité (condensateur) 122
Capacité thermique 91
Caractéristique d'un dipôle 106
Célérité d'une onde 152
Célérité de la lumière 164
Chaleur latente 92
Champ de pesanteur 22
Champ magnétique 141, 143
Charge d'un condensateur 124.
Chute libre 37
Condensateur 122
Conservative (force) 72
Construction des images 168
Convention générateur 106
Convention récepteur 106

D

Descartes (lois) 165
Diffraction 154
Dioptrie 167
Dipôle 105
Dispersion 154

E

Énergie cinétique 72
Énergie d'un condensateur 124
Énergie d'une bobine 126
Énergie interne 91
Énergie mécanique 74
Énergie potentielle 73
Équilibre d'un solide 24
Étincelle de rupture 127

F

Force de frottement 22, 38, 39
Force de Laplace 142
Force électromotrice (f.é.m.) 107
Force 20
Foyer image 167
Foyer objet 167

G

Gaz parfait 89
Générateur 107
Grandissement 168

I

Image d'un point 165, 168
Indice optique 164
Inductance 123
Interaction électrique 21
Interaction gravitationnelle 20
Interactions fondamentales 20
Isochronisme 53

J

Joule 71, 110

L

Lentilles minces 166
Lignes de champ magnétique 142
Loi d'Ohm 106
Loi des mailles 109
Loi des nœuds 109
Lois de Newton 35, 36
Longueur d'onde 153

M

Miroir plan 165
Moteur électrique 107, 144
Mouvement circulaire 8, 9
Mouvement rectiligne 8
Mouvements des planètes 40

O

Objet à l'infini 164
Ombre d'un objet 164
Onde mécanique 152
Onde sinusoïdale 153
Onde sonore 152
Orbite géostationnaire 41
Oscillations amorties 56, 129
Oscillations forcées 56
Oscillations mécaniques 53

P

Pendule 53
Période propre (masse-ressort) 56
Période propre (pendule) 53, 54
Période propre (circuit R, L, C) 128
Plan focal image 167
Plan focal objet 167
Poids 21
Pôles d'un aimant 141
Poussée d'Archimède 23

Premier principe de la thermodynamique 91
Pression 23, 88
Propagation d'une onde 153
Propagation rectiligne 164
Puissance d'une force 74
Puissance électrique 110

R

Rayon lumineux 164
Réaction d'un support 22
Référentiel (définition) 6
Référentiel galiléen 35
Référentiel géocentrique 35
Référentiel terrestre 35
Réflexion 165
Réfraction 165
Règle des trois doigts 142
Règle du tire-bouchon 143
Résistance 106
Résistances en parallèle 109
Résistances en série 109
Résonance 56
Ressort 24

S

Satellites terrestres 41
Snell-Descartes (lois) 165
Solenéide 143
Solide 35
Système masse-ressort 54, 55, 56
Système matériel 35
Système thermodynamique 74

T

Température 75
Tension d'un ressort 24
Tesla 142
Théorème de l'énergie cinétique 72
Théorème de l'énergie mécanique 74
Trajectoire 6
Transfert thermique 90
Travail d'une force 70

V

Vecteur-accelération 7
Vecteur-vitesse 7
Vergence 167
Vitesse angulaire 9
Vitesse 7

W

Watt 74, 110

Valeur de quelques constantes de la Physique

| Nom | Symbole | Valeur approchée | Valeur actuelle |
|---------------------------------------|------------|---|--|
| constante d'Avogadro | N_A | $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ | $6,022\,136\,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| vitesse de la lumière dans le vide | c | $3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ | $299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur exacte) |
| constante de la gravitation | G | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | $6,672\,60 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ |
| charge élémentaire | e | $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| masse de l'électron | m_e | $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0,000\,549 \text{ u}$ | $9,109\,389\,7 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ |
| masse du proton | m_p | $1,672\,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,007\,28 \text{ u}$ | $1,672\,623\,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| masse du neutron | m_n | $1,675\,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,008\,665 \text{ u}$ | $1,674\,928\,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| unité de masse atomique | u | $1,660\,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ | $1,660\,540\,2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $= 931,494\,32 \text{ MeV}/c^2$ |
| constante des gaz parfaits | R | $8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ | $8,314\,48 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| perméabilité du vide | μ_0 | | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ (valeur exacte) |

Valeurs approchées et ordres de grandeurs

| | | |
|--------|---|--|
| Terre | champ de pesanteur au sol rayon masse distance moyenne Terre- Soleil | $g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (ou $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$) $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ |
| Soleil | masse rayon température en surface puissance rayonnée | $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ $7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$ $5,8 \cdot 10^3 \text{ K}$ $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ |
| Lune | masse rayon distance moyenne Terre-Lune période de révolution sidérale autour de la Terre | $7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ $1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ $3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ 27,3 jours |
| Atome | rayon de l'atome rayon du noyau | quelques 10^{-10} m quelques 10^{-15} m |
| Eau | masse volumique du liquide masse volumique de la glace capacité thermique massique température de fusion sous 1 bar température d'ébullition sous 1 bar | $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $0,92 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ou 273 K $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ou 373 K |



édition spéciale

Physique MPSI-PCSI-PTSI

1. Cinématique
2. Forces
3. Étude dynamique du mouvement d'un solide
4. Systèmes mécaniques oscillants
5. Travail et énergie mécanique
6. Thermodynamique
7. Circuits électriques en courant continu
8. Circuits électriques en régime variable
9. Champ magnétique
10. Ondes mécaniques progressives
11. Optique géométrique
12. La lumière



édition spéciale

*vous permet d'aborder
en toute confiance
votre première année
d'études supérieures
scientifiques.*



MANUELS DE COURS

La collection de référence des classes préparatoires scientifiques.

Dans chaque ouvrage :

- Le cours
- De nombreux exercices
- Tous les corrigés

MATHÉMATIQUES

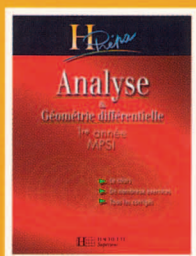
Algèbre et géométrie euclidienne MPSI
Analyse et géométrie différentielle MPSI
Algèbre et géométrie euclidienne PCST
Analyse et géométrie différentielle PCST

PHYSIQUE

Optique MPSI PCST PTSI
Mécanique MPSI PCST PTSI
Électromagnétisme MPSI PCST PTSI
Électronique-Électrocinétique MPSI PCST PTSI
Thermodynamique MPSI PCST PTSI

CHIMIE

Chimie 1 PCST 1^{re} période
Chimie 2 PCST 2^e période (option PC)
Chimie MPSI PTSI
(+ PCST option SI 2^e période)



ISBN 978-2-01-181571-2

www.hachette-education.com



HACHETTE
Supérieur