

samedi 8 juillet 2023

Problème 1. Trouver tous les nombres composés n ayant la propriété suivante : lorsque tous les diviseurs positifs de n ont été ordonnés pour former une liste d_1, d_2, \ldots, d_k telle que

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n,$$

l'entier d_i divise la somme $d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout i tel que $1 \le i \le k-2$.

Remarque: Un nombre composé est un entier $n \ge 2$ qui n'est pas un nombre premier.

Problème 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et tel que AB < AC. Soit Ω son cercle circonscrit, et S le milieu de l'arc de cercle \widehat{BC} contenant A. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le segment [BS] en un point D, et recoupe le cercle Ω en un point E distinct de A. La parallèle à (BC) passant par D coupe la droite (BE) en un point E. Enfin, on note E0 le cercle circonscrit au triangle E1, et E2 le point, autre que E3, en lequel E3 recoupe le cercle E4. Démontrer que la tangente à E4 en E5 se coupent en un point situé sur la bissectrice de E6.

Problème 3. Trouver, pour tout entier $k \ge 2$, l'ensemble des suites a_1, a_2, \ldots d'entiers naturels non nuls pour lesquelles il existe un polynôme P de la forme

$$P(x) = x^{k} + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_{1}x + c_{0}$$

tel que $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ soient des entiers naturels et

$$P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

pour tout entier $n \ge 1$.

Language: French

Durée : 4 heures et 30 minutes. Chaque problème est noté sur 7 points.



Language: French

dimanche 9 juillet 2023

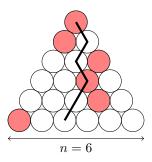
Problème 4. Soit $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts tels que le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

soit un entier pour tout n tel que $1 \le n \le 2023$. Démontrer que $a_{2023} \ge 3034$.

Problème 5. Soit $n \ge 1$ un entier. Un triangle nippon consiste en $1+2+\cdots+n$ cercles disposés de manière à constituer un triangle formé de n lignes, dont la $\ell^{\text{ème}}$ ligne contient exactement ℓ cercles et a été coloriée de sorte qu'un de ces ℓ cercles soit rouge et que les autres cercles de la ligne soient incolores. On appelle chemin ninja toute suite de n cercles qui débute sur le cercle de la première ligne, dont chaque cercle est situé juste en-dessous du cercle qui le précède, et qui se termine sur un cercle de la dernière ligne.

Voici un exemple de triangle nippon possible lorsque n=6, ainsi qu'un chemin ninja contenant deux cercles rouges.



Trouver, en fonction de n, le plus grand entier k pour lequel, dans chaque triangle nippon, il existe nécessairement un chemin ninja contenant au moins k cercles rouges.

Problème 6. Soit ABC un triangle équilatéral. Soit A_1 , B_1 et C_1 trois points situés à l'intérieur du triangle ABC de sorte que $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ et que

$$\widehat{BA_1C} + \widehat{CB_1A} + \widehat{AC_1B} = 480^{\circ}.$$

Soit A_2 le point d'intersection des droites (BC_1) et (CB_1) ; B_2 le point d'intersection des droites (CA_1) et (AC_1) ; C_2 le point d'intersection des droites (AB_1) et (BA_1) .

Démontrer que, si le triangle $A_1B_1C_1$ est scalène, il existe deux points par lesquels passe chacun des cercles circonscrits aux trois triangles AA_1A_2 , BB_1B_2 et CC_1C_2 .

Remarque : Un triangle est scalène lorsque ses trois côtés sont de longueurs deux à deux distinctes.

Durée : 4 heures et 30 minutes. Chaque problème est noté sur 7 points.