

Calcolo per l'astronomia - Progetto 2: risoluzione numerica dell'equazione di Lane-Emdem e derivazione della massa di Chandrasekhar

Michele Costa

Novembre 2020

1 Derivazione dell'equazione di Lane-Emdem

La struttura interna di una stella in equilibrio idrostatico che presenta una relazione tra densità e pressione di tipo politropico può essere descritta attraverso un'equazione differenziale ordinaria al secondo ordine adimensionale, l'equazione di Lane-Emdem. Per derivare quest'equazione si parte dalle seguenti tre relazioni:

- Equazione di conservazione della massa

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (1)$$

- Equazione dell'equilibrio idrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho \quad (2)$$

- Relazione politropica tra pressione e densità

$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (3)$$

Dalla (2) isoliamo M e deriviamo rispetto a r :

$$\begin{aligned} -M &= \frac{dP}{dr} \cdot \frac{d}{dr} \frac{r^2}{G\rho} \\ -\frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dP}{dr} \right) \cdot \frac{r^2}{G\rho} + \frac{dP}{dr} \cdot \frac{2r}{G\rho} \end{aligned}$$

Sostituendo prima la (1), poi riscrivendo la derivata del prodotto e infine sostituendo la (3) si ottiene:

$$\begin{aligned} -4\pi r^2 \rho G &= \frac{r^2}{\rho} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{dP}{dr} \right) + \frac{2r}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} \right) &= -4\pi\rho G \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \cdot K \left(\frac{n+1}{n} \right) \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr} \right) &= -4\pi\rho G \end{aligned} \quad (4)$$

Si operano quindi le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} \rho = \rho_c \theta^n \\ P = K \cdot \rho_c^{\frac{n+1}{n}} \theta^{n+1} \\ r = \alpha \xi \end{cases}$$

E si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha^3 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\alpha^2 \xi^2}{\rho_c \theta^n} \cdot K \left(\frac{n+1}{n} \right) (\rho_c \theta^n)^{\frac{1}{n}} \rho_c n \theta^{n-1} \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta}{d\xi} \right] = -4\pi \rho G$$

Semplificando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\alpha \xi^2 \cdot K(n+1) \rho_c^{\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{d\xi} \right] &= -4\pi \rho_c \theta^n G \\ \left(\frac{K(n+1) \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right) \cdot \frac{1}{\alpha^2 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n \end{aligned}$$

Infine, ponendo $\alpha^2 = \frac{K(n+1) \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}$, ovvero $\alpha = \sqrt{\frac{K(n+1) \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}}$ si giunge all'equazione di Lane-Emdem:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n}$$

2 Integrazione dell'equazione di Lane-Emdem

2.1 Scopo e dati utilizzati

Si vuole ora risolvere l'equazione per differenti valori del parametro n , nello specifico per $n=0$, $n=1$ e $n=3$ e confrontare i risultati ottenuti con la soluzione analitica (quando questa è presente). Verrà quindi utilizzata l'equazione derivata al punto precedente. Come richiesto il procedimento viene eseguito sia con un passo di integrazione $h_1 = 0.01$ che con un passo di integrazione di $h_2 = 0.001$.

2.2 Analisi del problema

Siccome l'equazione che si vuole risolvere è del secondo ordine, per ottenere una stima delle soluzioni attraverso il calcolo numerico sarà necessario trasformarla in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Si ha quindi, imponendo $\eta = \frac{d\theta}{d\xi}$:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = \eta \\ \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2}{\xi} \eta - \theta^n \end{cases}$$

Vengono inoltre fornite le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0 \end{cases}$$

2.3 Subroutines e algoritmi

RK4

La subroutine *RK4* si occupa di stimare il valore numerico della soluzione dell'equazione e della sua derivata prima nel punto richiesto. Prende come parametri il passo di integrazione reale h , il parametro intero n per il quale si cerca la soluzione, l'ascissa nella quale la si cerca x , il vettore di dimensione [2] y contenente i valori della soluzione e della sua derivata calcolati nel nodo di discretizzazione precedente e infine il vettore di dimensione [2] y_{new} dove vengono salvati valore della soluzione e della sua derivata nel punto richiesto. Questa subroutine implementa l'algoritmo di *Runge-Kutta* al 4° ordine, uno schema risolutivo per equazioni differenziali che permette di stimare il valore della soluzione nel nodo preso in esame basandosi sul valore che quest'ultima assume nel nodo di discretizzazione immediatamente precedente. La versione utilizzata è la seguente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

con

$$\begin{cases} k_1 = f(y_n, x_n) \\ k_2 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_1, x_n + \frac{1}{2}h) \\ k_3 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_2, x_n + \frac{1}{2}h) \\ k_4 = f(y_n + hk_3, x_n + h) \end{cases}$$

In questo caso si ha da risolvere un sistema di due equazioni differenziali, pertanto i valori delle soluzioni saranno salvati in una matrice di dimensione $[2, npunti]$.

Dydx

Nella subroutine *dydx* viene costruito il sistema associato all'equazione differenziale che si vuole risolvere. Essa prende come parametri il valore intero n per il quale si sta cercando la soluzione, l'ascissa del punto per la quale la si sta cercando x (eventualmente modificata a seconda dello stadio di *RK4*), il vettore di dimensione $[2]$ y contenente i valori della soluzione e della sua derivata calcolati nel nodo di discretizzazione precedente (anche essi opportunamente modificati) e infine il vettore di dimensione $[2]$ yp in cui vengono salvati i due valori del parametro k utilizzati dalla subroutine *RK4* per stimare il valore numerico della soluzione e della sua derivata nel punto richiesto.

Salvataggio

La subroutine *salvataggio* ha il compito di creare i file contenenti le soluzioni dell'equazione differenziale di Lane-Emdem, sia quelle trovate analiticamente che quelle calcolate numericamente. Essa ha come parametri l'intero n , i vettori reali x e y contenenti le ascisse e le ordinate dei punti in cui si calcola la soluzione, la loro dimensione $npunti$, il nome del file dove salvare le soluzioni numeriche *nome* e quello del file dove salvare le soluzioni analitiche *nomea*. In ognuno di essi vi saranno 5 colonne: la prima contiene i valori di ξ , la seconda quelli di $\theta(\xi)$, la terza il profilo di densità $\theta^n(\xi)$, la quarta il profilo di pressione $\theta^{n+1}(\xi)$ e la quinta il profilo di massa $-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}$.

Zeri

Questa subroutine ha il compito di stimare con maggior precisione i punti ξ_0 in cui $\theta(\xi)$ si annulla. Essa ha come parametri l'intero n per il quale si sta operando il procedimento, i reali xla e xra , ovvero i valori delle ascisse tra i quali si sa essere presente uno zero della funzione (ottenuti dall'integrazione dell'equazione effettuata precedentemente) e il vettore reale y di dimensione $[2]$ nel quale sono salvati i valori di $\theta(xla)$ e $\eta(xla)$. Per arrivare a un risultato preciso fino alla settima cifra decimale si ricorre al metodo della bisezione, al quale sono state apportate alcune modifiche. Siccome non si conosce l'espressione analitica di $\theta(\xi)$ si utilizza l'algoritmo di *RK4* per stimare il suo valore in xm (il punto medio tra xla e xra) e si procede con il confronto dei segni: se i valori di $\theta(xla)$ e $\theta(xm)$ sono discordi vuol dire che $\xi_0 \in [xla, xm]$, altrimenti che $\xi_0 \in [xm, xra]$. Nel primo caso si reitera quindi il procedimento utilizzando come intervallo $[xla, xm]$, nel secondo si utilizzerà invece l'intervallo $[xm, xra]$. Questa seconda eventualità prevede anche che il valore di y sia sostituito con quello di $\theta(xm)$ in modo tale da consentire una corretta esecuzione di *RK4*; questo schema ha infatti come prerequisito la conoscenza del valore della funzione θ nel nodo di integrazione precedente. Tutto questo algoritmo viene poi reiterato fino a quando le dimensioni dell'intervallo nel quale troviamo ξ_0 sono minori di $\frac{10^{-8}}{2}$: questo assicura che l'errore cada su una cifra decimale successiva alla settima. Vengono infine, per entrambi i passi di integrazione utilizzati, forniti i valori di ξ_0 e di $M(\xi_0)$ a seconda del parametro n preso in esame, valori che verranno utilizzati nello step successivo.

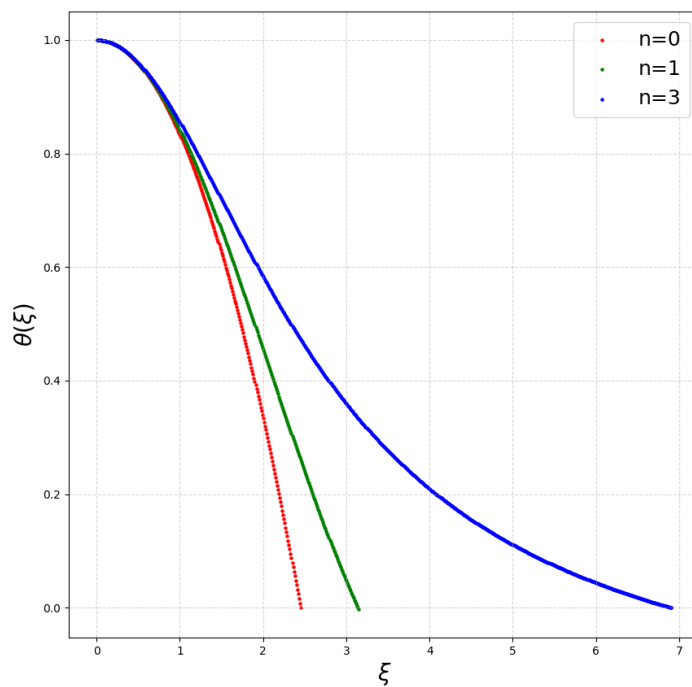
2.4 Risultati

Per $n = 0$ e $n = 1$ esistono e si conoscono le soluzioni analitiche dell'equazione di Lane-Emdem, ovvero:

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6} \quad \text{per } n = 0 \qquad \theta = \frac{sen(\xi)}{\xi} \quad \text{per } n = 1$$

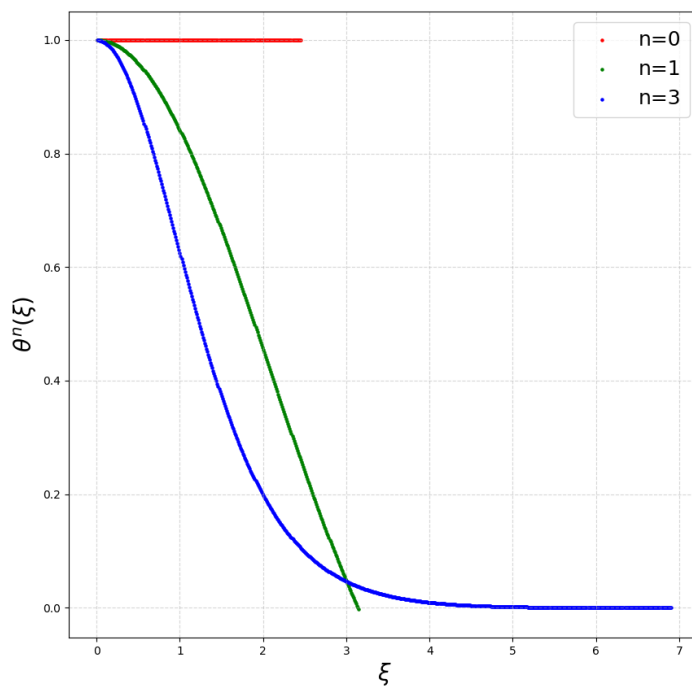
Dal calcolo numerico si ottiene, per ogni valore del parametro n preso in esame, l'andamento delle soluzioni dell'equazione di Lane-Emdem:

Soluzioni Lane-Emdem



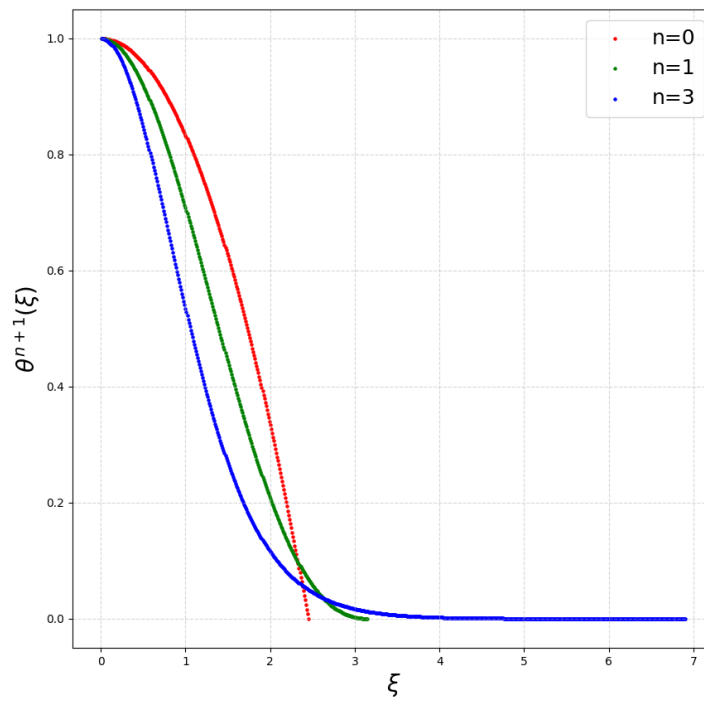
L'andamento dei profili di densità:

Profili di densità



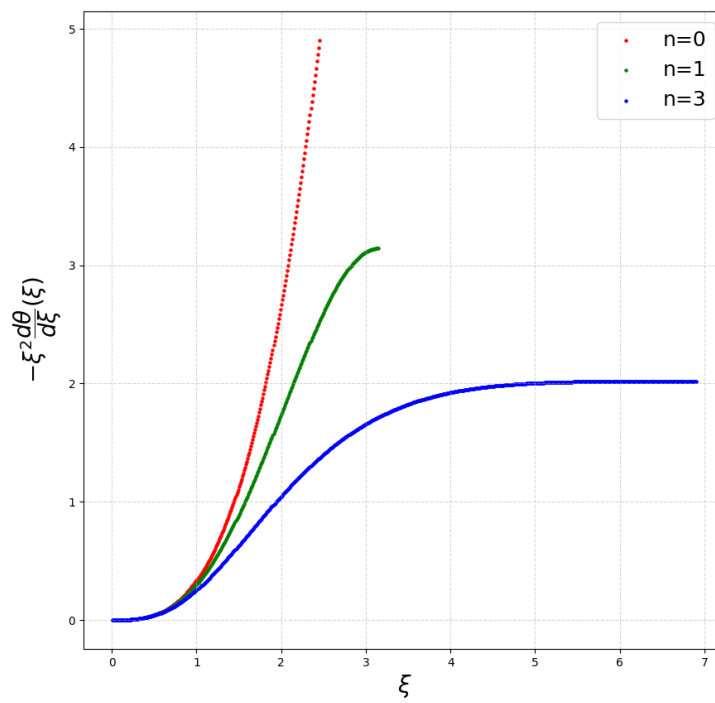
L'andamento dei dei profili di pressione:

Profili di pressione

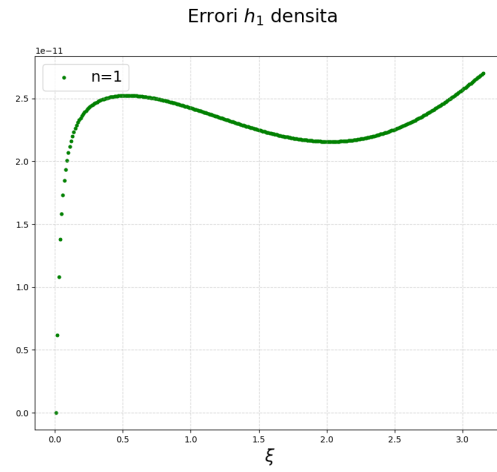
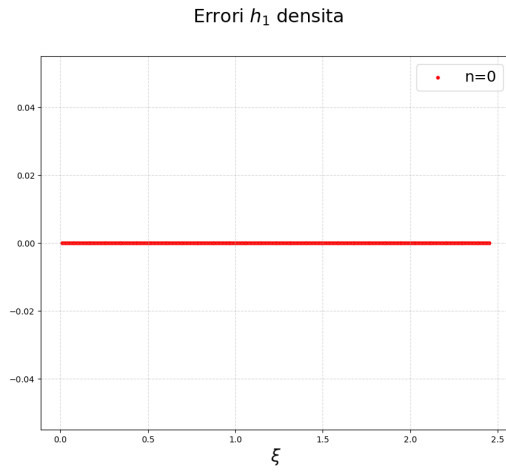


E infine l'andamento dei dei profili di massa:

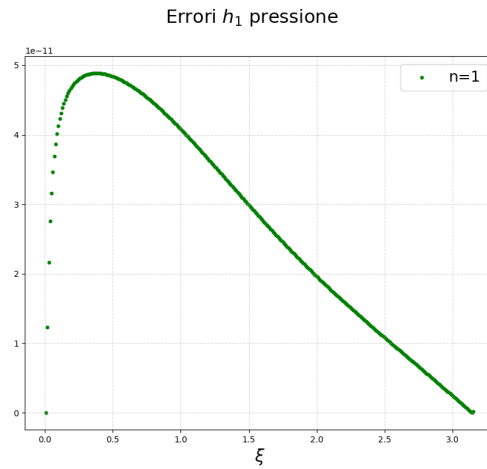
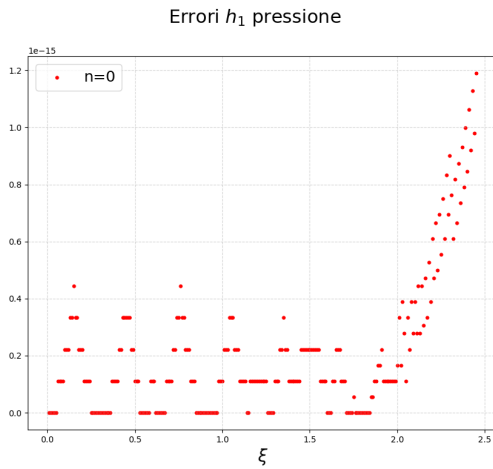
Profili di massa



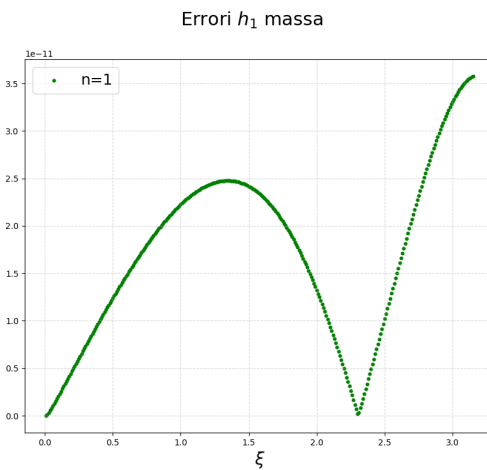
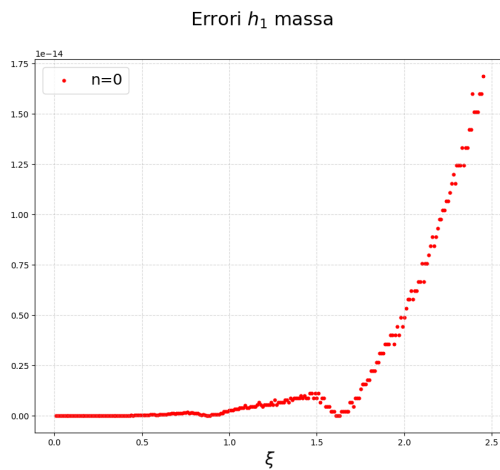
Confrontando gli andamenti di questi grafici con le soluzioni analitiche è possibile avere una stima dell'errore e del suo andamento. Questo vale se $n = 1$ o se $n = 2$, mentre se $n = 3$ non è possibile confrontare la soluzione numerica con quella analitica dato che questa non esiste. Per i profili di densità:



Per i profili di pressione:



E infine per i profili di massa:



Si riporta anche, per i differenti valori di n e del passo di integrazione h , il risultato ottenuto per ξ_0 e lo si confronta con il valore analitico atteso:

ξ_0	$h_1 = 0.01$	$h_2 = 0.001$
$n = 0$	2.4494897	2.4494897
$n = 1$	3.1415927	3.1415927
$n = 3$	6.8968486	6.8968486

ξ_0 numerici

ξ_0	
$n = 0$	$\sqrt{6} = 2.4494897$
$n = 1$	$\pi = 3.1415927$
$n = 3$	/

ξ_0 analitici

Dai risultati ottenuti, che coincidono con la soluzione analitica fino alla settima cifra decimale a prescindere dal passo di integrazione, si evince che per ottenere la precisione richiesta sarebbe sufficiente un passo di integrazione di $h = 0.01$, meno dispendioso dal punto di vista del numero di calcoli eseguiti.

3 Calcolo di raggio e massa della stella e della massa di Chandrasekhar

3.1 Raggio e massa

Si ha:

$$R_0 = \alpha \xi_0 \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}}$$

Nel caso in cui $n = 0$ α non è però definito. Si sa tuttavia che:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c \theta^n \\ P &= P_c \theta^{n+1} \end{aligned}$$

Da cui deriva, sostituendo nella (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{P_c r^2}{\rho_c} \cdot \frac{d\theta}{dr} \right) &= -4\pi \rho G \\ \frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) &= -1 \end{aligned} \tag{5}$$

Ma in questo caso possiamo scrivere $1 = \theta^0 = \theta^n$. L'equazione (5) può essere quindi scritta come:

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) &= -\theta^0 \\ \frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G} \frac{1}{\alpha^2 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^0 \end{aligned}$$

Per ottenere l'equazione di Lane-Emden nel caso in cui $n = 0$ si deve quindi porre:

$$\alpha^2 = \frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G} \quad \alpha = \sqrt{\frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G}}$$

Pertanto è possibile calcolare ora il raggio nei vari casi:

$$\begin{aligned} R_0 &= 2.4494897 \cdot \sqrt{\frac{P_c}{4\pi \rho_c^2 G}} & \text{per } n = 0 \\ R_0 &= 3.1415927 \cdot \sqrt{\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}} & \text{per } n = 1 \\ R_0 &= 6.8968486 \cdot \sqrt{\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}} & \text{per } n = 3 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la massa essa è ricavabile attraverso la seguente formula:

$$M(R_0) = \int_0^{R_0} 4\pi\rho r^2 dr$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} M(R_0) &= \int_0^{R_0} 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{\xi_0} \theta^n \xi^2 d\xi = \\ &= 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{\xi_0} \left[\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right] \xi^2 d\xi = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{\xi_0} \left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right] d\xi \end{aligned}$$

Risolvendo l'integrale:

$$M(R_0) = 4\pi\rho_c\alpha^3 \left[-\xi_0 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_0) \right]$$

Si ha pertanto, sostituendo il parametro α e il valore di $M(\xi_0) = -\xi_0 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_0)$, che viene calcolato dal programma:

$$\begin{aligned} M(R_0) &= \frac{4.8989795}{2\rho_c^2\sqrt{\pi}} \left(\frac{P_c}{G} \right)^{3/2} && \text{per } n = 0 \\ M(R_0) &= \frac{3.1415927 \cdot \rho_c}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2K}{G} \right)^{3/2} && \text{per } n = 1 \\ M(R_0) &= \frac{2.0182360}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{4K}{G} \right)^{3/2} && \text{per } n = 3 \end{aligned}$$

3.2 Limite di Chandrasekhar

La struttura stellare di una nana bianca è sostenuta dalla pressione di degenerazione, che contrasta l'attrazione gravitazionale. Questa pressione, in nane bianche dalla densità molto elevata, è data dalla politropica con $n = 3$

$$P = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{2m_p} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3}$$

con h = costante di Planck, c = velocità della luce e m_p = massa del protone

Isolando K :

$$K = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(2m_p)^{4/3}}$$

Infine, sostituendo questo valore nella formula per la massa con $n = 3$ prima calcolata abbiamo:

$$M = \frac{2.0182360}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(2m_p)^{4/3}} \right)^{3/2} = 2.86 \cdot 10^{30} Kg = \boxed{1.44M_\odot}$$

Questo valore della massa costituisce il limite di Chandrasekhar, ovvero il valore massimo che può assumere la massa di una stella di neutroni senza che la forza gravitazionale la faccia collassare in un buco nero.