

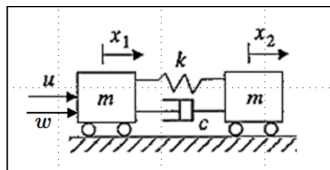
Sintesi controllori Robusti per sistemi SISO

Michele Galullo

Università di Pisa
Dipartimento di Ingegneria dell' Informazione

Introduzione

Il sistema rappresenta un modello di base per lo studio di vibrazioni in processi meccanici.



u è il controllo e w è il disturbo. L'obiettivo è quello di regolare la posizione x_2 della massa m_2 mediante la sintesi di un opportuno controllore avendo a disposizione la misura y_m di x_2 .

Esso è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u + w \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (1)$$

Incertezze non strutturate

Il sistema è composto da attuatore e sensore i quali sono modellati come incertezze non strutturate dovute a dinamiche trascurate in ingresso (attuatore) e in uscita (sensore) in questo modo:

$$G(s) = G_n(s)f(s)$$

$f(s)$ è la dinamica che trascuriamo.

$G(s)$ sarà

$$G(s) = G_n(s)(1 + W_{ma}(s)\Delta_m(s))$$

in ingresso e in uscita

$$G(s) = (1 + W_{ms}(s)\Delta_m(s))G_n(s)$$

con $\Delta_m \leq 1$.

Δ è stato modellato in Matlab tramite il comando *ultidyn(.)*.
 $W_{ma}(s)$ e $W_{ms}(s)$ sono le loro ampiezze massime, infatti ricordando che

$$|W_{mi}(j\omega)| = \max \left| \frac{G(j\omega) - G_n(j\omega)}{G_n(j\omega)} \right| = \max |f(j\omega) - 1|$$

e state rappresentate da dinamiche del primo ordine

$$\begin{cases} W_{ma}(s) = \frac{s}{s+50} \\ W_{ms}(s) = \frac{s}{s+100} \end{cases} \quad (2)$$

Incertezze strutturate

Il sistema è soggetto anche a variazioni delle proprietà della molla e dello smorzatore le quali sono modellate come segue:

$$\begin{cases} 2 \leq k \leq 6 \\ 0.02 \leq c \leq 0.06 \end{cases} \quad (3)$$

Con $[k] = KN/m$, $[c] = KNsec/m$.

Queste incertezze sono state definite col comando *ureal*(.) in Matlab.

Modello Sistema

Si è portato il sistema nella forma $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ definendo
il vettore di stato come:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posizione } m_1 \\ \text{posizione } m_2 \\ \text{velocità } m_1 \\ \text{velocità } m_2 \end{bmatrix}$$

l'uscita è posizione della massa m_2 e l'ingresso è vettore $[w_d \quad v \quad u_c]^T$ che contiene anche il rumore v a cui è soggetto il sensore.

Qui di seguito riportiamo le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6.25 & -4 & 4 & -0.04 & 0.04 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0.04 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 1 \quad 0]$$

(4)

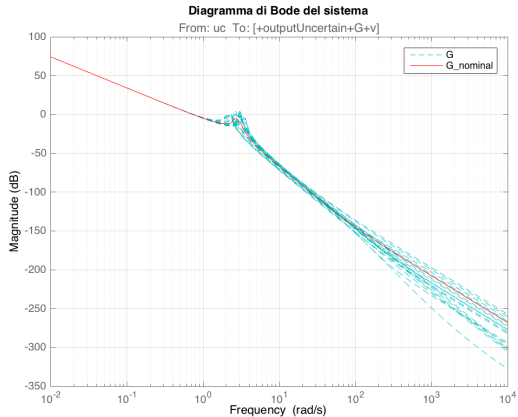


Figura: *Diagramma di bode del sistema con incertezze e sistema nominale*

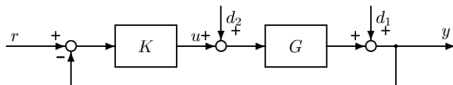
Specifiche di controllo

Le specifiche richieste dal controllo sono:

1. il sistema nominale sia asintoticamente stabile in anello chiuso e sia in grado di reiettare un disturbo sinusoidale di ampiezza arbitraria e frequenza tra 0.5 e 1 rad/sec, con un tempo di assestamento di circa 15 secondi;
2. Stabilità e prestazioni siano mantenute in presenza di incertezze date;
3. Le specifiche siano raggiunte con la massima banda passante, con il minimo effort di controllo e con una limitata complessità del controllore.

Controllore Classico

Lo schema di riferimento è quello classico di controllo in feedback negativo



Si è cercato di raggiungere le specifiche mantenendo alcune priorità, in primis si è cercato di garantire la robusta stabilità penalizzando il tempo di assestamento che nel nostro caso specifico è di $\approx 25sec$.

Il controllore ha la seguente funzione di trasferimento:

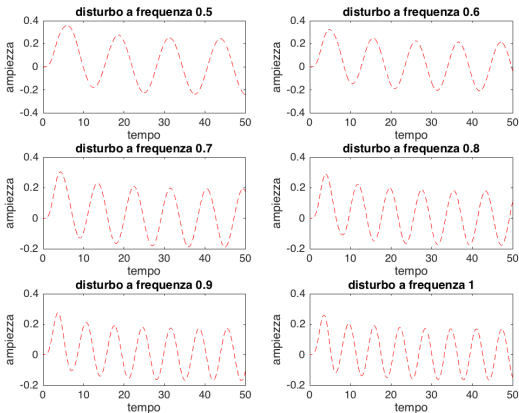
$$K(s) = \frac{3.15 \cdot 10^{12}(s + 0.1)(s^2 + 0.02857s + 2.857)}{(s + 10^4)^3} \quad (5)$$

e dopo aver chiuso l' anello in retroazione si è usato il comando *damp(.)* per vedere se i poli del sistema *clp* (closed-loop) sono tutti a parte reale negativa:

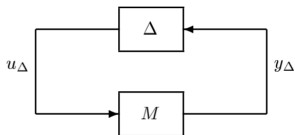
» *damp(clp)*

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-1.02e-01	1.00e+00	1.02e-01	9.79e+00
-2.24e-01 + 1.69e+00i	1.31e-01	1.71e+00	4.46e+00
-2.24e-01 - 1.69e+00i	1.31e-01	1.71e+00	4.46e+00
-1.08e+01	1.00e+00	1.08e+01	9.29e-02
-5.00e+01	1.00e+00	5.00e+01	2.00e-02
-1.00e+02	1.00e+00	1.00e+02	1.00e-02
-7.49e+03 + 4.32e+03i	8.66e-01	8.65e+03	1.33e-04
-7.49e+03 - 4.32e+03i	8.66e-01	8.65e+03	1.33e-04
-1.50e+04	1.00e+00	1.50e+04	6.67e-05

Con l'ausilio di simulik si è simulato l'andamento della reiezione di un disturbo sinusoidale di ampiezza 1

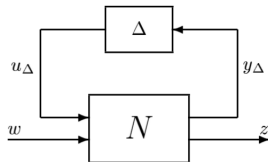


Per verificare la robustezza del controllo si è portato prima il sistema in forma P^*K e poi si è effettuata una μ -analysis, determinando il valore singolare strutturato $\mu(\Delta)$, con l'ausilio dei comandi Matlab: *robuststab(.)* e *robustperf(.)*.



Il primo verifica la robusta stabilità ponendo $M = N_{11}$, dove $N = F_l(P, K)$.

Il secondo invece esamina le robuste prestazioni su N .



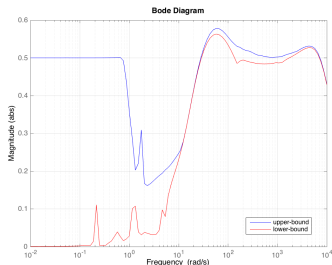


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per la robusta stabilità.

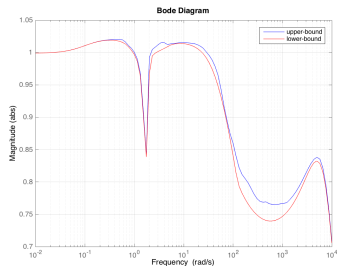
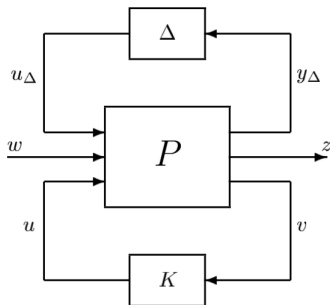


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per le robuste prestazioni.

Si può notare come il sistema risulta robustamente stabile ma non robustamente performante.

Controllore H_∞

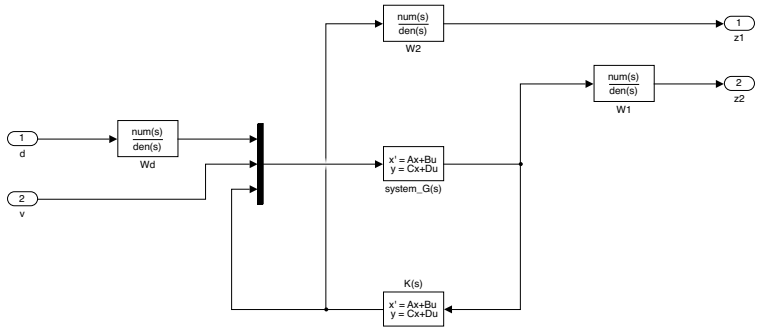
Si parte dalla struttura a blocchi della figura sottostante non prendendo in considerazione il blocco Δ .



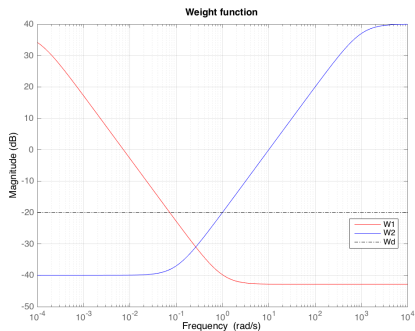
La tecnica usata cerca di raggiungere le specifiche di progetto selezionando tra tutti i controllori che garantiscono la stabilità interna del sistema, quello che minimizza $\|F_l(P, K)\|_\infty$.

Come ingresso si è scelto il vettore $w = [w_d \ v \ u_c]^T$, dove w_d è pesato da W_d , mentre le uscite prese in considerazione sono state il controllo u_c pesato dalla funzione peso W_2 e l'uscita del sistema y pesata dalla funzione W_1 . Il metodo in questione cerca quel controllore che soddisfa la relazione:

$$\min_K \left\| \begin{bmatrix} W_1 G S W_d & W_1 S \\ W_2 T W_d & W_2 K S \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (6)$$



Come pesi si sono scelte funzioni del primo ordine per avere una minore complessità del controllore.



$$W_1 = \frac{72(s + 1)}{(10000s + 1)}$$

$$W_2 = \frac{0.1(s + 0.1)}{(0.001s + 1)}$$

$$W_d = 0.1$$

Tramite il comando *hinfsyn*(.) di Matlab abbiamo sintetizzato il controllore $K(s)$ che è del sesto ordine con una funzione di trasferimento pari a:

$$K(s) = \frac{-0.0054935 \cdot (s^2 + 0.1845s + 0.01685)}{(s + 9.143)(s^2 + 1.319s + 0.8493)} \cdot \frac{(s + 1000)(s^2 + 0.07998s + 8)}{(s + 0.0001)(s^2 + 0.04571s + 8.01)} \quad (7)$$

e con un $\gamma = 0.0605$ e un tempo di assestamento di $\approx 30sec$.
Dopo di che si è effettuata un μ -analysis per la robusta stabilità e le robuste prestazioni.

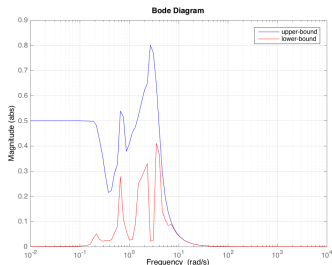


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per la robusta stabilità.

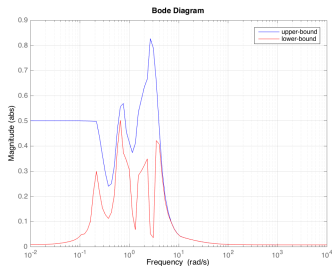
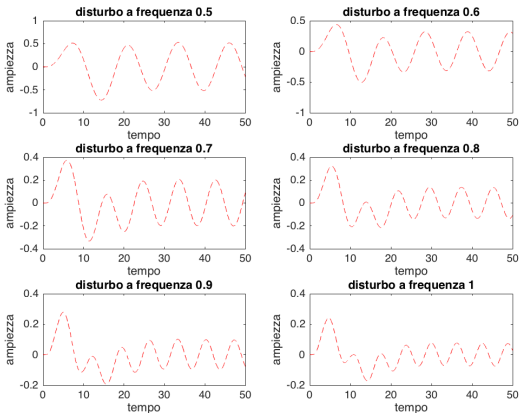


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per le robuste prestazioni.

Possiamo vedere come upper e lower bound sono < 1 sia per la stabilità che per le prestazioni.

Con l'ausilio di simulink troviamo un andamento migliore per le frequenze che vanno da 0.7 a 1 rispetto alle frequenze di 0.5 e 0.6.



Controllore μ

Anche in questo caso viene mantenuta la struttura di controllo della tecnica precedente con la differenza che il blocco delle incertezze ora viene tenuto in considerazione. Questo controllore combina la sintesi dell' H_∞ e la μ -analysis cercando quella $K(s)$ che minimizza

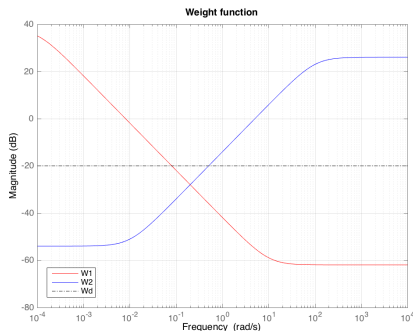
$$\min_K \left(\min_D \|DN(K)D^{-1}\|_\infty \right)$$

Tramite il comando `dksyn(.)` di Matlab abbiamo sintetizzato il controllore $K(s)$ che è del *70esimo* ordine ed otteniamo una reiezione accettabile, con tempo di assestamento è di $\approx 35sec$.

Data l'elevata complessità si è utilizzato il comando *hankelmr(.)* di Matlab per ottenere un controllore che abbia le stesse caratteristiche di robustezza ma un ordine nettamente più basso. La funzione di trasferimento del controllore trovato è:

$$K(s) = \frac{-0.0024028 \cdot (s + 936.9)(s^2 + 0.1201s + 0.01694)}{(s + 0.3081)(s^2 + 0.6684s + 0.5576)} \cdot \frac{(s^2 + 0.8917s + 0.6022)(s^2 + 0.01206s + 9.245)}{(s^2 + 1.157s + 8.571)(s^2 + 0.0125s + 9.243)} \cdot \frac{(s^2 + 0.04628s + 9.409)}{(s + 9.999 \cdot 10^{-5})(s^2 + 0.06858s + 9.427)} \quad (8)$$

Qui mostriamo le funzioni di trasferimento dei pesi e i rispettivi diagrammi di bode.



$$W_1 = \frac{8(s + 10)}{(10000s + 1)}$$

$$W_2 = \frac{0.2(s + 0.01)}{(0.01s + 1)}$$

$$W_d = 0.1$$

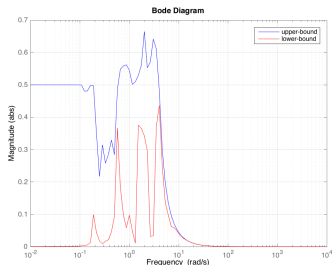


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per la robusta stabilità.

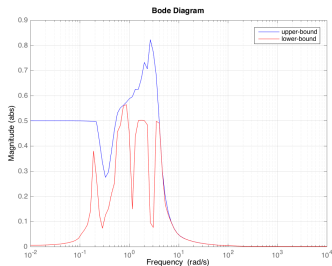
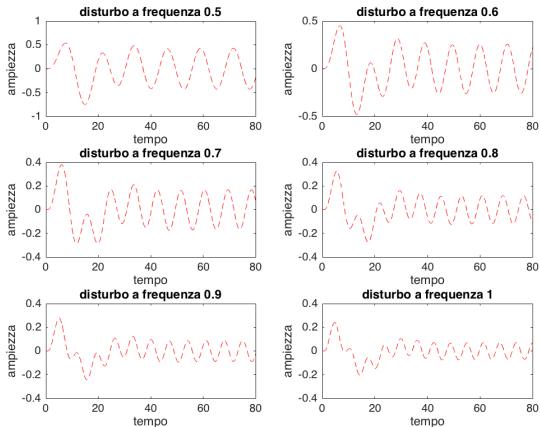


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per le robuste prestazioni.

Anche in questo caso il controllore risulta sia robustamente stabile che robustamente performante.

Simulando la reiezione del disturbo sinusoidale di ampiezza 1 con Simulink otteniamo che i seguenti risultati:



LQG/LTR

La struttura presa in considerazione per questa tecnica di controllo è quella del controllore classico. Si è scelto di effettuare l'apertura dell'anello in ingresso, quindi abbiamo definito prima i parametri del controllore *LQR* ovvero le matrici *Q* e *R*, e poi tramite il parametro *q* abbiamo fatto variare le matrici del *Filtro di Kalman*.

Si è deciso di aumentare lo stato del sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$au(s) = \frac{1700 \cdot (s^2 + 0.02765s + 0.5882)}{(s + 1000)(s + 10)} \quad (9)$$

La scelta della particolare frequenza degli zeri è dettata dalle specifiche e quindi si è cercato di avere un buon compromesso.

Si è scelto:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

dove si è preso come stati di retroazione solo le posizioni delle 2 masse.

Per quanto riguarda invece il *Filtro di Kalman* si sono posti i parametri in modo molto generico dato che saranno loro a variare durante il *loop recovery*:

$$Q_f = 1$$

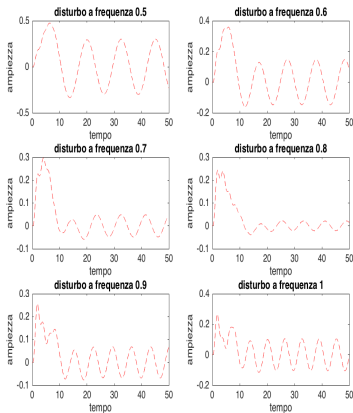
$$R_f = 1$$

Per la sintesi di questo controllore si è usato il comando Matlab *lqr(.)* per la sintesi di K_c e poi una volta determinato la funzione target $K_c(sI - A)^{-1}B$ si è utilizzato il comando *ltrsyn(.)* per il loop-transfer-recovery.

Di seguito portiamo il controllore:

$$K(s) = \frac{6039.6 \cdot (s + 100)(s + 7.657)}{(s^2 + 0.02766s + 0.5882)(s + 43.81)} \cdot \frac{(s + 0.2714)(s^2 - 0.06169s + 4.071)}{(s + 100.9)(s^2 + 47.82s + 2057)} \quad (10)$$

ed il tempo di assestamento è di $\approx 20sec$.



Con simulink siamo riusciti a simulare l'andamento dell'uscita del sistema quando in ingresso c'è un disturbo di ampiezza unitario. Si può notare che la reazione migliore si ha per le frequenze 0.7 e 0.8 proprio in vicinanza della frequenza degli zeri scelti.

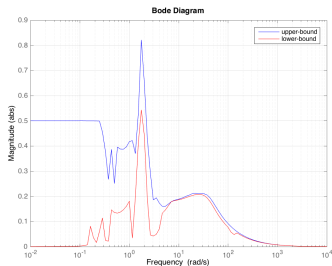


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per la robusta stabilità.

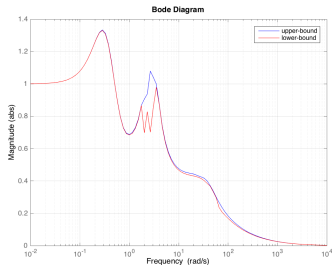


Figura: Upper e lower bounds del valore singolare strutturato per le robuste prestazioni.

Non abbiamo le robuste prestazioni, magari scegliendo in modo più accurato i parametri dell' LQR si potrebbero ottenere dei risultati migliori.

Conclusioni

Un riassunto della situazione si può vedere nella tabella sottostante

	T_{ass}	Ord. Controllore	Stab. Marg.	Perf. Marg
Classico	25 sec	3	1.3212	NO
H_∞	30 sec	6	1.1750	1.1330
μ	35 sec	10	1.5053	1.2060
LQG-LTR	20 sec	6	1.0644	NO

Un controllore migliore risulta μ con dei margini migliori rispetto ad altri anche se con una complessità poco maggiore e soprattutto un miglior effort di controllo come si può vedere nelle figure seguenti.

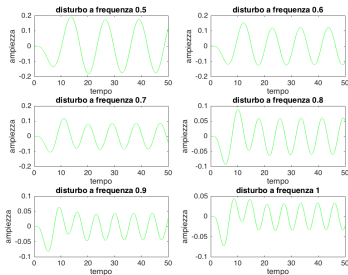


Figura: Energia di controllo per H_{∞} .

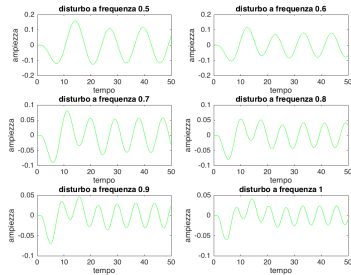


Figura: Energia di controllo per il μ .