

Università degli Studi di Milano
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

DIPARTIMENTO DI FISICA
ALDO PONTREMOLI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN
FISICA

Generazione e propagazione di onde
acustiche dotate di momento angolare
orbitale

Relatore: Marco Carlo Alberto Potenza
Correlatore: Bruno Paroli

Elaborato Finale di:
Michele Rashid Spadaro
Matr. Nr. 942051

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

“There exists a passion for comprehension, just as there exists a passion for music. That passion is rather common in children but gets lost in most people later on. Without this passion, there would be neither mathematics nor natural science.”

– Albert Einstein

*“Balk logic with acquaintance that you have,
And practice rhetoric in your common talk;
Music and poesy use to quicken you;
The mathematics and the metaphysics,
Fall to them as you find your stomach serves you.
No profit grows where is no pleasure ta’en.
In brief, sir, study what you most affect.”*

– William Shakespeare

*“There is geometry in the humming of the strings.
There is music in the spacing of the spheres.”*

– Pythagoras

Abstract

Le onde dotate di momento angolare orbitale (OAMW) sono oggetto d'indagine dell'ottica singolare. Si propone qui il progetto di un dispositivo in grado di generare l'equivalente acustico di questo fenomeno. L'apparato sperimentale costruito ha permesso di studiare la generazione dei fasci e la loro propagazione in campo lontano, offrendo la possibilità di valutare la compatibilità del modello Laguerre-Gauss con i dati raccolti.

I risultati sono stati confrontati direttamente con la teoria mutuata dall'ottica e si integrano coerentemente con le più recenti ricerche nel settore delle OAMW acustiche. L'impianto teorico ed i dati sperimentali sono affiancati da rappresentazioni grafiche ottenute tramite simulazioni numeriche che hanno favorito la comprensione del fenomeno attraverso la visualizzazione diretta della previsioni teoriche.

Indice

Indice

Elenco delle figure

1	Introduzione	1
1.1	Onde, Ottica e Acustica	1
1.2	Organizzazione dell'elaborato	2
2	Onde Acustiche dotate di Momento Angolare Orbitale	4
2.1	Note di teoria ondulatoria	4
2.1.1	Onde e fasci	4
2.1.2	Spettro acustico ed elettromagnetico	5
2.2	Modello teorico	6
2.2.1	Equazione di Helmholtz parassiale	6
2.2.2	Fasci di Laguerre-Gauss	7
2.2.3	Generazione di vortici elettromagnetici e acustici	10
2.2.4	Sovrapposizione di fasci gaussiani	10
2.2.5	Deviazioni dal modello ideale	12
2.3	Applicazioni delle OAMW acustiche	12
3	Progettazione dell'Apparato	14
3.1	Componenti del dispositivo	14
3.1.1	Circuito di controllo	14
3.1.2	Filtri e amplificatori	15
3.1.3	Altoparlanti e strutture in PLA	17
3.2	Ottimizzazione del funzionamento	18
3.2.1	Calibrazione del dispositivo	20
3.2.2	Modello matematico dell'apparato	20

4 Raccolta e Analisi dei Dati Sperimentali	24
4.1 Processo di Misura	24
4.1.1 Acquisizione dei segnali	24
4.1.2 Osservazioni e accorgimenti	25
4.1.3 Misure preliminari	27
4.2 Raccolta dei dati	28
4.3 Analisi statistica	30
4.3.1 Confronto diretto	30
4.3.2 Adattamento del modello (Fit)	32
4.4 Limiti del modello sviluppato	33
4.4.1 Direzione di propagazione dei fasci	33
4.4.2 Terza serie e rumore di fondo	35
5 Conclusioni	38
5.1 Risultati	38
5.1.1 Valutazione dell'apparato	39
5.2 Sviluppi futuri	40
5.2.1 Acustica e Ottica	41
A Approfondimenti teorici	43
A.1 Equazione di Helmholtz parassiale	43
A.2 Polinomi generalizzati di Laguerre	44
A.3 Fasci Laguerre-Gauss puri di ordine -1, -2	45
A.4 Fasci Laguerre-Gauss di ordine 3, 4	46
A.5 Sorgenti eterogenee	47
B Dettagli sperimentali	49
B.1 Codice Arduino	49
B.2 Schema circuitale dell'apparato	52
B.3 Calibrazione dell'apparato	53
B.4 Test degli altoparlanti	54
B.5 Risposta in frequenza dei microfoni	54
B.6 Scansioni orizzontali simulate	55
B.7 Dati raccolti	56
B.8 Fit dei dati di intensità	58
B.9 Rumore di fondo	58
Bibliografia	60
Ringraziamenti	62

Elenco delle figure

1	Fascio gaussiano $\ell = 0$	7
2	Fascio Laguerre-Gauss, $\ell = 1$, vortice puro	8
3	Fascio Laguerre-Gauss, $\ell = 2$, vortice puro	9
4	Fasci LG, $\ell = 1, 2$: sovrapposizione di fasci gaussiani	11
5	Modello con sorgenti eterogenee	13
6	Algoritmo DDS	15
7	Diagrammi di Bode, filtri Tchebyschev	16
8	Diagrammi di Bode, filtri RC passa-alto	17
10	Apparato sperimentale	18
9	Scheda Arduino, filtri e amplificatori	19
11	Modello matematico dell'apparato	21
12	Spostamento della singolarità	22
13	Previsione teorica delle scansioni orizzontali a 0.5 cm	23
14	Microfoni e scheda audio	25
15	Disposizione dei microfoni	26
16	Soundcard Oscilloscope	27
17	Dati sperimentali	29
18	Confronto diretto dei dati con i modelli	31
19	Fit dei dati di fase raccolti	34
20	Spostamento del waist	35
21	Fasci inclinati	35
22	Fit gaussiano della terza serie	36
23	Scansioni orizzontali con fondo gaussiano	37
24	Polinomi generalizzati di Laguerre	44
25	Fasci Laguerre-Gauss $\ell = -1, -2$	45
26	Fasci Laguerre-Gauss $\ell = 3, 4$	46
27	Sorgenti con intensità eterogenee	47
28	Sorgenti con fasi eterogenee	48
29	Schema circuitale dell'apparato	52
30	Risposta in frequenza dei microfoni	54
31	Previsioni teoriche delle scansioni orizzontali	55
32	Fit dei dati di intensità	58
33	Simulazioni 2D rumore gaussiano	59

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Onde, Ottica e Acustica

Le onde descrivono i processi fisici in cui energia e informazione propagano nello spazio senza causare trasferimenti di materia. Questo schema permette di descrivere una vasta gamma di fenomeni associati a molteplici campi della realtà: onde marine e sismiche, elettromagnetiche e acustiche, onde gravitazionali previste dalla teoria della relatività generale, che permettono di "osservare" eventi estremamente lontani nel tempo e nello spazio, ed onde di probabilità, che descrivono il comportamento delle particelle subatomiche in meccanica quantistica. Tutti i processi qui elencati sono rappresentati da modelli teorici analoghi, nonostante la particolarità delle loro nature.

Conseguentemente le proprietà e i comportamenti caratteristici dei meccanismi ondulatori dipendenti solo dalla loro formulazione matematica, come il principio di sovrapposizione o i fenomeni di interferenza, oggetto di studio già dei primi corsi universitari, devono avere una valenza universale. Questa osservazione è cruciale per lo sviluppo della ricerca scientifica: l'universalità delle descrizioni analitiche è uno strumento irrinunciabile che permette di estendere risultati e conoscenze oltre i confini delle singole discipline, promuovendo una descrizione unitaria della realtà. La coesistenza delle similitudini sostanziali e delle nature singolari dei fenomeni fisici rende fruttuosa la ricerca interdisciplinare ed intersetoriale.

Evidenziando come la luce e il suono, o meglio le onde elettromagnetiche ed acustiche, costituiscano il fondamento della nostra percezione sensoriale e guidino le nostre interazioni con il mondo, appare subito evidente quanto conoscere la teoria ondulatoria sia fondamentale per comprendere la realtà che ci circonda.

Nello specifico l'Ottica e l'Acustica, come branche della Fisica, sono legate sia storicamente – già Newton associava armonie cromatiche e sonore: *"May not the harmony and discord of Colours arise from the proportions of the Vibrations propagated"*

through the Fibres of the optick Nerves into the Brain, as the harmony and discord of Sounds arise from the proportions of the Vibrations of the Air?” (Isaac Newton, The Third Book of Opticks, Query 14) – sia sperimentalmente: sfruttando proprietà delle onde elettromagnetiche e delle onde sonore sono stati realizzati dispositivi in grado di studiare proprietà microscopiche della materia. [1]

Questo elaborato ha lo scopo di illustrare come risultati ottenuti da esperimenti acustici possano essere confrontati con conoscenze sviluppate in laboratori di ottica, offrendo la possibilità di approfondire la comprensione dei sistemi studiati da punti di vista alternativi.

L’oggetto d’indagine è qui una particolare classe di onde, caratterizzata dalla capacità di trasportare momento angolare orbitale. Questo fenomeno, generalmente studiato nell’ambito dell’ottica singolare, viene qui trattato mediante l’analisi del suo analogo acustico.

1.2 Organizzazione dell’elaborato

Il Capitolo 2 si aprirà con una breve introduzione alla teoria ondulatoria (2.1) seguita da una presentazione più dettagliata del modello delle onde dotate di momento angolare orbitale (OAMW)(2.2). In questa sezione saranno approfonditi i principi fondamentali e le equazioni che descrivono tali oggetti, fornendo un solido quadro teorico. Particolare enfasi sarà rivolta ai fasci Laguerre-Gauss, che saranno rappresentati graficamente in modo da facilitare la comprensione del fenomeno studiato grazie ai risultati delle simulazioni numeriche. Sono qui discusse brevemente anche le principali applicazioni pratiche del fenomeno studiato (2.3).

Successivamente nel Capitolo 3 il focus sarà sulla progettazione e costruzione dell’apparato sperimentale attraverso la descrizione dettagliata delle sue componenti e delle metodologie adottate nella realizzazione (3.1). Si tratteranno inoltre approfonditamente le deviazioni dal modello ideale riscontrate che hanno caratterizzato il comportamento del sistema reale e le conseguenti procedure di calibrazione necessarie a garantire funzionamento dell’apparato (3.2).

Nel Capitolo 4, dedicato alla descrizione dell’esperienza pratica in laboratorio, saranno descritte prima le procedure seguite e le accortezze adottate durante lo svolgimento dell’esperimento (4.1), successivamente i dati raccolti (4.2) saranno analizzati e confrontati con i modelli teorici descritti precedentemente (4.3) in modo da evidenziare i limiti di applicabilità del modello sviluppato e del dispositivo realizzato (4.4).

Infine il Capitolo 5 chiuderà l’elaborato con la sintesi dei principali risultati ottenuti, offrendo un commento critico sui punti di forza e sui difetti dell’apparato costruito (5.1). Si delineeranno qui possibili direzioni di approfondimento delle ricerche per eventuali ricerche e sviluppi futuri (5.2).

Nelle Appendici [A](#) e [B](#) si potranno consultare dettagli ulteriori in riferimento al modello teorico e all'apparato sperimentale rispettivamente.

Capitolo 2

Onde Acustiche dotate di Momento Angolare Orbitale

La teoria ondulatoria è strettamente legata al campo dell'ottica, la sua prima formalizzazione matematica è stata sviluppata in questo ambito nel XVII secolo da Huygens [2]. Anche il più moderno concetto di fascio gaussiano è associato tipicamente allo stesso contesto, nasce nel secolo scorso, come modello descrittivo dei fasci laser [3].

Allo stesso modo i modelli di OAMW sono generalmente connessi alla fenomenologia delle onde elettromagnetiche [4], nello specifico sono numerose le ricerche svolte nei range di frequenze visibile [5], delle microonde [6] e radio [7].

La descrizione matematica di questi oggetti è comunque sufficientemente generica da poter essere utilizzata per trattare coerentemente i meccanismi ondulatori anche in campi differenti: la rappresentazione teorica dell'analogo processo acustico, cioè della generazione e propagazione delle OAMW acustiche in aria, si appoggia sostanzialmente allo stesso modello sviluppato in ottica.

2.1 Note di teoria ondulatoria

2.1.1 Onde e fasci

Un'onda descrive una perturbazione che propaga nello spazio trasportando energia ma non materia. I parametri di lunghezza d'onda λ (m) e frequenza f (Hz) sono necessari a determinare le proprietà spaziali e temporali di un'onda e ne fissano la velocità di propagazione $c = \lambda f$. In un mezzo isotropo la velocità di un'onda è sempre costante quindi questa relazione tra lunghezza d'onda e frequenza è univoca.

Una formula sufficientemente generica adatta a descrivere onde propaganti in direzione z nello spazio e nel tempo è:

$$y = e^{i2\pi(\frac{z}{\lambda} \pm tf) + \phi} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z \pm ct) + \phi} = e^{ik(z \pm ct) + \phi}$$

In questa equazione si è evidenziato il numero d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e si è introdotto il parametro ϕ (rad) di sfasamento. Nello specifico il secondo termine permette di descrivere agevolmente la forma di un'onda rispetto a un riferimento temporale o spaziale, aspetto di fondamentale importanza per la comprensione delle metodologie utilizzate nella modellizzazione e realizzazione dell'esperimento.

Un insieme di onde che propagano nella stessa direzione costituisce un fascio. Nella descrizione di questo sistema è fondamentale considerare i parametri associati al suo raggio (waist) w_0 e alla sua divergenza θ poiché ne determinano l'andamento della larghezza durante la propagazione in relazione alle caratteristiche della sua sorgente.

Per comprendere l'oggetto di studio dell'esperimento sono inoltre cruciali i concetti di campo vicino e campo lontano. Questi termini delineano due zone ben distinte dello spazio, caratterizzabili quantitativamente tramite la lunghezza $d = 2D^2/\lambda$, dove D rappresenta la dimensione caratteristica della sorgente: appartengono al campo vicino i punti che si trovano a una distanza r tale che $r \ll d$ mentre nella regione del campo lontano si ha $r \gg d$.

Nella regione prossima alle sorgenti le caratteristiche specifiche della sorgente stessa e dell'ambiente circostante influenzano significativamente il comportamento delle onde. Ci si riferisce a questo scenario come al modello di Fresnel.

Nella regione più distante dalle sorgenti le onde si propagano con fronti d'onda approssimativamente piani. In queste condizioni l'evoluzione dei campi diventa più uniforme e prevedibile, e diventano utili gli strumenti dell'analisi di Fourier. Questo schema è legato al modello di propagazione di Fraunhofer.

2.1.2 Spettro acustico ed elettromagnetico

Le onde appartenenti alla regione udibile dello spettro acustico condividono con le microonde e le onde radio, nel basso spettro elettromagnetico, il range di lunghezze d'onda di 10^{-1} m - 10^0 m, inoltre le frequenze 20 Hz - 20 kHz sono comuni sia alle onde udibili sia alle onde radio. Ciò suggerisce che queste regioni corrispondenti dei due spettri possano possedere proprietà confrontabili.

Si osservano effettivamente una buona capacità di penetrazione dei mezzi e una bassa tendenza all'attenuazione e alla dispersione spaziale similmente per le classi di onde elencate. Lo studio della propagazione e il confronto diretto dei loro modelli può dunque agevolare lo sviluppo di applicazioni pratiche, in particolare nel campo delle comunicazioni [8], ed aprire ad interessanti prospettive di ricerca intersetoriale.

2.2 Modello teorico

Può essere sviluppata ulteriormente la corrispondenza tra ottica e acustica come nell'articolo di Zürcher [9], in cui è discussa un modello fluido-meccanico tale da evi-denziare per le onde acustiche due campi oscillanti, corrispondenti al campo elettrico e magnetico, per i quali valgono leggi analoghe a quelle di Maxwell valide per le onde elettromagnetiche polarizzate linearmente.

Si vede dunque come sia conveniente trattare la teoria essenziale per le onde e i fasci inizialmente in termini generali, per poi svilupparla in campo acustico quando opportuno, senza dimenticare l'utile confronto diretto con i risultati già ottenuti dall'ottica.

2.2.1 Equazione di Helmholtz parassiale

L'equazione di Helmholtz descrive la propagazione di onde in mezzi omogenei e non vincolati, si presenta nella generica forma

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$$

dove Ψ rappresenta l'onda, ∇^2 è l'operatore laplaciano e k è ancora il numero d'onda.

Per descrivere un fascio che propaga lungo la direzione z è vantaggioso adottare l'approssimazione parassiale, ciò consente semplificazioni sostanziali per la descrizione nella regione prossima all'asse ottico.

Assumendo l'onda piana $\Psi(x, y, z) = u(x, y, z)e^{ikz}$ come soluzione generica dell'e-quazione e sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

oppure, in coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

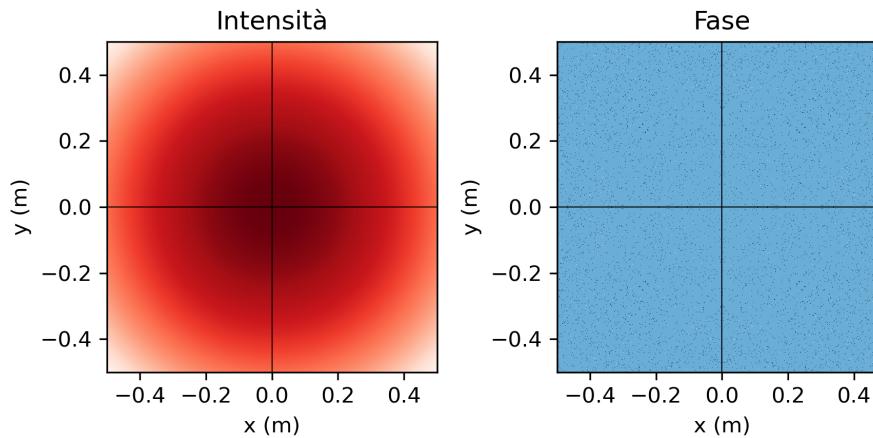
(Calcoli esplicativi nell'Appendice A.1)

Questa equazione è fondamentale per comprendere la propagazione dei fasci, evi-denzia infatti come la variazione dei campi lungo l'asse di propagazione sia propor-zionale al gradiente trasverso (x, y o r, θ), relazione caratteristica dei modelli ondulatori parassiali.

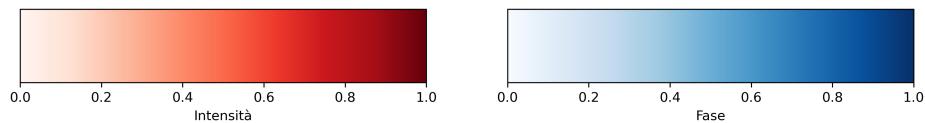
2.2.2 Fasci di Laguerre-Gauss

Oltre ad essere ampiamente impiegato nella teoria ottica [10] e quindi ben noto dal punto di vista teorico, il modello gaussiano presenta in questo contesto un ulteriore caratteristica vantaggiosa: si presta infatti facilmente ad essere generalizzato in modo descrivere fasci dotati di momento angolare [11, 12].

Un fascio gaussiano semplice, caratterizzato dall'intensità diffusa secondo una distribuzione gaussiana e dal valore di fase uniforme sui piani perpendicolari all'asse di propagazione, può essere considerato infatti come il modo $\ell = 0$ di un insieme più ampio di fasci.



(a) Fascio gaussiano, $\ell = 0$, il profilo è stato calcolato con il modello Laguerre-Gauss ad una distanza di 20 cm dalla sorgente, le stesse condizioni valgono per tutte le simulazioni presenti nell'elaborato dove non diversamente specificato, per tutti i grafici valgono inoltre le convezioni di colore descritte in Figura 1b.



(b) I grafici di questo elaborato sono stati realizzati a partire da codice Python sviluppato appositamente per il progetto. Per tutti i grafici i colori rosso e blu sono sempre riferiti rispettivamente all'intensità e alla fase dei fasci, toni scuri rappresentano valori più alti, toni chiari sono associati a valori più bassi.

Figura 1: Fascio gaussiano $\ell = 0$.

Il modello completo dei fasci Laguerre-Gauss si ottiene introducendo ulteriori termini al sistema standard, nella prima riga dell'equazione 1 sono stati aggiunti i termini di normalizzazione, il polinomio generalizzato di Laguerre (Appendice A.2), che influenza la distribuzione radiale di intensità, ed il termine $e^{i\ell\theta}$ che lega la fase dell'onda alla coordinata angolare producendo la caratteristica forma elicoidale.

In questo contesto si introducono i numeri radiale ed *angolare*, indicati rispettivamente con p ed ℓ . In particolare, il secondo parametro è essenziale per la caratterizzazione dei vortici: può assumere un qualsiasi valore intero e determina il numero di avvolgimenti della fase del fascio attorno al suo asse di propagazione. Comunemente ci si riferisce a questo termine come "carica topologica" poiché l'asse di rotazione è caratterizzato da una singolarità della fase e dell'intensità dell'onda.

Ad esempio un fascio di ordine $\ell = 1$ presenta uno sfasamento di 2π lungo una circonferenza contenente la singolarità, fasci di ordini superiori generano un numero maggiore di spirali. La carica topologica può anche essere negativa per descrivere i vortici chirali. Nelle Figure 2 e 3 sono mostrati i modi 1 e 2, nell'Appendice A.3 i corrispondenti chirali. Questa semplice estensione del modello permette di osservare le due caratteristiche fondamentali delle OAMW: il profilo di fase elicoidale e la singolarità della fase e dell'intensità lungo l'asse di propagazione.

Alla repository documentazione¹ è consultabile tutto il codice sviluppato.

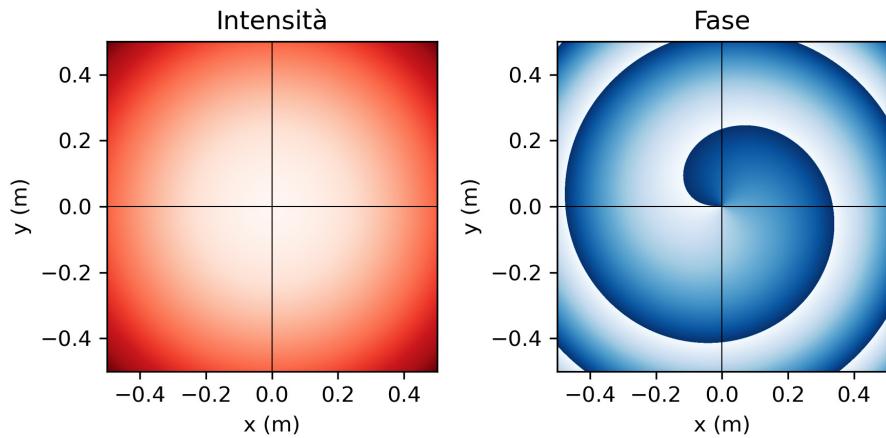


Figura 2: Fascio Laguerre-Gauss, $\ell = 1$, vortice puro.

¹https://github.com/MicheleRashid/OAMW_Acustiche

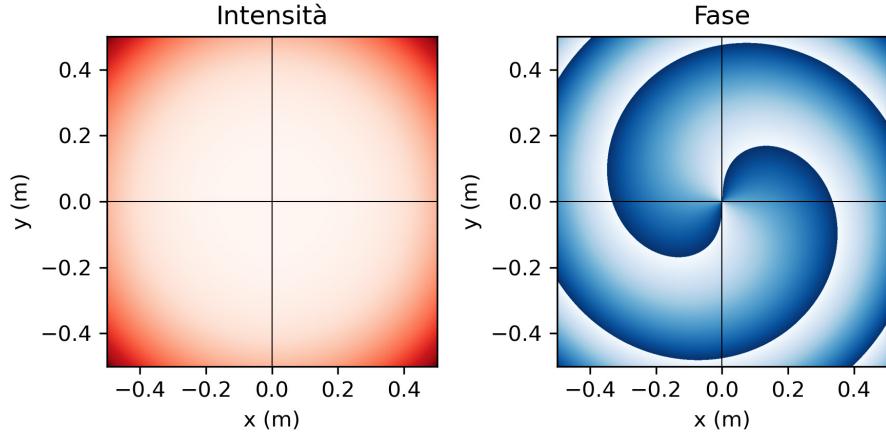


Figura 3: Fascio Laguerre-Gauss, $\ell = 2$, vortice puro.

Nella seconda riga dell’equazione 1 sono presenti due ulteriori termini: la fase di Gouy, legata alla forma specifica dei fasci gaussiani classici, ed il termine di curvatura.

Nello specifico la necessità di introdurre questo ultimo termine sarà discussa nelle Sezioni 3.2.2, dedicata al modello matematico dell’apparato, e 4.3, dove saranno analizzati i dati sperimentali. Il grafico in Figura 1a è stato realizzato trascurando questo fattore, al contrario di tutte le altre simulazioni 2D.

La formula completa del modello ideale è:

$$U_{p,\ell}(r, \theta, z) = \mathcal{A} \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(p + |\ell|)!}} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w} \right)^{|\ell|} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2}} \cdot L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \cdot e^{-i\ell\theta} e^{i\phi}. \\ \cdot \exp \left(\frac{-i(2p + |\ell| + 1)}{\tan \frac{z}{z_r}} \right) \cdot \exp \left(\frac{ikr^2 z}{2(z^2 + z_r^2)} \right) \quad (1)$$

Dove \mathcal{A} è un fattore di normalizzazione, $w = w_0 \sqrt{1 + (z/z_r)^2}$ è il termine che descrive la larghezza del fascio e $z_r = \pi w_0 / \lambda$, detta distanza di Rayleigh, descrive l’attenuazione dei fronti d’onda durante la propagazione.

2.2.3 Generazione di vortici elettromagnetici e acustici

Una fondamentale differenza tra le onde elettromagnetiche ed acustiche risiede nella loro natura, rispettivamente trasversale e longitudinale: il campo elettromagnetico infatti, perturbato, varia in direzioni perpendicolari a quella di propagazione dell'onda mentre le oscillazioni del "campo" di pressione delle onde acustiche si sviluppano parallelamente alla direzione di diffusione.

Un'onda trasversale è caratterizzata dal suo momento di spin, una quantità legata all'orientamento del campo oscillante, ciò determina una direzione preferenziale univoca, detta di polarizzazione che non introduce alcuna modifica al modello qui sviluppato. Le onde longitudinali, invece, non possono essere polarizzate, i vortici acustici permettono dunque di rendere più chiaro ed evidente il fenomeno studiato, evidenziando come non ci sia correlazione tra le caratteristiche delle OAMW e quelle delle onde trasversali con polarizzazione circolare.

2.2.4 Sovrapposizione di fasci gaussiani

Le ricerche sui fasci elettromagnetici con $\ell \neq 0$ hanno favorito lo sviluppo di molteplici dispositivi in grado di generare delle OAMW sfruttando differenti principi e strumenti come lenti cilindriche, piastre a fase elicoidale, tecniche olografiche e metamateriali. L'articolo di Chen et al. [13] presenta una panoramica ampia e dettagliata sui metodi di generazione e ricezione delle OAMW elettronagnetiche e mostra inoltre come apparati analoghi siano stati riprodotti in campo acustico.

Un sistema di generazione semplice da realizzare ed applicabile ad entrambe le casistiche è quello di sovrapporre fasci di ordine $\ell = 0$ tra loro opportunamente sfasati e distribuiti nello spazio: si può pensare allo sfasamento previsto lungo una circonferenza (2π per il primo modo normale) come ottenuto mediante una serie di sorgenti progressivamente sfasate.

I risultati degli articoli consultati [14, 15] mostrano come otto sorgenti disposte ai vertici di un ottagono regolare, controllate in modo da emettere fasci gaussiani tra loro progressivamente sfasati di 45° , siano in grado di produrre un singolo fascio dotato di momento angolare orbitale $\ell = 1$.

Nelle Figure 4a e 4b sono rappresentati i risultati di una simulazione in cui gli otto fasci di ordine $\ell = 0$ sono sfasati e sovrapposti in modo da ricreare i vortici del primo e secondo ordine. I risultati, apparentemente identici alle Figure 2 e 3, mostrano come, dal punto di vista teorico, la tecnica della sovrapposizione dei fasci permetta la generazione apparentemente esatta delle OAMW.

Come evidenziato dalle simulazioni nell'Appendice A.4 con lo stesso metodo sarebbe possibile, almeno in linea teorica, generare vortici del terzo ordine mentre per fasci con $\ell \geq 4$ sarebbe necessario incrementare il numero di sorgenti.

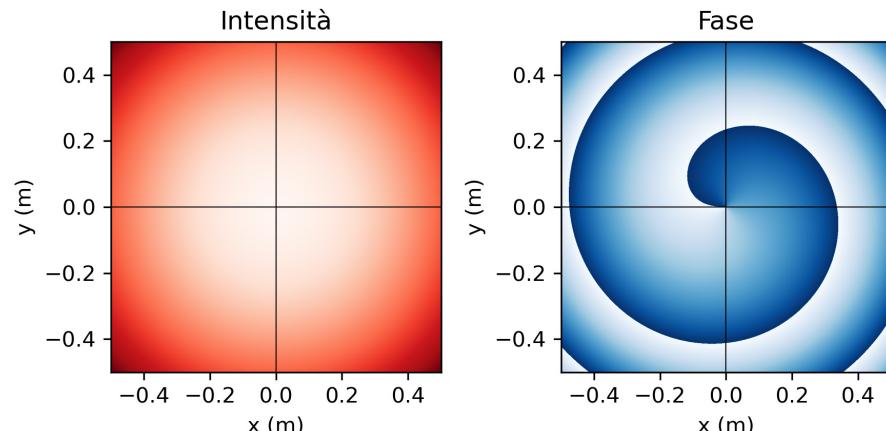
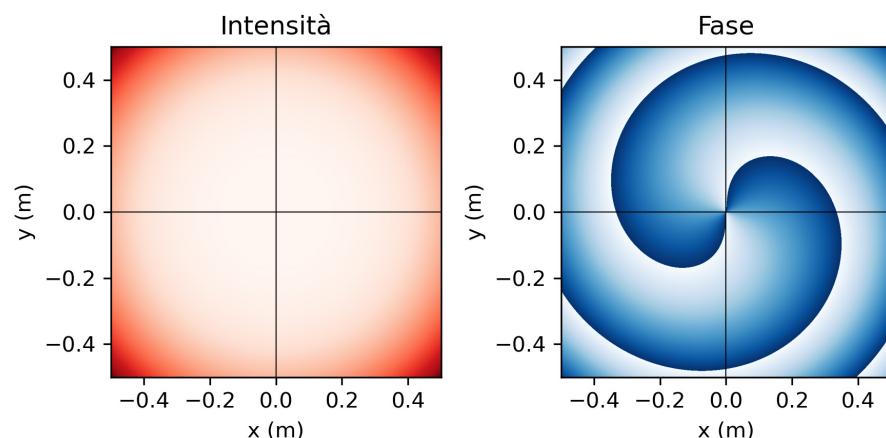
(a) $\ell = 1$.(b) $\ell = 2$.

Figura 4: Le simulazioni mostrano come i fasci $\ell = 1, 2$, ottenuti tramite sovrapposizione di fasci gaussiani non presentino differenze evidenti rispetto ai vortici puri precedentemente riprodotti.

2.2.5 Deviazioni dal modello ideale

Per un sistema reale è impossibile verificare la condizione prevista di sorgenti identiche ed esattamente sfasate, per valutare l'influenza dell'eterogeneità delle sorgenti sulla generazione del fascio composto sono state effettuate ulteriori simulazioni introducendo deviazioni casuali sull'intensità e sugli sfasamenti dei singoli fasci $\ell = 0$.

Confrontando numerose realizzazioni, mantenendo l'incertezza su questi valori entro un intervallo rispettivamente di $\pm 5\%$ per l'intensità e $\pm 5^\circ$ per la fase centrato sui valori nominali, si è visto come i vortici del primo ordine sono comunque generati coerentemente anche se la loro singolarità risulta, in genere, spostata rispetto all'origine degli assi. Nelle stesse condizioni, per i fasci del secondo ordine, l'effettiva generazione dei vortici non è sempre garantita e, anche quando il profilo elicoidale si presenta, risulta essere caratterizzato da due singolarità distinte.

Sono consultabili nell'Appendice A.5 i grafici che mostrano possibili realizzazioni considerando separatamente gli effetti delle deviazioni su fase e intensità per il primo e il secondo ordine, in questa sezione si possono osservare gli effetti combinati delle non omogeneità nelle Figure 5a e 5b per i due ordini rispettivamente.

2.3 Applicazioni delle OAMW acustiche

Nel campo acustico, le tecnologie basate sul momento angolare orbitale delle onde sono ancora giovani rispetto a quelle sviluppate in ambito ottico/elettromagnetico. Le più recenti ricerche aprono la strada ad applicazioni avanzate nelle comunicazioni subacquee (sonar), difficilmente accessibili alle onde elettromagnetiche, e nella diagnostica medica (sonografia) [13]. I vortici infatti permettono di immagazzinare e trasmettere un quantitativo maggiore di informazioni rispetto alle onde tradizionali e quindi permetterebbero di realizzare apparati più precisi e sensibili di quelli disponibili sul mercato.

Attualmente, la ricerca è focalizzata sullo sviluppo di dispositivi in grado di generare e rilevare OAMW acustiche stabilmente e con alta precisione, nonché sulla sperimentazione di nuovi materiali per migliorare le prestazioni dei dispositivi esistenti.

L'obiettivo dell'esperimento descritto nel seguito dell'elaborato è la realizzazione di un prototipo funzionante in grado di generare stabilmente delle OAMW acustiche, che metta in evidenza chiaramente le caratteristiche del fenomeno studiato e le difficoltà inerenti alla pratica sperimentale.

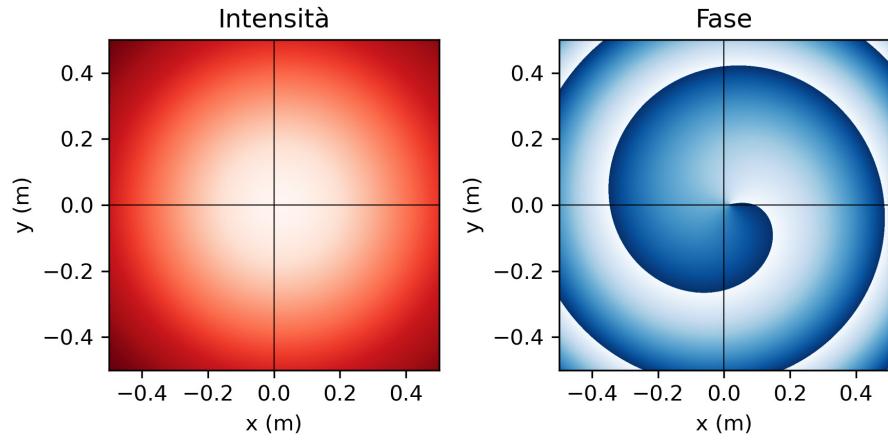
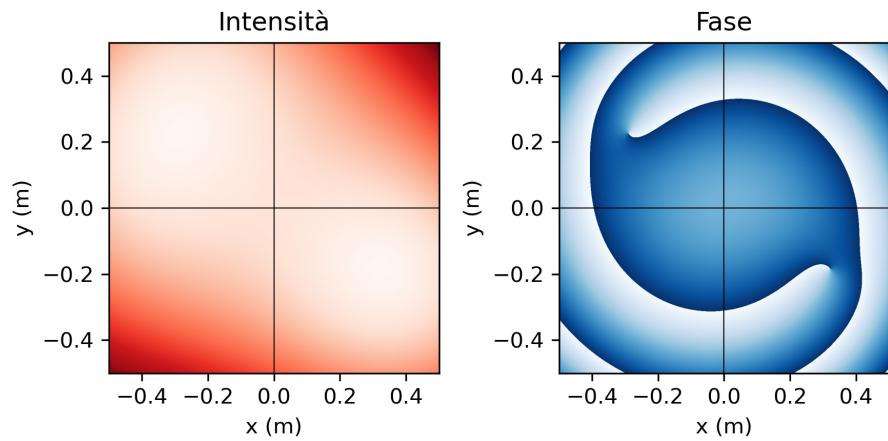
(a) Fascio Laguerre-Gauss $\ell = 1$, sorgenti non ideali.(b) Fascio Laguerre-Gauss $\ell = 2$, sorgenti non ideali

Figura 5: Risultato della simulazione del fascio generato tramite sorgenti eterogenee: si può osservare come la singolarità del modo $\ell = 1$ risulti traslata rispetto all'origine degli assi mentre per il modo $\ell = 2$ si formano due vortici distinti con singolarità separate.

Capitolo 3

Progettazione dell'Apparato

3.1 Componenti del dispositivo

A partire dalla descrizione dell'apparato utilizzato negli esperimenti di Toninelli et al. [14] e di Lin et al. [15], del quale è disponibile la completa documentazione¹, è stato progettato e realizzato un dispositivo (Figura 10) in grado di generare otto fasci adeguatamente sfasati, di sovrapporli, come descritto nella Sezione (2.2.4), tramite un sistema di cavità e dunque di produrre un singolo fascio Laguerre-Gauss di ordine $\ell \neq 0$.

Segue la descrizione dettagliata delle componenti informatiche, elettroniche ed elettro-acustiche dell'apparato. Nell'Appendice B.1 è consultabile il listato del codice Arduino sviluppato e nell'Appendice B.2 sono riportate le schematiche complete del circuito realizzato.

3.1.1 Circuito di controllo

Generare un segnale sinusoidale digitale puro è un compito relativamente complesso, tuttavia utilizzando i canali PWM del chip Arduino Mega 2560 è possibile produrre segnali non eccessivamente distorti e facilmente manipolabili, adatti allo svolgimento pratico dell'esperimento. Le onde sinusoidali sono state riprodotte implementando un algoritmo Direct Digital Synthesis (DDS) [16], che prevede la costruzione della forma d'onda designata a partire da una tabella d'onda contenente i valori del suo profilo e l'impiego di un contatore che ne scandisca l'evoluzione temporale. Nel grafico in Figura 6 è possibile visualizzare il risultato dell'algoritmo DDS, schematizzato tramite i profili della tabella d'onda e del segnale PWM generato.

Il codice sviluppato per il micro-controller contiene otto tabelle d'onda, ciascuna costituita dai valori di un singolo segnale sinusoidale opportunamente sfasato. Utiliz-

¹<https://github.com/witseie/AcousticSpanner>

zare tabelle separate permette di apportare correzioni sull'ampiezza e sulla fase dei singoli canali, pratiche necessarie durante la fase di calibrazione del dispositivo.

I segnali generati dall'algoritmo sono effettivamente delle onde quadre PWM, il cui ciclo di lavoro è determinato dal valore richiamato dalle tabelle d'onda. È di fondamentale importanza osservare che il clock della scheda Arduino abbia una frequenza di default troppo bassa per sostenere l'algoritmo, tramite apposite righe di comando questo parametro è stato impostato al suo valore massimo di 31372.55 Hz per tutti i canali PWM. In queste condizioni il codice permette di ottenere, tramite il campionamento delle tabelle, dei segnali sinusoidali di frequenza 600 Hz.

In Figura 9 sono mostrati il chip Arduino utilizzato e le componenti del circuito saldate su scheda forata.

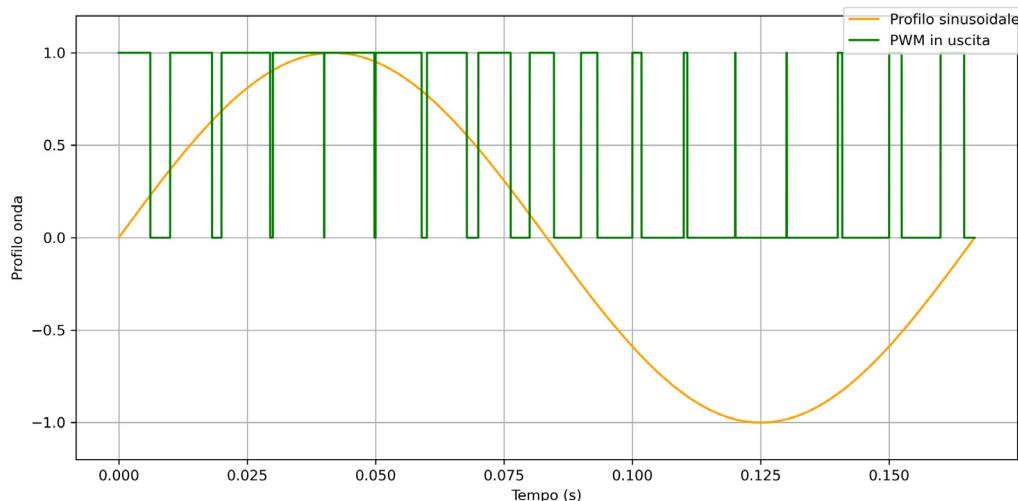


Figura 6: Il grafico illustra il valore del profilo sinusoidale contenuto nelle tabelle d'onda (in arancione), abbinato al segnale PWM effettivamente generato (in verde): ogni valore contenuto nelle tabelle d'onda stabilisce un ciclo di lavoro dell'onda quadra, questo per esempio raggiunge il valore massimo $\sim 100\%$ quando il seno è pari a 1 e assume il valore minimo $\sim 0\%$ quando il seno è pari a -1 (la frequenza del seno e del campionamento sono state scelte arbitrariamente in modo da rendere il grafico facilmente comprensibile).

3.1.2 Filtri e amplificatori

Per poter ottenere le forme d'onda sinusoidali a partire dagli otto segnali PWM, sono stati impiegati altrettanti filtri Tchebyschev. Questi filtri passa-basso, in grado di rimuovere le armoniche più alte del segnale, producono onde sinusoidali sufficientemente pure. Il sistema di filtraggio opera ad una frequenza abbastanza alta da non alterare le differenze di fase stabilite con il programma. Successivamente i segnali

processati sono stati amplificati da due TDA7375V, amplificatori attivi a due canali stereo, che garantiscono un totale di 8 canali mono: 4 per amplificatore, di cui due diretti e due invertenti.

Otto condensatori sono collegati in uscita ai canali degli amplificatori per bloccare le componenti continue dei segnali. I circuiti costituiti dai condensatori, di capacità $C = 470 \text{ nF}$, e dagli altoparlanti, di resistenza $R = 8 \Omega$, formano dei filtri RC passa-alto. L'alta tolleranza sui valori nominali di queste componenti, pari al 20% (riportata) per i condensatori e al 10% (misurata e riportata nell'Appendice B.4) per gli altoparlanti, fa sì che la frequenza caratteristica dei filtri possa variare entro un intervallo di $\pm 100 \text{ Hz}$, imponendo ai segnali un certo sfasamento arbitrario. Ciò renderà necessario un attento processo di calibrazione dello strumento perché funzioni in modo corretto. Si riportano i diagrammi di Bode dei filtri (Figure 7 e 8), dove è stata evidenziata la frequenza di lavoro del circuito.

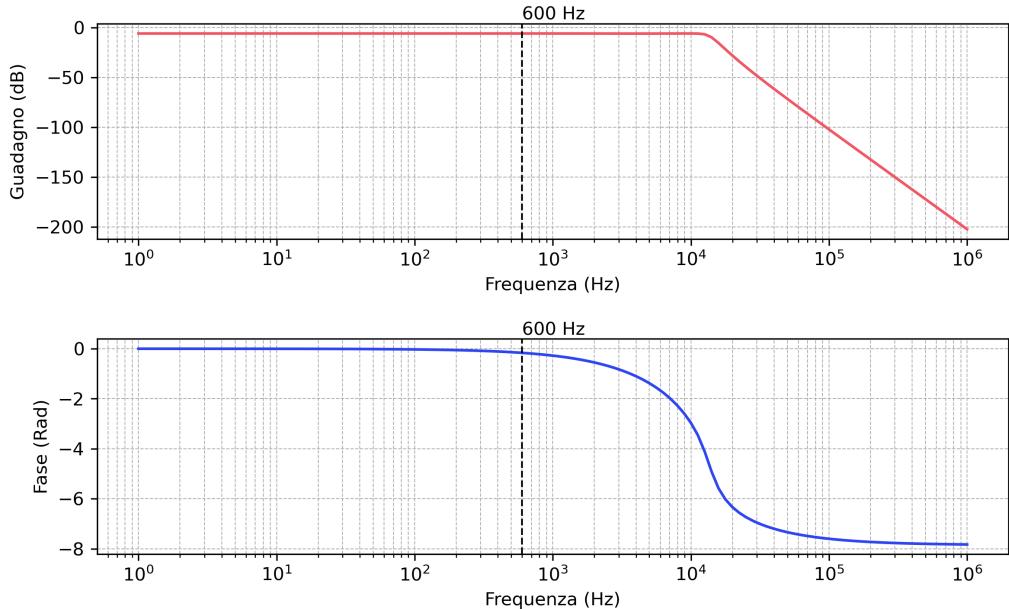


Figura 7: Diagrammi di Bode, filtri Tchebyschev: la frequenza di lavoro di 600 Hz è situata appena al di sotto della soglia per cui lo sfasamento del circuito diventa determinante, inoltre la tolleranza sui valori delle componenti è sufficientemente bassa da non introdurre deviazioni considerevoli.

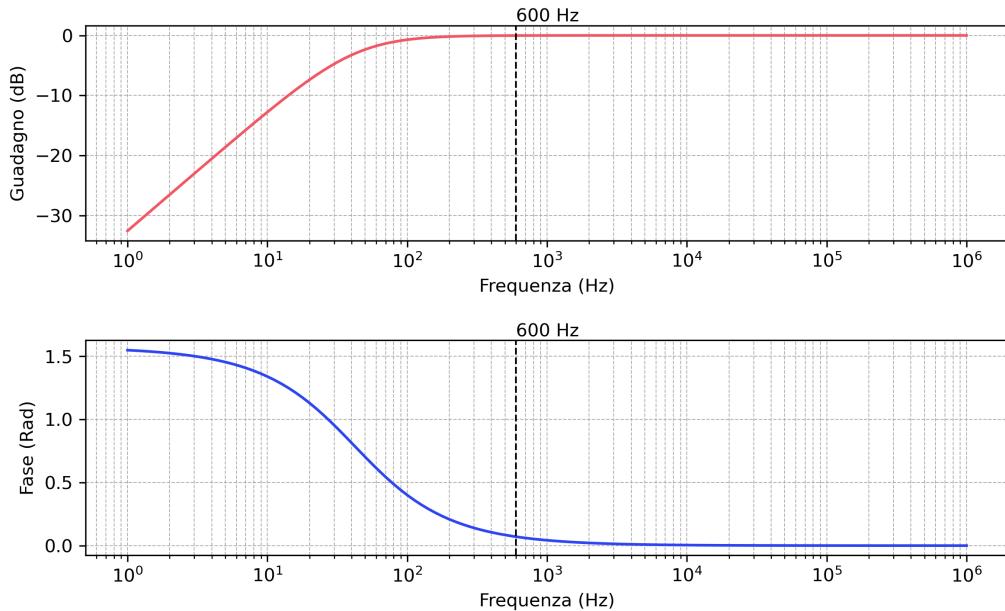


Figura 8: Diagrammi di Bode, filtri RC passa-alto: si può osservare che alla frequenza di lavoro il filtro abbia quasi completamente sfasato, per frequenze minori il sistema sarebbe ancora più instabile.

I due filtri in successione, passa-basso e passa-alto, formano una struttura passabanda che rende il segnale sinusoidale relativamente puro. Per effettuare le misure definitive sarà comunque applicato un ulteriore filtro passa-basso a livello dell'oscilloscopio in modo da ripulire il segnale captato anche da distorsioni dovute agli altoparlanti e alle riflessioni.

3.1.3 Altoparlanti e strutture in PLA

Gli otto altoparlanti utilizzati sono dei comuni coni da 1 W, disposti e fissati ai vertici di un ottagono regolare; con una stampante 3D sono state realizzate le strutture in PLA necessarie al loro posizionamento. Allo stesso modo è stato costruito il sistema composto dalle otto cavità coniche in grado di convogliare i fasci emessi.

I meccanismi di interazione tra la struttura ed i fasci generati dagli altoparlanti non sono noti esattamente e non sono stati indagati nel dettaglio durante la progettazione dell'esperimento ma non possono essere completamente ignorati e saranno discussi dopo aver analizzato i dati raccolti. Il modo in cui l'inclinazione e la forma delle cavità determinano la direzione di propagazione, la focalizzazione e la curvatura dei fasci non è banale, preliminarmente questi effetti saranno descritti tramite ipotesi semplificative da verificare successivamente.

Inoltre è importante osservare che l'isolamento acustico dei materiali e dei componenti utilizzati è molto limitato e ciò contribuisce in maniera sostanziale alla propagazione del rumore di fondo generato dalle sorgenti stesse.

Le conclusioni degli articoli consultati, citati ad inizio capitolo, presentano comunque un forte sostegno al funzionamento del dispositivo, mostrando che, come già discusso qui dal punto di vista teorico in 2.2.4, controllando gli sfasamenti relativi tra le sorgenti è possibile produrre dei fasci dal profilo elicoidale. Dopo aver verificato il funzionamento dell'apparato l'analisi dati sarà incentrata sul confronto con il modello Laguerre-Gauss in modo da comprendere in dettaglio la natura del fenomeno riprodotto.

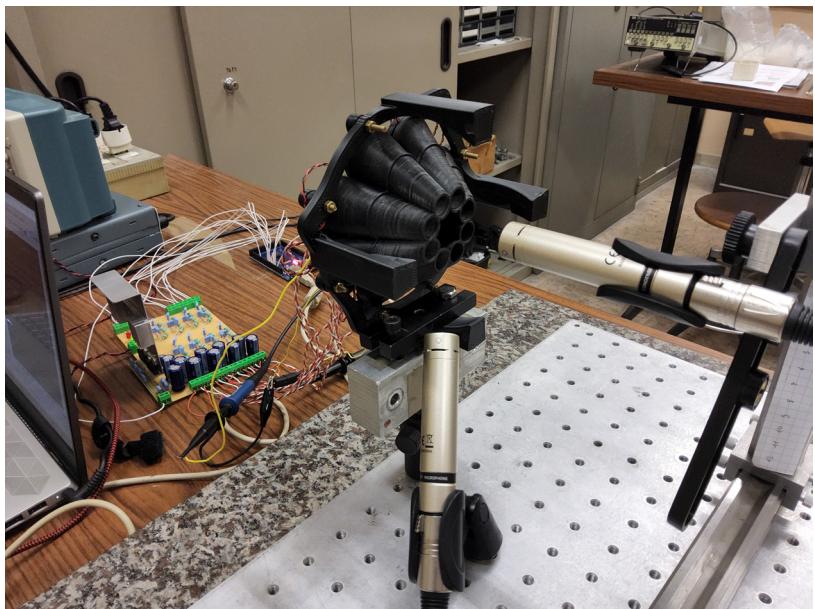
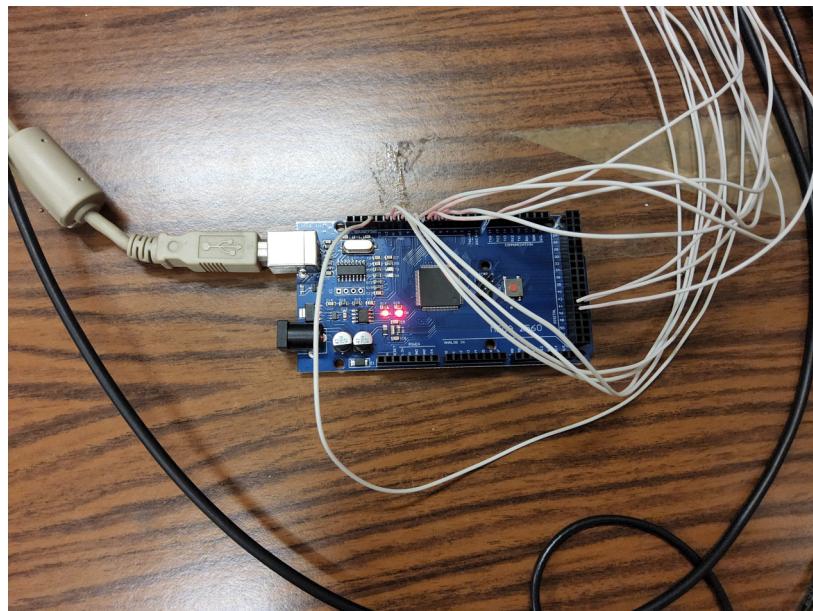


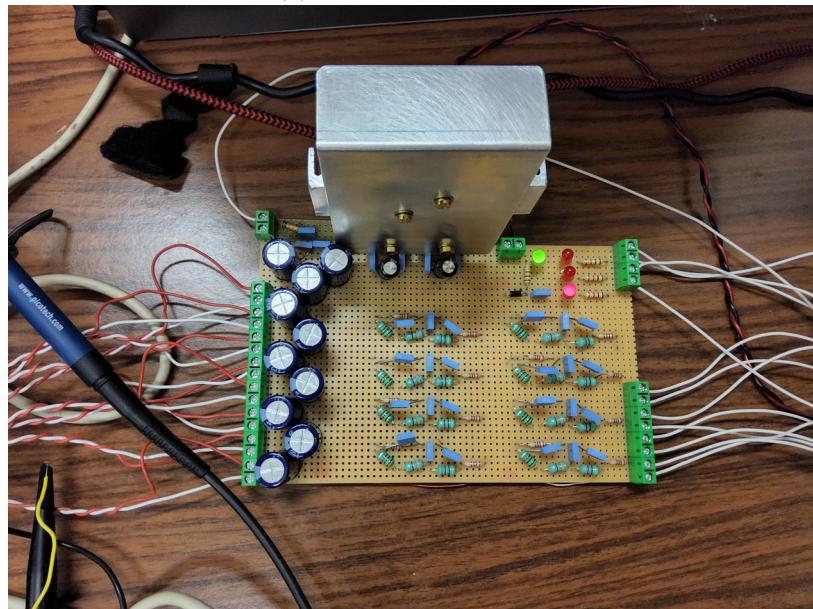
Figura 10: In foto l'apparato completo, si possono osservare sul tavolo il circuito analogico e il chip Arduino Mega 2560, la struttura stampata contenente gli speaker e i microfoni sono invece posizionati sul banco ottico.

3.2 Ottimizzazione del funzionamento

I primi test del funzionamento del dispositivo hanno reso subito evidente la necessità di assicurarsi che i segnali generati fossero caratterizzati da intensità tra loro sufficientemente uniformi e dalle differenze di fase prossime al modello teorico. Si è quindi dedicata particolare attenzione al processo di calibrazione, con l'obiettivo di mantenere le deviazioni dai valori ideali entro l'intervallo di $\pm 2.5\%$ attorno al va-



(a) Arduino Mega 2560



(b) Scheda contenente filtri e amplificatori

Figura 9

lore nominale, utilizzando un oscilloscopio da banco per misurare i valori assunti e correggendo adeguatamente le tabelle d'onda.

3.2.1 Calibrazione del dispositivo

Gli sfasamenti sono stati misurati inizialmente ai terminali di uscita dei filtri per verificare il corretto funzionamento del codice. La deviazione uniforme e progressiva degli sfasamenti dei canali osservata indica come il tempo di calcolo del chip Arduino introduca, di fatto, un certo sfasamento aggiunto. Successivamente le misure sono state eseguite ai terminali di uscita degli amplificatori dove si è notata la comparsa di ulteriori sfasamenti casuali, imputati principalmente alle diverse frequenze caratteristiche dei filtri passa-alto causate dalle tolleranze dei valori dei componenti. Sono state conseguentemente corrette le tabelle d'onda introducendo ulteriori costanti di fase sui singoli canali per poter garantire per il sistema un comportamento vicino alla previsione ideale.

Le ampiezze sono state misurate e confrontate, in modo da poter correggere i fattori di normalizzazione delle tabelle d'onda ed ottenere segnali sufficientemente equilibrati.

Procedendo ad ulteriori verifiche con un oscilloscopio si è notato che le due correzioni sono interdipendenti, ovvero che le modifiche di ampiezza e fase delle tabelle d'onda si influenzano a vicenda. Ripetendo la calibrazione per due volte si è reso operativo il dispositivo, ottenendo valori che, almeno teoricamente, garantiscono la generazione dei vortici del primo ordine.

L'esperimento di Lin et al. [15] ha mostrato come la generazione stabile del vortice di secondo ordine sia effettivamente possibile con un apparato simile, assumendo però di poter misurare e correggere periodicamente il volume dei canali senza interromperne il funzionamento, ciò non è possibile con il sistema qui costruito a causa dei limiti della scheda Arduino Mega.

Nell'Appendice B.3 sono raccolti i valori misurati prima e dopo l'intero processo di calibrazione.

3.2.2 Modello matematico dell'apparato

Sarebbe possibile verificare con quanta precisione il fascio acustico generato da un altoparlante sia approssimabile con il modello gaussiano ma per realizzare un primo esperimento con questo prototipo la compatibilità è assunta. Allo stesso modo anche per esperimenti molto semplici di ottica un fascio laser può essere trattato come gaussiano senza essere adeguatamente trattato e filtrato. Ci si attende quindi di osservare nei risultati comportamenti non previsti del modello dovuti ai numerosi fattori di non idealità dell'apparato.

Per sviluppare un modello sufficientemente semplice ed efficiente dell'apparato (Sezione 3.2.2) è inoltre necessario ammettere alcune ipotesi la cui validità sarà discussa nel seguito. Il parametro di waist w_0 dei fasci elementari è stato inizialmente fissato al valore di 1 cm, pari al diametro delle aperture circolari delle cavità, e posto in corrispondenza delle stesse, considerate come sorgenti. Si è inoltre ipotizzato, per semplicità, che gli otto fasci emessi propagassero parallelamente all'asse di simmetria della struttura. Queste due ipotesi sono completamente arbitrarie e necessitano di essere discusse con attenzione dopo aver raccolto e studiato i dati sperimentali.

Infine i valori ottenuti durante la calibrazione, cioè le misure effettive delle ampiezze e degli sfasamenti generati, sono stati integrati nel codice Python ottenendo un modello più completo, in modo da poter confrontare le misure anche con uno schema realistico. In Figura 11 è stato simulato il profilo del fascio a una distanza di 0.5 cm dalle sorgenti.

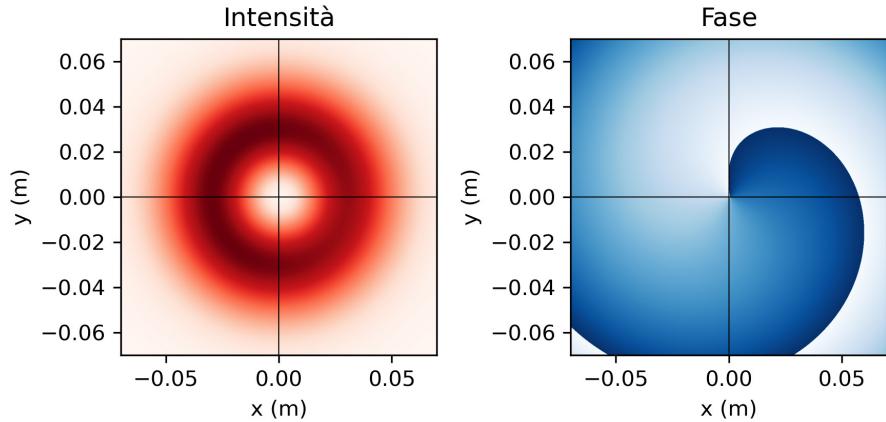


Figura 11: Il modello completo dell'apparato prevede sorgenti localizzate che emettono fasci paralleli, sono stati implementati i valori misurati di intensità e sfasamento delle sorgenti reali, la simulazione è stata effettuata a $z = 0.5$ cm).

Attraverso ulteriori simulazioni a distanze progressive si è potuto tracciare lo spostamento del fascio osservato già per i modelli teorici: in Figura 12 sono raccolti i grafici ottenuti calcolando e riportando la posizione della singolarità prima secondo la sua distanza dall'origine, nel grafico a sinistra, e poi attraverso la sua posizione nel piano trasverso, nel grafico a destra. Il risultato osservato è quello di un carattere sostanzialmente lineare sia per quanto riguarda la distanza sia per la posizione effetti-

va: almeno in prima approssimazione il modello predice la traslazione semplice della singolarità e di conseguenza l'inclinazione dell'asse di propagazione senza ulteriori deformazioni determinanti.

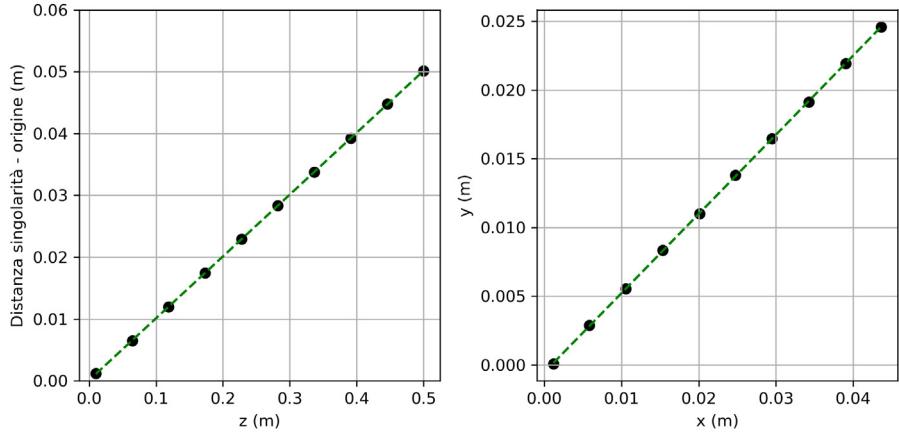


Figura 12: Nel grafico a sinistra è rappresentata la distanza dall'origine degli assi in funzione della distanza di propagazione z , a destra la posizione della singolarità nel piano trasverso, si osserva una deviazione pressoché lineare: l'asse di propagazione del fascio risulta inclinato a causa della non uniformità delle sorgenti.

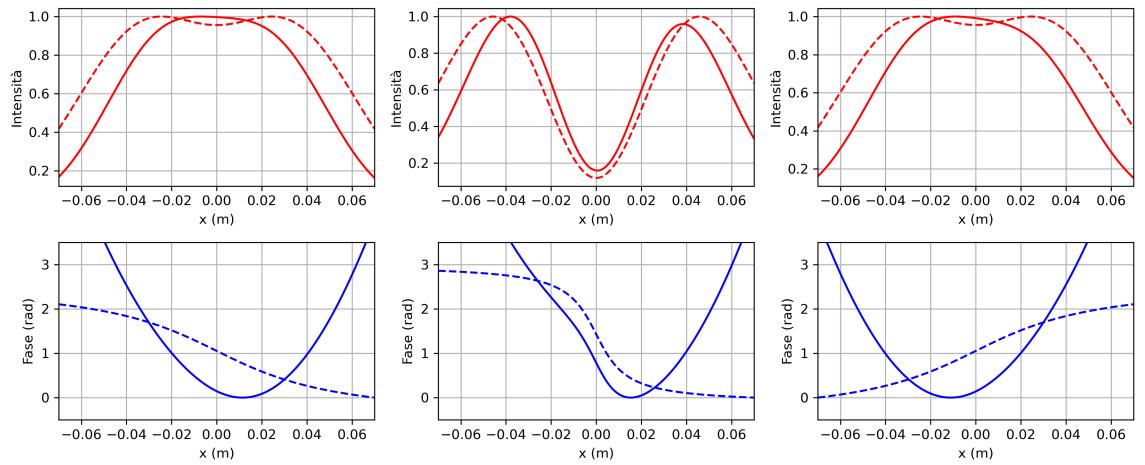
Per approfondire la conoscenza dei fronti d'onda del fascio, invece che studiarne il profilo sull'intero piano trasverso, è opportuno ridurre l'analisi a scansioni orizzontali, ottenute simulando i valori assunti dal modello ad y fissata. I profili, calcolati in funzione della coordinata x , ricalcano le condizioni (distanze e altezze) delle serie di misure effettuate in seguito: tre scansioni effettuate 4 cm sopra, sotto ed in prossimità della singolarità, ripetute alle distanze di 0.5, 4.5 e 10 cm. Attraverso la Figura 13, che raccoglie le scansioni a $z = 0.5$ cm, è possibile osservarne visivamente le caratteristiche attese durante la raccolta dati. Le ulteriori scansioni a $z = 4.5$ e $z = 10$ cm sono consultabili nell'Appendice B.6.

I grafici dei valori di intensità, in rosso, mostrano in prossimità della singolarità, due picchi distinti (grafico centrale), è evidente come questi tendano ad avvicinarsi fino a convergere all'aumentare della distanza dal centro (grafici laterali) se si tiene conto delle simulazioni 2D fino ad ora presentate. A causa della divergenza del fascio il modello non prevede la possibilità di osservare interamente i picchi a distanze maggiori come si può vedere in Appendice. Si osserva inoltre una leggera asimmetria della curva, caratteristica determinata dallo sbilanciamento delle sorgenti.

I grafici in blu mostrano che il profilo della fase, quando calcolato su una linea che attraversi la singolarità, presenta in corrispondenza del punto un salto di discontinuità ($x = 0$ nel grafico). Questa forma è accentuata in prossimità dell'asse di

propagazione ma svanisce all'aumentare della distanza dal centro, nelle regioni più lontane infatti tende a prevalere il termine di curvatura: trascurando questo termine il profilo assumerebbe la forma tipica di un arcocoseno in prossimità della singolarità e un carattere sempre più piatto all'aumentare della distanza. Il modello completo è stato affiancato in queste scansioni dallo schema ideale dei fasci Laguerre-Gauss, linea tratteggiata.

Le scansioni in Figura 13 e nell'Appendice B.6 sono già normalizzate e predisposte per il confronto con i dati sperimentali. Si rimarca inoltre il fatto che il carattere elicoidale del fascio è permanente: in condizioni ideali se ne riscontrano gli effetti a tutte le distanze.



(a) Scansioni orizzontali dei profili intensità e fase realizzate a partire dal modello completo e calcolate a $z = 0.5$ cm dalle sorgenti, alle altezze $y = 4, 0, -4$ cm rispetto alla singolarità.

— Modello completo
- - - Laguerre-Gauss puro

Figura 13: Previsione teorica delle scansioni orizzontali a 0.5 cm.

Capitolo 4

Raccolta e Analisi dei Dati Sperimentali

4.1 Processo di Misura

In questa sezione sono descritte in dettaglio le procedure seguite nella fase di raccolta dei dati sperimentali. Il processo di misura è relativamente semplice e facilmente riproducibile, è necessario però prestare attenzione a diverse accortezze in modo da raccogliere dati qualitativamente significativi e affidabili su cui potersi basare per eseguire successivamente un'analisi fruttuosa che permetta di valutare la validità ed i limiti del modello oltre che il corretto funzionamento dell'apparato sperimentale.

4.1.1 Acquisizione dei segnali

Per raccogliere le misure sui profili dei fasci sono stati impiegati due microfoni Behringer C2, una coppia abbinata caratterizzata da una risposta in frequenza identica (Appendice B.5) e da una polarità cardioide. Questi microfoni hanno consentito di raccogliere dati accurati sui valori di intensità e fase fino a una distanza di circa 10 cm dal prototipo realizzato.

I segnali captati dai microfoni sono stati processati tramite un'interfaccia audio Arturia Minifuse, strumento essenziale per garantire l'integrità del segnale e fornita di due canali mono bilanciati e alimentati a 48 V.

Le letture dei valori sono state effettuate utilizzando il programma Soundcard Oscilloscope, in grado di analizzare in tempo reale due segnali in ingresso e di registrare le informazioni relative all'intensità e alla fase (Figura 16).



Figura 14: Microfoni Behringer C2 e scheda audio Arturia Minifuse 2.

4.1.2 Osservazioni e accorgimenti

- La frequenza di lavoro dell'apparato è stata fissata a 595 Hz, valore ritenuto ottimale tenendo conto della capacità di sintesi del programma Arduino e delle risposte in frequenza di filtri e microfoni (Figura 30 in Appendice): l'algoritmo DDS genera segnali più accuratamente alle frequenze più basse mentre i microfoni sono più sensibili ai segnali a frequenze superiori, inoltre a bassa frequenza hanno maggiore incidenza gli sfasamenti casuali introdotti dai filtri passa-alto.
- Alla frequenza stabilita, impiegando sorgenti di raggio $R = 1$ cm, si stima un rapporto $(2R)^2/\lambda \sim 10^{-4}$ m, questo implica che la propagazione del fascio acustico debba seguire coerentemente lo schema di Fraunhofer, nello specifico ciò giustifica l'impiego del modello di fascio gaussiano a discapito di schemi alternativi come quello di Bessel per trattare la diffrazione. Inoltre tutte le misure raccolte saranno da considerarsi sempre effettuate in campo lontano.
- Le scansioni sperimentali sono state effettuate con un passo di 0.5 cm lungo l'asse x e sono necessariamente influenzate dalla dimensione delle capsule microfoniche, di diametro 1.5 cm, ciò impone un limite sperimentale sulla sensibilità degli strumenti nonostante i vantaggi forniti dalla loro marcata direzionalità.

- Il valore effettivo delle misure di intensità dipende arbitrariamente dal guadagno, impostato separatamente per i due canali della scheda audio. Questi valori sono stati regolati prima di ogni set di misure in modo da poter raccogliere nel modo più efficiente i dati relativi agli sfasamenti alle differenti distanze. Ciò ha reso impossibile stimare l'andamento dell'intensità al crescere della distanza a partire dai dati raccolti, misura che comunque non era prevista.
- Le misure di fase sono caratterizzate da una costante additiva arbitraria: un microfono è stato fissato in prossimità del collo di una singola cavità dell'imbuto per l'intera durata dell'esperimento in modo da fornire costantemente un valore di riferimento univoco (per quanto arbitrario). Il posizionamento iniziale dei microfoni è visibile chiaramente nella Figura 15.

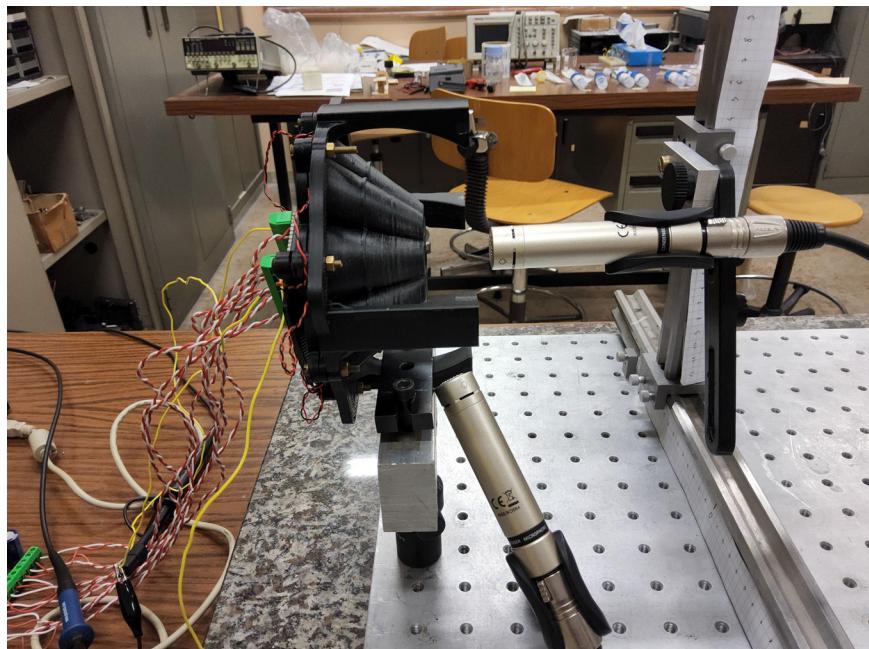
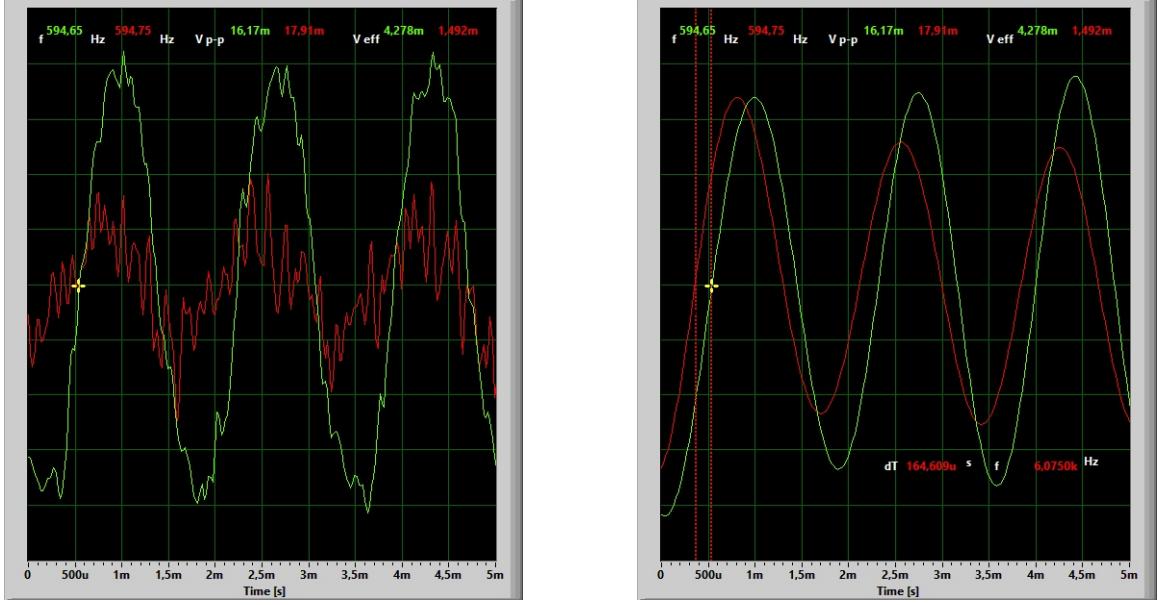


Figura 15: Disposizione dei microfoni.

- Le letture dei valori misurati con Soundcard hanno introdotto errori sistematici evidenti e non limitabili a patto di non cambiare completamente il sistema di misurazione: per i valori di intensità la sensibilità dell'oscilloscopio garantiva una precisione non superiore alla prima cifra decimale, e l'utilizzo manuale delle guide per le stime dei ritardi tra i segnali ha reso difficile la registrazione degli sfasamenti effettivi.

- Il processo di misura è stato notevolmente agevolato dall'utilizzo del filtro interno dell'oscilloscopio in modalità passa-basso con frequenza di taglio 700 Hz e dall'impiego del trigger automatico impostato sul canale di riferimento.



(a) Segnali registrati dai microfoni

(b) Segnali filtrati dall'oscilloscopio

Figura 16: Il filtro interno all'oscilloscopio è stato uno strumento fondamentale per rendere produttivo il processo di misura: rumore, disturbi e riflessioni influenzano il segnale captato a distanza (in rosso). Il segnale di riferimento (in verde) è stato fissato con un trigger e le misure di fase sono state raccolte spostando manualmente le guide verticali. In questo modo è possibile leggere la misura del ritardo e convertirla successivamente in un valore di sfasamento secondo la formula $\phi = 2\pi ft$. Per le misure di intensità è stato riportato direttamente il valore del voltaggio effettivo.

- Come per le simulazioni teoriche anche i dati sperimentali delle intensità sono stati normalizzati all'unità e gli sfasamenti sono stati processati tramite la funzione *unwrap* di Python in modo da gestirne agilmente moduli e fasi arbitrarie.

4.1.3 Misure preliminari

Nonostante non sia stato possibile svolgere un test significativo della risposta in frequenza dei singoli altoparlanti, utilizzando i microfoni sono state comunque effettuate misure ulteriori degli sfasamenti dei fasci elementari. Misurando i valori di

fase alle uscite di due cavità adiacenti dell'imbuto si è verificato per tutte le coppie un ottimo accordo con gli sfasamenti relativi previsti (dati nell'Appendice B.4).

Avendo verificato che il dispositivo operasse come richiesto dal modello, si sono potuti predisporre i microfoni nella configurazione operativa. Come si può vedere in Figura 15, il microfono di riferimento è stato posizionato in prossimità di una sorgente, inclinandolo per minimizzare la sua influenza sulle riflessioni del fascio, e si è montato il secondo microfono su un sistema di sbarre e carrelli tale da rendere agevole il processo di misura, cioè in modo da poter effettuare delle scansioni orizzontali ad altezze fissate, con la premura che lo spostamento del microfono causasse meno spostamenti e vibrazioni dell'apparato possibili.

4.2 Raccolta dei dati

Come mostrato attraverso lo studio del modello completo (Figura 12), la posizione della singolarità non coincide con l'origine degli assi del piano trasverso ma risulta deviata. Effettuare scansioni allineate esattamente con singolarità con il sistema di misura utilizzato sarebbe una procedura complessa e non necessaria ad ottenere dati utili: utilizzando il centro della struttura in PLA come riferimento iniziale e spostando i microfoni più in alto e più in basso di 4 cm per le scansioni successive si sono raccolte misure sufficienti a caratterizzare i fronti d'onda osservati alle diverse distanze.

Sono state realizzate tre serie di tre scansioni alle distanze successive di 0.5 cm, 4,5 cm e 10 cm dall'estremità degli imbuti. Per ogni serie le tre scansioni sono state effettuate alle altezze $y = 0, \pm 4$ cm relativamente al centro, per ogni scansione sono state raccolte misure di intensità e fase secondo un passo orizzontale di 0.5 cm (1 cm per le scansioni a $z = 4.5\text{cm}$). L'analisi dei dati così raccolti ha permesso in primo luogo di verificare il funzionamento del generatore di OAMW ed in secondo luogo di valutare l'attendibilità del modello teorico sviluppato.

Nei grafici in Figura 17 sono state raccolte tutte le misure effettuate: i grafici di intensità, in rosso, e fase, in blu, sono divisi per serie in tre righe, in ognuna delle quali si riportano nell'ordine le tre scansioni effettuate. Nelle tabelle raccolte nell'Appendice B.7 sono riportati i valori della tensione efficace e degli sfasamenti calcolati a partire dalle misure dirette di ritardo temporale (senza i termini di normalizzazione applicati per realizzare i grafici).

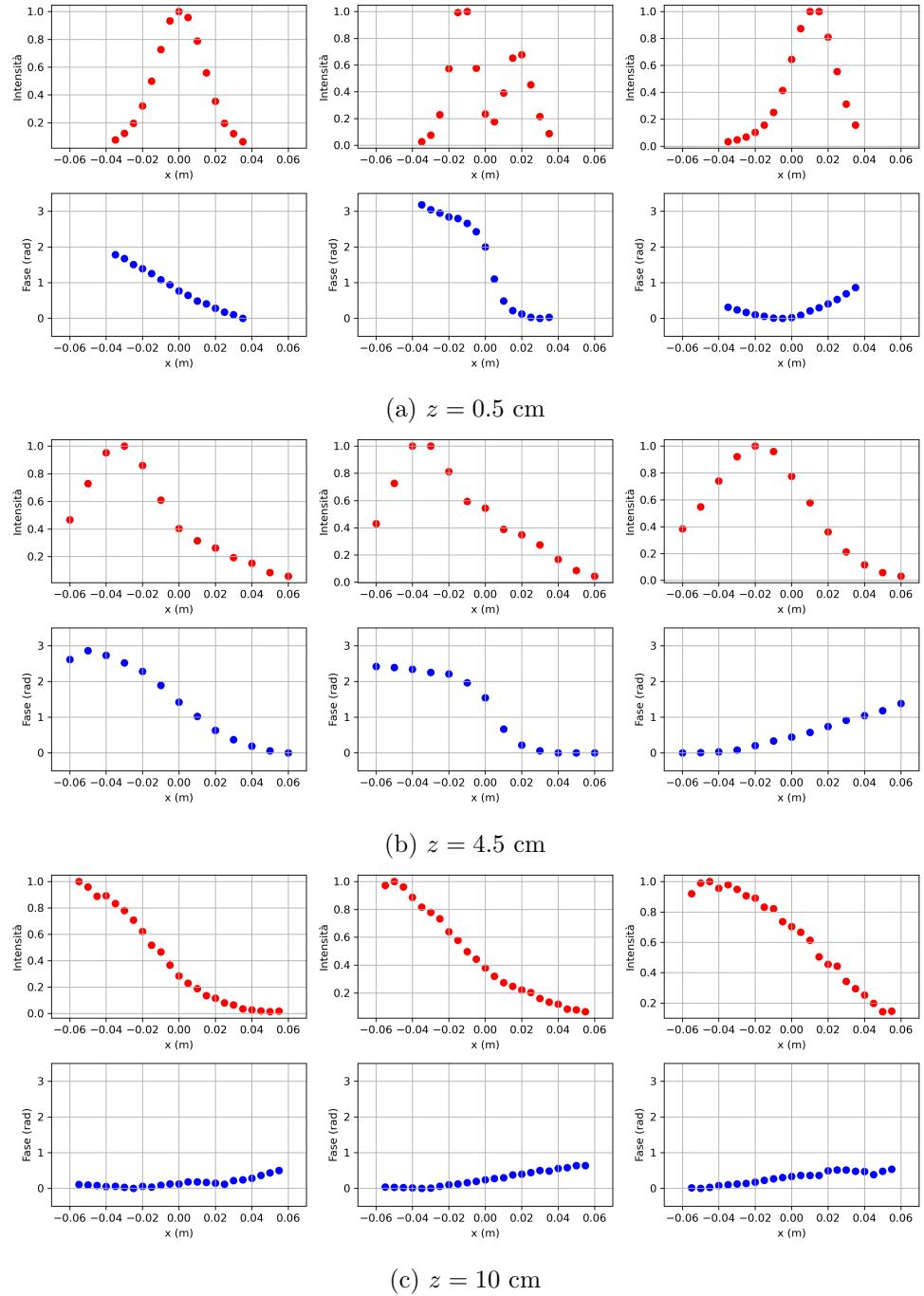


Figura 17: In ogni riga sono presentati i grafici con i valori normalizzati delle intensità e di fase raccolti per la serie alla distanza z specificata. Per ogni serie sono riportate le tre scansioni, rispettivamente 4 cm sopra, in corrispondenza e 4 cm sotto il centro della struttura stampata.

Per quanto riguarda le misure di intensità, come atteso, soltanto la prima serie ha evidenziato completamente la regione di minimo centrale. Nella seconda serie è ancora possibile osservare, inatteso, uno dei picchi, deviato. A 10 cm il profilo non è più riconoscibile, non si riscontrano i caratteri della divergenza prevista dal modello teorico.

Osservando i dati relativi alle fasi si nota come le serie a $z = 0.5$ cm e $z = 4.5$ forniscano già un quadro chiaro del profilo di elicoidale, mostrando lo sfasamento caratteristico ed un profilo che approssima il salto di discontinuità all'attraversamento della singolarità, inoltre i valori delle misure più esterne confermano l'osservazione della curvatura del fascio, giustificando l'introduzione del relativo parametro nell'equazione del fascio.

Le misure di fase della terza serie sono risultate più complicate da raccogliere e da analizzare: le piccole variazioni dei valori di intensità e la sensibilità dell'oscilloscopio e delle guide manuali hanno reso la raccolta dati particolarmente incerta. Il profilo ottenuto appare incompatibile con i risultati attesi come già osservato per le misure di intensità.

4.3 Analisi statistica

4.3.1 Confronto diretto

I grafici dei dati raccolti, soprattutto per quanto riguarda le prime due serie, suggeriscono già visivamente la presenza di un fascio con caratteristiche simili a quelle di un vortice di ordine $\ell = 1$. Per avvalorare preliminarmente questa ipotesi ed approfondire la conoscenza dei limiti del sistema teorico si sono confrontati direttamente i dati sperimentali con i modelli sviluppati nei Capitoli 2 e 3 senza introdurre parametri liberi: in Figura 18 ai valori raccolti sono stati sovrapposti ancora, non solo i risultati delle simulazioni effettuate con il sistema completo, ma anche quelli ottenuti con lo schema del fascio Laguerre-Gauss ideale (senza curvatura) secondo le convenzioni grafiche già utilizzate in Figura 13.

Bisogna necessariamente osservare che la normalizzazione dei valori di intensità è funzionale al confronto dei dati della prima serie di scansioni ma diventa fuorviante per la seconda e terza serie. Quando i picchi non sono osservabili nella scansione teorica a causa della divergenza dei fasci, si visualizzano i dati ed i modelli secondo scale differenti e non comparabili. Le costanti di fase sono state invece gestite in modo da annullare i valori minimi misurati e simulati: per quanto artificiale, questo trattamento permette di osservare preliminary la bontà delle prime due serie di scansioni.

I dati di intensità della prima serie mostrano andamenti in linea con le previsioni teoriche, ma mettono anche in evidenza una grande criticità: la divergenza del fascio

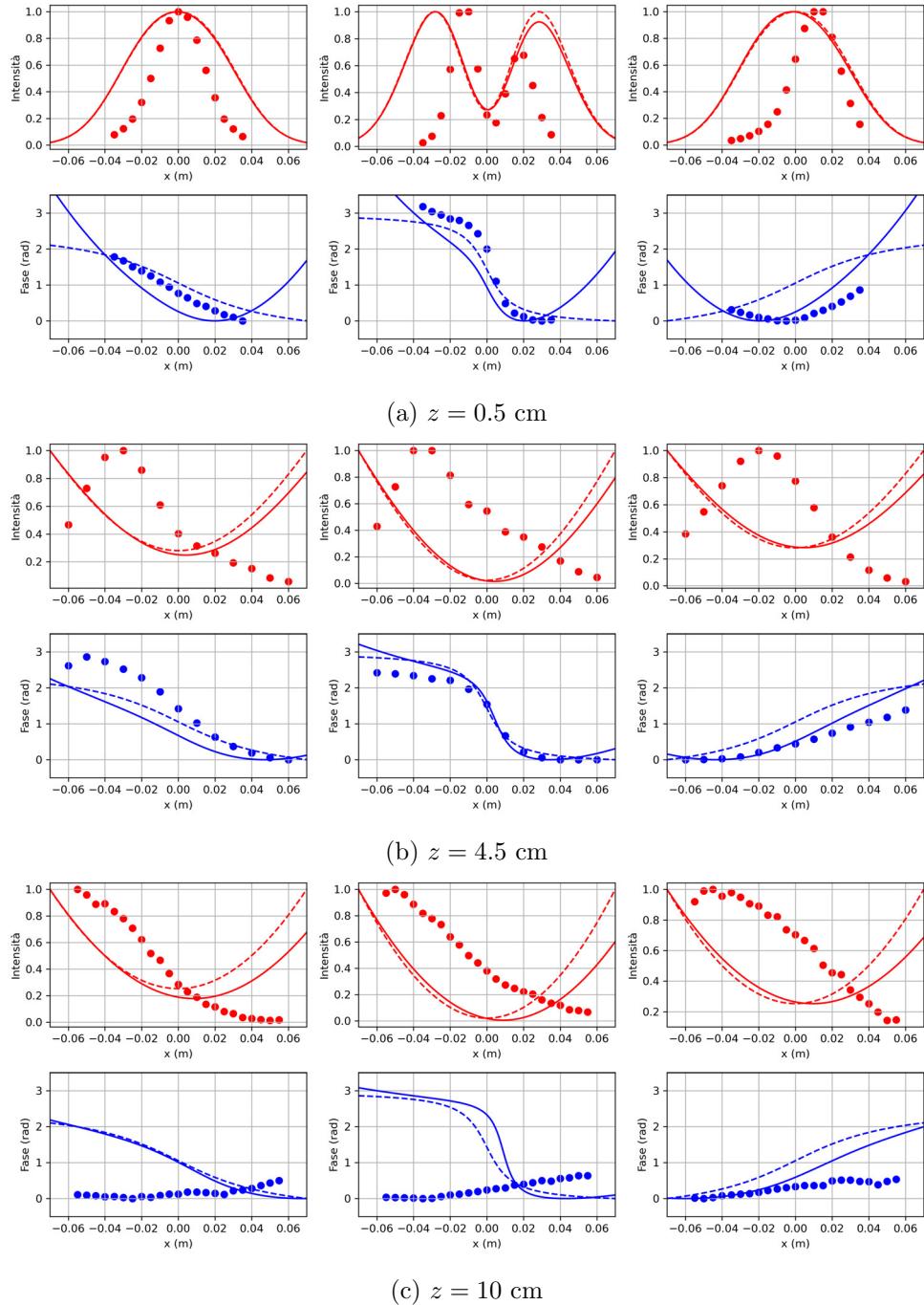


Figura 18: In ogni riga sono presentati dati sperimentali confrontati con le simulazioni alla distanza z specificata. Per ogni serie sono riportate le tre scansioni, rispettivamente 4 cm sopra, in corrispondenza e 4 cm più in basso rispetto al centro della struttura.

prevista, che determina la dimensione della valle centrale, è maggiore di quella misurata. Per quanto riguarda la fase, oltre ad osservare un certo accordo tra modelli e dati, nella prima scansione, nella terza e nelle misure esterne della scansione centrale, si osserva una concavità verso l'alto, aspetto previsto dai modelli comprensivi del termine di curvatura.

Nella seconda serie le misure di intensità in prossimità della singolarità evidenziano, come già osservato, la presenza non attesa di un picco. Ciò avvalora ulteriormente l'ipotesi che la divergenza del fascio descritta dal modello teorico non sia attendibile per descrivere le misure reali. Questo effetto non influisce sulle misure di fase, che dipendono dalle sorgenti solo per quanto riguarda i loro sfasamenti relativi, e dal parametro di waist solo in relazione alla curvatura del fascio. I dati raccolti infatti mostrano apparentemente un buon accordo con le previsioni teoriche.

Per quanto riguarda la terza serie, i dati mostrano un netto disaccordo con le previsioni teoriche, indicando la necessità di ulteriori indagini e analisi.

4.3.2 Adattamento del modello (Fit)

Il confronto diretto dei dati ha portato a incrementare il valore di waist delle sorgenti a 3 cm per ottenere la minor discrepanza possibile. Il dato reale resta incognito e i possibili errori di misura delle posizioni causati da un allineamento non esatto del microfono rendono evidente la necessità di approfondire l'analisi utilizzando metodi più sofisticati, che permettano l'introduzione di parametri liberi, come il metodo dei minimi quadrati, in modo da ottenere una maggiore compatibilità nel confronto tra modelli e dati sperimentali.

E stato quindi implementato del codice Python in grado di adattare i modelli ai dati sperimentali. Oltre al waist w_0 , i parametri liberi scelti includono le coordinate dell'origine (x, y) e una costante di fase ϕ che racchiude sia il riferimento arbitrario sia eventuali disparità nell'allineamento dell'apparato.

L'obiettivo che si intende raggiungere con il codice sviluppato è ottenere una migliore sovrapposizione, indice di compatibilità, tra i dati sperimentali e le previsioni teoriche, rimuovendo l'arbitrarietà sulla fase e correggendo la posizione relativa del microfono rispetto al dispositivo di misura.

Nonostante le limitazioni delle misure di intensità dovute alla normalizzazione, sia per quanto riguarda il guadagno dei segnali misurati sia per il trattamento matematico, si è deciso di effettuare il fit di questi dati per verificare se ci fosse un parametro del waist tale da confermare l'accordo dei dati sperimentali con il modello sviluppato. Si è visto che per un valore di 3 cm, ricavato dalla media dei parametri ottenuti della prima e seconda serie, si ha un minimo delle dimensioni della valle centrale, queste infatti crescono sia aumentando che riducendo il parametro. La variazione del parametro non è tuttavia sufficiente a garantire una buona compatibilità con i dati

sperimentali e presenta un evidente limite del modello sviluppato. I risultati ottenuti sono comunque consultabili nell'Appendice B.8.

L'impossibilità di ottenere un valore del waist che adatti il modello ai dati sperimentali ha portato a rivalutare la modellizzazione matematica della generazione delle OAMW: considerare le aperture circolari come sorgenti di fasci paralleli non consente di descrivere puntualmente i dati sperimentali perché si trascura così una parte determinante della formazione del vortice e della prima fase della propagazione.

I profili di fase della prima e della seconda serie testimoniano invece la generazione di un vortice compatibile con il modello Laguerre-Gauss, l'accordo con la teoria risulta qui ulteriormente confermato visivamente dai risultati dell'analisi statistica effettuata e riportata in Figura 19. Il modello completo offre in genere le previsioni più accurate dei profili mentre il modello ideale offre un'ottima approssimazione nelle regioni in cui la curvatura del fascio non è determinante.

4.4 Limiti del modello sviluppato

4.4.1 Direzione di propagazione dei fasci

Le ipotesi inizialmente assunte per la descrizione matematica dell'apparato sono risultate eccessivamente restrittive: trascurando la descrizione delle sorgenti reali non è stato possibile, per il modello, approssimare efficacemente tutti i valori misurati.

Il confronto tra i dati sperimentali e la teoria ha comunque permesso di osservare nel dettaglio il funzionamento del dispositivo e di arricchire la conoscenza del suo funzionamento.

Si è ipotizzato allora che le cavità utilizzate, convogliando i fasci in ingresso, si comportino in modo analogo a lenti ottiche, dunque un modello più complesso dovrebbe tenere conto di come il fascio uscente dalla struttura debba essere focalizzato a una certa distanza dalle aperture circolari. Non è un compito banale realizzare un modello matematico che descriva una lente acustica e sarebbe altrettanto complesso stimare parametri e caratteristiche come il fuoco e la risposta in frequenza per il dispositivo utilizzato. Si è sviluppata però una simulazione che permette di ottenere una maggiore compatibilità con i dati sperimentali. Il modello è stato modificato operativamente spostando la posizione del waist in modo da riprodurre i principali effetti della focalizzazione del fascio sulla divergenza mantenendo costante il parametro w_0 ricavato dai fit attendibili degli sfasamenti, ottenendo una migliore corrispondenza tra il modello ed i dati sperimentali (Figura 20).

Un ulteriore effetto che influenzerebbe la convergenza dei fasci e quindi la dimensione della valle centrale è la possibile inclinazione dei fasci elementari dovuta all'interazione con le cavità, per visualizzarne gli effetti è stata realizzata una simulazione semplificata con sole quattro sorgenti, in Figura 21 si osservano i due profili

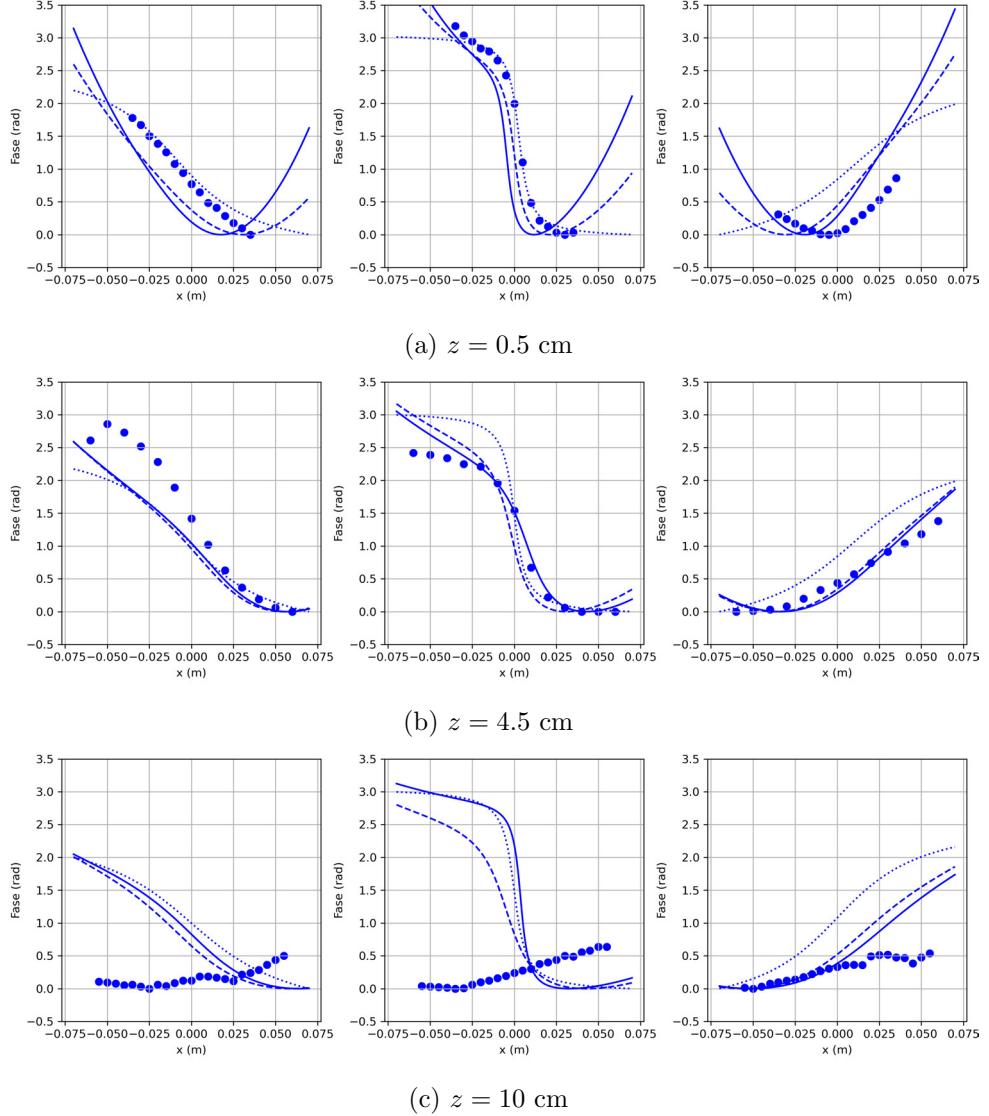


Figura 19: In ogni riga sono presentati i valori delle fasi raccolte durante le misurazioni e il fit dei modelli teorico alla distanza z specificata. Per ogni serie sono riportate le tre scansioni, rispettivamente sopra, al centro e sotto del dispositivo.

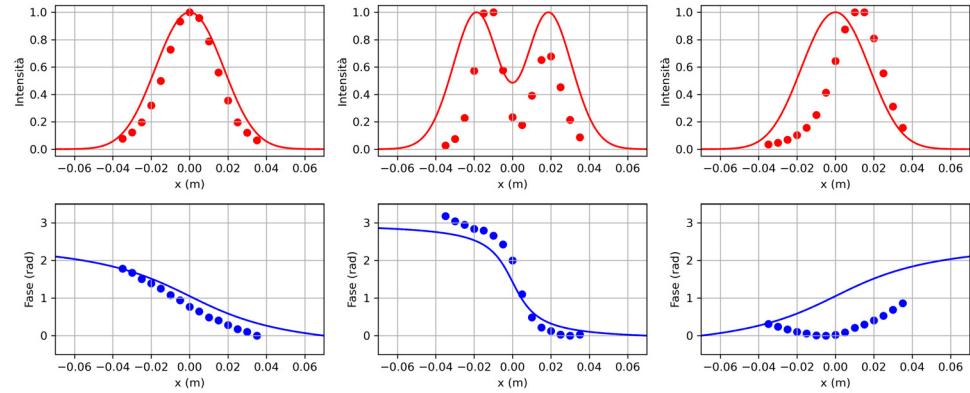


Figura 20: I dati della scansione centrale eseguita a 0.5 cm sono qui confrontati con il modello ricavato con il waist calcolato in una coordinata più avanzata rispetto alla posizione delle sorgenti.

di intensità realizzati con un倾inazione nulla e di 30° rispettivamente in rosso e arancione.

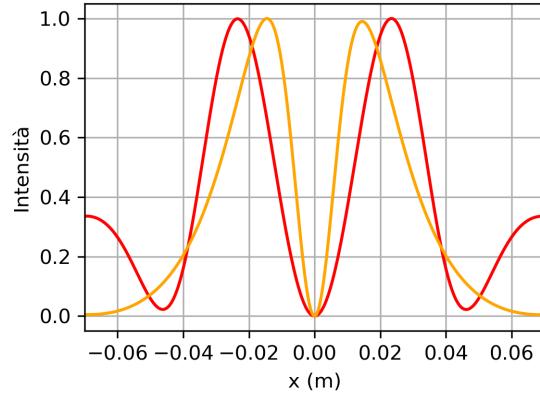


Figura 21: Si possono osservare due scansioni dei valori di intensità simulate a 0.5 cm con i fasci paralleli (in rosso) ed inclinati (in arancione).

4.4.2 Terza serie e rumore di fondo

Le analisi effettuate tramite i fit dei dati relativi alle fasi non hanno permesso di migliorare significativamente l'accordo del modello con la serie di misure effettuate a 10 cm. Osservando attentamente i dati di fase, si è ipotizzato di poterli confrontare con un fascio gaussiano di ordine 0, utilizzato come più semplice modello del rumore di fondo generato dagli altoparlanti.

Il risultato del fit, ottenuto con un fascio gaussiano puro, mostrato in Figura 22, sembrerebbe supportare l'ipotesi che oltre una certa distanza i disturbi prodotti dalle sorgenti e dalle riflessioni siano predominanti vista anche l'attenuazione del vortice generato.

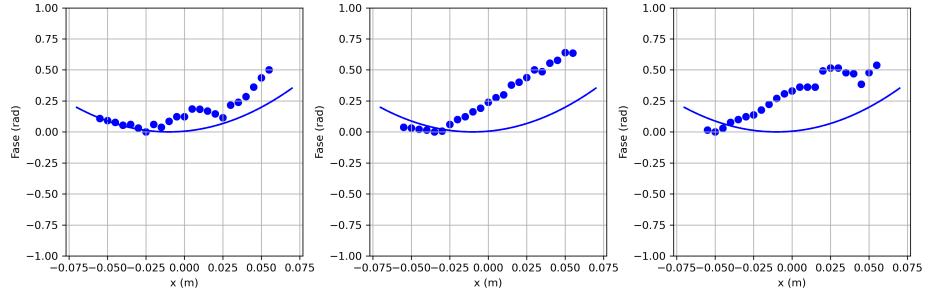


Figura 22: Fit della terza serie realizzato con il modello di fascio Gaussiano.

Senza poter conoscere i dettagli della generazione del rumore di fondo non è possibile né determinarne la natura né effettuare un analisi statistica dettagliata: un confronto con i dati sperimentali non può portare a nessuna conclusione quantitativa, si ritiene però indicativo del valore dell'ipotesi formulata ripetere la simulazione delle scansioni con un modello che includa la sovrapposizione di due fasci: un vortice di ordine $\ell = 1$ calcolato come nel modello completo e un gaussiano semplice con un ampiezza inferiore, ridotta per esempio al 15%. Il grafico in Figura 23 mostra che la presenza del fascio gaussiano devia il vortice generato, ottenendo così dei profili qualitativamente più simili a quelli osservati sperimentalmente. In Appendice B.9 le realizzazioni 2D del fenomeno simulato.

Nel capitolo conclusivo sono raccolte, organizzate ed approfondite tutte le osservazioni e considerazioni emerse dall'analisi dei dati.

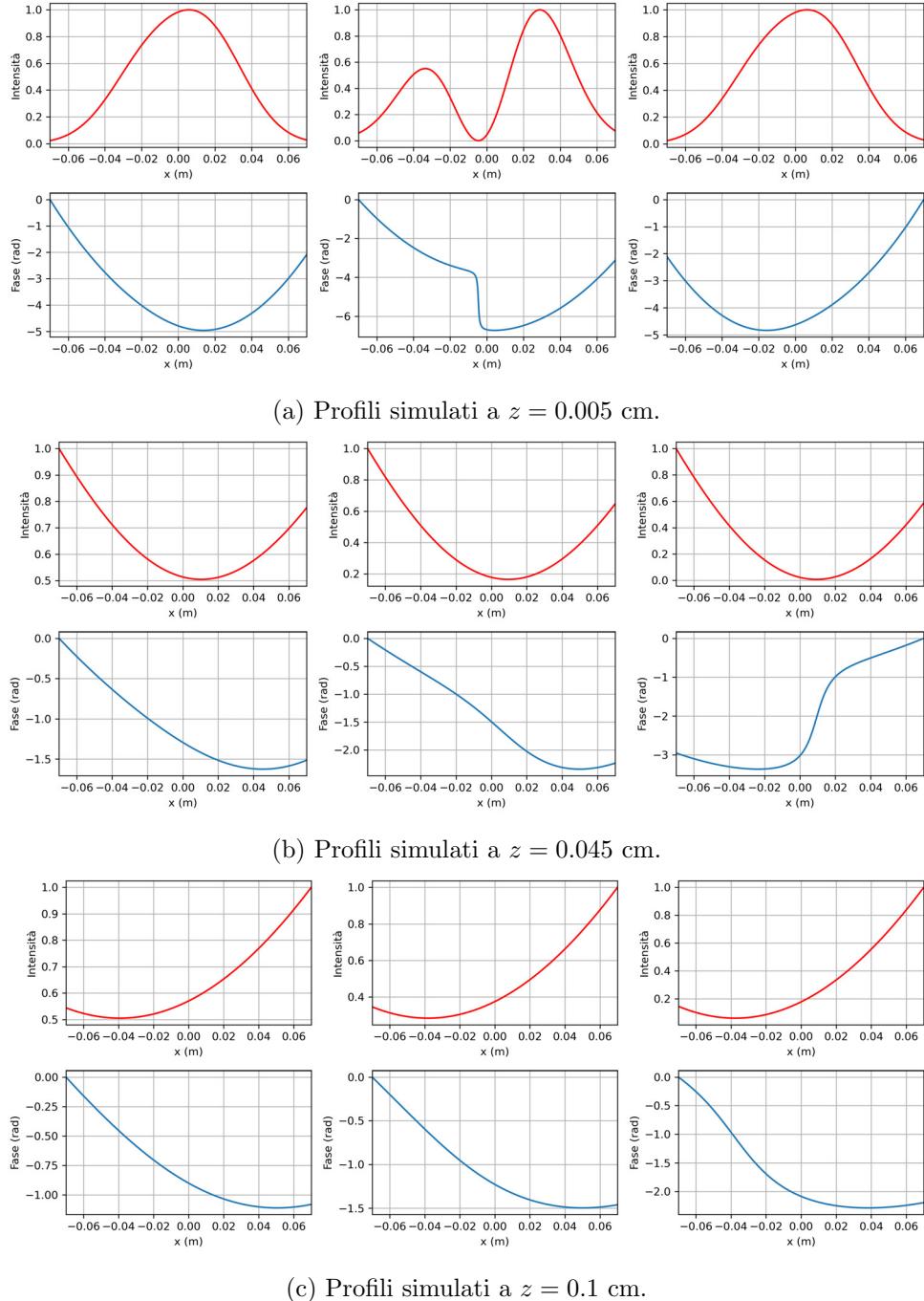


Figura 23: Scansioni orizzontali dei profili intensità e fase realizzate a partire dalla sovrapposizione di un fascio $\ell = 1$, generato con il modello completo, e di un fascio gaussiano $\ell = 0$ di ampiezza ampiezza ridotta al 60%.

Capitolo 5

Conclusioni

5.1 Risultati

Le simulazioni e i modelli sviluppati hanno permesso di prevedere i risultati ed interpretare e valutare il funzionamento del dispositivo durante lo svolgimento dell'esperimento. Hanno costituito una base solida a cui appoggiarsi sia nelle fasi di test dell'apparato sia durante l'analisi dei dati. I dati sperimentali hanno invece consentito di analizzare uno schema teorico sviluppato per analogia con i modelli ottici, consentendo di osservarne i punti di forza ed i limiti.

La sovrapposizione dei fasci gaussiani sfasati si è rivelata un metodo semplice ed immediato per visualizzare e generare fasci OAMW. Il confronto dei dati ha permesso di validare sostanzialmente la descrizione dei profili di fase ricavata a partire dal modello Laguerre-Gauss.

I risultati ottenuti dallo studio dei dati delle intensità hanno mostrato un grande limite del modello matematico impiegato per descrivere il dispositivo, ma hanno anche permesso di identificare le criticità che richiederebbero trattazioni più accurate: l'ipotesi di propagazione parallela dei fasci elementari è stata sostanzialmente contraddetta dal confronto tra dati e simulazioni, l'impossibilità di ottenere un buon fit al variare del waist indica la necessità di introdurre un modello più complesso per descrivere in modo più puntuale l'interazione tra i fasci e con le sorgenti.

L'analisi dei dati della terza serie ha mostrato invece che il dispositivo non permette di sostenere la propagazione dei fasci a grande distanza: riflessioni, vibrazioni e fattori di non idealità producono rumore di fondo che mina sostanzialmente la stabilità del fascio oltre i 10 cm.

5.1.1 Valutazione dell'apparato

Si discutono in questa sezione le difficoltà e le problematiche affrontate durante la messa a punto del prototipo e lo svolgimento l'esperimento, analizzando i punti di forza e i lati negativi degli elementi che compongono l'apparato. Nella sezione successiva sono invece raccolte proposte di miglioramenti dell'apparato per eventuali esperimenti futuri.

I chip Arduino sono dispositivi molto versatili. Implementando un semplice algoritmo DDS, il modulo utilizzato ha permesso di generare segnali con una precisione sufficiente a rendere operativo l'apparato. Tuttavia, le capacità del chip Mega 2560, a partire dalla frequenza di clock, sono limitate: un codice anche solo leggermente più complesso rallenterebbe il programma fino a renderlo inutilizzabile.

Il sistema di filtri passivi ha svolto la sua funzione senza interferire col funzionamento del dispositivo, l'utilizzo degli amplificatori, invece, ha presentato diverse problematiche che hanno condizionato la progettazione. Oltre a richiedere l'installazione di un sistema di raffreddamento, i TDA tendevano facilmente a saturare con segnali troppo intensi. Ciò, insieme alle limitazioni tecniche degli altoparlanti, ha vincolato l'intensità del fascio generato, che già a 10 centimetri era comparabile con rumori e disturbi e dunque non misurabile adeguatamente.

Gli altoparlanti utilizzati presentano alcune limitazioni significative. Non sono in grado di produrre intensità sonore elevate senza distorsioni e, inoltre, non sono paragonabili a sorgenti ideali in condizioni ottimali: sono più simili a LED che a laser in quanto emettono fasci significativamente divergenti e possono generare onde sonore in un ampio intervallo di frequenze, emettendo in tutte le direzioni. Queste caratteristiche hanno influito negativamente sulla qualità del fascio.

L'uniformità dei segnali elettrici amplificati è stata testata ma non l'accuratezza delle risposte degli altoparlanti: il loro posizionamento e il fissaggio, oltre che eventuali difetti di fabbrica (le resistenze misurate sono riportate nell'Appendice B.4) possono inficiare la stabilità delle OAMW generate. In particolare a seconda del loro posizionamento nella struttura, gli speaker erano più o meno liberi di vibrare, introducendo altre deviazioni.

Il processo di calibrazione ha garantito le prestazioni dell'apparato e ha permesso di quantificare i limiti del programma di sintesi dei segnali e dello stadio di amplificazione.

La polarità e la sensibilità dei microfoni sono state qualità fondamentali per il processo di misura ma, come già anticipato, questi strumenti hanno introdotto anche possibili fonti di errore: la dimensione elevata delle capsule renderebbe impossibile misurare la discontinuità netta anche in corrispondenza della singolarità di fase.

5.2 Sviluppi futuri

Per superare le limitazioni della scheda di controllo utilizzata, si potrebbe adottare un dispositivo più potente come Arduino Due o Raspberry Pi, oppure un modulo dedicato alla generazione di segnali digitali. Un dispositivo più avanzato offrirebbe molteplici vantaggi: capacità di elaborazione superiori, maggiore memoria e velocità di clock più elevate consentirebbero una gestione più complessa dei segnali senza compromettere le prestazioni dell'apparato.

Un apparato che impiegasse moduli di controllo più avanzati potrebbe permettere di diagnosticare in tempo reale le intensità e gli sfasamenti dei segnali senza dover riavviare il dispositivo. Ciò consentirebbe di ottimizzare la stabilità di generazione e la capacità di creare vortici di ordini superiori, ottenendo un sistema più performante ed affidabile.

La scelta di amplificatori con una soglia di saturazione più alta e maggiore efficienza è determinante per migliorare il range di propagazione dei vortici. Amplificatori di qualità superiore consentirebbero di mantenere la linearità del segnale anche a intensità sonore più elevate, riducendo le distorsioni e migliorando la qualità complessiva del fascio generato. Questa modifica è essenziale per evitare che il segnale saturi e per garantire una maggiore fedeltà nella riproduzione delle onde sonore necessarie per la generazione dei vortici. Inoltre, la combinazione ottimale di condensatori e altoparlanti permetterebbe di ottenere una risposta in frequenza più lineare, migliorando la precisione delle misurazioni e facilitando la calibrazione dell'apparato. Questo, a sua volta, contribuirebbe a una migliore riproduzione dei segnali audio e a una generazione più accurata dei vortici, rendendo l'intero sistema più affidabile e performante.

Indagare i dettagli dell'interazione tra la struttura stampata ed i fasci acustici permetterebbe lo sviluppo di modelli più puntuali e precisi, in grado di fornire una maggiore compatibilità con i dati sperimentali.

Attrizzando un ambiente di lavoro più controllato, si potrebbe notevolmente migliorare la propagazione dei fasci acustici e l'efficienza della ricezione a distanza. Attualmente, il dispositivo è montato su una base metallica in prossimità del banco ottico in metallo, in questa condizione non è agevolato l'assorbimento delle riflessioni: la precisione e la stabilità del sistema sono compromesse dal rumore di fondo. Rendere l'ambiente più adatto alla propagazione delle onde acustiche ridurrebbe significativamente queste problematiche, migliorando la qualità complessiva delle misurazioni e consentendo una maggiore precisione.

Per quanto riguarda il processo di misurazione, ci sono due punti critici da considerare attentamente. In primo luogo, sarebbe estremamente utile migliorare il controllo sulla posizione dei microfoni durante le misurazioni. Questo consentirebbe di ridurre l'impatto dei parametri liberi e migliorerebbe la riproducibilità delle misure. Sfrut-

tando strumenti e pratiche tipiche dei laboratori di ottica, ad esempio, dove l'allineamento preciso è cruciale per ottenere risultati accurati, si mostrerebbe ancora quanto i campi della fisica siano in stretto contatto. In secondo luogo, sarebbe vantaggioso utilizzare un oscilloscopio più sofisticato, in grado di calcolare automaticamente il ritardo tra i segnali. Attualmente, il metodo delle guide utilizzato è stato una fonte significativa di errore. Un oscilloscopio avanzato potrebbe fornire misurazioni più precise e ripetibili, consentendo una valutazione più accurata dei tempi di arrivo dei segnali e riducendo le incertezze associate.

Migliorare questi aspetti critici del modello teorico e dei processi di generazione e di misurazione non solo potrebbe aumentare significativamente la precisione e l'affidabilità delle analisi condotte, ma garantirebbe anche una base più solida per interpretare i dati raccolti e trarre conclusioni valide da ulteriori esperimenti.

5.2.1 Acustica e Ottica

Le conoscenze teoriche e pratiche acquisite durante corsi e laboratori universitari di ottica hanno trovato diretta applicazione nella realizzazione dell'apparato prima e dell'esperimento poi.

L'approfondimento dei modelli matematici delle onde e dei fasci, lo studio dei principi della sovrapposizione e della propagazione in campo lontano sono solo alcuni degli elementi cruciali, appresi nei corsi teorici di base, che hanno fornito le basi necessarie per progettare, comprendere e svolgere l'esperimento.

I laboratori frequentati hanno offerto preziose esperienze pratiche, sia nel campo dell'ottica sperimentale sia in quello dell'elettronica, facilitando notevolmente la realizzazione dell'apparato e l'interazione con il dispositivo. Inoltre le competenze sviluppate nei corsi di informatica e statistica hanno giocato un ruolo fondamentale nella costruzione del modello, nel controllo e nella programmazione del dispositivo e nell'analisi dei dati.

Tutte le conoscenze e le esperienze maturate durante gli studi triennali non sono state chiuse e statiche ma hanno contribuito trasversalmente alla realizzazione di questo elaborato, e più in generale hanno permesso lo sviluppo di un'attitudine ad affrontare la realtà consapevolmente.

Il lavoro è culminato con l'ottenimento di risultati qualitativi e quantitativi a partire dall'analisi di un modello matematico e dei dati raccolti in laboratorio, ma durante tutta l'esperienza ha continuamente stimolato il sorgere di nuove domande che hanno consentito di approfondire la conoscenza del fenomeno studiato.

"Il prototipo sviluppato ha permesso di esplorare un metodo semplice e relativamente intuitivo di generazione delle OAMW, quali altre direzioni inedite ed impreviste potrebbe seguire lo sviluppo di questo dispositivo?"

"L'impiego di componenti più avanzati ed il controllo ambientale permetterebbero la creazione di un sistema adatto a generare fasci più stabili. In che modo l'apparato potrebbe essere impiegato per poter effettivamente trasmettere informazione a distanza?"

"Migliorie del dispositivo potrebbero rendere di utilità pratica applicazioni inerenti la manipolazione di piccoli oggetti. Quali altri potenziali impieghi del trasferimento di momento angolare si potrebbero studiare?"

"L'integrazione di un corso o laboratorio dedicato all'acustica parallelo a quelli tradizionali di teoria ondulatoria e di ottica potrebbe stimolare la curiosità degli studenti aprire nuove prospettive di ricerca?"

Considerando che gli sfasamenti tra le onde sono fondamentali per la percezione della direzionalità del suono, e che l'immersività, a partire dalla stereofonia, sia un fattore cruciale nell'ambito della musica e delle arti performative, questo sistema potrebbe essere alla base della progettazione di nuovi strumenti musicali e impianti di diffusione. "Quali altri campi, scientifici e non, potrebbe toccare l'evoluzione di questo dispositivo?"

Si auspica che allo stesso modo questo elaborato possa produrre nuovi quesiti, punti e ricerche in campo acustico, ottico o in qualsiasi altro settore.

Appendice A

Approfondimenti teorici

A.1 Equazione di Helmholtz parassiale

Sostituzione dell'equazione di un'onda piana nella forma $\Psi(x, y, z) = u(x, y, z)e^{ikz}$ nell'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2(ue^{ikz}) + k^2(ue^{ikz}) = 0$$

Espandendo il Laplaciano si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (ue^{ikz}) + k^2(ue^{ikz}) = 0$$

Poiché e^{ikz} è indipendente da x e y si può scrivere come:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u \right) e^{ikz} = 0$$

Semplificando e dividendo per e^{ikz} si arriva all'espressione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

Introducendo l'approssimazione parassiale, assumiamo il termine $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, che è piccolo rispetto a $2ik \frac{\partial u}{\partial z}$, come trascurabile ed ottenendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + k^2 u \approx 0$$

Poiché il termine $k^2 u$ si annulla:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Riorganizzando i termini otteniamo infine l'equazione di Helmholtz parassiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

A.2 Polinomi generalizzati di Laguerre

I polinomi generalizzati di Laguerre sono soluzioni dell'equazione differenziale di Laguerre generalizzata:

$$x \frac{d^2 L_n^{(\alpha)}(x)}{dx^2} + (1 - x - \alpha) \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + n L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \quad (2)$$

Sono definiti dalla formula:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad (3)$$

dove $n = 0, 1, 2, \dots$ rappresenta l'ordine del polinomio, α è un parametro reale (noto anche come parametro di generalizzazione), e x è la variabile indipendente.

Questi polinomi sono ampiamente impiegati nella risoluzione problemi di fisica matematica e più in generale delle equazioni differenziali.

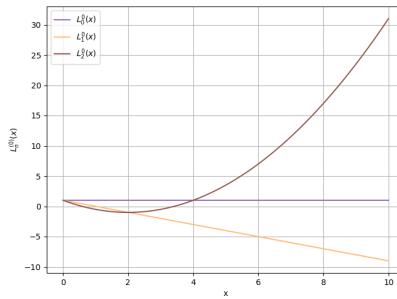


Figura 24: Polinomi generalizzati di Laguerre di ordine 0, 1 e 2.

A.3 Fasci Laguerre-Gauss puri di ordine -1, -2

Quando la carica topologica ℓ assume valori negativi si ottengono i vortici chirali rispetto ai fasci con $\ell > 0$.

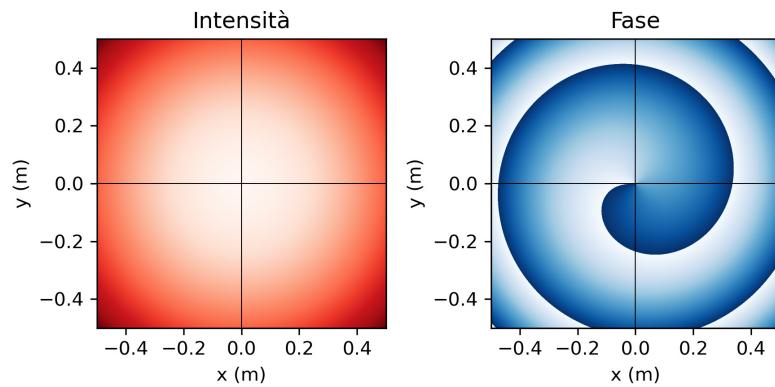
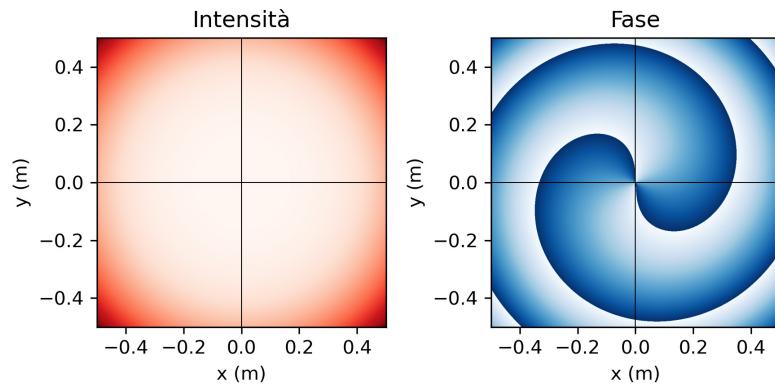
(a) $\ell = -1$ (b) $\ell = -2$

Figura 25: Modi normali Laguerre-Gauss con cariche topologiche negative.

A.4 Fasci Laguerre-Gauss di ordine 3, 4

Secondo il modello teorico un sistema di 8 sorgenti è in grado di generare correttamente fasci Laguerre-Gauss fino al terzo ordine.

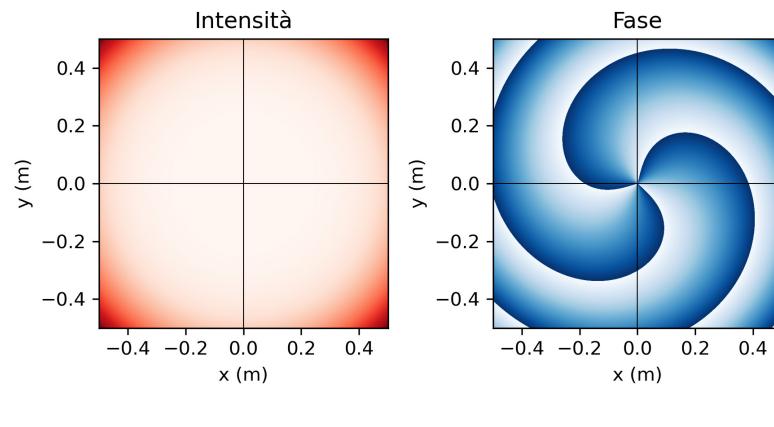
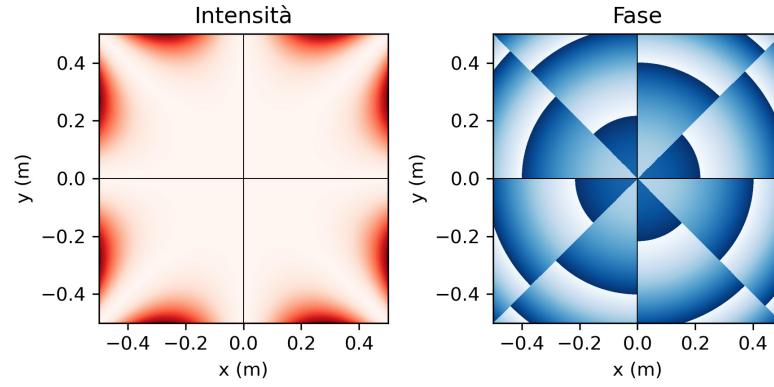
(a) $\ell = 3$ (b) $\ell = 4$

Figura 26: Fasci Laguerre-Gauss $\ell = 3, 4$ ottenuti come sovrapposizione di fasci di ordine 0.

A.5 Sorgenti eterogenee

Nelle figure seguenti si osservano separatamente gli effetti dell'eterogeneità delle sorgenti

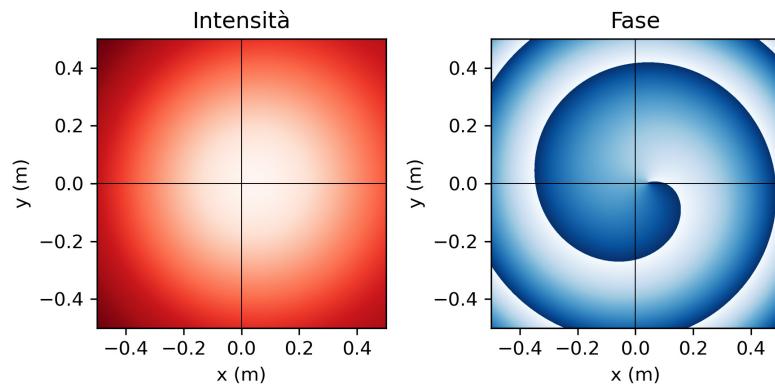
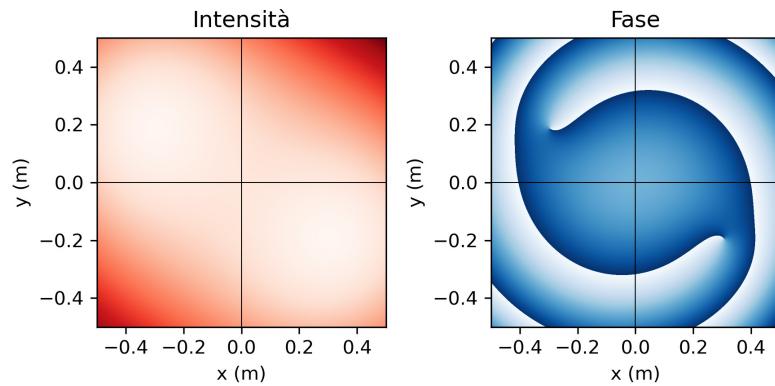
(a) $\ell = 1$ (b) $\ell = 2$

Figura 27: Sorgenti con incertezze in ampiezza.

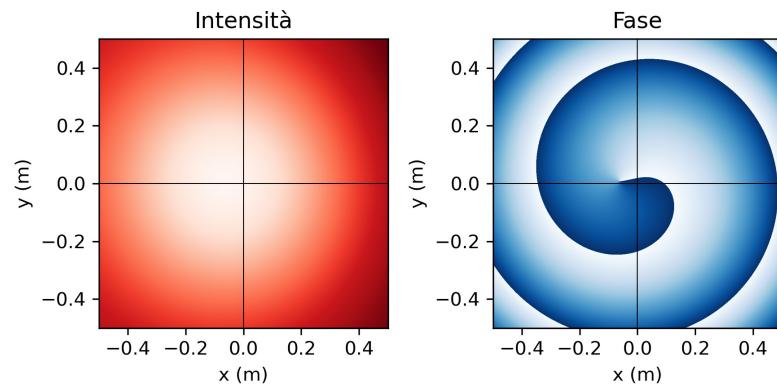
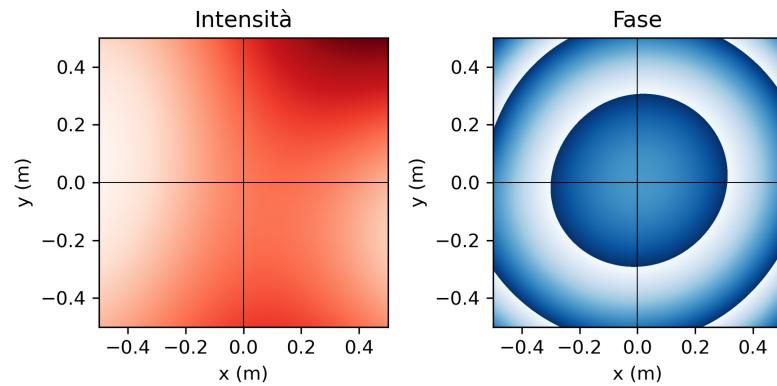
(a) $\ell = 1$ (b) $\ell = 2$

Figura 28: Sorgenti con incertezze su sfasamenti.

Appendice B

Dettagli sperimentali

B.1 Codice Arduino

```
// Codice per Arduino Mega 2560
// Generatore di OAMW

// Inizializzazione
#define SPK_PIN1 12
#define SPK_PIN2 11
#define SPK_PIN3 10
#define SPK_PIN4 9
#define SPK_PIN5 8
#define SPK_PIN6 7
#define SPK_PIN7 6
#define SPK_PIN8 5
#define LED_PIN1 44
#define LED_PIN2 45
#define LED_PIN3 46
#define AMP_PIN 14

// Numero campioni
const unsigned int smp = 96;
// Tabelle d'onda definite su due periodi
int Sin1[2*smp];
int Sin2[2*smp];
int Sin3[2*smp];
int Sin4[2*smp];
int Sin5[2*smp];
int Sin6[2*smp];
int Sin7[2*smp];
```

```
int Sin8[2*smp];
// Inizializzazione variabili: correzioni di fase
unsigned int inc;
int p2 = 0;
int p3 = 0;
int p4 = 0;
int p5 = 0;
int p6 = 0;
int p7 = 0;
int p8 = 0;
unsigned int t = 0;

// Setup
void setup() {
    // Impostazioni dei clock interni
    TCCR3B = TCCR3B & B11111000 | B00000001; // 2 3 5
    TCCR4B = TCCR4B & B11111000 | B00000001; // 6 7 8
    TCCR2B = TCCR2B & B11111000 | B00000001; // 9 10
    TCCR5B = TCCR5B & B11111000 | B00000001; // 44 45 46
    TCCR1B = TCCR1B & B11111000 | B00000001; // 11 12
    // Impostazioni dei pin
    pinMode(SPK_PIN1, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN2, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN3, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN4, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN5, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN6, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN7, OUTPUT);
    pinMode(SPK_PIN8, OUTPUT);
    pinMode(LED_PIN1, OUTPUT);
    digitalWrite(LED_PIN1, LOW);
    pinMode(LED_PIN2, OUTPUT);
    digitalWrite(LED_PIN2, LOW);
    pinMode(LED_PIN3, OUTPUT);
    digitalWrite(LED_PIN3, LOW);
    pinMode(AMP_PIN, OUTPUT);
    digitalWrite(AMP_PIN, HIGH);

    // Setup OAMW
/* // l = 0
   inc = 0;
   digitalWrite(LED_PIN2, HIGH); */
    // l = 1
    inc = smp/8/5;
```

```
    digitalWrite(LED_PIN3, HIGH);
    \\ Correzioni
    p2=-1;
    p3=2;
    p4=1;
    p5=1;
    p6=2;
    p7=5;
    p8=3;
/*  // l = 2
    inc = smp/4/5;
    digitalWrite(LED_PIN3, HIGH); */
// Tabelle d'onda
for(int i=0; i<2*smp; i++){
    Sin1[i]=31*(sin(5*2*PI/smp*(i+0*inc))+1)/2;
    Sin2[i]=38*(-sin(5*2*PI/smp*(i+1*inc+p2))+1)/2;
    Sin3[i]=40*(-sin(5*2*PI/smp*(i+2*inc+p3))+1)/2;
    Sin4[i]=30*(sin(5*2*PI/smp*(i+3*inc+p4))+1)/2;
    Sin5[i]=46*(-sin(5*2*PI/smp*(i+4*inc+p5))+1)/2;
    Sin6[i]=29*(sin(5*2*PI/smp*(i+5*inc+p6))+1)/2;
    Sin7[i]=20*(-sin(5*2*PI/smp*(i+6*inc+p7))+1)/2;
    Sin8[i]=28*(sin(5*2*PI/smp*(i+7*inc+p8))+1)/2;
}
}

// Ciclo di lavoro
void loop() {
    int i=t-smp*(int)(t/smp);           // Indice ciclico
    analogWrite(SPK_PIN1, Sin1[i]);
    analogWrite(SPK_PIN2, Sin2[i]); // Canale invertito
    analogWrite(SPK_PIN3, Sin3[i]); // Canale invertito
    analogWrite(SPK_PIN4, Sin4[i]);
    analogWrite(SPK_PIN5, Sin5[i]); // Canale invertito
    analogWrite(SPK_PIN6, Sin6[i]);
    analogWrite(SPK_PIN7, Sin7[i]); // Canale invertito
    analogWrite(SPK_PIN8, Sin8[i]);
    t++;
}
```

Listing B.1: Codice Arduino.

B.2 Schema circuitale dell'apparato

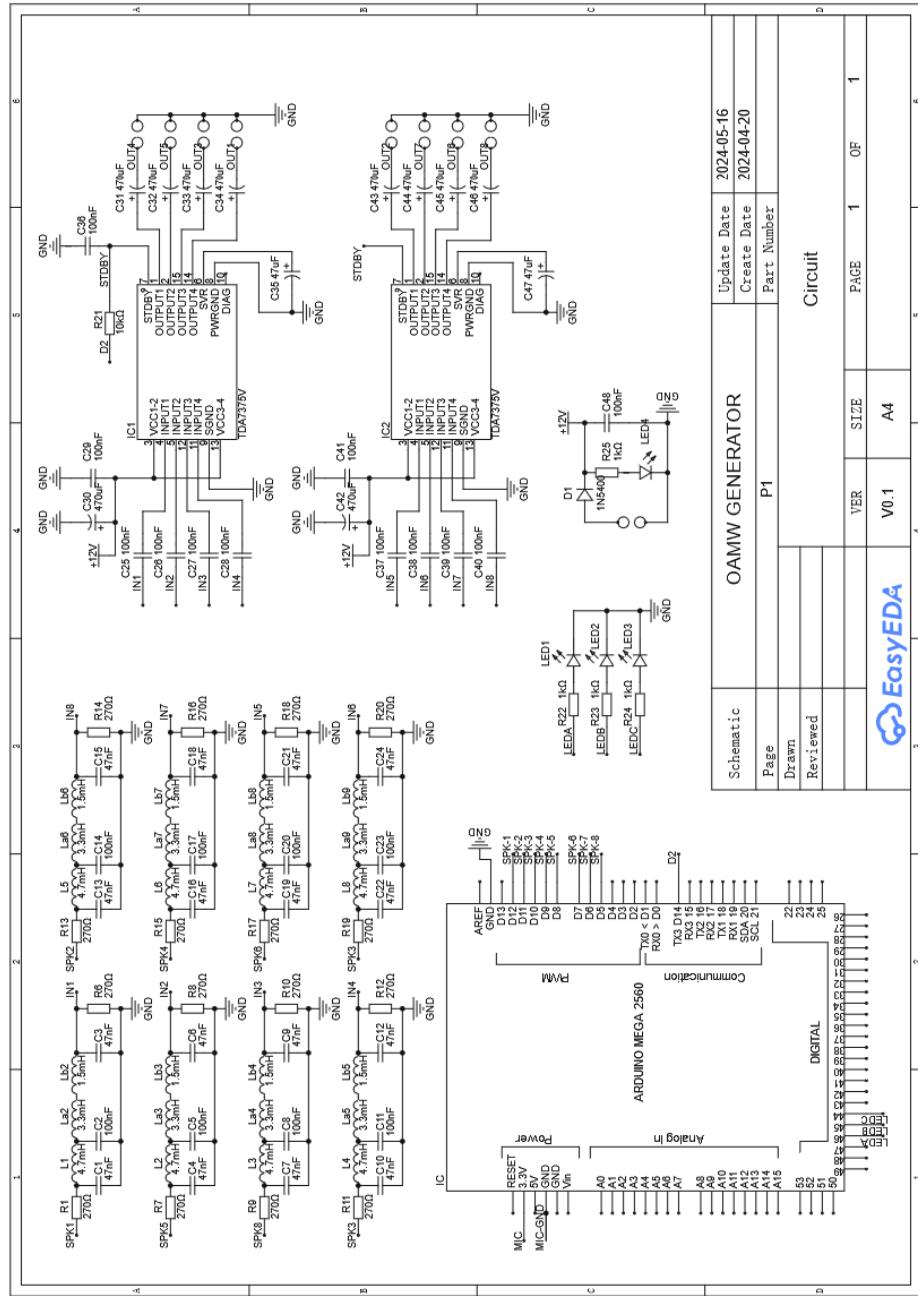


Figura 29: Schema circuitale dell'apparato.

B.3 Calibrazione dell'apparato

Canale	V_{test} (mV)	Dev.Avg %	Corr. (Arduino)	V [mV]	Dev %
1	790	-2%	1	815	0%
2	849	5%	8	800	-2%
3	706	-12%	10	848	4%
4	810	1%	0	823	1%
5	523	-35%	16	805	-1%
6	835	4%	-1	810	0%
7	1060	32%	-10	812	0%
8	870	8%	-2	793	-2%

Tabella 1: Calibrazione intensità.

Canale	Fase Ideale (rad)	Fase Filtri (rad)	Errore (rad)
1	0	0	0
2	0.89	0.8	0.02
3	1.57	1.38	-0.21
4	2.36	1.92	-0.25
5	3.14	2.64	-0.06
6	3.93	3.22	-0.21
7	4.71	3.79	-0.21
8	5.50	4.48	-0.10

Tabella 2: Test dei filtri.

Canale	Fase test (rad)	Dev %	Corr. (Arduino)	Fase (rad)	Dev %
1	0	0%	0	0	0%
2	1.15	-46%	-1	0.87	3%
3	0.96	39%	2	1.53	3%
4	1.95	17%	1	2.34	1%
5	2.61	17%	1	3.10	1%
6	3.10	21%	2	3.91	1%
7	3.22	32%	5	4.68	1%
8	4.41	20%	3	5.44	1%

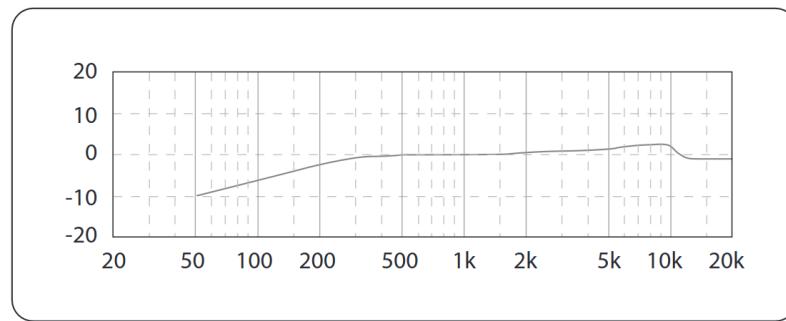
Tabella 3: Calibrazione sfasamenti.

B.4 Test degli altoparlanti

Canali	Resistenze Altoparlanti (Ω)	Sfasamento relativo (rad)
1	8.0	0.80
2	7.2	0.81
3	7.4	0.82
4	7.6	0.78
5	7.5	0.78
6	7.9	0.79
7	7.8	0.80
8	7.2	0.79

Tabella 4: Dati raccolti nei test sugli altoparlanti.

B.5 Risposta in frequenza dei microfoni



Frequency response

Figura 30: Risposta in frequenza dei microfoni fornita dal produttore.

B.6 Scansioni orizzontali simulate

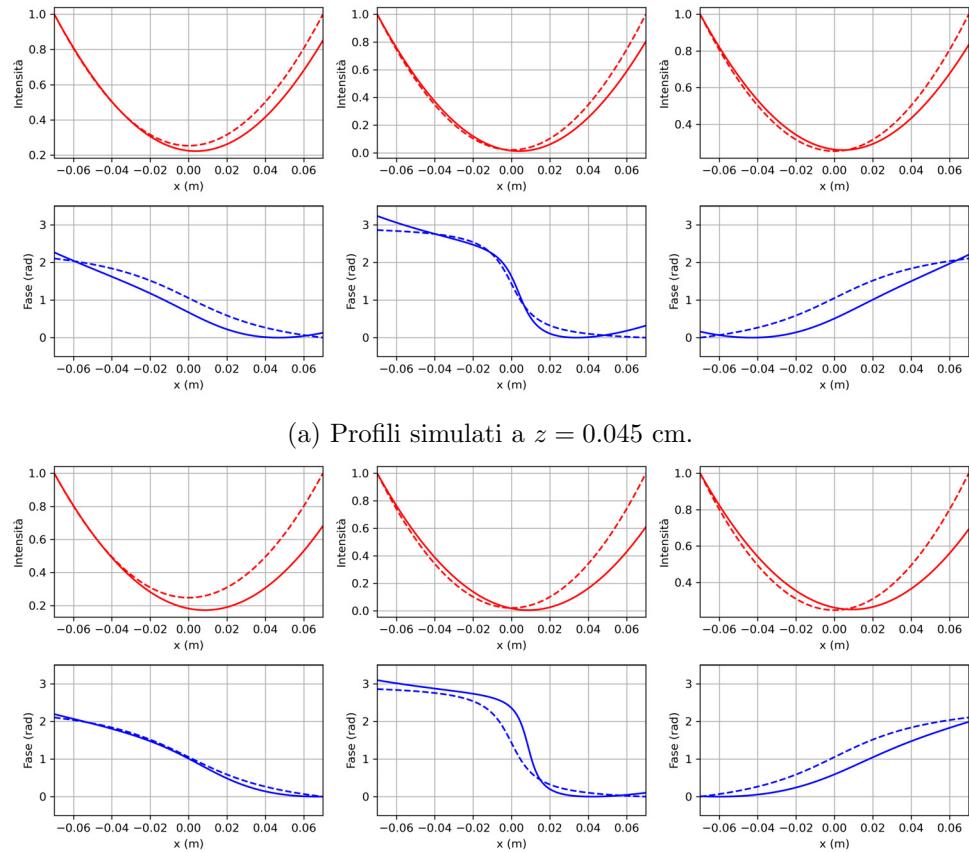


Figura 31: Scansioni orizzontali realizzate a partire dal modello teorico completo.

B.7 Dati raccolti

x (m)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)
0.035	-3.40	1.86	1.95	4.70	0.72	5.7
0.03	-3.31	2.56	1.92	7.37	0.55	8.08
0.025	-3.23	3.25	1.95	10.72	0.39	10.77
0.02	-3.12	4.38	2.04	13.11	0.27	13.01
0.015	-2.99	5.49	2.13	12.86	0.16	14.46
0.01	-2.92	6.52	2.40	9.96	0.07	14.46
0.005	-2.76	7.19	3.02	6.70	-0.05	13.52
0	-2.63	7.34	3.91	7.70	-0.11	11.61
-0.005	-2.46	7.10	4.34	12.09	-0.14	9.30
-0.01	-2.33	6.27	4.57	15.93	-0.13	7.23
-0.015	-2.15	5.19	4.71	15.87	-0.08	5.71
-0.02	-2.02	4.16	4.76	12.05	-0.04	4.64
-0.025	-1.90	3.25	4.86	7.61	0.03	3.79
-0.03	-1.73	2.58	4.96	4.38	0.10	3.14
-0.035	-1.62	2.04	5.10	2.67	0.17	2.69

Tabella 5: Dati raccolti nelle tre scansioni a 0.5 cm.

x (m)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)
0.06	1.94	1.0	-0.85	1.3	-0.91	2.9
0.05	2.00	1.2	-0.85	1.8	-0.91	4.3
0.04	2.13	1.6	-0.85	2.5	-0.91	6.2
0.03	2.31	1.8	-0.79	3.2	-0.89	8.4
0.02	2.57	2.1	-0.63	3.6	-0.85	10.2
0.01	2.96	2.3	-0.18	3.8	-0.63	11.1
0	3.36	2.6	0.69	4.5	0.06	11.6
-0.01	3.83	3.2	1.11	4.7	0.69	11.4
-0.02	4.22	3.8	1.36	5.5	1.14	10.4
-0.03	4.46	4.1	1.40	6.1	1.27	8.8
-0.04	4.67	4.0	1.49	6.1	1.28	6.3
-0.05	4.80	3.5	1.54	5.2	1.21	3.9
-0.06	4.55	2.8	1.57	4.0	0.83	2.7

Tabella 6: Dati raccolti nelle tre scansioni a 4.5 cm.

x (m)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)	ϕ (rad)	V_{eff} (V)
0.055	-0.65	2.93	-0.07	1.95	0.11	10.69
0.05	-0.71	2.66	-0.07	2.13	0.05	10.59
0.045	-0.78	3.08	-0.13	2.20	-0.04	12.41
0.04	-0.86	3.66	-0.15	2.62	0.05	14.02
0.035	-0.91	4.16	-0.22	2.77	0.05	15.13
0.03	-0.93	5.58	-0.21	3.03	0.09	16.32
0.025	-1.03	6.23	-0.27	3.41	0.09	18.55
0.02	-1.00	7.45	-0.31	3.55	0.07	18.8
0.015	-0.98	8.04	-0.33	3.76	-0.06	19.8
0.01	-0.96	9.48	-0.41	3.96	-0.06	21.83
0.005	-0.96	10.46	-0.43	4.28	-0.06	22.77
0	-1.02	11.65	-0.47	4.66	-0.09	23.38
-0.005	-1.02	13.22	-0.52	5.03	-0.11	23.92
-0.01	-1.06	14.91	-0.55	5.33	-0.15	25.26
-0.015	-1.11	15.73	-0.58	5.75	-0.20	25.42
-0.02	-1.09	17.23	-0.61	6.04	-0.25	26.32
-0.025	-1.15	18.39	-0.65	6.47	-0.28	26.55
-0.03	-1.12	19.29	-0.70	6.67	-0.30	27.15
-0.035	-1.09	19.94	-0.71	6.84	-0.32	27.60
-0.04	-1.09	20.63	-0.69	7.12	-0.35	27.27
-0.045	-1.07	20.58	-0.69	7.41	-0.39	27.88
-0.05	-1.05	21.39	-0.68	7.56	-0.42	27.75
-0.055	-1.04	21.84	-0.67	7.46	-0.41	26.75

Tabella 7: Dati raccolti nelle tre scansioni a 10 cm.

B.8 Fit dei dati di intensità

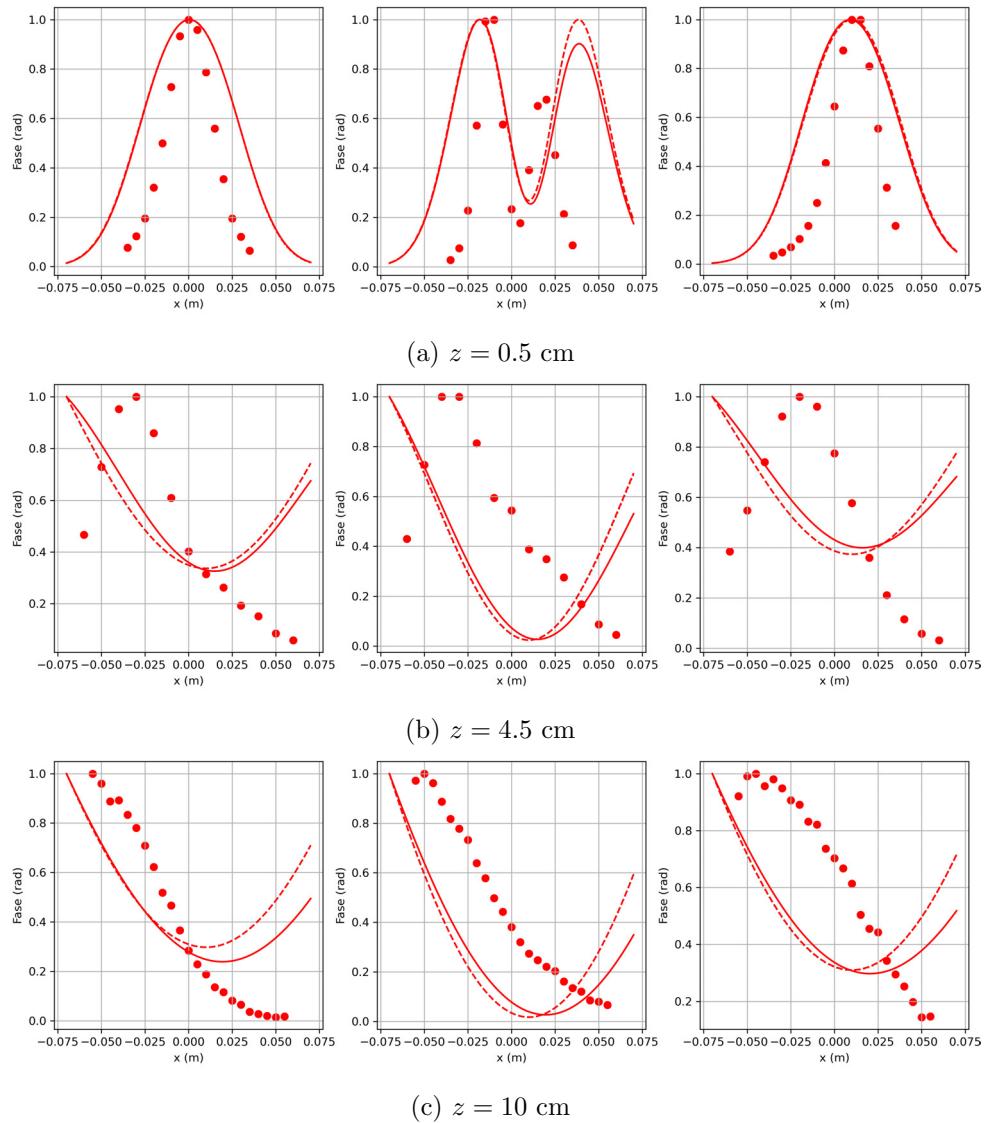


Figura 32: In ogni riga sono presentati i valori delle intensità raccolte durante le misurazioni e il fit dei modelli teorici alla distanza z specificata. Per ogni serie sono riportate le tre scansioni, rispettivamente sopra, al centro e sotto del dispositivo.

B.9 Rumore di fondo

Si può osservare in figura la deviazione progressiva della singolarità ad opera del fascio gaussiano usato per simulare il rumore di fondo.

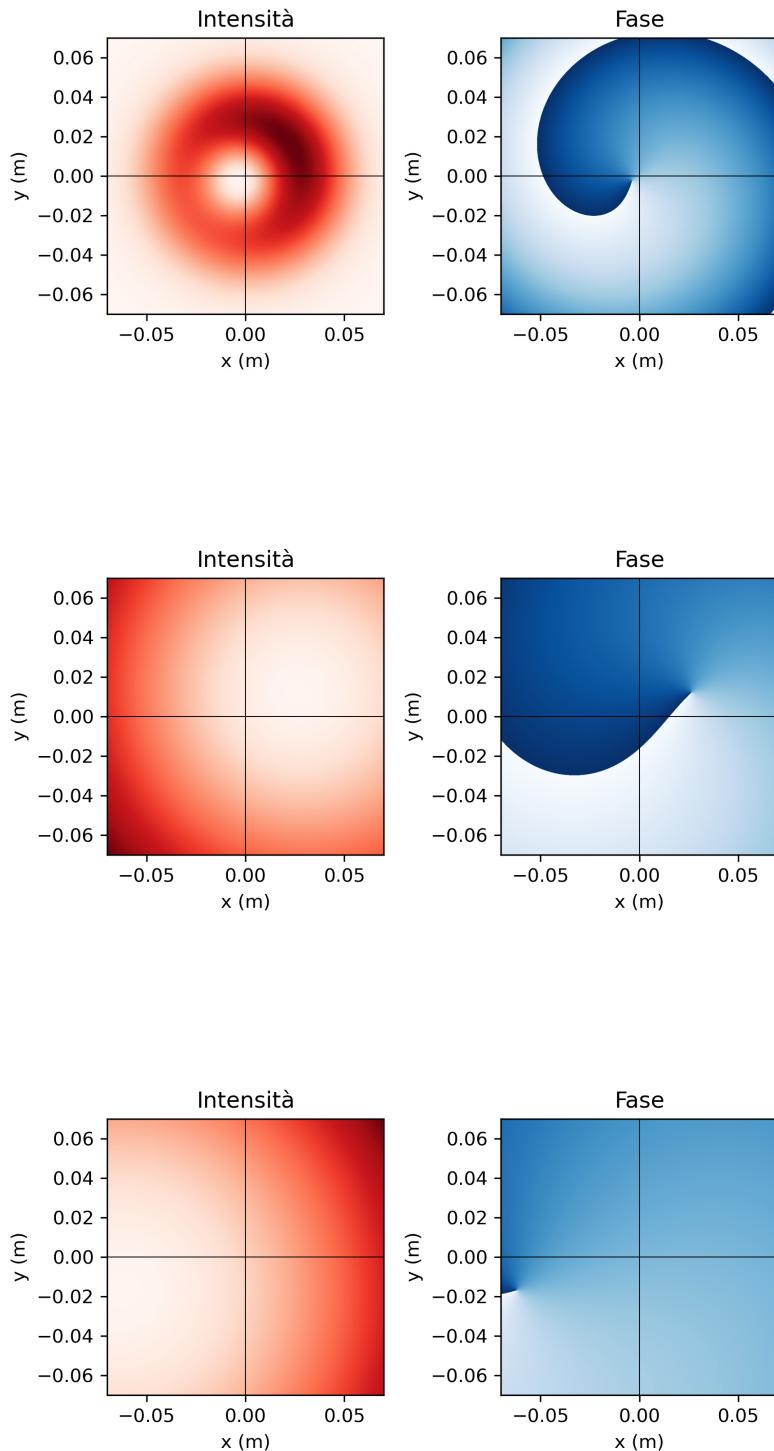


Figura 33: Rumore gaussiano sovrapposto al fascio generato con il modello realistico, simulazioni 2D a 0.5, 4, 5 e 10 cm.

Bibliografia

- [1] Lawrence Kessler. A review of progress and applications in acoustic microscopy. *Journal of The Acoustical Society of America*, 53, 1973. [1.1](#)
- [2] Christiaan Huygens. *Traité de la lumière*. Pieter van der Aa, 1690. [2](#)
- [3] A.E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986. [2](#)
- [4] Hung-Kit Wong and Kenneth Young. Momentum of light in a refracting medium. *American Journal of Physics*, 45, 1977. [2](#)
- [5] B. Paroli, L. Cremonesi, M. Siano, and M.A.C. Potenza. Hybrid oam-amplitude multiplexing and demultiplexing of incoherent optical states. *Optics Communications*, 524, 2022. [2](#)
- [6] Jianjia Yi, Mingtao Guo, Rui Feng, Badreddine Ratni, Lina Zhu, Douglas Werner, and Shah Nawaz Burokur. Design and validation of an all-dielectric metamaterial medium for collimating orbital-angular-momentum vortex waves at microwave frequencies. *Physical Review Applied*, 12, 2019. [2](#)
- [7] B. Thidé, H. Then, J. Sjöholm, K. Palmer, J. Bergman, T. D. Carozzi, Ya. N. Istomin, N. H. Ibragimov, and R. Khamitova. Utilization of photon orbital angular momentum in the low-frequency radio domain. *Phys. Rev. Lett.*, 99, 2007. [2](#)
- [8] S.P. Singal. Radio wave propagation and acoustic sounding. *Atmospheric Research*, 20:235–256, 1986. [2.1.2](#)
- [9] Ulrich Zürcher. Basics of sound in air: Correspondence with electromagnetic waves. *American Journal of Physics*, 89, 2021. [2.2](#)
- [10] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 5(10), 1966. [2.2.2](#)

- [11] Les Allen, Marco Beijersbergen, Robert Spreeuw, and J. Woerdman. Orbital angular momentum of light and transformation of laguerre gaussian laser modes. *Physical review. A*, 45, 1992. [2.2.2](#)
- [12] A. E. Siegman. Hermite–gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions. *J. Opt. Soc. Am.*, 63(9), 1973. [2.2.2](#)
- [13] Rui Chen, Hong Zhou, Marco Moretti, Xiaodong Wang, and Jiandong Li. Orbital angular momentum waves: Generation, detection, and emerging applications. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 22, 2020. [2.2.4](#), [2.3](#)
- [14] Ermes Toninelli, Mitchell Cox, Graham Gibson, Stuart Brown, Matthew Edgar, Andrew Forbes, and Miles Padgett. A compact acoustic spanner to rotate macroscopic objects. *Scientific Reports*, 9, 2019. [2.2.4](#), [3.1](#)
- [15] Po-Cheng Lin, Graham Gibson, and Miles Padgett. Real-time visualisation and optimisation of acoustic waves carrying orbital angular momentum. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55, 2022. [2.2.4](#), [3.1](#), [3.2.1](#)
- [16] Lionel Cordesses. Direct digital synthesis: a tool for periodic wave generation (part 1). *IEEE Signal Processing Magazine*, 21, 2004. [3.1.1](#)

Ringraziamenti

Desidero ringraziare le persone che hanno reso speciale il mio percorso universitario fino ad oggi e che hanno reso possibile la stesura di questa tesi.

Senza aver frequentato il laboratorio di Ottica del Prof. Potenza, non avrei mai pensato di potermi dedicare all'Acustica durante i miei studi triennali, né di poter svolgere un esperimento che legasse così strettamente le conoscenze e competenze acquisite nei corsi universitari con le mie passioni personali.

Un sentito ringraziamento va al professor Bruno Paroli per i preziosi consigli e per il supporto offerto durante la progettazione, lo svolgimento e in tutte le fasi di questa esperienza, senza i quali questo lavoro sarebbe stato una montagna molto più alta da scalare.

Grazie all'affetto e alla sincera amicizia di Matteo è stato più facile affrontare tutte le difficoltà incontrate lungo la strada. L'ultima parte di questo viaggio poi è stata particolarmente leggera e felice: è grazie a Chi se sono riuscito finalmente a rivedere le stelle.

Infine è con il supporto, la pazienza e l'amore della mia famiglia che sono riuscito a raggiungere un'altra importante tappa e sono pronto ad accogliere quello che riserverà il futuro.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE