Relazione Progetto SCPD

Michele Valfrè

Dicembre 2022

1 Introduzione: Metodo di Jacobi

Il metodo di Jacobi è un metodo iterativo per la soluzione di sistemi di equazioni lineari nella forma $Ax = b$ dove A è una matrice quadrata $n \times n$, x e b sono vettori colonna di dimensione n. La condizione generale di convergenza del metodo è che il raggio spettrale, ovvero, nel caso di una matrice quadrata, il massimo valore assoluto dei suoi autovalori, sia minore di 1.
Tuttavia, condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza del metodo è che A sia diagonalmente dominante, ovvero

$$\forall i,\ |a_{ii}| >= \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \tag{1}$$

Il passo k-esimo dell' iterazione è descritto dall' equazione

$$x_i^k = \frac{1}{a_{i,i}}[b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{k-1}]. \tag{2}$$

2 Struttura Dati

La struttura utilizzata in entrambe le implementazioni è la seguente:

```
typedef struct _lin_sys{
    long double * a;
    long double * b;
    long double * x;
    int rows;
    int cols;
```

Come si può notare, sono mantenuti sia il numero di righe che il numero di colonne di A. Si tratta di un' informazione ridondante nel caso dell' implementazione sequenziale(una delle precondizioni è che A sia quadrata), tuttavia, tornerà utile nell' implementazione parallela, dove le singole UC non opereranno su matrici quadrate.

3 Algoritmo Sequenziale

L' implementazione sequenziale è l' applicazione diretta del metodo: preso un sistema di equazioni lineari *system*, ad ogni iterazione, scorre le righe della matrice *system.A* ed applica l' equazione (2) mantenendo un riferimento al vecchio valore di *system.x* nella variabile *old_x*:

Algorithm 1 Jacobi Sequenziale

function JACOBI_SEQ(*system*,*iterations*)
  while $iterations > 0$ **do**
    $old\_x \leftarrow system.x$
    $i \leftarrow 0$
    while $i < system.rows$ **do**
      $sum \leftarrow \sum_{j \neq i} system.A[i] - old\_x[j]$
      $system.x[i] \leftarrow \frac{1}{system.A[i][i]}(system.b[i] - sum)$
      $i \leftarrow i + 1$
    $iterations \leftarrow iterations - 1$

4 Algoritmo Parallelo

Come si può notare dall' equazione (2), i dati necessari per computare la variabile x_i al passo k sono l' $i-$esima riga, il valore b_i corrispondente e l' intero vettore x alla fine del passo $k-1$. Siccome i dati sono immediatamente disponibili, si è scelto di estrarre il parallelismo dai essi(paradigma data parallel). Si fa notare che la computazione, così trattata, sia di tipo globalmente sincrona: tutte le UC si arrestano alla fine dell' iterazione(*Barrier* implicita data dall' istruzione $MPI_Gatherv$) per consentire il calcolo del nuovo vettore x. Il processo con *rank* pari a 0 svolge contemporaneamente i ruoli di *Emitter*, dividendo i dati fra i processi, *Worker*, computando una parte del nuovo valore di x, *Collector*, raccogliendo e combinando i risultati alla fine di ogni iterazione. In particolare, l' algoritmo può essere riassunto dai seguenti passi:

1. Il *Master* divide la matrice A e il vettore b fra i processi secondo la tecnica di bilanciamento del carico *round robin*. Così facendo, si delineano due casi:

    - se il numero di processi divide esattamente il numero di righe della matrice, il carico è uguale per tutti;
    - altrimenti, il numero di processi in eccesso(resto della divisione del numero di righe per il numero di processi) sarà comunque distribuito equamente: alcuni processi avranno una riga in più da gestire rispetto agli altri.

    si fa notare come, in quest' ultimo caso, non vi siano particolari miglioramenti in termini di tempo siccome, alla fine di ogni iterazione, è presente una *Barrier* implicita(vedere passo 4). Ciò comporta che il tempo di esecuzione complessivo sarà limitato dal tempo di esecuzione dei processi più lenti(quelli a cui sono assegnate più righe) e che sia quindi sempre più conveniente scegliere un numero di processi che divida esattamente il numero di righe della matrice A.

2. all' inizio dell' iterazione, il *Master* distribuisce(*MPI_Bcast*) il vettore x fra tutti i processi;

3. il processo n applica la formula (2) a ognuna delle proprie variabili/righe;

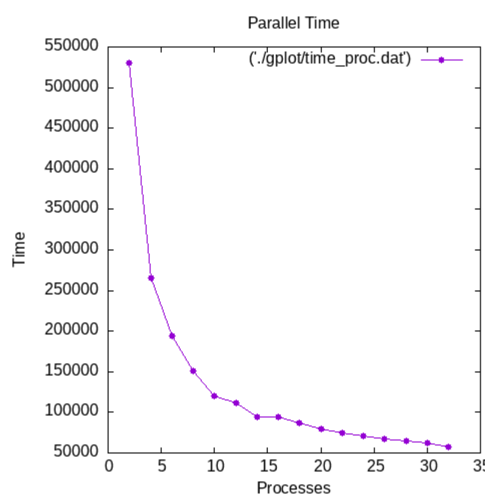
4. il *Master* raccoglie i risultati (*MPI_Gatherv*) e li combina ottenendo i nuovi valori di x e torna al passo 2.

La memoria allocata da ogni processo sarà dunque quella destinata a mantenere le proprie porzioni di A e b e l' intero vettore x computato al passo precedente.

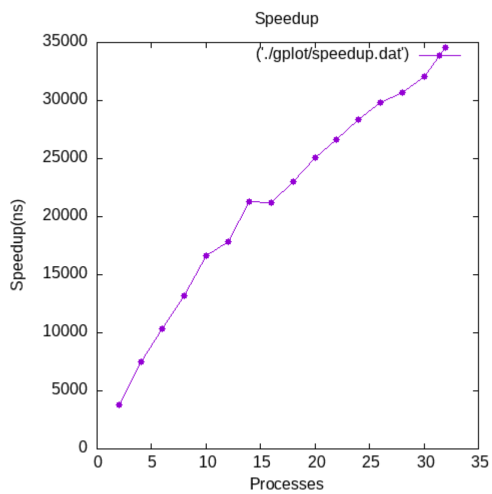
Al fine di evitare l' invio di informazioni ridondanti, invece di distribuire sia l' intero vettore x che la porzione di esso che dovrà essere modificata dal processo, viene comunicato un offset(che sarebbe comunque necessario calcolare per *MPI_Scatterv* e *MPI_Gatherv*) che sarà utilizzato per determinare l' inizio di quest' ultima.

5 Sperimentazione e Conclusioni

La sperimentazione è stata effettuata su una matrice 300×300 per 200 iterazioni usando la partizione cineca. Il tempo di esecuzione della versione sequenziale del programma è di 1.999670985 s. Nel seguente grafico sono mostrati i tempi di esecuzione della versione parallela al variare del numero di processi(da 2 a 32):



Come si può notare, il miglioramento più consistente è ottenuto passando da 2 a 4 processi.
Lo speedup, riassunto dal grafico seguente, è essenzialmente lineare:



come già discusso in precedenza, i risultati migliori si ottengono quando il numero di processi divide esattamente il numero di righe. La grana computazionale ottima è di una riga per UC.