Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Guadalajara, Jal.

Situación problema:
Modelación de una suspensión para un vehículo automotriz

Modelación y automatización

Michelle Borjon Arriola A01638100

Profesor:
Luis Ismael Minchala Avila

MR2023.2 – Grupo 2
Escuela de Ingeniería y Ciencias

INTRODUCCIÓN

Los vehículos cuentan con sistemas de suspensión que les permiten absorber las perturbaciones que hay en la superficie. Las suspensiones se encargan de que el vehículo se mantenga en la dirección que se requiere, de soportan el peso del automóvil, disipar y reducir el impacto de las irregularidades del terreno, así como de que los neumáticos de vehículo se mantengan contacto con la carretera.

En esta situación problema se busca comprender, modelar y simular el comportamiento dinámico de la suspensión pasiva de ¼ de vehículo con un sistema sin control y un sistema con control.

La modelación de estos sistemas de suspensiones se lleva a cabo a través de un análisis de fuerzas de ¼ de vehículo para obtener las ecuaciones diferenciales del modelo. Es gracias a estas ecuaciones que se puede emplear el espacio de estados para obtener la ecuación de estado y la ecuación de salida que permiten obtener la función de transferencia del sistema.

Gracias a la función de transferencia es posible simular el comportamiento dinámico de las suspensiones de vehículos, y es a través de estas simulaciones que se puede analizar el cómo se comportan los diferentes tipos de suspensiones ante las irregularidades de terreno por las que pasa el vehículo.

ANTECEDENTES

Soluciones comerciales de suspensiones para vehículos

La suspensión de un vehículo es un componente que se encarga de mantener las ruedas de automóvil en contacto con el suelo, absorbiendo las vibraciones y los movimientos que se producen por el movimiento del vehículo; en otras palabras, son como las articulaciones que le permiten al automóvil filtrar irregularidades y separar al vehículo de lo que sucede en el camino.

Tipos de suspensiones

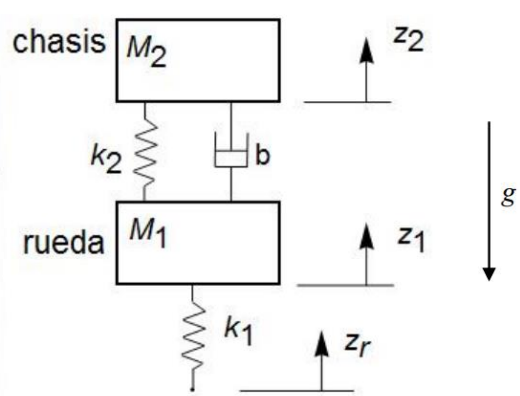
Suspensión pasiva

La suspensión pasiva está caracterizada por tener parámetros predeterminados y constante, por lo que no requiere del uso de actuadores o sensores. Esta suspensión puede encontrarse en la mayoría de los automóviles medianos y pequeños, y funciona mediante amortiguadores y resortes que se encargan de disipar los impactos causados por el movimiento del vehículo.

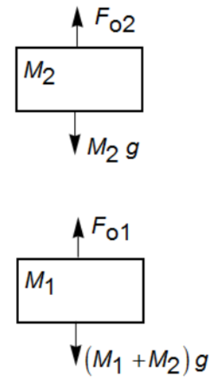
Las piezas que componen a este tipo de suspensión no son regulables ni automáticas, es decir, tienen un parámetro predeterminado, mejor conocido como carrera. El problema que puede llegar a presentarse es que cuando la carga del automóvil aumenta, la carrera disminuye, por lo que, en ocasiones, sucede que los golpes ocasionados por la irregularidad del terreno no se disipen del todo.

-Modelos matemáticos

Un estudio realizado por un estudiante del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Málaga logró modelar e identificar un sistema de suspensión pasiva para un robot móvil, en el cual se utilizó el siguiente modelo para ¼ de vehículo.



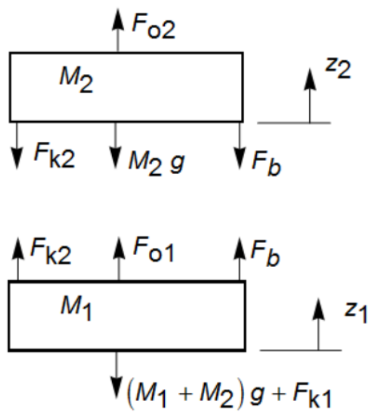
En este modelo las masas se ven sometidas a la gravedad, por lo que para obtener las fuerzas de cada una de las masas se emplean las siguientes fórmulas:



$$F_1 = (M_1 + M_2)g$$

$$F_2 = M_2 g$$

Cuando el sistema es perturbado por las irregularidades del camino, el diagrama de cuerpo libre queda de la siguiente manera:



Donde:

$$F_{k1} = k_1(z_1 - z_r)$$

$$F_{k2} = k_2(z_2 - z_1)$$

$$F_b = b({z_2}' - {z_1}')$$

De tal manera que las ecuaciones diferenciales del sistema de suspensión pasiva resultan de la siguiente forma:

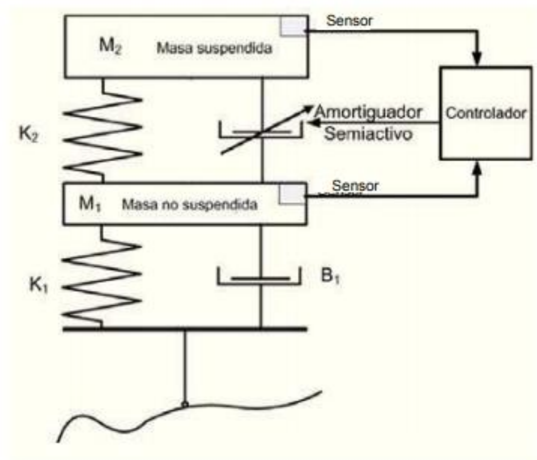
$$M_2 {z_2}'' = -k_2(z_2 - z_1) - b({z_2}' - {z_1}')$$

$$M_1 z_1'' = k_2(z_2 - z_1) + b(z_2' - z_1') - k_1(z_1 - z_r)$$

Suspensión semiactiva

La suspensión semiactiva está caracterizada por contar con amortiguadores, los cuales tienen un coeficiente de amortiguamiento que es modificado por un control externo que normaliza las frecuencias bajas haciendo uso del sistema de suspensión activa y las frecuencias altas por medio del sistema de suspensión pasiva. Por lo tanto, este tipo de suspensión hace uso de amortiguadores, sensores y controladores semiactivos que se utilizan en vehículos deportivos.

-Modelos matemáticos

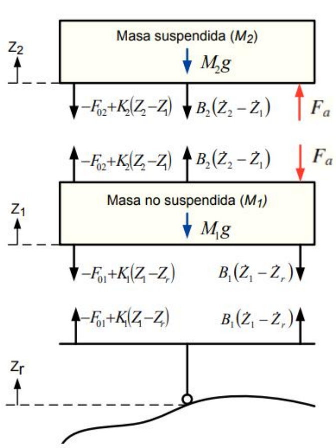


Suspensión activa

La suspensión activa se caracteriza por almacenar, disipar e introducir energía al sistema mediante el uso de actuadores, los cuales son regulados a través de sensores y controladores. Este tipo de suspensión es capaz de combinar grandes niveles de control y maniobrabilidad, lo que nos da mayor seguridad, pues los sensores que utiliza registran el comportamiento del automóvil ante las irregularidades del camino y define una respuesta de acuerdo con el objetivo de control.

-Modelos matemáticos

De acuerdo con el artículo realizado por alumnos de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Escuela Superior Politécnica del Litoral y alumnos del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Málaga, el modelado de ¼ de vehículo con suspensión activa queda de la siguiente forma:



Donde:

$Z_r = las\ irregularidades\ del\ camino$

$Z_1 = el\ desplazamiento\ vertical\ del\ neumático$

$Z_2 = el\ desplazamiento\ vertical\ del\ chasis$

Cuando el sistema se encuentra el reposo, los resortes cuentan con fuerzas iniciales denominadas F_{01} y F_{02}:

$$F_{01} = (M_2 + M_1)g$$

$$F_{02} = M_2 g$$

Aplicando la segunda ley de Newton se obtienen las ecuaciones diferenciales de las masas suspendidas y no suspendida:

$$M_2\ddot{Z}_2 = F_a - B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - \left(-F_{02} + K_2(Z_2 - Z_1)\right) - M_2 g$$

$$M_1\ddot{Z}_1 = -F_a + B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) + \left(-F_{02} + K_2(Z_2 - Z_1)\right) - M_1 g - B_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_r) - \left(-F_{01} + K_1(Z_1 - Z_r)\right)$$

Al simplificar y eliminar las fuerzas gravitacionales, las ecuaciones diferenciales del sistema quedan de la siguiente manera:

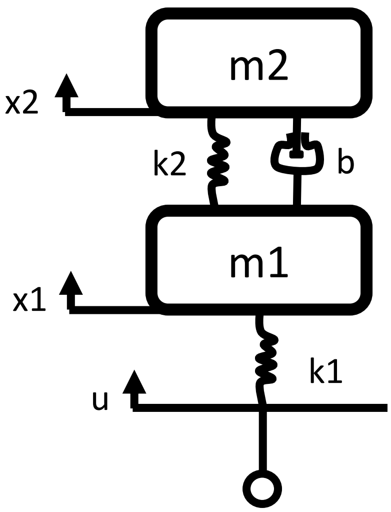
$$M_2\ddot{Z}_2 = F_a - B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - K_2(Z_2 - Z_1)$$

$$M_1\ddot{Z}_1 = -F_a + B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) + K_2(Z_2 - Z_1) - B_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_r) - K_1(Z_1 - Z_r)$$

DESARROLLO

Modelo sin control

El modelo de una suspensión pasiva para ¼ de vehículo consta de un sistema de doble masa, el cual se ve condicionado por dos resortes y una fricción al movimiento vertical como se muestra a continuación:



Ecuaciones diferenciales

Para obtener el modelo matemático del sistema se hace una sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre las masas. Teniendo en cuenta que la posición es la segunda derivada de la aceleración, se puede obtener la aceleración de los objetos que se encuentran en movimiento. Dicho esto, a continuación, se presentará el modelo de ecuaciones diferenciales obtenido:

$$m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x_1 - u)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Espacio de estados

A partir del modelo anteriormente propuesto, se realiza un cambió de variable a través de las siguientes igualaciones:

$$z_1 = x_1 \qquad z_2 = \dot{z}_1 \qquad z_3 = x_2 \qquad z_4 = \dot{z}_3$$

Se realiza la sustitución de x por las variables auxiliares z, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$m_1\dot{z}_2 = k_2z_3 - k_2z_1 + bz_4 - bz_2 - k_1z_1 + k_1u$$

$$m_1\dot{z}_4 = -k_2z_3 + k_2z_1 - bz_4 + bz_2$$

Después de haber sustituido dichas variables se despejan las variables auxiliares $\dot{z}_2$ y $\dot{z}_4$.

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -\left(\frac{k_2 + k_1}{m_1}z_1\right) - \frac{b}{m_1}z_2 + \frac{k_2}{m_1}z_3 + \frac{b}{m_1}z_4 + \frac{k_1}{m_1}u$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = \frac{k_2}{m_1}z_1 + \frac{b}{m_1}z_2 - \frac{k_2}{m_1}z_3 - \frac{b}{m_1}z_4$$

Una vez teniendo este sistema de ecuaciones de estados, los elementos que cuenten con la variable auxiliar z se agruparán en la matriz de estados A y los componentes que cuenten con la variable u serán introducidos en la matriz de entrada B.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & -\dfrac{b}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{b}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Mientras que, para la ecuación de salida:

$$y = x_1 \qquad \text{y} \qquad y = x_2$$

Por lo tanto:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Función de transferencia

Para el cálculo de la función de transferencia de nuestro sistema debe de realizarse una multiplicación de matrices donde la matriz $D = 0$.

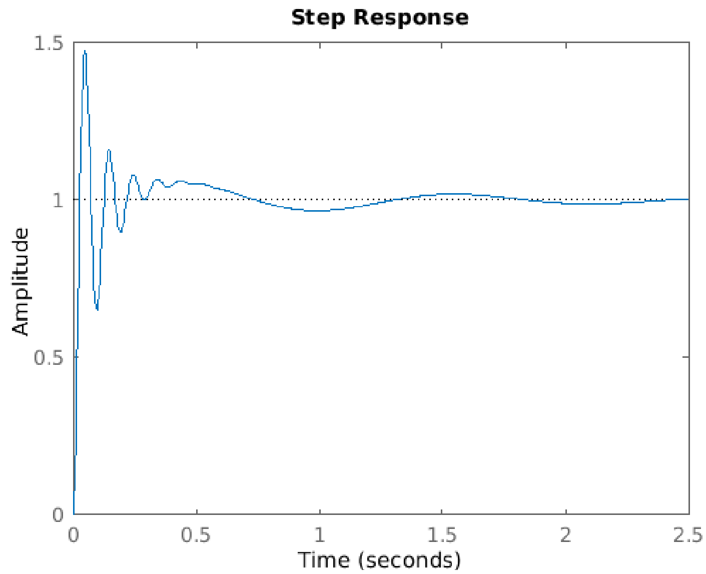
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & -\dfrac{b}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{b}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{b}{m_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que contamos con dos salidas, se obtendrán dos funciones de transferencia: una para la masa m_1 y otra para la masa m_2 como se muestra a continuación:

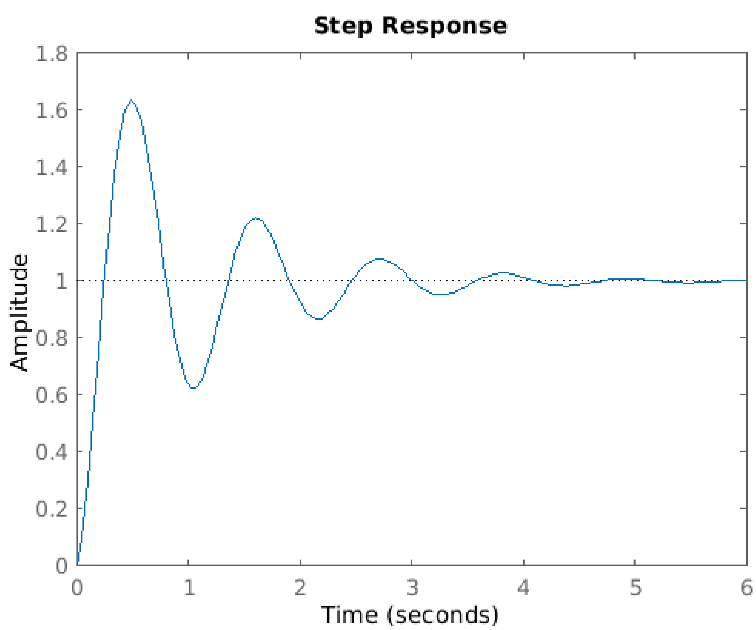
Masa 1

```
G1 =

          4000 s^2 + 8889 s + 1.422e05
  ---------------------------------------------
  s^4 + 24.44 s^3 + 4391 s^2 + 8889 s + 1.422e05
```



Masa 2

```
G2 =

                  8889 s + 1.422e05
  ----------------------------------------------
  s^4 + 24.44 s^3 + 4391 s^2 + 8889 s + 1.422e05
```

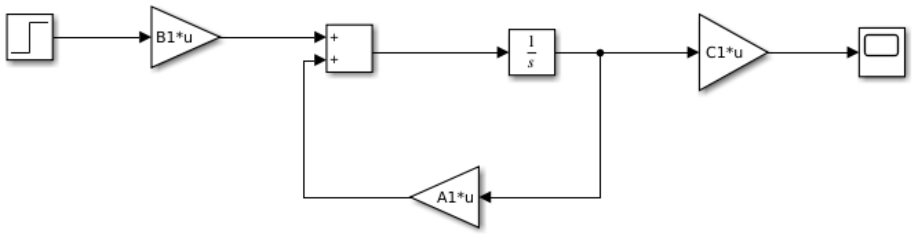


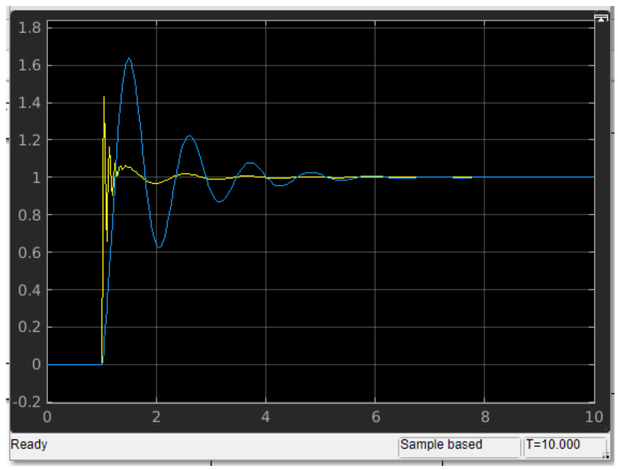
Como se pudo observar en las figuras anteriores, a pesar de que la masa 1 es quien se encuentra más cerca de la superficie sus oscilaciones se vuelven más pequeñas a partir de los 0.5s. Por su parte, las oscilaciones de la masa 2 se vuelven más estables hasta los 4s.

Diagrama de bloques

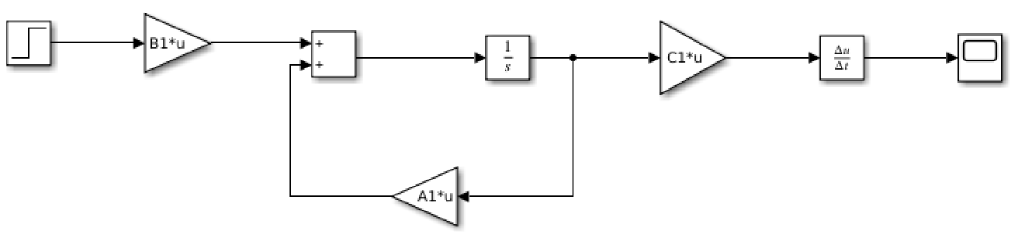
Step

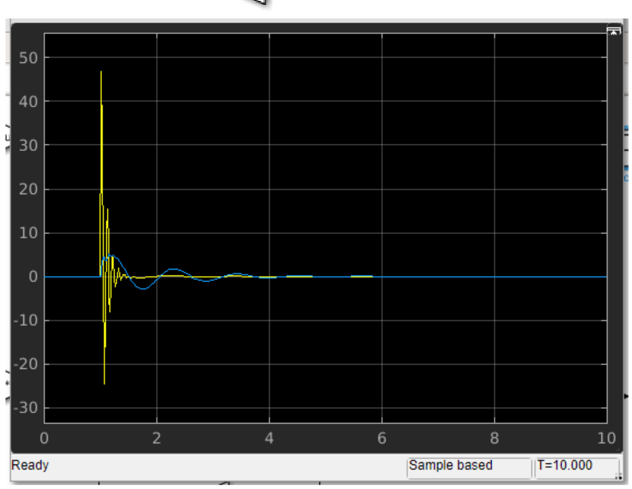
Posición:



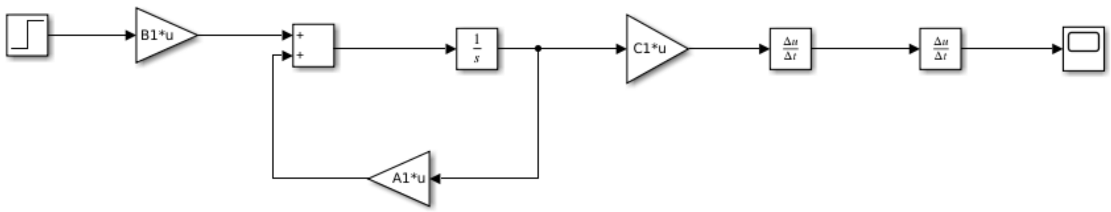


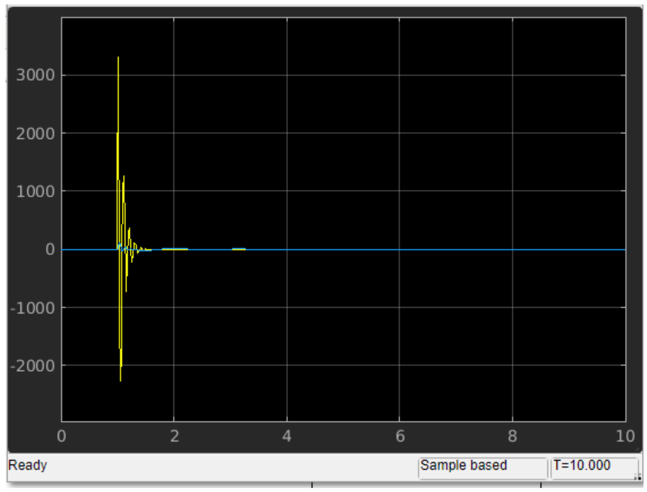
Velocidad:





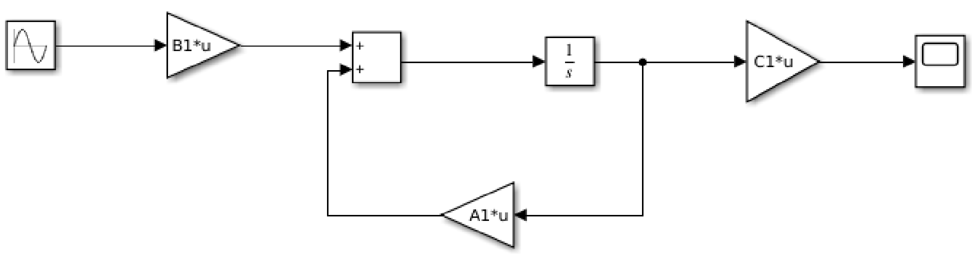
Aceleración:

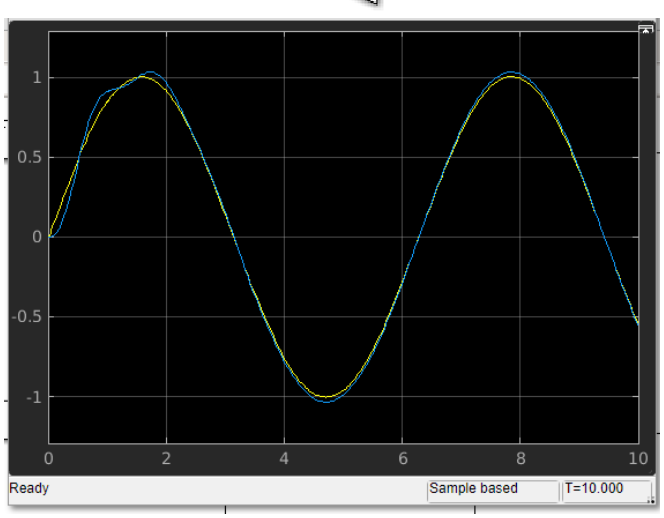




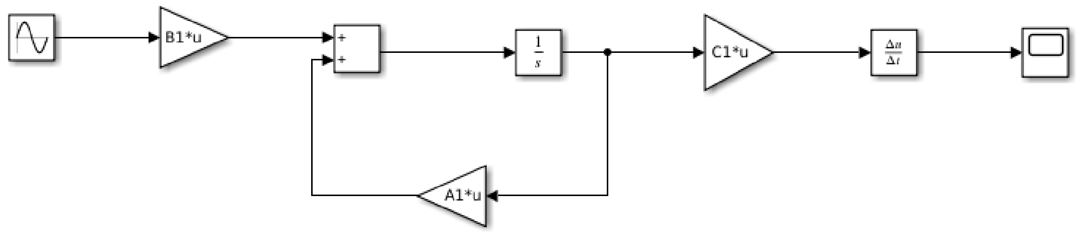
Seno

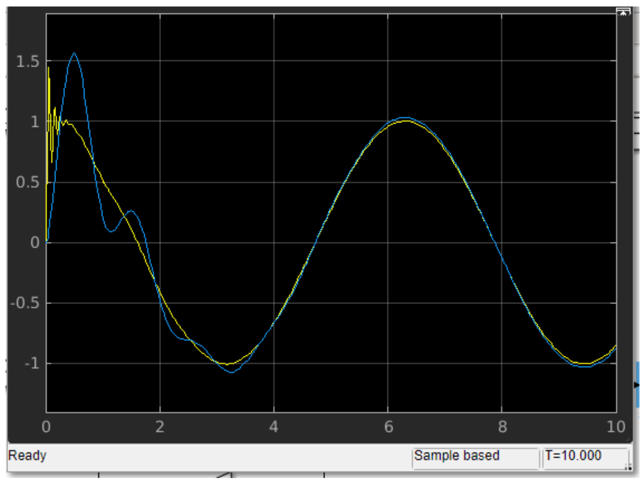
Posición:



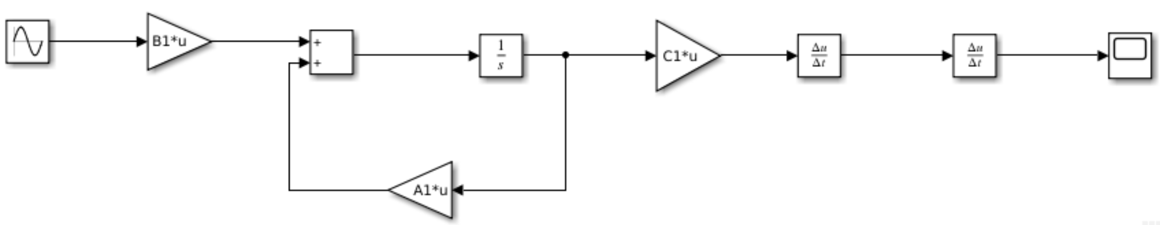


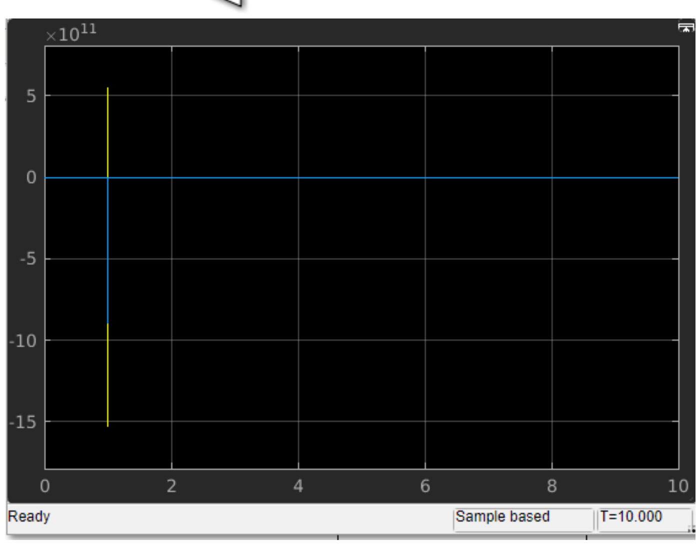
Velocidad:





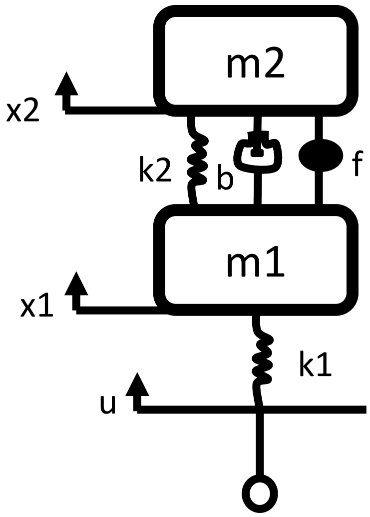
Aceleración:





Modelo con Control

A diferencia del modelo anterior, a este sistema de suspensión de ¼ de vehículo se le introduce una fuerza que será controlada; además de esto, cuenta con dos resortes, y amortiguador y dos masas como el modelo anterior. A continuación, se podrá observar el diagrama de cuerpo libre de este sistema:



Ecuaciones diferenciales

Este modelo matemático se obtiene realizando una sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre las masas. La única diferencia que existe entre este modelo y el anterior es la fuerza introducida al sistema, la cual también debe estar presente en las ecuaciones diferenciales de nuestro modelo.

$$m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x_1 - u) - f$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f$$

Espacio de estados

Basándose en el modelo propuesto, se hace un cambio de variables de x a la variable auxiliar z de acuerdo con lo siguiente:

$$z_1 = x_1 \qquad z_2 = \dot{z}_1 \qquad z_3 = x_2 \qquad z_4 = \dot{z}_3$$

Se sustituyen las variables y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$m_1\dot{z}_2 = k_2z_3 - k_2z_1 + bz_4 - bz_2 - k_1z_1 + k_1u - f$$

$$m_1\dot{z}_4 = -k_2z_3 + k_2z_1 - bz_4 + bz_2 + f$$

Una vez sustituidas dichas variables, se despeja $\dot{z}_2$ y $\dot{z}_4$.

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -\left(\frac{k_2 + k_1}{m_1}z_1\right) - \frac{b}{m_1}z_2 + \frac{k_2}{m_1}z_3 + \frac{b}{m_1}z_4 + \frac{k_1}{m_1}u - \frac{1}{m_1}f$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = \frac{k_2}{m_1}z_1 + \frac{b}{m_1}z_2 - \frac{k_2}{m_1}z_3 - \frac{b}{m_1}z_4 + \frac{1}{m_1}f$$

Estas ecuaciones forman parte de la ecuación de estado del sistema de suspensión, por lo que aquellos elementos que cuenten con la variable z serán introducidos en la matriz de estado A, y los elementos que estén acompañados por una u o una f se integrarán a la matriz de entrada B.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ f \end{bmatrix}$$

Por su parte, para la ecuación de salida:

$$y = x_1 \qquad \text{y} \qquad y = x_2$$

Entonces:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Función de transferencia

La función de transferencia de este sistema se calcula a través de una multiplicación de matrices, en la cual $D = 0$.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Al contar con una matriz B de dos columnas, se obtiene una matriz de 2x2 de la cual se deberán obtener las funciones de transferencia correspondientes a la masa 1 y a la masa 2. Debido a la dificultad de tal procedimiento, el modelo se simulará con un diagrama de bloques para obtener las gráficas de la función de transferencia.

```
G02 =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4000\,\sigma_1\,\sigma_3}{\sigma_4} & \sigma_2 - \frac{\sigma_1\,\sigma_3}{45\,\sigma_4} \\ \frac{80000\,(s+16)\,\sigma_3}{\sigma_4} & \frac{(9\,s^2 + 200\,s + 39200)\,\sigma_3}{450\,\sigma_4} - \sigma_2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = 9\,s^2 + 20\,s + 320$$

$$\sigma_2 = \frac{4\,(s+16)\,\sigma_3}{9\,\sigma_4}$$

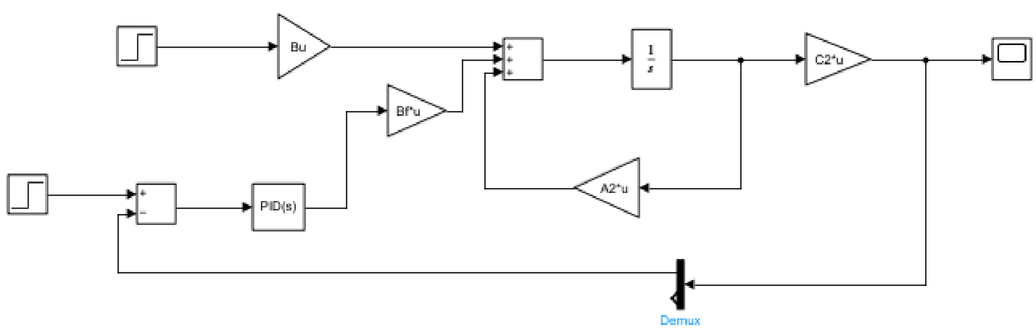
$$\sigma_3 = s^4 + \frac{220\,s^3}{9} + \frac{39520\,s^2}{9} + \frac{80000\,s}{9} + \frac{1280000}{9}$$

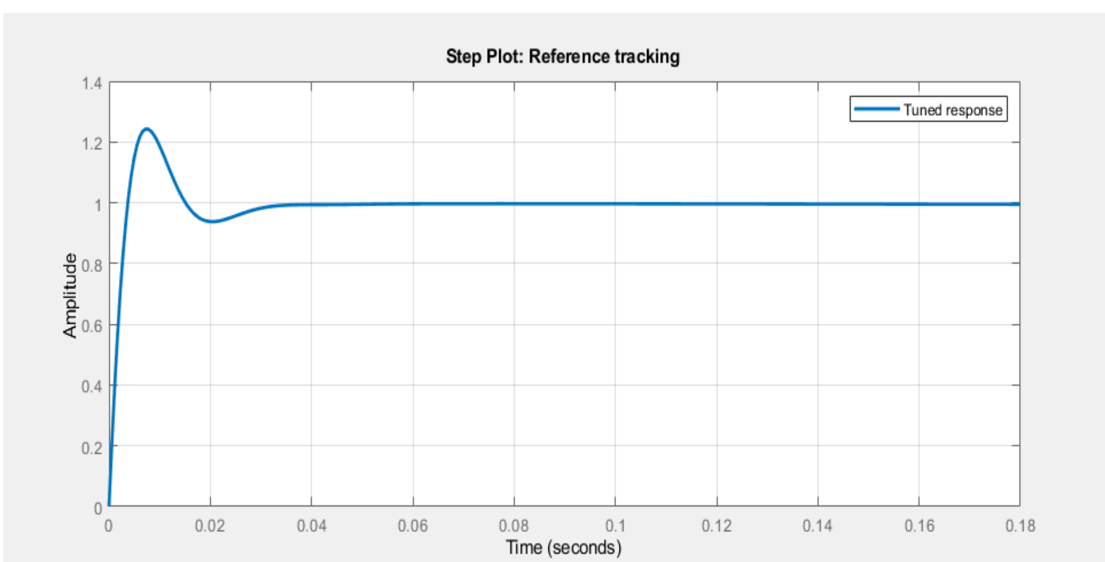
$$\sigma_4 = 9\,s^4 + 220\,s^3 + 39520\,s^2 + 80000\,s + 1280000$$

Diagrama de bloques

Step

Posición:





CONCLUSIONES

Al compara los resultados obtenidos por ambos modelos de suspensión para ¼ de vehículo, se pudo observar que las masas presentaban una menor perturbación cuando el sistema contaba con un controlador. Esto se debe a que, como se vio con las suspensiones activas, el controlador regla al actuador quien se encarga de almacenar, disipar e introducir energía al sistema de la suspensión.

A diferencia del primer modelo, el segundo modelo es capaz de brindar comodidad, maniobrabilidad y grandes niveles de control, pues se estabiliza en aproximadamente 0.03s, siendo que la masa 1 en el primer modelo seguía presentando oscilaciones en el segundo 0.5.

En un principio se realizó la modelación de las suspensiones con dos amortiguadores, pero conforme se avanzaba con los cálculos se complicaba el proceso para obtener las funciones de transferencia; por ello, y por recomendación del profesor, se decidió solo utilizar un amortiguador.

Algunos retos que se enfrentaron durante la realización de esta situación problema fue que el programa de Matlab requiere hacer uso de una librería para habilitar la opción de "Tune" para el controlador PID del segundo modelo. La descarga de esta librería alentó en gran manera a la computadora, la cual empezó a trabarse constantemente, así como tardaba mucho en obtener las gráficas dadas por los diagramas de bloques.

Referencias

Guerreo, A. (2015). *Modelado e Identificación del Sistema de Suspensión Pasivo del Robot móvil Andábata.* Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Málaga. Recuperado de https://www.uma.es/media/tinyimages/file/Memoria2.pdf

Hurel, J., Mandow, A. & García, A. (2013). *Los Sistemas de Suspensión Activa y Semiactiva: ´ Revisión.* Escuela Superior Politécnica del Litoral & Universidad de Málaga. Recuperado de https://www.elsevier.es/index.php?p=revista&pRevista=pdf-simple&pii=S1697791213000034&r=462#:~:text=La%20suspensi%C3%B3n%20semiactiva%20se%20caracteriza,cias%20altas%20con%20elementos%20pasivos.

Medina, C. (2017). *Suspensión pasiva o adaptativa*. Motor y dominio. Recuperado de https://www.motorydominio.com.mx/tips/suspension-pasiva-o-adaptativa#.YL_PQvlKjIV

Medina, C. (2017). *Suspensión semi-activa.* Motor y dominio. Recuperado de https://www.motorydominio.com.mx/tips/suspension-semi-activa#.YL_T2flKjIU