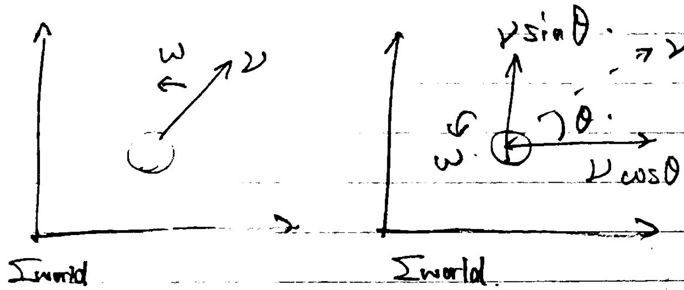
3.1. ロボットの運動と状態方程式

制御指令：ロボットに与える指令

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nu \\ \omega \end{pmatrix}$$



状態　　　　速度

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

角速度 $\omega = \dot{\theta}$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \omega_t \Delta t$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{\Delta t} \nu_t \cos(\theta_{t-1} + \omega_t t)\,dt \\ \int_0^{\Delta t} \nu_t \sin(\theta_{t-1} + \omega_t t)\,dt \end{pmatrix}$$

$\omega_t = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \nu_t \cos\theta_{t-1} \\ \Delta t \nu_t \sin\theta_{t-1} \end{pmatrix}$$

$\omega_t \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \frac{\nu_t}{\omega_t} \begin{pmatrix} \left[\sin(\theta_{t-1} + \omega_t t)\right]_0^{\Delta t} \\ \left[-\cos(\theta_{t-1} + \omega_t t)\right]_0^{\Delta t} \end{pmatrix}$$

状態 $\mathbf{x} = (x_t \;\; y_t \;\; \theta_t)^T$ についてまとめると、

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \theta_{t-1} \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \nu_t \cos\theta_{t-1} \\ \nu_t \sin\theta_{t-1} \\ \cancel{\omega_t}\,(=0) \end{pmatrix} \quad (\omega_t = 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \nu_t \omega_t^{-1} \{\sin(\theta_{t-1} + \omega_t \Delta t) - \sin(\theta_{t-1})\} \\ \nu_t \omega_t^{-1} \{-\cos(\theta_{t-1} + \omega_t \Delta t) + \cos(\theta_{t-1})\} \\ \omega_t \Delta t \end{pmatrix} \quad (\omega_t \neq 0)$$

上の式は

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$$

というように関数で表せる。

状態方程式　$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$

状態遷移関数　$f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$

3.2 ロボットの観測

シミュレータ環境に N_m 個のランドマークを置く。

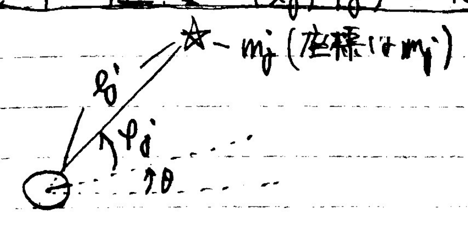
地図：全ランドマークの位置を記録

$$\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_j \mid j = 0, 1, \cdots, N_m - 1\}$$

ランドマーク $\mathbf{m}_j$ の座標は

$$\mathbf{m}_j = (m_{j,x}, m_{j,y})^T$$

$\boxed{\mathbf{m}_j = (m_{j,x}, m_{j,y})^T,\ \mathbf{x} = (x \;\; y \;\; \theta)^T \text{ から センサの値 } \mathbf{z} = (\ell_j, \varphi_j)^T \text{ の値を求める}}$



$$\ell_j = |\mathbf{m}_j - \mathbf{x}| = \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2}$$

$$\varphi_j = \mathrm{atan2}(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta$$

まとめると

$$z_j = h(x, m_j)$$

$$= \begin{pmatrix} l_j \\ \varphi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x}-x)^2+(m_{j,y}-y)^2} \\ \mathrm{atan2}(m_{j,y}-y,\ m_{j,x}-x)-\theta \end{pmatrix}$$

これは、出力方程式（観測方程式）という。

［まとめ］

制御系を

$$\begin{cases} \text{状態方程式：} x_t = f(x_{t-1}, u_t) \\ \text{観測方程式：} z_{j,t} = h_j(x_t) \end{cases}$$

と表した。

この系は時刻tで法則（fとh_j）が変わらない「時不変系」である。また、時刻が$t=0,1,\cdots$と番号付けされる「離散時間系」である。

さらに、

$$\begin{cases} x_t = A x_{t-1} + B u_t \\ z_{j,t} = C_j x_t \end{cases}$$

とは書けない「非線形系」であり

「非線形時不変離散時間系」となる。