統計学ゼミ

字が汚ないです。
スミマセン！

2023年5月17日(水)

発表担当：椿 道智(東大理Ⅰ 2年)

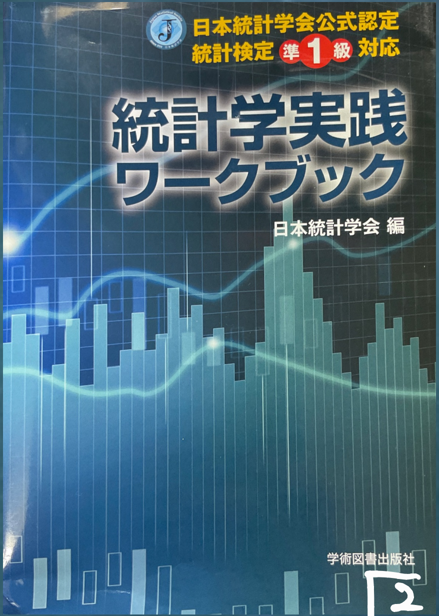
21:00-

Michitoshi Tsubaki

本日扱う内容

- 第13章　ノンパラメトリック法
- 第14章　マルコフ連鎖
- 第15章　確率過程の基礎

(p.100〜 p.124)



13 ノンパラメトリック法

Michitoshi Tsubaki

パラメトリック法とノンパラメトリック法

パラメトリック法

$\boxed{\text{前提}}$ 母集団が何らかの分布に従っている

主に正規分布

→ 前提がある分，精度が高い

例）t検定

パラメトリック法とノンパラメトリック法

ノンパラメトリック法

$\boxed{\text{前提}}$ 母集団が何らかの分布に従っている

という前提がない！

↳ その分精度は犠牲になる．

例）カイ二乗検定

どんなときにノンパラメトリック法を使うのか

1. 質的データの場合

2. 外れ値がある場合

→ 外れ値があると有意差が出にくい

3. サンプル数が少ない場合

（1群あたりの n < 30 ）← 絶対じゃない

パラメトリック法とノンパラメトリック法

相関係数

$$\frac{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$

パラメトリック	ノンパラメトリック
ピアソン Pearsonの積率相関係数 ↑ 高校でも習う相関係数 共分散 $\dfrac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ 標準偏差	母集団が正規分布に従わないとき ・Spearmanの順位相関係数 ・Kendallの順位相関係数 を使う

Spearmanの順位相関係数

2次元データ(x_i, y_i)が順位データのとき. $i=1,\cdots\cdots,n.$

$$\boxed{r_s = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2-1)}}$$

☺これは2次元データ(x_i, y_i)に対し, Pearsonの相関係数をとったのと同じ!

8

証明

$\checkmark$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$x_1 \quad x_2 \quad \cdots\cdots \quad x_n$

$y_1 \quad y_2 \quad \cdots\cdots \quad y_n$

データxを昇順にしても値は変わらない

$\rightarrow$ $x_i = i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とする

- $\sum x_i = \sum y_i = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \cdots(\text{i})$

- $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots(\text{ii})$

- $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{n+1}{2} \quad \cdots(\text{iii})$

- $S_x^2 = S_y^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{n^2-1}{12}$ …(iv)

- $\Sigma(x_i - y_i)^2 = \Sigma x_i^2 - 2\Sigma x_i y_i + \Sigma y_i^2$ (∵(iii))

∴ $\Sigma x_i y_i = \Sigma x_i^2 - \frac{1}{2}\Sigma(x_i - y_i)^2$ …(v)

ここまでが下準備

$$r_p = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n}\Sigma x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y} = \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{1}{2n}\sum(x_i - y_i)^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\left(\frac{n^2-1}{12}\right)} \quad (\because (\text{iv}), (\text{v}))$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{(n+1)^2}{4}}{\frac{n^2-1}{12}} - \frac{12}{2n(n^2-1)}\sum(x_i - y_i)^2$$

$$= 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum(x_i - y_i)^2 = r_s$$

(証明終)

11

Michitoshi Tsubaki

Kendallの順位相関係数

(x_i, y_i) と (x_j, y_j) $(i \neq j)$ に対して，

$$\begin{cases} (x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \text{ となる組の数} \to P \\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \text{ となる組の数} \to N \end{cases}$$

$$\boxed{r_k = \frac{P - N}{n(n-1)/2}}$$

← r_s，r_pとは異なる

$-1 \leq r_k \leq 1$

p.105 を python で解決する

例 5 次のような 2 次元データについて，スピアマンの順位相関係数とケンドールの順位相関係数を求めよ．

No.	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	3	2	6	4	5	7

答 定義より，スピアマンの順位相関係数は $r_s \approx 0.86$，ケンドールの順位相関係数は $P = 18, N = 3$ なので，$r_k \approx 0.71$ となる．

Michitoshi Tsubaki

p.105 を python で解決する

```
from scipy.stats import pearsonr
from scipy.stats import spearmanr
from scipy.stats import kendalltau
x = [1,2,3,4,5,6,7]
y = [1,3,2,6,4,5,7]
pearsonr(x,y)[0], spearmanr(x,y)[0], kendalltau(x,y)[0]
```

これらを使って計算できる。

```
(0.8571428571428572, 0.8571428571428573, 0.7142857142857143)
```

ウィルコクソンの順位和検定

得られた2群のデータ間の代表値に差があるか検定する

☆サンプル数が少なくて正規性が仮定できない

→観測データを順位値に置きかえてこの検定をする

量的

Michitoshi Tsubaki

ウィルコクソンの順位和検定

対応なし・順位データ・2群の差

2群を通して順位付けして，

各群で順位(値)の和をとる

P値 順位和がそれ以下となる確率

教科書の例

$A = [30, 20, 52] \rightarrow r_A = [2, 1, 6] \rightarrow w_A = 9$ /3

$B = [40, 50, 35] \rightarrow r_B = [4, 5, 3] \rightarrow w_B = 12$ /3

w_A	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	計
個数	1	1	2	3	3	3	3	2	1	1	20

$$\text{p-value} = P(W_A \leq w_A = 9) = 7/20$$

有意水準と比較

Michitoshi Tsubaki

p.101 例1をpythonでやってみる

例1 2つの群 A, B の被験者がある試験を受け，その成績 (点) が次のようになった．帰無仮説を「2つの群の成績の分布は同じ」とし，ウィルコクソンの順位和検定の片側 P-値を求めよ．

A	30	20	52	
B	40	50	35	60

3

4

```
import sys
import scipy
import scipy.stats as st
A = [30, 20, 52]
B = [40, 50, 35, 60]
st.mannwhitneyu(A, B, alternative= "less")[1]
```

```
0.2
```

片側検定なので
lessを選ぶ。
(defalt は two sided)

Michitoshi Tsubaki

問13.1

問 13.1 高血圧の治療のために，血圧を下げる効果のある治療薬 (A 薬) を開発した．A 薬の効果を従来薬 (B 薬) と比較する．いま，2 種類の治療薬の効果が等しいという帰無仮説と，A 薬のほうが効果が高いという片側対立仮説を考える．

〔1〕 血圧がほぼ等しい高血圧患者 6 人をランダムに 3 人ずつに分け，それぞれ，A 薬と B 薬のいずれかを投与した．薬の投与後の血圧測定の結果が次のようになった (単位：mmHg)．ウィルコクソンの順位和検定を用いて検定するとき，片側 P-値はいくらか．

A	135 4	127 1	131 2	7
B	132 3	144 6	138 5	14

〔2〕 別の患者のデータを用いて，同様の仮説に対するウィルコクソンの順位和検定を行ったところ，片側 P-値が 3 %未満になった．このとき，最低でも何人以上の患者がいたか．

(1)

$$P=\frac{2}{20}=0.1$$

(2)

7人 (3, 4)

$$\because\ \frac{1}{35}\approx 0.028$$

極端な例を考える．

19

Michitoshi Tsubaki

並べかえ検定

ウィルコクソンの順位和検定と帰無仮説と対立仮説は同じ!?

検定統計量が~~順位和~~ではなく、~~順位~~平均となる!?

訂正 数値

並べかえ検定

訂正

~~2群のサイズが異なるとき、~~
~~順位和検定と違った結果~~
~~になる。(サイズが同じなら…)~~

符号付き順位検定

対応あり・順位データ・2群の差

↑

順位和検定と違って，対応ありのデータを考える点に注意!!

符号付き順位検定〈手順〉

2群の差データ D

A　30 15) −15　30 21) −9

D : −15, −9, 0, 6, 11, 20, 25

「0」は除く!!

絶対値小さい順 D′

D′ : 6, −9, 11, −15, 20, 25

符号付き順位 $\tilde{R}$

$\tilde{R}$: $1, \cancel{-2}, 3, \cancel{-4}, 5, 6$

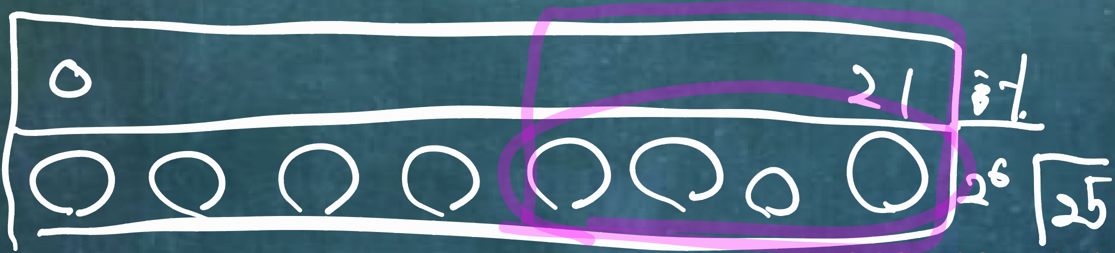
⇒ $\tilde{R}$ の正の値の和 T_+ が統計検定量

実測値 $t_+ = 1+3+5+6 = 15$

Michitoshi Tsubaki

この例の場合，1〜6の値が正か負かの 2^6 通りの T_+ が考えられる。

一方，T_+ は 0〜21（全て正）が考えられる。



☆この検定は母の分布の対称性が前提

帰無仮説「分布母の中央値=0」が正しい

T_+が $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ 程度

☆この値が片側検定の基準(less or greater)

$P(T_+ \geqq 15) = \frac{14}{64} \fallingdotseq 0.22$

26

(参) サンプルサイズ n が大きいとき

$$N\left(\frac{n(n+1)}{4},\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right)$$ と近似する.

例 3 40人の学生に対して，補習を行う前と行った後の点数の差を求めたところ，5人が0点で，正順位和 $t_+ = 420$ であった．補習を行ったことによる効果を考えるため，有意水準5%の片側検定を符号付き順位検定を用いて行え．ただし，正規分布近似を用いてよい．

答 $n = 35$ なので，平均 $= 35 \times (35+1)/4 = 315$，分散 $= 35(35+1)(2\times 35+1)/24 = 3727.5$ となる．$z = (420-315)/\sqrt{3727.5} = 1.72$ より，有意水準5%で帰無仮説は棄却できるので，この補習は効果があったといえる．

> 1.64

符号付き順位検定をpythonでやる

```
import scipy.stats as st
z = [-15, -9, 6, 11, 20, 25]
st.wilcoxon(z, alternative='greater')
```

0

片側検定

↳ 0は除かれない

```
WilcoxonResult(statistic=15.0, pvalue=0.21875)
```

※片側なので"greater"or"less"

※0を自分で除かないと上手くいかない

符号検定

考える帰無仮説と対立仮説はウィルコクソンの符号付き順位検定と同じ。

☆ただ、分布の対称性の前提が不要

統計検定量は ↙さっきは合計

正の差の個数 → T_+ とする。

T_+ は $B(n, 0.5)$ (二項分布) に従う。

例：6, −9, 11, −15, 20, 25 を考えると

$t_+ = 4$

よって、符号検定の片側p値は、

二項定理

$$P(T_+ \geqq 4) = (0.5)^6 \times \prod_{k=4}^{6} \binom{6}{k}$$

$$= 22 \times (0.5)^6 = 0.34$$

```python
import scipy.stats as st
z = [-15, -9, 6, 11, 20, 25]
st.binomtest(4, 6, p=0.5, alternative='greater')
```

nとT+を自分で(別で)カウントする!

```
BinomTestResult(k=4, n=6, alternative='greater', statistic=0.6666666666666666, pvalue=0.34375)
```

クラスカル・ウォリス検定

対応なし・順位データ、3群以上。

ウィルコクソンの順位和検定を
3群以上で使えるようにしたもの。

A	B	C	D
2	1	4	4
3	2	4	5
2	3	2	5
1	2		4
1			

$\xrightarrow[\text{変換}]{\text{順位に}}$

	A	B	C	D
	11	15	4.5	4.5
	7.5	11	4.5	1.5
	11	7.5	11	1.5
	15	11		4.5
	15			
順位和：	59.5	44.5	20	12

[30, 50, 60] => [1, 3, 5]

[40, 50, 80] => [2, 4, 6] → 1回目

[1, 4, 5]

[2, 3, 6] → 2回目

→ 棄却域がだいたい同じだったら気にしない!

デグルート & シャービッシュ 「確率と統計」

Michitoshi Tsubaki

帰無仮説は「3群以上の母集団に差がない」

対立仮説は「　　　、　　　　　ある」

この検定ではp値を求めるのにカイ二乗検定をするので、有意水準0.05の片側検定を考える。

統計検定量は

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R_A^{\,2}}{n_A} + \frac{R_B^{\,2}}{n_B} + \frac{R_C^{\,2}}{n_C}\right) - 3(N+1)$$

P34

この例では,

$$H = \frac{12}{16 \times 17}\left(\frac{59.5^2}{5} + \frac{44.5^2}{4} + \frac{20^2}{3} + \frac{12^2}{4}\right) - 3 \times 17$$

P値は.自由度 $4-1=3$ のカイ二乗分布

```
12/16/17*(59.5**2/5+44.5**2/4+20**2/3+12**2/4)-3*17
```

9.549080882352940

```
from scipy.stats import chi2
chi2.ppf(q = 0.95, df = 3)
```

7.814727903251179

ノンパラメトリック法の系統（順位データ）

2群
→ 対応あり → ウィルコクソンの順位和検定
→ 並べかえ検定　平均一量割合か、
→ 対応なし → 分布対称 → 符号付き順位検定
→ 分布~~非~~対称 → 符号検定
なくてもいい

3群以上 → 対応なし → クラスカル・ウォリス検定

Michitoshi Tsubaki

$\boxed{14}$ マルコフ過程の説明の前に

$\boxed{15}$ 確率過程の説明を先にします。

15 確率過程の基礎

Def. 確率過程

各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対し, 確率変数 X_t が与えられたとき, その確率変数の系列 $X_1, X_2, \ldots$ を確率過程という。X_n はこの過程の時点 n での状態という。

Def. 確率過程のパス

確率過程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ に対し，

実現値 $(x_t)_{t\geq 0}$ とすると，

$t \longmapsto x_t$ なる t の函数が描ける.

これを X のパス という。 ⊠

Michitoshi Tsubaki

Def. 独立定常増分

② 定常増分

$\forall t, s, h$

$X_t - X_s$ と $X_{t+h} - X_{s+h}$

が同一の分布に

従う。

$(s<t)$

Def. 独立定常増分

② 独立増分

$\forall n, \forall t_1, t_2, \dots, t_n$

$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$

が独立な確率変数。

Def. ブラウン運動

確率過程 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ が
ブラウン運動であるとは,

(i) $B_0=0$　　(ii) 独立定常増分

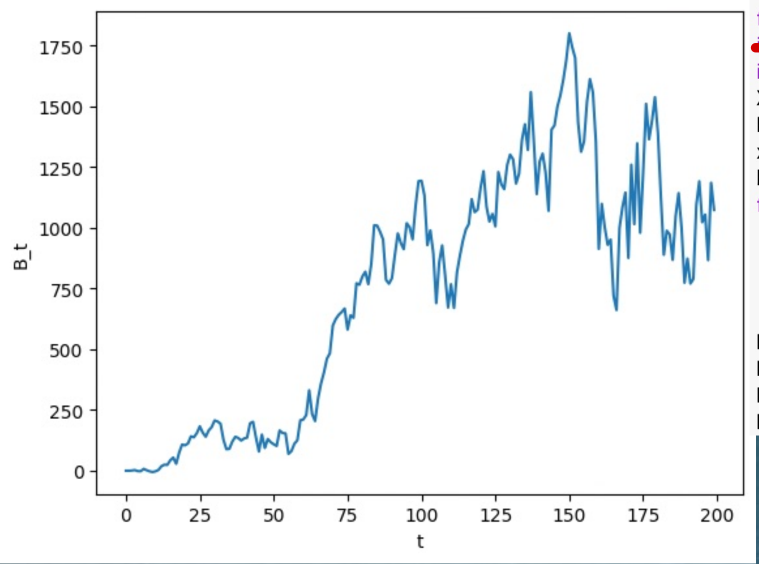
(iii) 各 $t\geq 0$ に対し, $B_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

44

Def. 標準ブラウン運動

ブラウン運動のうち、特に、
$B_t \sim N(0, t)$ のものを
標準ブラウン運動または
ウィナー過程という。　例5

標準ブラウン運動のシミュレーション




```
from scipy.stats import norm
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = [0]
B = [0]
x = 0
b = 0
for i in range(1,200):
  b += norm.rvs(loc=0, scale=i, size=1)[0]
  x += 1
  X.append(x)
  B.append(b)
plt.plot(X, B)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("B_t")
plt.show()
```


Michitoshi Tsubaki

ブラウン運動のパラメタ推定

観測データは時間に関して離散的に得られる。
最尤法でブラウン運動のパラメタを推定する。

$B=(B_t)_{t\geq 0}$ の pathを時間間隔 Δ で観測し, $B_0, B_{1\Delta}, B_{2\Delta}, \cdots, B_{n\Delta}$ から μ, σ^2 を推定する。

例7

いま，ブラウン運動の独立定常増分性より

$$Z_k = B_{k\Delta} - B_{(k-1)\Delta} \sim N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta)$$

らは独立。この対数尤度函数は，

$$\boxed{l_n(\mu, \sigma) = -\frac{1}{2}\sum \frac{(Z_k - \mu\Delta)^2}{\sigma^2\Delta} - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2\Delta) + C}$$

48

この尤度函数をmaxにすれば良いが、
$(\mu\Delta, \sigma^2\Delta)$ をパラメタとする正規分布の最尤推定量より

$$\boxed{\hat{\mu}\Delta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad \hat{\sigma}^2\Delta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2}$$

(数 p.60, 最尤法でやった)

Def. ポアソン過程

強度 λ のポアソン過程とは

(i) 各 t で確率過程 $N=(N_t)_{t\geq 0}\in\mathbb{N}$

(ii) $N_0=0$

(iii) N は独立定常増分

(iv) $P(N_t=k)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ for $^\forall t\geq 0$ $\boxed{50}$

$k=0,1,\ldots\ldots$

Michitoshi Tsubaki

ポアソン過程の性質

- 連続時間確率過程
- 自然数にしか値をとらない階段型のパスをもつ
- 稀なイベントで，発生回数が互いに独立なイベントの発生と独立な現象のモデル
- 地震・事故

Def. 計数過程

時刻tまでに起こったイベントの数を表す確率過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ を計数過程といい，以下を満たす。

(i) $\forall t,\ N_t \geq 0$

(ii) $\forall t,\ N \in \mathbb{Z}$

(iii) $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$

(iv) $s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ は

Michitoshi Tsubaki

(計数過程続き)

(i) $\forall t,\ N_t \geqq 0$

(ii) $\forall t,\ N \in \mathbb{Z}$

(iii) $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$

時刻.

$s \leq T \leq t$

(iv) $s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ は $(s, t]$ で起こったイベントの個数

計数過程→ポアソン過程

繰り返し起こるイベントのn回目の発生時刻をT_nとして.

$W_k \equiv T_k - T_{k-1}$ ($W = (W_k)_{k>0}$: 発生間隔)

Wが独立に$W_n \sim Exp(\lambda)$ならば;

計数過程はPoisson過程になる

証明.

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} W_i \quad , \quad Exp(\lambda) = Ga\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

$W_n \sim Exp(\lambda) = Ga\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ と Gamma 分布の

再生性より,

$$\boxed{T_k \sim Ga\left(k, \frac{1}{\lambda}\right)}$$

証明(続)

$$P(N_t=k)=P(T_k\leq t,\ T_{k+1}>t)$$

$$=P(T_k\leq t)-P(T_{k+1}\leq t)$$

部分積分

$$=\int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x}dx-\int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!}x^k e^{-\lambda x}dx$$

$$=\boxed{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}\quad \therefore\ N_t\sim Po(\lambda t)\ //$$

$\sqrt{56}$

Michitoshi Tsubaki

Poisson過程のパラメタ推定

強度λのPoisson過程 のパラメタλを推定する。

以下の2つのデータから推定する。

1. イベントの起こった時刻 $T_1, \cdots, T_n$ を観測。
2. 時間間隔$\Delta > 0$でデータ $N_0, N_{1\Delta}, \cdots, N_{n\Delta}$ を観測する。

Michitoshi Tsubaki

Poisson過程のパラメタ推定

1. の場合も 2. の場合も対数尤度函数をとって最尤法をすれば、

推定量 $\hat{\lambda} = \dfrac{(\text{イベントの総回数})}{(\text{観測時間})}$,

となる。$n \to \infty$ で真値 λ に収束する。

Def. 複合ポアソン過程

$N=(N_t)_{t\geq 0}$ がPoisson過程で

$(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が互いに独立同一分布に従う

確率変数列でNとも独立なとき

$$X_t=\sum_{k=1}^{N_t}U_k \quad \text{なる} \quad X=(X_t)_{t\geq 0}$$

Michitoshi Tsubaki

p.123 例題（時間があったら）

例題

問 15.1 為替市場の取引開始時刻を $t=0$，終了時刻を $t=100$ として，時刻 $t \in [0,100]$ において 1 米ドル $= X_t$ 円が $X_t = x + \sigma B_t$ なる確率過程で表されるとする．ただし，$x, \sigma > 0$ は定数で，$(B_t)_{0 \le t \le 100}$ は標準ブラウン運動とする．

〔1〕観測データ X_t $(t = 0, 1, 2, \ldots, 100)$ を用いて X_t の増分の 2 乗の平均を求めたところ，

$$V = \frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100}(X_t - X_{t-1})^2 = 0.0225$$

であった．モーメント法により σ の推定値 $\hat{\sigma}$ を求めよ．

〔2〕〔1〕よりも高頻度に X を観測し，$X_{\frac{t}{10}}$ $(t = 0, 1, \ldots, 1000)$ なるデータによって同様に増分の二乗和を求めたところ，

$$V_1 = \frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}(X_{\frac{t}{10}} - X_{\frac{t-1}{10}})^2 = 0.00625$$

であった．これをもとにして，モーメント法により σ の推定値 $\hat{\sigma}$ を求めよ．

問 15.2 ある工場において，製品の品質検査に用いる機械は，ベルトコンベアで製品を運びながら確率 $q \in (0,1]$ の割合で不良品を発見するという（つまり，確率 $(1-q)$ で不良品を見逃す）．この機械のよさを確かめるために，300 分間で流れてくる製品をすべて人の手で丁寧に検査したところ，558 個の不良品が発見された．このデータの一部をとり，不良品を 100 個みつけるまでの時間（横軸）と累積数（縦軸）をプロットしたのが図 15.2 である．不良品の発生は他の製品の出来とは独立であるとして，以下の問いに答えよ．

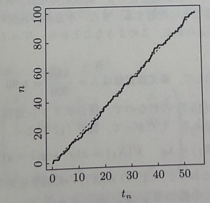


図 15.2 不良品を 100 個みつけるまでの時間（横軸）と累積数（縦軸）のグラフ．破線は始点 $(0,0)$ と終点を結んだ直線．

〔1〕図 15.2 の結果をみて，t 分間の不良品の数 N_t は強度 λ のポアソン過程に従うと考えた．この妥当性について論ぜよ．

〔2〕〔1〕の仮定のもとで，λ の最尤推定値を求めよ．

〔3〕時刻 t までの機械の不良品発見数を X_t とすると，N_t と独立な平均 q のベルヌーイ確率変数 U_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を用いて，$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_k$ と書けることに注意する．このとき，X_1 の平均，分散を求めよ．

〔4〕この機械で不良品の発見数を調べたところ，1 分間あたりの平均が 1.53 個であった．モーメント法により，q の推定値を求めよ．

60

Tsubaki

15.1 ただの和なので。

(1) $\Delta = 1$

$V = 0.0225$

$\hat{\sigma} = \sqrt{V} = 0.15$

(2) 観測の頻度を10倍細かく

$\Delta = \frac{1}{10}$

$\hat{\sigma}^2 \Delta = 0.0625$

$\hat{\sigma} = \sqrt{0.0625} = 0.25$

15.2.

(1) 不良品、地震とか事故、稀なイベント の個数はPoisson分布従う。

(2) $\frac{558コ}{300分} = \hat{\lambda} = 1.86$

(3) 複合ポアソン過程.

$E(U_k) = g, \quad V(U_k) = g(1-g)$

$E[X_1] = \lambda g,$

$V[X_1] = \lambda[g^2 + g(1-g)] = \lambda g.$

例) 不良品の発見個数が1台あたり1.534個

○(3) $E[x_i] = \lambda g$

$$\hat{\lambda}\hat{g} = 1.53$$

○(2) $\hat{\lambda} = 1.86$

$$\hat{g} = \frac{1.53}{1.86} = 0.8226$$

Michitoshi Tsubaki

$\boxed{14}$ マルコフ連鎖

Def. マルコフ性

次の状態は現在の状態のみに依存し，現在より前の状態には依存しない

$$P(X_{n+1} \mid X_n, \cdots, X_0) = P(X_{n+1} \mid X_n)$$

をマルコフ性という.

Def. マルコフ連鎖・状態空間

マルコフ性をもつ確率過程 X を

マルコフ連鎖という。X_n がとる

値の空間（集合）のことを状態空間

という。

Def. 推移確率

$i \quad i+1 \quad i+2 \cdots\cdots j$

m

i から m ステップで j に推移する確率

$$\boxed{p^m(i,j) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)}$$

状態 j 状態 i

今 m ステップ後

X の m ステップ推移確率という。

$p_m^{(n)}$

遷移

65

Michitoshi Tsubaki

Def. 斉次的

$p_{m}^{(m)}(i,j)$ が時点 n に依らない

$\downarrow$

マルコフ連鎖 X は斉次時

応用上は状態空間 S が

$S=\{x_1, x_2, \dots\}$ のように離散的な

状態空間をもつ斉次マルコフ連鎖

が重要 $\longrightarrow$ S：有限なら…

$\Longrightarrow$ 有限マルコフ連鎖

Def. 推移確率行列

1から一に推移確率

起

$$Q(m) = \begin{pmatrix} p^m(1,1) & p^m(1,2) & \cdots & p^m(1,N) \\ p^m(2,1) & p^m(2,2) & \cdots & p^m(2,N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p^m(N,1) & \cdots & \cdots & p^m(N,N) \end{pmatrix}$$

mステップで

終

へから1に推移する確率.

Def. 確率行列

推移確率行列のように，

任意の行成分の和が 1 で

任意の成分が 0 以上な行列

→ 確率行列 という

Eg. 天気の遷移確率

$$S = \{1.\text{雪},\ 2.\text{くもり},\ 3.\text{晴れ}\}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\qquad \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Q. $\begin{cases} \text{日 くもり} \\ \text{水 雪} \end{cases}$ となる確率は?

× 雪<晴.

答え

$$P(X_2=1 \mid X_0=2)$$

$$= p(2,1)p(1,1)+p(2,2)p(2,1)+p(2,3)p(3,1)$$

$$= 0.2\times 0.4+0.5\times 0.2+0.3\times 0.1$$

$$= 0.08+0.10+0.03$$

$$= \underline{\underline{0.21}}$$

と求まる。

7

Eg.をpythonでシミュレーション

```
import numpy as np
import random as rm
states = ["rainy", "cloudy", "sunny"]
transitions = [["RR", "RC", "RS"], ["CR", "CC", "CS"],["SR", "SC", "SS"]]
T = [[0.4, 0.6, 0], [0.2, 0.5, 0.3],[0.1, 0.7, 0.2]]
def weather_forecast(n_days, weather_today="cloudy"):
    weather_list = [weather_today]
    n = 0
    prob = 1.0
    while n != n_days:
        if weather_today == "rainy":
            change = np.random.choice(transitions[0], p=T[0])
            if change == "RR":
                prob = prob * T[0][0]
                weather_list.append(states[0])
            elif change == "RC":
                prob = prob * T[0][1]
                weather_list.append(states[1])
            else:
                prob = prob * T[0][2]
                weather_list.append(states[2])
        elif weather_today == "cloudy":
            change = np.random.choice(transitions[1], p=T[1])
            if change == "CR":
                prob = prob * T[1][0]
                weather_list.append(states[0])
            elif change == "CC":
                prob = prob * T[1][1]
                weather_list.append(states[1])
            else:
                prob = prob * T[1][2]
                weather_list.append(states[2])
        else:
            change = np.random.choice(transitions[2], p=T[2])
            if change == "SR":
                prob = prob * T[2][0]
                weather_list.append(states[0])
            elif change == "SC":
                prob = prob * T[2][1]
                weather_list.append(states[1])
            else:
                prob = prob * T[2][1]
                weather_list.append(states[2])
        n = n + 1
    return weather_list
weather_forecast(n_days = 2)
```

['cloudy', 'cloudy', 'sunny']
とか出てくる。

Michitoshi Tsubaki

Def. 状態確率ベクトル

X_n に対して $p_n(k) \equiv P(X_n = k)$ $(k \in S)$

$$\pi_n = (p_n(1), p_n(2), \cdots, p_n(N))$$

なる N 次元行ベクトルを時点 n における X の状態確率ベクトルという

π_0 : X の初期分布

Thm.

(1) $^\forall l, m$, $\boxed{\begin{aligned} Q(m+l) &= Q(m)Q(l) \\ &= Q^m Q^l \end{aligned}}$

∵ $p_{m+l} = \sum_{k=1}^{N} p_m(i,k)\, p_l(k,j)$

(行列の積の成分)

阿

Michitoshi Tsubaki

Thm.

(2) $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\boxed{\pi_n = \pi_0 Q^n}$$

$\because$ $p_n(k) = \sum_{i=1}^{N} p_{n-1}(i)\, p(i, k)$

$\Rightarrow \pi_n = \pi_{n-1} Q \quad (n = 1, 2, \cdots)$ ∎

Def. 定常分布

π_n について，$n \to \infty$ としたときの極限 π が

$\pi \equiv \lim_{n \to \infty} \pi_n$ と存在することを考える．

$\pi = Q\pi(\ )$

このとき，$\pi = \pi Q$　$(\ \ ) = (\ \ )Q$

i.e. π : Q の固有値 1 の左固有ベクトル

つまり，仮にマルコフ連鎖 X の初期分布が π なら 1回の推移で状態確率が変化しない。

→ 1回 π に収束したら状態確率は変わらない。

Def. 定常分布

このように、

$$\pi_n = \pi Q^n = \pi Q^{n-1} = \cdots = \pi Q = \pi$$

なる π を定常分布といい、

初期分布が定常分布であるような

マルコフ連鎖を定常マルコフ連鎖という。

178

Michitoshi Tsubaki

有限マルコフ連鎖のパラメタ推定

推移確率行列Qが未知パラメタθに依存

$$Q_\theta = \left(p_\theta(i,j)\right)_{1\le i,j\le N}$$

Xに関する観測データ$x_0, x_1, \cdots, x_n$が与えられたとき，その実現確率は

$$\boxed{p_\theta(x_0) = \prod_{j=1}^{n} p_\theta(x_{j-1}, x_j)}$$

/179

最尤法で推定する。

$\prod$ なので $\ln$ とると $\sum$ になる。

対数尤度函数は、

$$l_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \ln p_\theta(x_{j-1}, x_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l_n(\hat{\theta}) = 0$$

$\sqrt{80}$

Michitoshi Tsubaki

ご静聴ありがとうございました.

Michitoshi Tsubaki

以下時間が
余ったら扱う。

Michitoshi Tsubaki

例題

問 14.1 サイコロの出目によって 2 つのマスを移動する駒を考える．マス目には 1, 2 と番号が振ってある．駒が 1 のマスにあるとき，サイコロを投げ 6 の目が出たらその場に留まり，それ以外の目が出た場合は 2 のマスに移る．また，2 のマスにあるとき，偶数の目が出たらその場に留まり，奇数の目が出たら 1 のマスに移るとする．時点 $n = 0, 1, \ldots$ における駒の位置を X_n，初期状態を $X_0 = 1$ として以下の問いに答えよ．

〔1〕マルコフ連鎖 $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ の推移確率行列を求めよ．

〔2〕時点 n における状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi}_n$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_n$ を求めよ．

問 14.2 状態空間 $S = \{1, 2, 3\}$ とするマルコフ連鎖 $X = (X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ を次のように定める．中身のみえない箱のなかに 3 枚のカードがあり，それぞれ a_1, a_2, a_3 の数字が 1 つずつ書かれている．ただし，$a_1 < a_2 < a_3$ とする．X が状態 i にあるときにカードを 1 枚ランダムにとり出し，とり出したカードが a_i であれば状態 i にとどまる．カードが $a_j\ (j \neq i)$ であったときは，確率 $c_{ij} = \min\{j/i, 1\}$ で状態 j に推移し，確率 $1 - c_{ij}$ で i にとどまる．カードは引くたびに箱のなかへ戻すとして，以下の問いに答えよ．

〔1〕マルコフ連鎖 X の推移確率行列 Q を求めよ．

〔2〕初期分布を $\boldsymbol{\pi}_0 = (0, 0, 1)$ とするとき，2 回目の状態確率 $\boldsymbol{\pi}_2$ を求めよ．

〔3〕定常分布は存在するか．あればそれを求めよ．

問 14.3 A 氏は家と職場の往復で雨が降っていないときに傘を持ち歩くのが面倒だったので，家と職場の両方に傘を置くことにした．家を出るとき，または職場から帰るとき，雨が降っていてそこに傘があれば傘を持っていき，なければ仕方なく濡れて行くことにする．以下，n 回目 $(n \geq 1)$ の移動の出発時にその場所にある傘の本数を X_n とする．また，降雨は移動ごとに独立であり，その確率は一定値 $\theta \in (0, 1)$ であるとする．A 氏は，はじめに家と職場に 1 本ずつ傘を置き，この生活をスタートすることにした．

〔1〕$X = (X_n)_{n=1,2,\ldots}$ はどのようなマルコフ連鎖になるか．状態空間 S と初期分布 $\boldsymbol{\pi}_0$，および推移確率行列を求めよ．

〔2〕8 回目までの移動記録をつけたところ，$(X_1, \ldots, X_8) = (1, 1, 2, 0, 2, 1, 1, 1)$．この観測から得られる θ の最尤推定値を求めよ．

〔3〕十分な時間が経過したのち，出発時に傘がない確率の推定値を，〔2〕で得られた最尤推定値を用いて求めよ．

183

Michitoshi Tsubaki

マルコフ性をもたせる.

10.1 マルコフ決定過程

最初に，扱う問題について定式化しておきましょう．本節は抽象的な話になるので，先に実装を見てから読むのでもかまいません．

10.1.1 状態遷移と観測

ロボットが時刻 $t=0$ に，ある姿勢 $\boldsymbol{x}_0$ から出発して，あるゴールを目指すこととします．ゴールに着く時刻は試行ごとに違いますが，とりあえず T と表しておきましょう．ロボットの動きは前章までの状態遷移モデル

$$\boldsymbol{x}_t \sim p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{u}_t) \qquad (t = 1, 2, \dots, T) \tag{10.1}$$

に従うこととします．ところで，我々はこの状態遷移モデルをこれまで何気なく使ってきましたが，式 (10.1) の条件を見ると分かるように，このモデルでは，$\boldsymbol{x}_{t-1}$ さえ分かっていれば，$\boldsymbol{x}_t$ の統計的な性質が $\boldsymbol{x}_{t-2}$ 以前の状態に左右されません．また，$\boldsymbol{x}_{t-1}$ より前のことが以後起こることに一切影響しないので，エージェントも $\boldsymbol{u}_t$ を決めるときに $\boldsymbol{x}_{t-1}$ より前を考慮する必要がありません．このような性質をもつ系（確率過程）は「**マルコフ性**をもつ」と表現されます（⇒ 問題 10.3）．マルコフ性がないと考えられる系にも，変数を工夫することでマルコフ性をもたせることができます．例えば，人間の徒歩での移動を考えると，$\boldsymbol{x}_{t-2}$ 以前にさんざん歩いて疲れた場合とそうでない場合では，$\boldsymbol{x}_{t-1}$ 以降の状態遷移に違いが出るのでマルコフ性が成り立たないように思えます．しかし，この場合には「疲労度」という変数を加えて状態空間を拡張すると，系がマルコフ性をもつようになります．

184

Michitoshi Tsubaki

Poisson 過程 $N(t)$ をは階段状の関数である．これを t で微分すると，デルタ関数列になる（図 1 参照）．

$$\text{Poisson 増分} \quad : \quad g(t) = \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

$$\text{Poisson インパルス} \quad : \quad h(t) = \frac{dN(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} g(t)$$

Poisson 分布の定義から，ある時間間隔 T の間に k 個の事象が起きる確率を次式のように表すことができる．

$$P(k) = \frac{\lambda T}{k!} e^{-\lambda T}$$

ポアソン分布を連続時間確率変数と見て，密度関数を $p(k)$ とおくと，次式のように表すことができる．

$$p(k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \delta(k-n)$$

これを用いると，期待値を計算することができる．

$$\begin{aligned}
E(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} kp(k)dk = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda T e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda T e^{-\lambda T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda T e^{-\lambda T} e^{\lambda T} = \lambda T
\end{aligned}$$