



Proyecto métodos numéricos

# Implementación de Markov Chain Monte Carlo para la inferencia de los parámetros de los modelos $\Lambda$ CDM y $w$ CDM

13.06.2025

Luis Clemente Michicol Martinez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

## Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo cosmológico</b>	<b>1</b>
2.1. Ley de Hubble .....	1
2.2. Coordenadas comoviles, coordenadas propias y factor de escala .....	2
2.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) .....	2
2.4. Evolución de un universo plano .....	6
2.5. Corrimiento al rojo cosmológico .....	7
<b>Bibliografía</b>	<b>9</b>

## 1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es la implementación de métodos bayesianos al área de cosmología, siendo un ejercicio meramente académico, que forma parte del proyecto de métodos numéricos avanzados, pero sin quitar de vista la importancia y la aplicación que tienen estos métodos estadísticos.

En concreto, se centra la aplicación de cadenas de markov, o bien, Markov Chain Monte Carlo (MCMC por sus siglas en inglés), de manera que a lo largo del presente trabajo se desarrollaran tanto la teoría, como las herramientas que se utilizan.

De forma que la idea principal, se trata de inferir parámetros del modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM, usando los datos de la luz que se detecta, esta luz no es de objetos cosmológicos indiscriminados, sino que se tratan de objetos cosmológicos concretos llamados **candelas estándar**, los cuales son de utilidad por el tipo de luz que emiten, con base en estos datos, y junto con el modelo, se determina que tan viables son los parámetros de los modelos.

## 2. Modelo cosmológico

### 2.1. Ley de Hubble

Hubble y Humason, hicieron observaciones, las cuales les ayudaron a estimar dos importantes resultados

1. Distancia de decenas de galaxias.
2. Uno de los resultados que se utilizaran más adelante, es la proyección de su velocidad a lo largo de la línea de visión conocida como «*velocidad de recesión*», la cual se mide partiendo del corrimiento Doppler de la luz emitida por estrellas, algo importante a destacar es que se percataron de que entre más lejana es una galaxia, mayor es la velocidad de recesión. Además, la distancia y velocidad de recesión son proporcionales, y más aún la constante de proporcionalidad es la misma para todas las galaxias, de esta manera llegaron a lo que se conoce como «**Ley de Hubble**»

$$v_r = H_0 d_L \quad (1)$$

Donde

- $H_0 \simeq 70 \text{ km/sMpc}^{-1} \rightarrow$  corresponde a la constante de Hubble.
- $d_L \rightarrow$  corresponde a la distancia luminosa.

## 2.2. Coordenadas comoviles, coordenadas propias y factor de escala

- *Coordenadas comoviles*
  - Etiqueta de la posición de las partículas, donde dichas partículas son galaxias, también se conoce como coordenadas de un **observador comovil**.
- *Observador comovil*
  - En un espacio curvo, es aquel que viaja anclado a partículas de prueba, la cual está aislada de otras partículas, la cual se mueve a lo largo de geodésicas de la métrica del espacio curvo, en las geodésicas de un universo homogéneo e isótropo, en expansión, sus coordenadas están *ancladas* a la expansión.

Algo importante a mencionar, es que cuando hablamos de coordenadas comoviles las etiquetas no cambian, sin embargo, en el caso de las coordenadas físicas las etiquetas de los puntos sí cambian, a estas también se les conoce como coordenadas propias y están dadas por

$$r = a(t)x \quad (2)$$

Donde:

$a(t) \rightarrow$  es el factor de escala, que es una tasa de crecimiento de las distancias.

Partiendo de la ecuación (2), se puede deducir la ley de Hubble, únicamente se hace la derivada respecto al tiempo, y al hacerla queda lo siguiente.

$$v_r = \dot{r} = \frac{\dot{a}}{a}ax + a\dot{x} \quad (3)$$

donde  $r$  corresponde a la posición de una galaxia aislada, además se puede ignorar el segundo término del lado derecho, adicional a esto se puede definir la tasa como  $H$  es decir  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ , lo cual da como resultado.

$$v_r = H(t)r \quad (4)$$

Donde (4) corresponde a la **velocidad de recesión**.

## 2.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

La métrica de LFRW representa la geometría que mejor se adapta al principio cosmológico y las observaciones de la expansión del universo, además esta se puede asociar a un elemento diferencial de línea que proporciona una forma de calcular distancias infinitesimales en dicho espacio, dicho lo anterior, esta métrica se representa de la siguiente manera.[1]

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (5)$$

Como previamente ya se mencionó, el factor de escala se representa como  $a(t)$ , por otra parte, la coordenada radial  $r$  no tiene unidades, además  $k$  representa el tipo de curvatura del espacio, el cual puede adquirir los siguientes valores.

$$k = \begin{cases} +1 & \text{Universo cerrado} \\ 0 & \text{Universo plano} \\ -1 & \text{Universo abierto} \end{cases} \quad (6)$$

Los valores de (6) son independientes del tamaño del universo, además si nuestro universo es plano o abierto, puede ser infinitamente grande, sin embargo, para el caso en el que  $k = +1$ , se puede mostrar que la métrica de LFRW corresponde a la métrica de una esfera.

Por otra parte, si consideramos que el universo se rige por las ecuaciones de Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (7)$$

Donde  $R_{\mu\nu}$  corresponde al *tensor de Ricci*,  $R$  se le conoce como *escalar de Ricci*,  $T_{\mu\nu}$  es el *tensor de energía-momento*, finalmente  $g_{\mu\nu}$  es la *métrica*.

Además, el tensor de energía-momento tiene la forma siguiente.

$$(T^\mu_\nu) = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P) \quad (8)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  la presión del fluido, de manera que el universo se puede modelar como un fluido perfecto.

Por otra parte, las componentes no nulas del tensor de Ricci están dadas de la siguiente manera.

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (9)$$

$$R_{ij} = -\left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij} \quad (10)$$

$$R = -6\left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (11)$$

El cual este último corresponde al escalar de Ricci (11), ahora si consideramos la componente  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  de la ecuación de Einstein (7), en la cual se sustituyen los valores de (9), (11), y además de (8), se nota que la componente  $(0, 0)$  del tensor de energía-momento corresponde a  $\rho$ , es decir.

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi T_{00} \quad (12)$$

$$-\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{6}{2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi\rho \quad (13)$$

Simplificando la ecuación anterior, se obtiene

$$3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi\rho \quad (14)$$

O bien escrito de otra manera.

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi\rho \quad (15)$$

Recordando como definimos a  $H$  en Sección 2.1 (ver página 2), la ecuación (15) se puede reescribir de la siguiente manera.

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi\rho \quad (16)$$

Tanto como (15) y (16) corresponden a la *ecuación de Friedmann*.

Ahora bien, además a esto, la ecuación (16) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \quad (17)$$

Donde de la ecuación (17) el término  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}$  es la *densidad crítica*, se puede ver que esta *densidad crítica* dictamina el valor de la densidad de energía  $\rho$ , para que, el lado derecho de (17) se anule, y de esa forma  $k = 0$ , esto implica que se trate de un espacio-tiempo plano.

Es necesario agregar un concepto llamado *parámetro de densidad o abundancia*  $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ , lo cual permite reescribir la ecuación (17) de la siguiente manera.

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1 \quad (18)$$

Algo importante a considerar, y recordando el resultado de lo que significa  $k$  (6), la anterior ecuación entonces nos da la relación que hay entre la curvatura de espacio y el contenido del universo que esta parametrizado por  $\Omega$ .

Además de (17) la ecuación de Friedmann se puede reescribir, de tal forma que se obtiene lo siguiente.

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - k \quad (19)$$

La anterior ecuación nos da la idea, si  $\rho$  es positiva, la expansión del universo está dada por el crecimiento de  $a$  con el tiempo, y este solo puede cesar si  $k = 1$ . Por otra parte ya que el espacio-tiempo de FRW es homogéneo, las componente espaciales de las ecuaciones de campo de Einstein (7), en la métrica de FRW (5) conducen a la misma ecuación que es la siguiente.<sup>1</sup>

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P) \quad (20)$$

De la ecuación (20) se nota que si  $\rho + 3P < 0$  (tal desigualdad se conoce como *la condición fuerte de energía*), nos indica que la expansión del universo se desacelera; sin embargo, de acuerdo a observaciones de supernovas en galaxias lejanas, se ha concluido que el universo se expande aceleradamente lo cual nos lleva a que la condición fuerte de energía debe violarse para predecir las observaciones, esto está representado por  $P > -\rho/3$ , donde además la ecuación de estado está representada por  $P = \omega\rho$ .

Lo anterior implica que, independientemente del fluido que genere la expansión acelerada del universo, de manera general, la ecuación de estado debe cumplir la siguiente condición.

$$\omega < -\frac{1}{3} \quad (21)$$

Ahora es necesario abordar la *ecuación de continuidad*, la cual se obtiene al aplicar la derivada covariante asociada a la métrica, también a esto se le conoce como conservación de energía en el universo de FRW.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (23)$$

<sup>1</sup>Para ver con mayor detalle el desarrollo se puede consultar [1], que es de donde se ha sacado la mayor cantidad de información

Ahora usando la definición de  $H$  Sección 2.1 (ver página 2) y considerando la ecuación de estado, factorizando la densidad  $\rho$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \quad (24)$$

Al integrar la anterior expresión se obtiene lo siguiente.

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (25)$$

Para distintos contenidos del universo se obtiene lo siguiente.

$$\begin{cases} \text{materia: } \omega_m = 0, & \dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \rightarrow \rho_m \sim a^{-3} \\ \text{radiación: } \omega_r = \frac{1}{3}, & \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \rightarrow \rho_r \sim a^{-4} \\ \text{energía oscura: } \omega_\Lambda = -1, & \dot{\rho}_\Lambda = 0 \rightarrow \rho_\Lambda = \text{cte} \end{cases} \quad (26)$$

2

## 2.4. Evolución de un universo plano

De la ecuación (16), se puede ver que si consideramos un universo plano, es decir,  $k = 0$ .

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho \quad (27)$$

Ahora si dividimos la ecuación de Friedmann en un universo plano (27) por  $H_0^2$ , se obtiene lo siguiente.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi}{3H_0^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{0,c}} \quad (28)$$

Reexpresar la ecuación de aceleración.

$$\frac{\ddot{a}}{aH_0^2} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{H_0^2} (3\omega + 1) = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_{0,c}} (3\omega + 1) \quad (29)$$

Al suponer que el tipo de contenido del universo no es único, sino que está distribuido, en tres *especies* distintas de fluidos perfectos.

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda \quad (30)$$

donde  $\rho_{0,i}$  denota la densidad de energía actual correspondiente a la especie  $i$ , con  $i = r, m, \Lambda$ , y de esta manera se considera la normalización  $a_0 = 1$

---

<sup>2</sup>Esto se puede ver con más detalle en las notas de la Dra. Ana Aurelia



$$\begin{aligned}\frac{H^2}{H_0^2} &= \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{0,c}} = \frac{\rho_{0,r}}{\rho_{0,c}} a^{-4} + \frac{\rho_{0,m}}{\rho_{0,c}} a^{-3} + \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,c}} \\ &= \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}\end{aligned}\quad (31)$$

### 2.5. Corrimiento al rojo cosmológico

Este fenómeno físico se produce por la velocidad de recesión entre dos galaxias, el cual es el corrimiento al rojo por el efecto Doppler, es decir, la longitud de onda de la luz recibida por fuentes en otras galaxias aumenta debido a la velocidad relativa de recesión.

Si consideramos una longitud de onda  $\lambda_{\text{em}}$  emitida hacia un observador localizado en alguna galaxia, este mide  $\lambda_{\text{obs}}$ , debido a que las galaxias receden entre sí, la longitud de onda incrementa por  $\Delta\lambda$  entonces se tiene que  $\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} + \Delta\lambda$ , con lo cual se tiene lo siguiente.

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = 1 + z \quad (32)$$

si dividimos lo anterior por  $\lambda_{\text{em}}$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} &= \frac{\lambda_{\text{em}} + \Delta\lambda}{\lambda_{\text{em}}} \\ &= 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{em}}} = 1 + z\end{aligned}\quad (33)$$

Ahora consideramos lo siguiente.

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a(t_0)}{a(t_{\text{em}})} = \frac{1}{a} \quad (34)$$

De esto entonces se obtiene lo siguiente.<sup>3</sup>

$$\frac{1}{a} = 1 + z \quad (35)$$

Dado lo anterior y con la ecuación (31), hay dos maneras de escribir la ecuación de Friedmann paramétrica, en términos de  $a$  y en términos del corrimiento al rojo

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{0m} a^{-3} + \Omega_{0r} a^{-4} + \Omega_{0\Lambda}} \quad (36)$$

o bien.

---

<sup>3</sup>  $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{em}}}$  es el corrimiento al rojo cosmológico

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0\Lambda}} \quad (37)$$

En la Figura 1 se presenta la solución a la ecuación de Friedmann considerando el factor de escala, además considera que  $H_0 = 0$ , con el fin de que la ecuación se adimensional, algo a mencionar es que se uso el metodo de Runge-Kutta de orden 4 o bien (RK4)

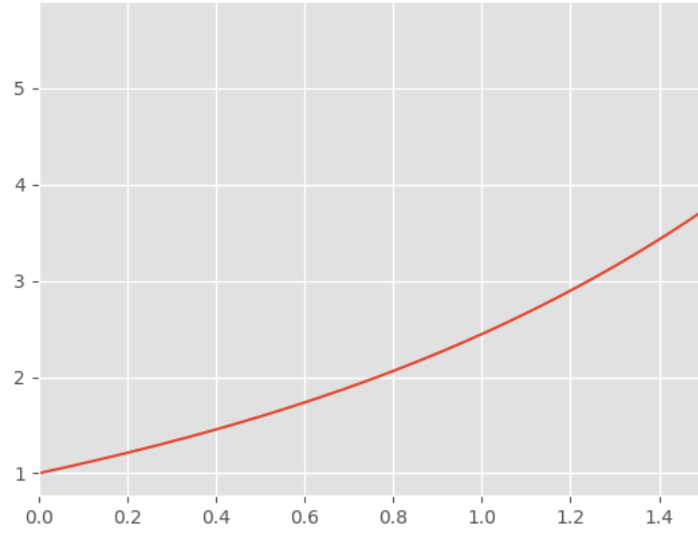


Figura 1: Grafica de la solución de la ecuación de Friedmann, en términos del factor de escala.

## Bibliografía

- [1] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, 0.<sup>a</sup> ed., vol. 0, n.<sup>o</sup> . CopIt ArXives: CopIt ArXives, 2018.