

1. Docentenhandleiding

1.1 De module in een oogopslag

In deze module maak je kennis met quantumcomputing. De module bestaat uit twee delen. In het eerste deel bouwen we ons begrippenapparaat op, in het tweede deel passen we onze kennis toe in praktische opdrachten. Het eerste deel bestaat uit drie hoofdstukken. Alle hoofdstukken hebben een aantal werkbladen. In hoofdstuk ?? beginnen we met een korte inleiding op het onderwerp en maken we kennis met enkele belangrijke begrippen en fenomenen door zelf te experimenteren met licht. Om de vergelijking te maken met een quantumcomputer begint hoofdstuk ?? met een korte uitleg over hoe een klassieke computer werkt. We onderbouwen ons wiskundig begrippenapparaat met een model. Het hoofdstuk eindigt met een eisenlijst waaraan een quantumcomputer moet voldoen. In ?? behandelen we de bouwblokken (poorten) van quantumcomputers. We zien dat die echt anders zijn. We leren hiermee werken en het hoofdstuk sluit af met een protocol waar alle eigenschappen van een quantumcomputer in voorkomen: teleportatie. Na dit hoofdstuk volgt een toets.

Het tweede deel (hoofdstuk ??) is een verzameling praktische keuzeopdrachten. Daarin leer je pas goed hoe de quantumcomputer is toe te passen. Je onderzoekt in samenwerkingsverband een aspect van quantumcomputing; een algoritme, een verdieping in wiskunde D, een technisch of een maatschappelijk aspect. Er is ook de mogelijkheid om dit deel in te vullen met een activiteit aangeboden door een van de universiteiten.

Deze reader is het best te lezen in elektronisch (pdf) formaat. Voor de papieren versie zijn voor de links QR-codes in de marge opgenomen. We kunnen niet al ons materiaal in deze reader kwijt. In de docentenhandleiding en op de [website](#) van het project staat meer ondersteunend materiaal.

Veel plezier, De auteurs



Tip: Voor de papieren versie zijn de links als QR-codes opgenomen. Gebruik je telefoon!



website

Doelgroep

De module is bedoeld voor een brede populatie van leerlingen eind 5 VWO of 6 VWO. Het is mogelijk dat in een NLT-klas komen zowel leerlingen zitten die quantumfysica en de toepassing daarvan die in deze module wordt besproken zien als een vanzelfsprekend onderdeel van hun curriculum. Dit zullen leerlingen zijn die zeker natuurkunde en wiskunde-B in hun pakket hebben. Maar er zullen ook leerlingen zijn zonder natuurkunde en alleen wiskunde-A in hun pakket. Ook voor deze leerlingen is deze module bedoeld al was het maar om enig inzicht te verschaffen in het magische onderwerp quantumfysica dat zo vaak wordt genoemd in allerlei documenten. We proberen een boodschap over zin en onzin over deze technologie mee te geven. In ieder geval zullen alle leerlingen ondervinden dat een quantumcomputer echt anders is dan een klassieke computer.

Benodigde voorkennis

Wat de wiskunde betreft is de meeste voorkennis die van 3 VWO. De taal van quantumcomputing is lineaire algebra. Leerlingen moeten dan ook een lineaire combinatie kunnen herschrijven. Ze moeten vertrouwd zijn met het 'werken met haakjes'. In deze module wordt geen gebruik gemaakt van de matrixrekening. Wel wordt gebruik gemaakt van het begrip vector dat bij het vak natuurkunde in 3 VWO wordt behandeld. De in de wiskunde gebruikelijke vectornotatie wordt in de tekst uitgelegd. Belangrijk is ook dat in de module veel wordt gewerkt met projecties van vectoren. Dat vereist elementaire kennis van de goniometrie. Bij natuurkunde komt dat in de vierde klas uitgebreid aan de orde. Voor alle leerlingen die natuurkunde in het pakket hebben is er dus geen enkel probleem. Leerlingen met wiskunde A en zonder natuurkunde zullen niet bekend zijn met projecties van vectoren (gonio). Een steunles voor deze leerlingen voorafgaand aan hoofdstuk 2 is hier op zijn plaats.

Wat de natuurkunde betreft is er voorkennis nodig van het verschijnsel trillingen en golven. Met name het verschijnsel interferentie speelt in deze module een rol. Als leerlingen geen natuurkunde hebben of het onderwerp is bij natuurkunde nog niet behandeld dan zal de docent hiervoor een oplossing moeten bieden. Dat kan door in hoofdstuk 1 zelf iets dieper in te gaan op de verschijnselen van interferentie. Een mogelijkheid, maar niet meer dan dat) is om een

extra les in te lassen over interferentie bij geluid (proef van Quincke). De leraar natuurkunde kan hier alles over vertellen.

Basis en differentiatie

De module bestaat uit een basisdeel van drie hoofdstukken dat met een toets wordt afgesloten. Daarna volgt een open deel met differentiërende praktische opdrachten. Deze praktische opdrachten bestrijken een breed spectrum. Er is voor elk wat wils. Aan de ene kant is er de mogelijkheid van een maatschappelijke verkenning door kennis te nemen van de drijfveren achter quantum-computing, de mogelijkheden en onmogelijkheden en de maatschappelijke consequenties van deze nieuwe technologie. Aan de andere kant is er ook een zuiver wiskundige keuzeopdracht. Maar er zijn nog veel meer keuzeopdrachten.

Vorbereiding

Bestellen Minstens een maand voor de start: Polaroid bestellen. Per leerling ongeveer 1 A7. Bestel bijvoorbeeld bij [beeldgebouw](#) of bij [ipacity](#).

Het project [quantumrules](#) ondersteunt deze NLT module met extra materiaal voor natuurkunde practica. Daar is ook de opstelling voor de enkel- en dubbelspleet (werkbladen ?? en ??) te bestellen.

Reserveer de leskoffer van de universiteit Twente met de enkel foton uitvoering van de proef van Young (week 1 les 3). Plan de PO's en reserveer leerlingenactiviteiten bij de kennisinstituten. Zie de website van het project voor een lijst met activiteiten.



Bespaar een boom. De basishandleiding is ongeveer 40 pagina's (zonder werkbladen). Printen van de basismodule is niet nodig. De pdf-versie is op de telefoon goed te lezen. Voor het geval je toch tot een papieren versie besluit zijn er QR codes opgenomen voor de links. Druk in kleur af anders zijn de diagrammen lastig te lezen.

Print de werkbladen in N-voud. Ze zijn er voor bedoeld om in te leveren als dossier of per werkblad.

1.2 Voorbeeld van een lessenplan

We gaan uit van drie contacturen per week, gedurende zes lesweken.

De module bestaat uit twee delen. Deel één behandelt de basisstof (drie weken) en wordt afgesloten met een toets. Deel twee bestaat uit keuze onderwerpen die individueel, in groepjes of ook klassikaal kunnen worden uitgevoerd. De indeling van het tweede deel vergt meer organisatie.

Zoals bij veel NLT-modules met een theoretisch deel gevold door een deel met praktische opdrachten bestaat ook hier het gevaar dat de PO's in de planning van de planning afschuiven. De PO's geven een reëel en divers beeld van de aspecten van quantumcomputing. Wij vinden dat die het best landen vanuit een voorkennis die in H1-3 wordt aangeboden. In het theoretisch gedeelte bieden we meer aan dan je kunt uitvoeren. Het zal niet lukken alle werkbladen uit het theoretisch gedeelte uit te voeren. Maak een keuze welke je als demonstratie opvoert, en welke je als huiswerkopdracht geeft.

week	
1	H1
2	H2
3	H3
4	toets, PO
5	PO
6	PO, presentaties

aanwijzingen per hoofdstuk

week 1, H1

Les 1: Introductie van het onderwerp en de werkwijze van de module: 3 wk basisstof, toets en 2+ wk praktische opdrachten. In hoofdstuk 1 staat de natuurkundige basis centraal. Het golfgedrag (interferentie) en polarisatie van fotonen.

Werkblad Young-1: Opstelling met rode laser en model met enkel- en dubbelspleet. leerlingen moeten de intensiteitspatronen van enkel- en dubbelspleet overtrekken. De spleten zijn 0,1 mm breed en hebben een afstand van 0,1 mm. Op [quantumrules](#) staat

een geogebra simulatie waarmee het intensiteitspatronen van het enkel- en dubbelspleetexperiment kan worden gesimuleerd.

Verschillen en overeenkomsten in ontwerp en resultaat van het enkel- en dubbelspleetexperiment: Ontwerp: gelijk: afstand tot de muur, golflengte van het laserlicht, spleetbreedte, verschil: 1 of 2 spleten.

Waarneming: overeenkomst: envelop van het intensiteitspatroon, verschil: bij DS is er een hoogfrequentpatroon, interferentie. Je kunt het verschil meten door twee sensors aan te brengen. Eén op de symmetrie-as, één op een eerste minimum van het dubbelspleetpatroon. De lichtsensor in het midden meet of er überhaupt een meting gedaan wordt, De tweede lichtsensor op de plaats van het eerste minimum in het dubbelspleetpatroon geeft aan of de dubbelspleet dan wel de enkelspleet voor staat.

geogebra Geogebra instellingen uit de tabel komen aardig overeen met de experimentele resultaten.



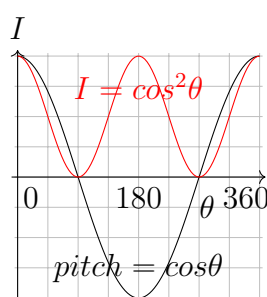
instellingen latie	simu- latie Geogebra:	
	enkel	dubbel
c (mm)	0	0,3
d (mm)	0,1	0,1
λ (nm)	630	630
L (m)	2.8	2.8

Figuur 1.1: intensiteitspatronen van enkel- (l) en dubbelspleet (r).
leg ze op elkaar, benoem de verschillen en de overeenkomsten

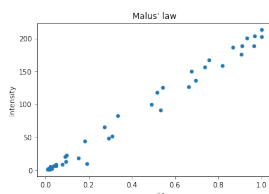
Les 2: Polarisatie en wet van Malus.

- Polarizatie projecteert de amplitude van de \vec{E} -component van de lichtvector. De lichtvector is zelf niet waarneembaar. De energie is wel waarneembaar. Het is het kwadraat van de amplitude. Dit is een quantumeigenschap: de amplitude van de lichtvector verhoudt zich tot (kans)amplitude en energie (intensiteit) tot kans.
- Het werkblad kan als huiswerk gemaakt worden. Uitgebreide instructie in [2] (open access). Geeft oefening in meten met je telefoon en excelvaardigheid (sjabloon op de site0. Werkblad in dossier. Nodig: strookje polaroid filter (plm 2x4 cm) en scherm en een smartphone met software.

- Ik moest 90° optellen bij mijn pitchsignaal (draaiing in het verticale vlak) om de oriëntatie van het filter en mijn scherm in de cosinusverband te laten passen.
- NB: Sommige schermen (iphones in ieder geval) maken gebruik van circulaire polarisatie. Die kunnen niet als bron gebruikt worden (wel om mee op te nemen natuurlijk). Vandaar de check op het oog vooraf.
- Het gebruik van absolute en relatieve referentie in Excel is lang niet aan iedere leerling bekend. Dit experiment geeft inzicht in het begrip van amplitude, kans, som van kansen $\sin^2 + \cos^2 = 1$, grafische voorstelling, orthogonale componenten.



Figuur 1.2: Wet van Malus. Onderlinge hoek tussen de filters (zwart), intensiteit van het doorvallende licht (rood).



Figuur 1.3: huiswerkopgave.

Je ruwe metingen lijken op die in figuur 1.2.

Uitvoering Doe een paar haarbandjes of een sok om de telefoon zodat de schermen niet krassen. Het ligt aan de oriëntatie van de polarisatie van het scherm en het filter of de cosinuswet er zonder manipulatie uitkomt. Bij mij thuis is de polarisatie van de TV loodrecht op die van mijn laptop. NB polarisatie van smartphones is 45° of circulair. Dat is wel zo fijn als je een polaroid bril op hebt.

Fig. 1.3 geeft een resultaat van het werkblad. Het resultaat had nog geoptimaliseerd kunnen worden door kleine veranderingen in de offset hoek aan te brengen. Bij 92° liggen de punten nagenoeg op een lijn. Kennelijk het filter iets scheef geplakt. Hogere excelkunde: De Excel solver kan deze hoek optimaliseren.

Alternatief als demonstratie

In de klas: als demonstratie en groepsexperiment. De leerlingen hebben allemaal een strookje polaroid.

1. met twee ten opzichte van elkaar draaiende polaroids Een keer rond: Twee keer licht en twee keer donker. Dat lijkt op figuur 1.2: \cos^2 .

Teken op het bord: projectie van de *amplitude* van de lichtvector van kruisende filters (projectie van y-as op x-as).

Bij andere hoeken: Je meet het kwadraat van de amplitude (*intensiteit*, vgl. energie van een trilling evenredig met uitwijking in het kwadraat)

2. Dan een derde filter tussen twee kruisende filters plaatsen. Dit is niet zomaar een grijsfilter. Het wordt lichter. Nogmaals projectie (zie figuur??).

3. check ook: Indien voor of achter de kruisende filters geplaatst geeft het 45° geen effect.

4. Als je het door hebt: N filters onder een hoek $\theta = (90/(N - 1))$ met elkaar laten $N \cos^2 \theta$ licht door. Je kunt het licht zo 90° draaien. Hoe meer filters hoe beter de doorlaat. Filters absorberen natuurlijk wel als je de hoek te klein maakt gaat er weer licht verloren... Er is een optimum.

extra opdracht De wet van Malus staat het toe om in principe zonder verlies de polarisatie 90° te draaien. Bij kleine θ gaat $\cos^2 \theta$ snel naar 1. Dat betekent bijna 100 % transmissie. Als je deze truc herhaald kun je een willekeurige hoek draaien. De hele klas heeft een stukje polaroid gekregen. Een samenwerkingsopdracht. Laat met een fotootje zien dat er nauwelijks absorptie optreedt als het licht door alle filters gaat, en dat er volledige absorptie optreedt als het licht alleen door het eerste en laatste filter gaat. Dat kan in een foto als je het eerste en laatste filter een stukje laat uitsteken. Er is nog een twist: het plastic dragermateriaal absorbeert ook energie. Dat is te onderzoeken door de absorptie te meten van een aantal filters die op elkaar liggen. Het is duidelijk dat bij een al te groot aantal filters er helemaal geen licht meer doorkomt. Is er een optimum aantal filters te vinden waarmee je de polarisatie van het licht 90° draait en maximale lichtsterkte doorlaat?

Les 3 : Enkel- en dubbelspleet met polarisatie werkblad ??.

Voorbereiding het schuifje met de loodrechte films maken. Dat luistert nauw. De uitleg van Young2 is lastig, maar de laatste stap is alleen te verklaren met superpositie. Interferentie!

Quantumprocessen zijn intrinsieke kansprocessen. Het sinc^2 -patroon bij de enkelspleet en het interferentiepatroon bij de dubbelspleet zijn kansverdelingen. Er is een plek waar het foton het meest waarschijnlijk komt, en ook plekken waar het nooit mag komen.

Universiteit Twente heeft een koffer te leen waarmee het fotonen experiment bij lage intensiteit kan worden uitgevoerd. De link ver-





Figuur 1.4: te
leen in Delft en En-
schede.

wijst naar een document met didactische aanwijzingen voor het gebruik.

In een beroemde versie van het **dubbelspleet experiment** (youtube filmpje 1min08, uitgevoerd met elektronen in plaats van fotonen) zie je aanvankelijk op willekeurige plaatsen een puntje verschijnen op het scherm waar een elektron het scherm raakt. Na enige tijd zie je een patroon ontstaan. Het proces is 30 x versneld weergegeven.

We hebben kennis gemaakt met kansproces, toestandsvector, lichtvector, amplitude, intensiteit en kans, Interferentie, superpositie, waarneming, een groot aantal metingen levert de kansdichtheid voor een enkele waarneming. Verstrengeling moet nog even wachten.



dubbelspleet experiment

week 2, H2

Les1: Hoofdstuk 2 begint met een inleiding over klassieke poorten. Dit is opgenomen om een referentiepunt te bieden ten opzichte van quantumcomputers. Het gaat te ver om hier diepgaand de werking van klassieke computers aan de orde te stellen. Poorten hebben in het algemeen meer ingangen dan uitgang, bits kun je kopiëren met de fan-out.

Les 2: Oude vrouw jonge vrouw werkblad ???. Kopieer eventueel figuur 1.5 in N-voud of zorg dat ieder het kan zien.

Herhalen van de begrippen amplitude en kans en hoe je ze berekent. Verder toestandsvector basis en waarneming met het model Oude vrouw Jonge vrouw (OVJV)

Klassikaal: Uitvoeren van eerste deel van werkblad OVJV ???. Pen en papier bij de hand. COVID: deel je gegevens in de chat.

Tweede deel is mogelijk huiswerk: bereken je eigen vector. Iemand berekent de verzamelgrafiek van alle waarnemingen van de klas. Bij het bespreken: teken de vector met het klassengemiddelde in.

omrekenen van aantallen waarnemingen naar kans (of percentage)
Terugwerken van kans naar amplitude door de wortel van de kans te nemen. Zowel voor individuele waarneming als voor klassengemiddelde.

Leermomentjes: werken met amplituden en kansen. Superpositie: De tekening is een superpositie, een waarneming resulteert in één van de basistoestanden. Indien vaak herhaald, geeft het experiment aan of de ontwerper goed in zijn poging geslaagd is. Wijs op overeenkomst met natuurkundige experimenten uit H1.

Ga niet te ver met de analogie. 'Een model neemt je eerst bij de hand en later bij de neus.' Wel wijzen op de parallellen van het model met quantum, en even terugkomen op de experimenten van H1:

- Het is een twee toestandensysteem.
- Je meet een basistoestand.
- de tekenaar heeft zijn best gedaan een superpositie te tekenen.
- Een enkele meting heeft een random uitkomst, In een echt quantumproces is dit kansproces intrinsiek, in het model is het een onbegrepen neurologisch proces.
- Als het experiment een groot aantal malen wordt uitgevoerd levert het de kansverdeling in de vorm van een intensiteitspatroon.

Les 3: Bespreek werkblad OVJV (tweede deel) Deel de resultaten van de klas. Wie zat het dichtst bij het gemiddelde? Die heeft een zak quantumtum verdiend, wel uitdelen!.

Het meten met verschillende bases ??

Over het meetprobleem ?? We volgen de redenering van Runia op opencurve [1]. De helderste uitleg voor ons publiek die we konden vinden

Een Bell-test ?? De afleiding van de Kopenhaagse kansen te doen is te veel schrijfwerk voor de hoofdtekst. Daarom hier in de docentenhandleiding. We schrijven hier het algemene geval (α) In de tekst is $\alpha = \frac{\pi}{3}$. We moeten eerst de eenheidsvectoren van de verticale basis uitgedrukken in de basis A

$$|0\rangle_V = \cos \alpha |0\rangle_A - \sin \alpha |1\rangle_A$$

$$|1\rangle_V = \sin \alpha |0\rangle_A + \cos \alpha |1\rangle_A$$

en voor basis B



$$|0\rangle_V = -\sin \alpha |0\rangle_B + \cos \alpha |1\rangle_B$$

$$|1\rangle_V = \cos \alpha |0\rangle_B + \sin \alpha |1\rangle_B$$

We drukken $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_V |0\rangle_V + |1\rangle_V |1\rangle_V)$ uit in basis A

$$\begin{aligned} |1\rangle_V |1\rangle_V &= (\sin \alpha |0\rangle_A + \cos \alpha |1\rangle_A) (\sin \alpha |0\rangle_A + \cos \alpha |1\rangle_A) \\ &= \sin^2 \alpha |0\rangle_A |0\rangle_A + \cos^2 \alpha |1\rangle_A |1\rangle_A \\ &\quad + \sin \alpha \cos \alpha |0\rangle_A |1\rangle_A + \sin \alpha \cos \alpha |1\rangle_A |0\rangle_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |0\rangle_V |0\rangle_V &= (\cos \alpha |0\rangle_A - \sin \alpha |1\rangle_A) (\cos \alpha |0\rangle_A - \sin \alpha |1\rangle_A) \\ &= \cos^2 \alpha |0\rangle_A |0\rangle_A + \sin^2 \alpha |1\rangle_A |1\rangle_A \\ &\quad - \cos \alpha \sin \alpha |0\rangle_A |1\rangle_A + \cos \alpha \sin \alpha |1\rangle_A |0\rangle_A \end{aligned}$$

In Ψ vallen nu de kruistermen weg

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) |0\rangle_A |0\rangle_A + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) |1\rangle_A |1\rangle_A) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_A + |1\rangle_A |1\rangle_A) \end{aligned}$$

Dit is de toestand waar we mee vervolgen in de leerlingentekst

Kansen volgens EPR Wij besloten deze uitleg volgens [bernhardt2019quantum] niet op te nemen in de leerlingenhandleiding, maar we willen deze u ook niet onthouden. Als de gonio uit de leerlingenhandleiding een te groot obstakel is, kunt u met deze redenering goed het verschil tussen de EPR en Kopenhaagse redeneringen aantonen.

Als we nog eens goed naar figuur ?? kijken dan zijn er drie bases waarin gemeten kan worden. In elke basis kan de meting er voor zorgen dat een groene of een rode lamp gaat branden. In de klassieke gedachtegang bezit een elektron bij aankomst al een bepaalde spinrichting. Dat geeft een lijst van acht mogelijke uitkomsten. We zouden ons bijvoorbeeld een elektron kunnen voorstellen dat bij meting in de basis V een groene lamp zou laten branden, in de basis A ook een groene lamp en in de basis B weer een groene lamp. We zouden dat elektron kunnen indelen met het label **000** (in volgorde

VAB). En er zouden elektronen zijn die in alle drie de bases een rode lamp laat branden. Die krijgen het label **111**. Er zou ook een label zijn als bijvoorbeeld **101**. Een elektron uit die groep laat een groene lamp oplichten in basis A maar zal bij de andere bases voor rood licht zorgen. Er zijn acht van dat soort labels. We kunnen in de klassieke gedachtegang alle elektronen blijkbaar onderbrengen in acht groepen. Helaas kunnen we een elektron maar één keer meten. De meting verstoort zijn richting. Desalniettemin kunnen we bij het experiment van figuur ?? toch twee keer een meting verrichten. We beschikken immers over elektronparen met gelijke richting. Alice verricht een meting en Bob een tweede. Er zijn negen verschillende combinaties van de meetbases van Alice en Bob. Hier zijn die combinaties: V-V, V-A, V-B, A-V, A-A, A-B, B-V, B-A, B-B. Omdat Alice en Bob hun bases onafhankelijk en volkomen ad-random kiezen kunnen we zeggen dat elke combinatie een kans van $1/9$ heeft om gekozen te worden. Stel nu: er komt een elektronenpaar van de groep **101**. Alice meet in basis B en Bob in basis V. Dat is de zevende combinatie uit de lijst hierboven. In basis B laat elektron **101** de rode lamp branden en in basis V zorgt dit ook voor een rode lamp. Dat is voor alle mogelijkheden uitgewerkt in tabel 1.1.

	V-V	V-A	V-B	A-V	A-A	A-B	B-V	B-A	B-B
000	GG	GG	GG	GG	GG	GG	GG	GG	GG
001	GG	GG	GR	GG	GG	GR	RG	RG	RR
010	GG	GR	GG	RG	RR	RG	GG	RG	GG
011	GG	GR	GR	RG	RR	RR	RG	RR	RR
100	RR	RG	RG	GR	GG	GG	GR	GG	GG
101	RR	RG	RR	GR	GG	GR	RR	RG	RR
110	RR	RR	RG	RR	RR	RG	GR	GR	GG
111	RR	RR	RR	RR	RR	RR	RR	RR	RR

Tabel 1.1: Kolommen: Basiskeuze van resp. Alice en Bob. Rijen: Alle mogelijke uitkomsten van metingen voor de drie bases (VAB). De cellen geven de uitkomsten voor de combinaties basiskeuze en eigenschap (label) van het elektron

De kolommen leveren allemaal gelijke waarschijnlijkheid voor rood en groen. In de rijen is dat niet het geval. Er kunnen meer elektronen zijn met het ene label dan het andere label. Maar het valt op dat er bij elk label minstens vijf van de negen kolommen dezelfde kleur hebben. Dat betekent dat de kans op gelijke kleur voor elk

label minstens $\frac{5}{9}$ moet zijn. De Kopenhaagse opvatting voorspelt daarentegen een kans van precies $\frac{1}{2}$ voor een meting met gelijke kleur.

Divincenzo criteria ?? De criteria lijken vanzelfsprekend, maar zijn wel de hindernissen die genomen moeten worden bij het bouwen van een quantumcomputer. Het vierde criterium komt in Hoofdstuk 3 pas aan de orde, hier slechts een blik vooruit. Het bewijs van het no-cloning principe wordt in opdracht ?? behandeld.

week3, H3

Les 1 rekenregels. lineariteit is intuïtief. De 'Brexit'-opdracht ?? laat dat zien.

Uitwerken van tensorproduct is gewoon 'papegaaienbekken':

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

De werking van de **I**, **X** en **Z**-poort moet lukken. De **H**-poort is lastiger. Het toestandsdiagram maakt het makkelijk.

Figuur 1.4 is een cheatsheet met het toestandsdiagram voor de **X**-, **Z**- en **H**- poort. Die mag je er vast bijhouden tijdens het proefwerk.

Er is geen werkblad bij dit gedeelte

Les 2 Werkblad Quantum Inspire (Delft) ?. Check vooraf of de webinterface is vernieuwd.

kopofmunt ?? Deze opdracht illustreert de werking van XHZ poorten in één register. **De instructie moet alleen aan de spelleider bekend zijn**

Speel dit spel met twee spelers en een spelleider. **LET OP! Zorg dat slechts de spelleider de tekst leest en uitleg geeft aan de spelers.**

Ken je die situatie; dat je iets moet beslissen, maar er niet uitkomt. Bijvoorbeeld als je met een vriend hebt afgesproken en hij wil graag naar de bioscoop, terwijl jij liever wilt gaan basketballen. In zo'n situatie kun je een muntje opgooien, dat is wel zo eerlijk. In dit spel spelen we een variatie op kop en munt met speler A, Alice en speler B, Bob.

Deel 1 Een ronde van dit spel werkt als volgt. De spelleider legt een muntje op tafel. Het muntje begint altijd in kop. De spelers kunnen twee dingen doen: ofwel het muntje draaien (van kop naar munt, of van munt naar kop), ofwel niks doen (munt blijft munt en kop blijft kop). Eerst geeft Alice haar keuze in het geheim aan de spelleider door (draaien of niks doen), vervolgens doet Bob dit en tot slot mag Alice nog een keer haar keuze doorgeven. In totaal worden er dus per ronde drie operaties (telkens draaien of niets doen) op het muntje uitgevoerd. De spelleider onthoudt steeds de toestand van het muntje (kop/munt) en onthult uiteindelijk de eindstand van het muntje. Als het muntje eindigt in kop, dan wint Alice, eindigt het muntje als munt, dan wint Bob.

- a. Wat is de kans dat Alice wint en wat is de kans dat Bob wint?
- b. Als je acht rondes speelt, hoe vaak verwacht je dan dat Bob wint?
- c. Wat is de kans dat, na vijf rondes, Bob alle rondes heeft gewonnen?
- d. Speel vijf rondes. Komt dit (ongeveer) overeen met jullie verwachtingen?
- e. Kun je makkelijk valsspelen?

Deel 2 We gaan het spelletje 'iets' veranderen. In plaats van kop, of munt, spelen we het spelletje nu met een qubit. De spelleider prepareert een qubit in de toestand $|0\rangle$ - dit kan op papier. Nu mag eerst Alice het qubit roteren; ze mag kiezen uit niets doen, of een **X**-poort ($|0\rangle$ wordt $|1\rangle$ en $|1\rangle$ wordt $|0\rangle$), een flip. Daarna mag Bob het qubit roteren (niets doen, of een flip) en tot slot mag Alice het qubit nog een keer roteren (niets doen, of een flip). Tot slot 'meet' de spelleider het qubit. Als het qubit eindigt in de toestand $|0\rangle$ dan wint Alice, eindigt het qubit in $|1\rangle$ dan wint Bob.

- a. Het qubit begint in $|0\rangle$. Als Alice niets doet, Bob een **X**-poort uitvoert en Alice ook een **X**-poort uitvoert, in welke toestand eindigt het qubit dan?
- b. Wat is de kans dat Bob de ronde wint? (maak eventueel een boomdiagram met alle mogelijkheden)
- c. Speel vijf rondes van het spel. Hoe vaak won Alice, hoe vaak won Bob?

Deel 3 Alice heeft intussen door dat ze met een qubit te maken heeft en bedenkt wat slims. In plaats van een X-rotatie, besluit ze

een Hadamard-poort toe te passen tijdens haar beide beurten. *Aan de spelleider: geef dit - in het geheim - door aan Alice.* Bedenk dat een Hadamard poort de toestand $|0\rangle$ verandert in $|+\rangle$ en de toestand $|1\rangle$ verandert in $|-\rangle$.

- Speel nu acht rondes van het spel. Hoe vaak heeft Alice gewonnen?
- Aan Bob: vind je het logisch dat Alice telkens wint? Hoe denk je dat ze dat heeft gedaan?
- Is er een mogelijkheid dat Bob op deze manier het spel kan winnen?

Les 3 H-poort voorbeeld: Ga na dat de toestand genormeerd is. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Meerdere poorten achter elkaar: Je mag ook **(ZH)** $|\Psi\rangle$ uitrekenen. Associatief, maar niet commutatief, dus niet **HZ** $|\Psi\rangle$.

Teken het toestandsdiagram waarmee een **R_y** $|0\rangle$ uiteindelijk op zichzelf afbeeldt. Hint uit hoeveel elementen bestaat je diagram?

Er is ruimte voor meer rekenvragen. Wat doet een **(XZH)** operatie met de toestand $|1\rangle$. Wat is de andere coëfficiënt van de toestand $\alpha = \frac{1}{3}$.

Opgave verstrengeling ?? is belangrijk.

Vraag: teken de actie van de **I**-poort in het toestandsdiagram. Geef aan met letter I.

Vraag: Voor welke toestanden werkt de **Z/X/H** poort als de identiteit?

werkblad teleportatie

- c
- b
- Nee, Je meet een toestand $|0\rangle$ met een kans α^2 of $|1\rangle$ met kans β^2 .
- Je kunt de toestand telkens opnieuw bouwen en het kansproces herhalen. Zo kun je uiteindelijk de coëfficiënten benaderen. die gelden tot het qubit gemeten wordt.
- I, f)X, g)Z, h)XZ
- Bob's qubit is instantaan vastgelegd als Alice meet, echter ze moet Bob eerst opbellen (klassiek kanaal) om haar resultaat door te geven. Dat gaat niet sneller dan het licht.

- g. Een lamp is geen quantumobject, laat staan dat een persoon dat is. Vraag is natuurlijk of het theoretisch verboden is, dat niet.
- h. Dat gaat ook maar met een andere decodering, Bob moet andere operaties toepassen, dus wel afspraken maken vooraf.

1.3 uitwerking opdrachten

(werkbladen staan apart uitgewerkt in paragraaf 1.4)

hoofdstuk 1

Opzoekvraag in de tekst: [timeline2021] Ik kom op 1988, een NMR systeem

exp 1.2 Young1 werkblad ??

exp 1.3 Malus werkblad ??

exp 1.4 Young2 werkblad ??

Opdr 1.5 Enkel foton experiment ??

Terzijde: de benaming van neutral density filters kent nogal wat variaties. [Hier](#) een overzicht.

Eén foton onderweg over een afstand van 30 cm met $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ komt dat overeen met een verblijftijd van 1 ns. De bundel zendt 1 mW uit. Energie per foton: $E = \frac{hc}{\lambda}$ met $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$, $\lambda = 635 \times 10^{-9} \text{ m}$ levert

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \implies 3,1 \times 10^{-19} \text{ J/foton} \text{ gewenst vermogen: } P = E/t = \frac{3,1 \times 10^{-19} \text{ J/foton}}{1 \times 10^{-9} \text{ s/foton}} = 3,1 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$$

Verzwakking: $\frac{1E-3}{3,1E-10} = 3,2 \times 10^6$. Dit is een ondergrens. Je moet 1×10^7 keer verzwakken, twee ND2 en één NG3 filter dus.



Hier

Hoofdstuk 2

exp 2.1 klassiek werkblad ?? **exp 2.1 OVJV1** werkblad ??

Opdr ?? Inzoomen Je moet afdalen tot de *nanowereld* Een factor 1×10^9 dus. Een atoom is ongeveer een 1 \AA groot. Het plaatje een decimeter. Dan kom je er ook op uit.

exp 2.1 OVJV1 werkblad ??

opdr ??

Het filter staat verticaal, meet toestand $|1\rangle$.

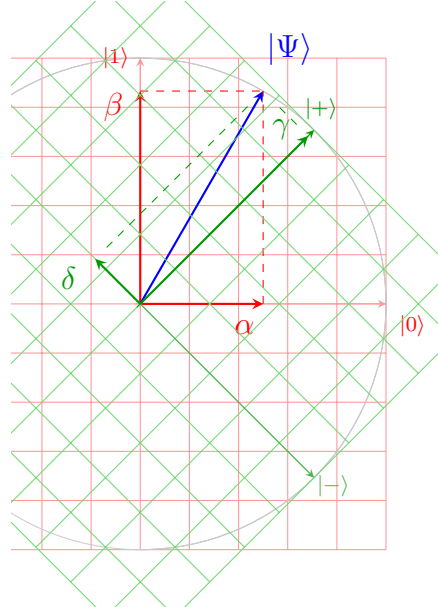
$$\beta^2 = \frac{3}{4} \implies \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \implies$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2}$$

Hoek met verticaal = 30° NB er zijn vier mogelijkheden, $\pm 30^\circ$ en $\pm 150^\circ$ t.o.v. y -as.

Opdr ??



a. Teken de vector.

$$\angle(|\Psi\rangle, |0\rangle) = 60^\circ$$

$$\angle(|\Psi\rangle, |1\rangle) = 30^\circ$$

$$\angle(|\Psi\rangle, |+\rangle) =$$

$$30^\circ - 45^\circ = -15^\circ$$

$$\angle(|\Psi\rangle, |-\rangle) =$$

$$|\Psi\rangle = -\sin 15^\circ |-\rangle +$$

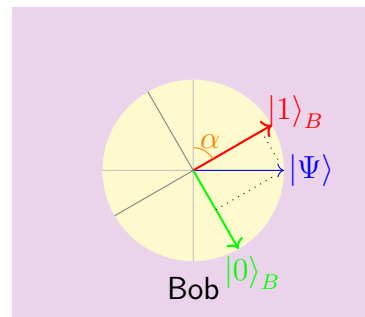
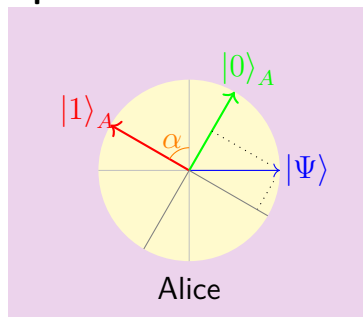
$$\cos 15^\circ |+\rangle$$

b. $P(|0\rangle) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c. $P(|+\rangle) = \gamma^2 = \cos^2 15^\circ$

■

Opdr ??



Quantumkansen voor Alice en Bob: $P_{AB}, \alpha = 60^\circ$

$$P_{GG} = \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$P_{RG} = \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$P_{GR} = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{8}$$

$$P_{RR} = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{8}$$

Quantumkansen voor Alice en Bob: $P_{AB}, \alpha = 60^\circ$

$$P_{GG} = \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$P_{RG} = \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$P_{GR} = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{8}$$

$$P_{RR} = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{8}$$

Hoofdstuk 3

opdr:brexit ??

$$y = 3(5 + 6) =$$

$$3 * 5 + 3 * 6 = 33$$

$$y = 3(4 * 5) =$$

$$4 * 3 * 5 = 60$$

opdracht ??

$$Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) =$$

$$Z\alpha|0\rangle + Z\beta|1\rangle =$$

$$\alpha Z|0\rangle + \beta Z|1\rangle$$

met $Z|0\rangle = |0\rangle$ en $Z|1\rangle = |-1\rangle = -|1\rangle$:

$$\alpha|0\rangle + \beta|-1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

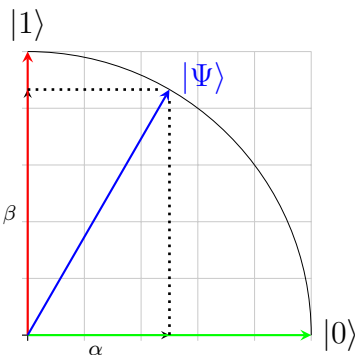
opdracht ??

a. tekenen

b. $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$

c. $\frac{1}{4}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

d. 1



Hoek met de horizontaal:

$$\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 60^\circ$$

a. tekening

b. Hoek met de horizontaal:

$$\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 60^\circ$$

c. $\frac{1}{4}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

d. 1

Geheel analoog aan voorbeeld:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}\Psi &= \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{H}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{H}|1\rangle \\
 &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}(|0\rangle - |1\rangle) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}((1 + \sqrt{3})|0\rangle + (1 - \sqrt{3})|1\rangle)
 \end{aligned}$$

opdr: ??

a.

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \\
 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle
 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}|+\rangle &= \\
 \mathbf{H}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) &= \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{H}(|0\rangle + |1\rangle) &= \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{H}|0\rangle + \mathbf{H}|1\rangle) &= \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) &= \\
 |0\rangle &
 \end{aligned}$$

exp werkblad QI ?? Hiervan is geen uitwerking
exp kopofmunt (uitgewerkt in lessenplan 1.1)

opdr: ??

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Ry30}(\mathbf{Ry30}(|0\rangle)) &= \\
 = \mathbf{Ry30}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) &= \\
 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{Ry30}|0\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{Ry30}|1\rangle &= \\
 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}|1\rangle\right) &= \\
 = \frac{3}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle - \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle &= \\
 = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}|1\rangle &
 \end{aligned}$$

En dat is precies een draaiing over 60°

opdr: ??

input	T	output
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 10\rangle$	$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$

opdr: ??

input	output
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 10\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$
$ 01\rangle$	$ 11\rangle$

opdr: ??

a. $H |0\rangle |0\rangle =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle =$$

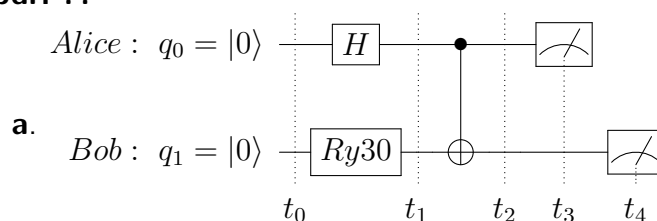
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT} (|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$

c. Nee, niets is buiten haakjes te halen

d. I. NB $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $|00\rangle \Rightarrow I$ $|10\rangle \Rightarrow II$ $|01\rangle \Rightarrow III$ $|11\rangle \Rightarrow IV$

opdr: ??

b. De toestand op t_2 wordt nu:

$$\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle \right) =$$

$$\sqrt{\frac{3}{8}} |00\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}} |01\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}} |10\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |11\rangle$$

c. Verschillende kleuren als

opdr: ??

a. De toestand op t_1 :

$$H |0\rangle \otimes \text{Ry}60 |0\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3} |1\rangle \right) =$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}} |00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |01\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}} |10\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |11\rangle$$

b.

$$\sqrt{\frac{1}{8}} |00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |01\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |10\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}} |11\rangle$$

c. De termen 3 en 4 vallen af. Blijft over $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}|01\rangle$

d. Kans dat Bob een 0 meet (in vervolg op vorige vraag) = $\frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$

e.

	B_0	B_1
A_0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
A_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

f. De termen 2 en 4 vallen af. Blijft over $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}|10\rangle$

g. wederom $\frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$

h. De tabel blijft ongewijzigd. Bob meet als eerste en heeft nu $\frac{1}{2}$ kans op nul, (meest rechtse kolom in de tabel. Alice heeft $\frac{1}{2}$ kans op nul.

opdr: ??

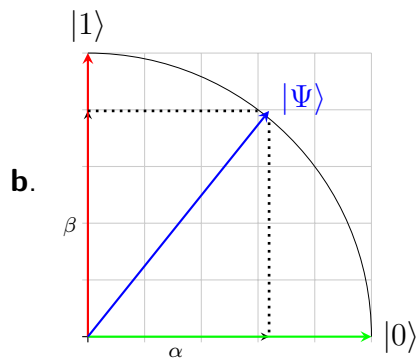
a. $\frac{1}{2}\alpha^2 = 0.201, \alpha \approx \sqrt{0.408} \approx 0.639$

$\frac{1}{2}\beta^2 = 0.291, \beta \approx \sqrt{0.592} \approx 0.769$

$\frac{1}{2}\beta^2 = 0.301, \beta \approx \sqrt{0.592} \approx 0.769$

$\frac{1}{2}\alpha^2 = 0.207, \alpha \approx \sqrt{0.408} \approx 0.639$

check: $\alpha^2 + \beta^2 = 0.408 + 0.592 = 1, =ok$



c. De hoek kan uit de figuur bepaald worden of berekend met $\tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \approx 50^\circ (0.28\pi rad)$.

Hier een wat uitgebreider antwoord. Enkele simulaties op QI leveren het volgende resultaat.

$\theta =$	$0= 00\rangle$	$1= 01\rangle$	$2= 10\rangle$	$3= 11\rangle$	α^2	β^2
0	0.475			0.5244	1	0
$\pi/6 = 0.523$	0.472	0.027	0.038	0.4619		
$\pi/4 = 0.785$	0.418	0.079	0.065	0.4365		
$\pi/3 = 1.04$	0.354	0.129	0.125	0.3876		
$\pi/2 = 1.57$	0.240	0.240	0.254	0.2646	0.5	0.5
$7\pi/12 = 1.83$	0.188	0.312	0.310	0.191		
$2\pi/3 = 2.08$	0.115	0.400	0.372	0.112		
$\pi = 3.14$		0.511	0.482		0	1
<i>opgave</i>	0.201	0.291	0.301	0.207	0.408	0.592

Uit de simulaties volgt bijvoorbeeld: Bij $\pi/2$ is $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2}$.

In ons coördinatenstel levert dat 45° , **Bij QI zijn de hoeken**

twee keer zo groot: 90° ($\frac{\pi}{2}$)

- d. Je berekent de hoek met de getallen van de opgave:

$$2 * \arctan \frac{0.796}{0.639} \approx 1.79 \text{ rad}$$

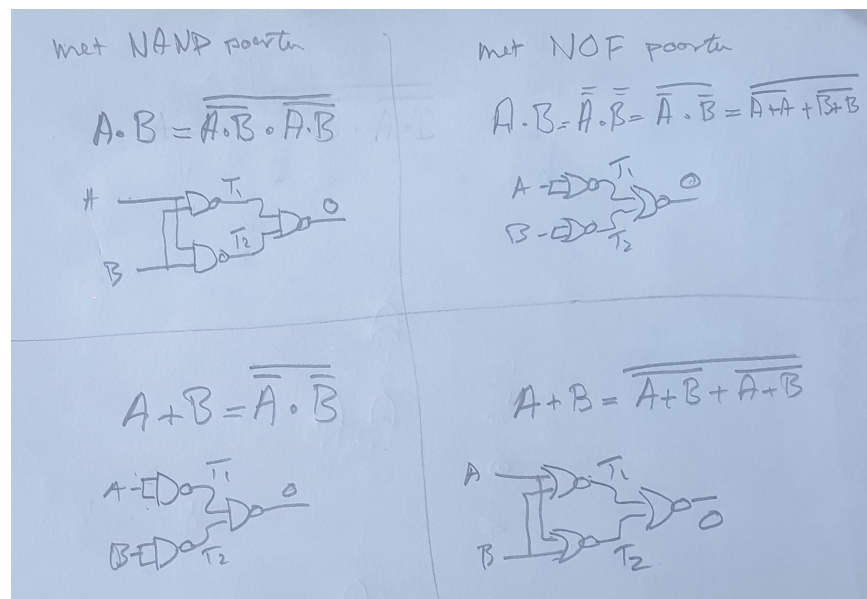
- e. Mijn antwoord wijkt wel erg af:

$\theta =$	$0= 00\rangle$	$1= 01\rangle$	$2= 10\rangle$	$3= 11\rangle$	α^2	β^2
$0.55\pi = 1.75$	0.188	0.295	0.306	0.212		

1.4 Uitwerking werkbladen

De meeste zijn al beschreven in sectie [1.2](#).

werkblad Klassieke bits Klassieke bits bestuur je met klassieke poorten. Dit werkbablade gaat over Boolse algebra en bis die per se 1 of 0 zijn.



Als voorbeeld de waarheidstabel van $A \cdot B$ uitgedrukt in NEN poorten

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$$

A	B	T ₁	T ₂	O
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

werkbld Teleportatie Werkblad teleportatie kunnen leerlingen zelf het protocol afleiden. Niet moeilijk, wel secuur werk, niet alle leerlingen gaan dit volbrengen. Gelukkig staat het antwoord achteraan.

Losse vragen:

a)c

b)b

c)Nee, Je meet een toestand $|0\rangle$ met een kans α^2 of $|1\rangle$ met kans β^2 .

d)Je kunt de toestand telkens opnieuw bouwen en het kansproces herhalen. Zo kun je uiteindelijk de coëfficiënten benaderen. die gelden tot het qubit gemeten wordt.

e)I, f)X, g)Z, h)XZ

Hier staat het protocol helemaal uitgeschreven.

Hoe werkt het teleportatieprotocol nou precies?

t_0 We beginnen met een qubit $T = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, en Alice en Bob hebben allebei een qubit in toestand $|0\rangle$. Met het tensorproduct kunnen we ze schrijven als

$$|T\rangle \otimes |A\rangle \otimes |B\rangle = |TAB\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |00\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle$$

t_1 Als eerste wordt qubit A door een **H**-poort geleid:

$$\begin{aligned} T \otimes \mathbf{H} |A\rangle |0_B\rangle &= \\ T \otimes \frac{|0_A\rangle + |1_A\rangle}{\sqrt{2}} |0_B\rangle &= \\ (\alpha|0_T\rangle + \beta|1_T\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0_A0_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1_A0_B\rangle \right) \end{aligned}$$

Deze toestand kunnen we ook opschrijven door de haakjes weg te werken als:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T0_A0_B\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T1_A0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T0_A0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T1_A0_B\rangle$$

t_2 Alice past een **CNOT**-poort toe op A en B. A is hierbij het controlebit en B het doel. Een CNOT laat het doel onveranderd als het controlebit 0 is, en flipt het doel als het controlebit 1 is. Bob gaat op reis en neemt zijn register mee.

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T0_A0_B\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T1_A1_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T0_A0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T1_A1_B\rangle$$

t_3 Alice past een **CNOT**-poort toe op haar twee qubits met T als controlebit en A als doel.

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T0_A0_B\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_T1_A1_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T1_A0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_T0_A1_B\rangle$$

t_4 Daarna voert Alice het qubit dat ze wil teleporteren, T , door een Hadamard-poort. Dit levert:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}(|0_T\rangle + |1_T\rangle) |0_A0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}(|0_T\rangle + |1_T\rangle) |1_A1_B\rangle + \\ \frac{\beta}{2}(|0_T\rangle - |1_T\rangle) |1_A0_B\rangle + \frac{\beta}{2}(|0_T\rangle - |1_T\rangle) |0_A1_B\rangle \end{aligned}$$

We schrijven de toestand hierboven zo dat de twee qubits van Alice samen staan. Dit doen we in twee stappen. Eerst zullen we de toestand buiten haakjes halen (acht termen):

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} |0_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |1_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |0_T 1_A 1_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |1_T 1_A 1_B\rangle + \\ & \frac{\beta}{2} |0_T 1_A 0_B\rangle - \frac{\beta}{2} |1_T 1_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{2} |0_T 0_A 1_B\rangle - \frac{\beta}{2} |1_T 0_A 1_B\rangle \end{aligned}$$

Wanneer we Alice's qubits apart opschrijven van Bob's qubits, krijgen we de toestand:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} |0_T 0_A\rangle |0_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |1_T 0_A\rangle |0_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |0_T 1_A\rangle |1_B\rangle + \frac{\alpha}{2} |1_T 1_A\rangle |1_B\rangle + \\ & \frac{\beta}{2} |0_T 1_A\rangle |0_B\rangle - \frac{\beta}{2} |1_T 1_A\rangle |0_B\rangle + \frac{\beta}{2} |0_T 0_A\rangle |1_B\rangle - \frac{\beta}{2} |1_T 0_A\rangle |1_B\rangle \end{aligned}$$

En door nu termen buiten haakjes te halen, krijgen we:

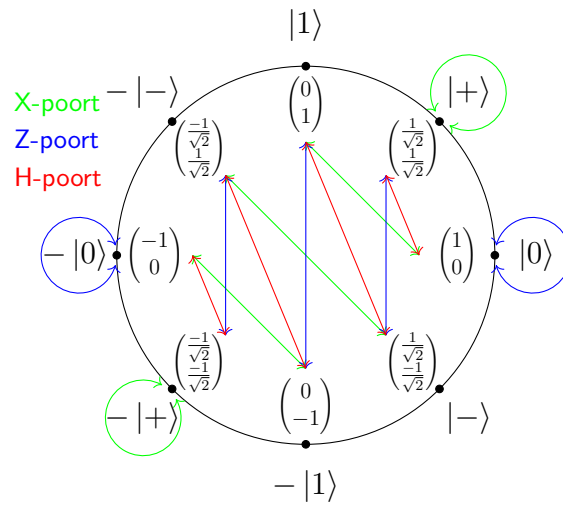
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |0_T 0_A\rangle (\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle) + \frac{1}{2} |1_T 0_A\rangle (\alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle) + \\ & \frac{1}{2} |0_T 1_A\rangle (\alpha |1_B\rangle + \beta |0_B\rangle) + \frac{1}{2} |1_T 1_A\rangle (\alpha |1_B\rangle - \beta |0_B\rangle) \end{aligned}$$

Het enige wat Alice nu nog hoeft te doen is haar twee qubits meten. Zoals je ziet, geeft elke mogelijke meetuitkomst van haar twee qubits, een andere toestand van de qubits van Bob. Zoals je kunt zien, zal Bob de originele toestand van T meten, wanneer Alice $|00\rangle$ meet. Maar ook wanneer Alice niet $|00\rangle$ meet, kan Bob de originele toestand terugkrijgen door een simpele enkele qubit poort toe te passen. Het enige wat Bob niet weet, is wat Alice's meetuitkomst is. Daarom moet Alice, nadat ze gemeten heeft, haar toestand doorgeven aan Bob via een klassiek kanaal. Dit kan via de telefoon, via e-mail, of hoe ze ook wil. Daarna weet Bob precies wat hij moet doen. Meet Alice $|00\rangle$? Dan meet Bob zijn qubit en weet hij T . Meet Alice $|01\rangle$, dan heeft Bob de toestand $\alpha |1_B\rangle + \beta |0_B\rangle$. Wanneer hij dan een X-poort op zijn qubits toepast, verandert de toestand in $\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle$ en dit is weer precies T . Wanneer Alice $|10\rangle$ meet, dan heeft Bob de toestand $\alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle$. Wanneer hij nu een Z-poort toepast, dan wordt zijn qubit: $\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle$ en heeft hij weer T .

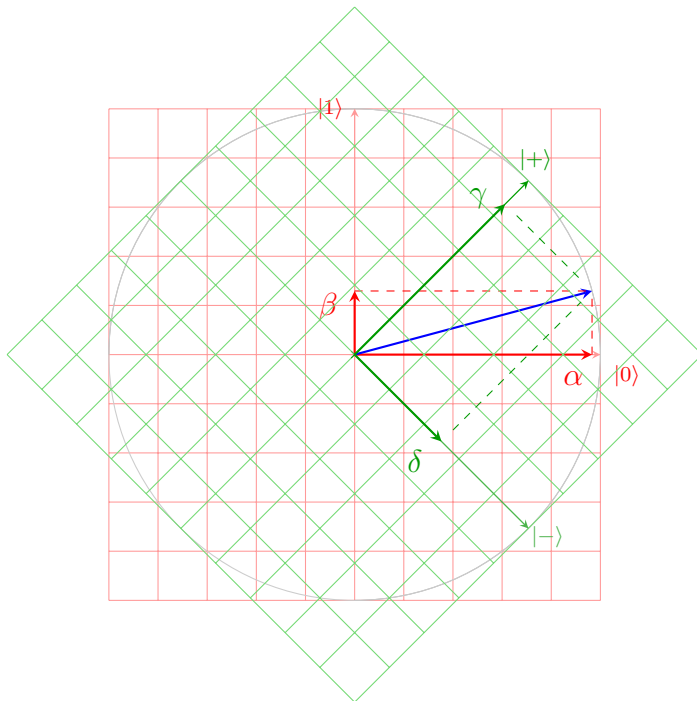
- i. Bob's qubit is instantaan vastgelegd als Alice meet. Echter ze moet Bob eerst opbellen (klassiek kanaal) om haar resultaat door te geven. Dat gaat niet sneller dan het licht.
- j. Een lamp is geen quantumobject, laat staan dat een persoon dat is. Vraag is natuurlijk of het theoretisch verboden is, dat niet.
- k. Dat gaat ook maar met een andere decodering. Dus wel afspraken maken vooraf.

Om over na te denken: Alice heeft twee complexe coëfficiënten getransporteerd naar Bob geteleporteerd. Dat heeft ze gedaan door twee klassieke bits door te bellen. Hoe zijn die α en β nu overgedragen? Dit is de kracht van verstrengeling.

Cheatsheet proefwerk



Toestandsovergangen
voor **X**-, **Z**-, en **H**-poorten.



Toestandsovergangen voor **X**-, **Z**-, en **H**-poorten.



Figuur 1.5: Oude vrouw jonge vrouw.