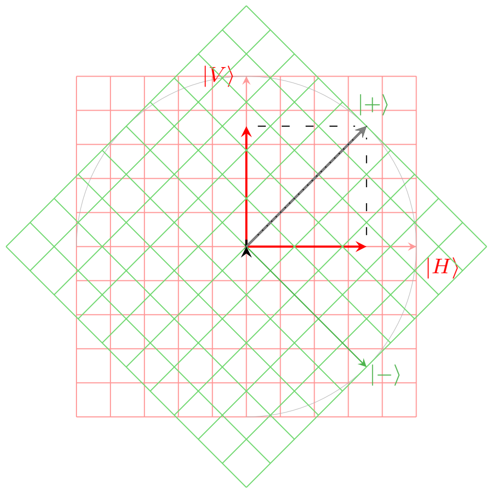
4. Praktische opdrachten

De kennis van de vorige hoofdstukken kunnen we nu toepassen. Net als in de theorie beperken we ons in dit hoofdstuk tot gebruik van reële getallen. Alleen in de wiskunde verdieping gaan we verder. We zullen zien dat je met quantumcomputing heel andere dingen kunt doen dan met klassieke computers. Ook kun je de ontwikkelingen en de maatschappelijke implicaties verkennen.

4.1 Protocol: BB84

In hoofdstuk **??** hebben we met experimenten **??** en **??** de eigenschappen van gepolariseerd licht gebruikt om superpositie te introduceren. In hoofdstuk **??** en werkblad **??** 'Wat zie je' hebben we gezien hoe een waarnemer in een andere basis, andere coördinaten aan dezelfde vector geeft. In dit werkblad werken we met die kennis een quantumencryptie-protocol uit. Dit protocol is in 1984 door Charles Bennet en Giles Brassard [**BENNETT20147**] gepresenteerd en geldt als eerste voorbeeld van onkraakbare code. Het staat bekend als BB84 en als quantum key distribution (QKD).



$$|+\rangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|H\rangle + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|V\rangle$$
$$|-\rangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|H\rangle - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|V\rangle$$
$$|H\rangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|+\rangle + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|-\rangle$$
$$|V\rangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|+\rangle - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|-\rangle$$

Figuur 4.1: In de standaardbasis (rood) wordt de zwarte vector met gelijke kans als $|H\rangle$ of $|V\rangle$ waargenomen. In de diagonale basis (groen) wordt de vector met zekerheid als $|+\rangle$ waargenomen.

$$|0\rangle \equiv |H\rangle$$
$$|1\rangle \equiv |V\rangle$$
$$|+\rangle \equiv |D\rangle$$
$$|-\rangle \equiv |A\rangle$$

We gebruiken twee twee bases: de standaard basis en de diagonale basis. We weten hoe de Hadamard poort de standaardbasis op de diagonale basis afbeeldt én andersom (zie fog. 4.1. Voor toestandsdiagram voor de **H**-poort (zie fig. **??** en de vergelijkingen daarbij).

Fotonen zijn quantumdeeltjes die bij uitstek geschikt zijn voor het quantuminternet. Polarisatie blijft goed behouden over zeer lange lange afstanden, en fotonen reizen lekker snel, met de lichtsnelheid. Je kunt gepolariseerde fotonen versturen onder elke gewenste polarisatierichting.

In deze communicatie zijn er twee partijen, Alice en Bob die op grote afstand van elkaar mogen staan. Ze gebruiken een quantumkanaal voor het verzenden van fotonen (glasvezelkabel), en een klassiek kanaal, een afluisterbare telefoon. Het quantumkanaal is éénrichting. Alice zendt een stroom fotonen fotonen naar Bob (één richting) ieder foton in een door haar geprepareerde polarisatie. Ze noteert precies wat ze doet. Bij ontvangst meet Bob de fotonen via een polarisatiefilter dat hij willekeurig standaard of diagonaal zet. Ook hij houdt nauwkeurig bij wat hij doet. Ze verbreken de quantumverbinding en bellen elkaar. Via dit klassieke kanaal spreken ze met elkaar af (bidirectioneel) het vervolg af. We werken deze stappen verder uit.

We weten uit **??** dat als we een foton bijvoorbeeld verticaal polariseren en het vervolgens door een verticaal filter laten gaan, het foton met *zekerheid* doorgelaten wordt, en dat het met *zekerheid* geblokkeerd wordt als er een horizontaal filter volgt. Het gedrag is volledig voorspelbaar, *deterministisch*. Als een verticaal gepolariseerd foton een door een filter gaat dat onder $45°$ (of $-45°$) staat, is er $50\,\%$ kans dat het er doorheen gaat.

Alice wil uiteindelijk een boodschap als een reeks klassieke bits naar Bob sturen. Klassieke bits hebben de waarde 0_b of 1_b. Ze houdt de volgende conventie aan:

bit	basis	pol	
logisch 0_b	$\oplus$	H	$\leftrightarrow$
logisch 0_b	$\otimes$	-	$\nwarrow\!\!\!\!\searrow$
logisch 1_b	$\oplus$	V	$\updownarrow$
logisch 1_b	$\otimes$	+	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$

Alice heeft dus twee mogelijkheden om een 0_b te sturen en twee mogelijkheden voor een 1_b. Als ze in de juiste basis worden waargenomen is het antwoord deterministisch. De informatie over haar eigen basiskeuze houdt Alice echter geheim. Alice heeft een string random bits gekozen en verzendt die ieder met een random basis.

Bob kan niet beter doen dan de binnenkomende fotonen meten volgens twee bases standaard (recht) en diagonaal. Bob kiest voor ieder foton een basis, en houdt nauwkeurig zowel de basiskeuze als het resultaat bij. Bob heeft geen idee of de basis waarmee hij meet dezelfde is als waarmee ze verzonden zijn. Ze verbreken daarna hun quantumverbinding. Hier onder een uitgewerkt voorbeeld;

Alice' random bits	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
Alice' basis	$\otimes$	$\oplus$	$\otimes$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\otimes$	$\otimes$	$\oplus$	$\oplus$
Alice verzendt	$\nwarrow\!\!\!\!\searrow$	$\updownarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Bob's basis	$\oplus$	$\oplus$	$\otimes$	$\oplus$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\oplus$	$\otimes$	$\oplus$
Bob's meting	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0

De rest van het protocol handelen ze af ze met de telefoon: Alice en Bob melden eerst welke bij Bob zijn overgekomen. Voor het gemak hier allemaal! Bob meldt Alice in welke basis hij heeft gemeten. Alleen als hun bases overeenkomen levert het zinnig informatie. De rest gooien ze weg.

Vraag: Hoeveel percent overeenkomst kun je verachten als er een groot aantal bits verstuurd wordt?

Ze weten nu over welke bits zij overeenstemming hebben zonder dat de data zelf is gecommuniceerd. Zij weten beiden bijvoorbeeld of een foton in de standaard basis horizontaal of verticaal was. Elk van de overgebleven fotonen bevat één bit informatie uit Alice' random bit string.

Bob's basis		$\oplus$	$\otimes$	$\oplus$			$\otimes$			$\oplus$
Bob's meting		1	1	0			1			0

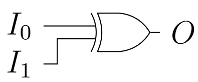
Afgeluisterd? Alice en Bob kunnen zijn afgeluisterd door Eve. Zij zou een foton door een filter kunnen leiden. Daarbij verliest het foton zijn eerdere informatie. Fotonen hebben geen geheugen. Ze kan het nooit meer terugzetten. Zij zou kunnen proberen een foton te versterken en dan een kopie uitlezen en het origineel doorsturen. Ook deze operatie is in tegenstrijd met de fundamenten van quantumtheorie [**wootters1982single**]. Alice en Bob testen of zij zijn afgeluisterd met een aantal goedgekeurde qubits (bijvoorbeeld een kwart van het totaal). Deze qubits kunnen ze verder niet gebruiken want ze zijn openbaar gemaakt.

Bob's publiceert			1				1			
Alice bevestigt:			OK				OK			

one-time pad

Ze kunnen concluderen dat hun transmissie niet ernstig is afgeluisterd, anders konden ze opnieuw beginnen. Dat de overgebleven bits kunnen gebruikt worden voor een one-time pad. Dit is een sleutel voor de enig bewezen methode die onbreekbare vercijfering mogelijk maakt. Daarvoor moet de code nog wel aan extra eisen voldoen. Kijk op de bron welke vier eisen daar genoemd worden.

Met het verkrijgen van de sleutel houdt het BB84 gedeelte van de encryptie op. De boodschap is een binaire reeks. De sleutel is precies even lang al de boodschap. De **XOR**-poort is een logische poort (zie par. **??**) met de volgende waarheidstabel (zie fig. 4.2).



I_1	I_2	O
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figuur 4.2: XOR-poort met waarheidstabel.

Alice **XOR**-'t haar boodschap met de sleutel en zendt deze data over.

Bob **XOR**-'t de boodschap met de sleutel. Wat is het resultaat?

Voordbeeld:

Alice' boodschap	1	0	0	1	0	1	0	0
Alice' sleutel	1	1	0	0	0	1	1	0
Alice verzendt	0	1	0	1	0	0	1	0
☎		⋮				⋮		
Bob ontvangt	0	1	0	1	0	0	1	0
Bob's sleutel	1	1	0	0	0	1	1	0
Bob leest	1	0	0	1	0	1	0	0

Hoeveel fotonen moet Alice versturen als zij de boodschap "Heb je vanavond wat te doen?"wil overzenden zonder dat het afgeluisterd kan worden? Om een letter over te zenden zijn acht bits nodig. De zwakke quantumverbinding verliest $20\,\%$ van de qubits.

4.2 Eerlijk quantummuntje

Een andere toepassing van het B84 protocol is deze quantumtoss. Alice en Bob hebben ruzie. Ze willen elkaar even niet zien. Wie mag met de auto weg? Ze bellen elkaar op. Bob ziet het al voor zich: Alice daagt uit tot een kop of munt spelletje over de telefoon. Zij vraagt kop of munt? Wat ik ook kies, zeg zegt gewoon wat haar uit komt. Ze liegt. Dat deed ze vorige keer ook. Ze vertrouwen elkaar even niet.

(De telefoon gaat). Bob: Ja?
(Alice): Alice hier. Kan ik de auto vanmiddag ...
(Bob): Nee
(Alice): Het is ook mijn auto! Laten we er om loten?
(Bob): Ok?
(Alice): Ik gooi een muntje op. Kop of munt?
(Bob): Ja zeg, net als vorige keer zeker.
(Alice): Vertrouw je me niet?
(Bob): Nee!

(Alice): Tsss
(Bob zucht): Ok, we doen het zo. We gebruiken een quantumbasis 'R' of 'D' in plaats van kop of munt.
Alice: Hmmm, ok dan.

Alice kiest een reeks random bits (bv $1\,$kbit) en één willekeurige basis, bijvoorbeeld "R". Ze kiest een codering ($H = 1_b$, $V = 0_b$).

Alice verstuurt haar reeks van gepolariseerde fotonen.

Bob kiest voor ieder foton dat hij ontvangt een basis, onafhankelijk en willekeurig voor elk foton.

Niet alle fotonen komen over, er zijn gaten in de ontvangstabel.

Na ontvangst Belt hij Alice en zegt welke basis zij heeft gekozen.

Als hij goed geraden heeft wint hij, anders verliest hij.

Alice meldt of Bob gewonnen of verloren heeft en zendt ter controle de reeks random bits waar zij mee begon.

Bob controleert de reeks tegen zijn tabellen. Er moet een perfecte match zijn met de tabel van Alice' basis, en een random relatie met de andere tabel.

4.3 Protocol: Superdense coding

In deze opdracht ga je onderzoeken hoe je door gebruik te maken van qubits, boodschappen kunt communiceren. Je kunt twee klassieke bits vervangen door één qubit. Dit heet *superdense coding*. De opdracht bestaat uit drie delen. Eerst zullen we superdense coding bekijken en is er een aantal opgaven. Daarna ga je zelf een klein quantum communicatiesysteem ontwerpen en programmeer je dit systeem in Quantum Inspire. Aan het eind van de opdracht, presenteer je je bevindingen.

Communiceren op een eiland

Alice woont alleen op een eiland. Ze heeft met niemand contact, behalve met Bob, die op het vasteland woont en die ze berichten kan sturen als er dingen op het eiland misgaan. In eerste instantie kan Alice alleen klassieke bits met Bob uitwisselen. Ze hebben de volgende codering afgesproken:

00 – SOS!
01 – Nieuw materiaal voor huis nodig
10 – Er is droogte/geen water op het eiland
11 – Er is geen voedsel op het eiland

Alice verstuurt de bits altijd één voor één naar Bob; eerst het bit dat achteraan staat en dan het voorste bit. Ze begint altijd met beide bits in 0 (00). Wanneer ze nieuw materiaal nodig heeft voor haar huisje, zal ze dus haar achterste bit eerst moeten flippen alvorens haar boodschap naar Bob te sturen. En als Alice voedsel nodig heeft, moet ze beide bits flippen. Alleen als Bob een volledige code ontvangt, kan hij Alice helpen. Immers, als Bob enkel een 0 ontvangt en het tweede bit ontbreekt, kan dat ofwel 'SOS', ofwel 'water nodig' betekenen. Om een boodschap over te laten komen, *moet* Alice dus twee bits versturen.

Dan hoort Bob over qubits en verstrengeling van Julia. Alice en Bob besluiten daartoe om over te stappen op quantumcommunicatie. Om dit mogelijk te maken, delen ze twee volledig verstrengelde qubits in een van de Bell-toestanden. De Bell-toestanden zijn:

G: $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
H: $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
J: $\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$
K: $\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$

Alice en Bob delen de eerste Bell toestand G: $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$. Alice krijgt de eerste (rode) qubit, Bob houdt de tweede (blauwe) qubit. Door poorten op haar qubit toe te passen, kan Alice van toestand G in een van de andere Bell-toestanden komen. Als Alice bijvoorbeeld een X-poort op haar qubit toepast, delen Bob en zij toestand J, zonder dat Bob iets met zijn qubit heeft gedaan. En om toestand H te krijgen, hoeft Alice alleen een Z-poort op haar qubit toe te passen. Alice en Bob zouden nu hun vier verschillende boodschappen aan de Bell-toestanden kunnen hangen (maakt Alice de toestand G, dan betekent dat 'SOS', etc.) Door haar qubit te roteren, kan Alice elke Bell-toestand maken die ze wil. Vervolgens stuurt Alice haar qubit naar Bob. Bob meet het verstrengelde paar en weet welke boodschap Alice wilde overbrengen. Het bijzondere hieraan is dat Alice in dit geval slechts één qubit hoeft te versturen om dezelfde boodschap over te brengen waarvoor ze met klassieke communicatie *twee* bits nodig had. Vandaar de naam voor dit protocol!

a) toesta
te isolere
ontbingi

Opdracht 4.1

- **a.** Laat zien dat toestand G inderdaad verstrengeld is.
- **b.** Teken het schema om van twee losse qubits in de toestand $|0\rangle$ in verstrengelde toestand (G) te komen.
- **c.** Welke quantumpoort(en) moet Alice op haar qubit toepassen om de toestand K te krijgen?
- **d.** Kan één qubit nu twee bits aan informatie opslaan?
- **e.** Zou dit schema ook werken als Alice en Bob twee qubits hadden die niet verstrengeld waren? Waarom wel/niet?
- **f.** In het teleportatieprotocol van hoofdstuk drie heb je gezien dat er een klassiek kanaal nodig is om een quantumtoestand (quantumboodschap) over te brengen. Wat voor kanaal (klassiek/quantum) wordt er bij superdense coding gebruikt en wat voor boodschap (klassiek/quantum)?

g. Bob zou de qubits kunnen meten in een speciale Bell-basis, maar hij besluit de qubits te meten in de $|0\rangle/|1\rangle$-basis. Hiertoe moet hij de verstrengelde toestand terugbrengen tot twee losse qubits. Het protocol om dit te doen is precies tegenovergesteld aan het protocol om twee qubits te verstrengelen. Teken het schema en laat zien dat Bob op deze manier inderdaad de qubits kan decoderen en de boodschap kan ontcijferen. Welke boodschap hoort dus bij welke Bell-toestand?

Uitgebreidere communicatie

Alice vindt haar communicatiemogelijkheden met Bob maar gelimiteerd. Ze wil graag meer boodschappen kunnen overbrengen. Ze stelt daarom aan Bob voor om drie verstrengelde qubits te delen (dit heet een GHZ toestand):

$$M : \alpha\,|000\rangle + \beta\,|111\rangle$$

Hier kan Alice 8 boodschappen mee versturen ($2^3 = 8$). Bedenk nu zelf een schema waarbij Alice deze acht boodschappen kan versturen. Denk hierbij aan het volgende:

- Schrijf de 8 GHZ toestanden uit gemaakt kunnen worden.
- Teken het schema om drie qubits die beginnen in de toestand $|0\rangle$ in de GHZ-toestand M te krijgen.
- Teken het schema om drie qubits die beginnen in de toestand $|0\rangle$ in een willekeurige andere GHZ-toestand te krijgen.
- Hoeveel van deze GHZ-toestanden kan Alice maken als ze zelf de eerste qubit heeft en Bob de laatste twee?
- Hoeveel van deze GHZ-toestanden kan Alice maken als ze zelf de eerste twee qubits heeft en Bob de laatste?
- Als Alice zelf twee qubits heeft, welke poorten zij dan toepassen op toestand M om naar de andere GHZ toestanden te komen?
- Beschrijf hoe het protocol werkt als Alice twee qubits heeft en Bob één. Teken het schema, inclusief het maken van de GHZ-toestand en het decoderen en uitlezen ervan door Bob.

Opdracht 4.2

We gaan nu kijken of alle voorspellingen kloppen door het protocol te bouwen op Quantum Inspire. Open hiertoe Quantum Inspire en voer de volgende opdrachten uit:

- Bouw het protocol waarbij Alice en Bob een Bell-toestand delen (je kunt hiervoor zelf kiezen welke van de twee quantumchips je gebruikt). Bouw het hele protocol, begin met twee qubits in $|0\rangle$, maak hiervan een verstrengeld paar, verzin welke boodschap je wilt versturen, voer Alice's handelingen uit en decodeer de toestand alvorens je deze meet. Doe dit voor alle vier de boodschappen. Zijn de uitkomsten zoals je verwachtte?
- Bouw het protocol waarbij Alice en Bob een GHZ-toestand delen, waarbij Alice begint met 2 qubits en Bob met 1 qubit, je kunt dus 8 boodschappen versturen (je moet hiervoor de quantumchip met 5 qubits gebruiken). Bouw het hele protocol; verstrengel de drie qubits, codeer een boodschap, decodeer de boodschap en meet de qubits. Doe dit voor alle acht de boodschappen. Zijn de uitkomsten zoals je verwachtte?
- Bouw een protocol waarbij Alice en Bob twee Bell-toestanden delen. Van beide toestanden heeft Alice de eerste qubit en Bob de tweede qubit (je moet hiervoor de quantumchip met 5 qubits gebruiken). Bouw opnieuw het hele protocol, van het verstrengelen van beide paren en het coderen van de boodschap tot het decoderen van de boodschap en het meten van de qubits. Hoeveel boodschappen kan Alice nu versturen en hoeveel qubits heeft ze naar Bob gestuurd?
- Vind je het efficiënter als Alice en Bob een GHZ-toestand delen, of twee verstrengelde paren?

4.4 Quantum en maatschappij

> Quantumtechnologie is een sleuteltechnologie die radicaal nieuwe producten en diensten mogelijk maakt. Quantumcomputers, quantumsimulators, quantumnetwerken en quantumsensoren kunnen straks dingen die 'klassieke' apparaten niet kunnen. [...] We staan daarmee aan het begin van een technologierevolutie die verwacht wordt een grote bijdrage te leveren aan het oplossen van maatschappelijke uitdagingen op het gebied van bijvoorbeeld energie, voedsel en zorg. Nederland doet mee in de wetenschappelijke en technologische voorhoede van de ontwikkelingen en wereldwijd wordt er door overheden en bedrijven fors geïnvesteerd in quantumonderzoek en -innovatie.

Zo begint het rapport van de Nationale Agenda Quantumtechnologie, opgesteld in september 2019 in opdracht van het Ministerie van Economische Zaken en Klimaat, is het duidelijk: de quantumcomputer komt er aan. In een opdracht over de maatschappelijke impact van deze tweede quantumgolf (de eerste vond plaats in het begin van de twintigste eeuw) mag een gedachtewisseling over deze ontwikkelingen niet ontbreken. In opdracht 4.3 lezen we de Nationale Agenda door.

Opdracht 4.3

Voor deze opdracht moet je gebruik maken van internet. Je doet de opdracht met zijn tweeën.

a. Download de Nationale Agenda

b. De Nationale Agenda noemt behalve de quantumcomputer nog drie andere toepassingen van quantumtechnologie in bovenstaand citaat. Zoek in de brochure op wat deze technologieën inhouden.

Nationale Agenda

In **hoofdstuk 1** vind je een overzicht van de inhoud van de brochure.

c. Geef in trefwoorden de inhoud van de brochure van de verschillende hoofdstukken.

Hoofdstuk 2 geeft de vier belangrijkste toepassingsgebieden die ook voor het Europese Quantum Flagship van belang zijn. Bij de beschrijving van deze vier toepassingsgebieden worden belangrijke details vermeld.

d. Wat is het verschil tussen universele quantumcomputers en quantumsimulatoren?
e. Wat is een hybride quantumsimulator?
f. Wat zijn de voordelen van quantumcommunicatie op wereldschaal?
g. Welke domeinen kunnen profiteren van quantumsensing?

Hoofdstuk 3 gaat over de relatie tussen quantumtechnologie en maatschappij. In figuur 7 van de module is die relatie in kaart gebracht.

h. Geef aan op welke maatschappelijke terreinen quantumtechnologie een rol gaat spelen. Geef voor elk terrein een voorbeeld van een toepassing.

Hoofdstuk 4 brengt de positie van Nederland op quantumgebied in kaart. Daarbij wordt ook aandacht gegeven aan Nederlandse kennisinstellingen en universiteiten.

i. Geef bij figuur 7 voor elk van de maatschappelijke terreinen één universiteit/kennisinstelling aan die op dat terrein actief is.

Hoofdstuk 5 beschrijft vier lijnen waarop moet worden geacteerd en drie katalysator-programma's.

j. Noem de vier lijnen en beschrijf de drie programma's.

Hoofdstuk 6 gaat over de Nederlandse overheid.

k. Geef met twee werkwoorden aan wat de Nederlandse overheid volgens de brochure moet doen.

Wat gaat de gemiddelde burger merken van de quantumcomputer?

De quantumcomputer zal de gewone PC niet gaan vervangen. De digitalisering die overal om ons heen plaats vindt gaat gewoon door. En daarbij wordt gebruik gemaakt van bits en niet van qubits. Niettemin is uit het voorgaande ook op te maken dat de wereld om ons heen gaat veranderen door de komst van de quantumcomputer. Er wordt zelfs gesproken van een nieuwe technologische revolutie. In opgave 4.4 doe je een poging om in kaart te brengen hoe die revolutie er uit gaat zien.

Opdracht 4.4

Maak aan de hand van de teksten en interviews in het voorgaande een overzicht van alle mogelijke ontwikkelingen op het gebied van de quantumtechnologie.

a. Begin met de Nationale Agenda, hoofdstuk 3, figuur 7. Denk na over de wijze waarop je de ontwikkelingen in kaart brengt. Maak eventueel gebruik van een matrix om overzicht te krijgen.
b. Loop de andere bronnen langs om te kijken of er nog waardevolle aanvullingen zijn.

De Nationale Agenda voor Quantumtechnologie is zelfverzekerd; de quantumcomputer gaat er komen. Dat verwacht je ook van zo'n rapport. Er is inmiddels ook al 615 miljoen Euro uitgetrokken voor een nationaal groeifonds. Het rapport besteedt ook aandacht aan maatschappelijke aspecten. Aan onderzoek wordt de eis gesteld het ethisch getoetst is, en een gebrek aan maatschappelijk draagvlak kan een spaak in het wiel steken.

nationaal groeifonds

In opdracht 4.5 onderzoeken we of deze nieuwe sleuteltechnologie de mensheid tot dienst zal zijn.

Opdracht 4.5

Is de komst van de quantumtechnologie wenselijk of niet? De bedoeling is om je eerste gedachten hierover op te schrijven op een half A4-tje. De bedoeling is dat je dit in je eentje doet. Het papier blijft verder ook in jouw bezit en wordt niet openbaar gemaakt.

a. Geef een voorlopig antwoord op de vraag.
b. Zet puntsgewijs je argumenten pro of con op papier.
c. Zet ook je twijfels op papier.

In zijn boek "The Wizard and the Prophet"[**mann2018wizard**] beschrijft Charles Mann het debat over de uitdagingen waar de mensheid voor staat: voedsel, water energie en klimaatverandering. Hij maakt een indeling in tovenaars en profeten.

De *tovenaars* wijzen op onze vindingrijkheid. Het is werkelijk ongelooflijk waartoe de mens in staat is.

De *profeten* wijzen erop dat er natuurlijke grenzen zijn aan de aarde die we niet kunnen en mogen overschrijden.

Het onderscheid tussen tovenaars en profeten vinden we ook in andere technologische revoluties terug. Er is een discussie tussen twee kampen. Het ene kamp (de profeten) wil de mens beschermen tegen de techniek en vreest dat de techniek een bedreiging vormt voor de autonomie van de mens. Profeten zijn bang dat de techniek de menselijke maat overstijgt en zo de menselijke soevereiniteit ondermijnt. Ze zullen wijzen op de afhankelijkheid van de mens van bijvoorbeeld de digitale hulpmiddelen. Het andere kamp (de tovenaars) wijst veel sneller naar het nut van de techniek. Voor de tovenaars zijn technische middelen alleen maar mogelijkheden die het menselijk bestaan vergemakkelijken. De autonomie van de mens wordt dus vergroot want hij krijgt meer tijd voor andere dingen.

Filosofie over techniek en maatschappij

Je zult je zelf meestal niet als $100\,\%$ tovenaar of profeet zien. Het zal niet voor elke technologie hetzelfde zijn, en je beeld verandert in de tijd. Weinig mensen zullen zich als profeet zien waar het de boekdrukkunst betreft. (Dat lag destijds overigens wel even anders!). En weinig mensen zullen zich als tovenaar zien bij het idee van Elon Musk om een searchchip in het brein te implanteren om daarmee het zoeken op internet te vergemakkelijken (neuralink). Maar toch: dit soort technologie kan heel belangrijk zijn voor mensen met een totale verlamming en die alleen via dit soort technologie kunnen communiceren. De indeling profeet/tovenaar is bij één technologie kennelijk al niet ondubbelzinnig. Het is een graduele schaal. de methode van opgave 4.6 geeft meer inzicht.

neuralink

Opdracht 4.6

Bij deze opdracht ga je bij een groot aantal technologische oplossingen voor een welomschreven behoefte jezelf indelen in de categorie profeet of tovenaar.

a. Zelf bedenk je één zo'n case. Het moet gaan om een moderne technologie (dus geen boekdrukkunst!). De technologie moet ergens beschreven staan samen met een mogelijke toepassing. (De implantchip voor communicatie voor patiënten met verlamming is een kandidaat maar de chip voor Googlesearch is wel een andere!).

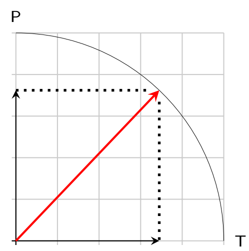
b. Stel samen met de cases van andere leerlingen een lijst op.

Ten behoeve van de indeling is een demarcatielijn nodig. Kies hier: bij ernstige niet-technologische twijfel aan de voorgestelde oplossing ben je profeet anders tovenaar. Het gaat dus niet om de technische realiseerbaarheid maar om de wenselijkheid van de technologie.

c. Deel jezelf volgens bovenstaand criterium in bij elk van de cases uit de lijst .

d. Verzamel de resultaten. Hoe vaak was je tovenaar? Hoe vaak profeet?

net als in hoofdstuk 2 van de module kun je je eigen toestand weergeven met een vector. Dat betekent natuurlijk niet dat het hier over quantum gaat!



e. Stel het diagram op.

f. Ben je meer tovenaar of toch meer profeet?

g. Is het onderscheid tovenaar/profeet zinvol?

Het voorgaande heeft hopelijk duidelijk gemaakt dat in ieder mens zowel een profeet als een tovenaar schuilt. Een genuanceerde mening biedt plaats voor beide er is sprake van een spectrum. Dat maakt het moeilijker maar ook uitdagender.

gesprek over quantum

De quantumtechnologie gaat er komen. Welke gevaren brengt quantumtechnologie met zich mee? Welke eisen stelt de komst van quantumtechnologie aan de maatschappij? Kan deze technologische ontwikkeling worden gestuurd? Om antwoord op dat soort vragen te vinden moet er gepraat worden. Maar het debat is daarvoor niet het geëigende instrument. Bij het debat heb je kampen. Er wordt strijd gevoerd. Je moet partij kiezen. Het debat met als enige uitkomst: voor (tovenaars) of tegen (profeten) heeft een verlammende werking. Een veel betere aanpak is het socratisch gesprek. Hier gaat het er niet om je gelijk te halen of om een overwinning te boeken. Hierin draait het om nieuwsgierigheid naar de opvattingen van de ander. Zijn er verschillen of overeenkomsten met je eigen opvattingen? Het onderscheid tovenaar-profeet is dan geschikt om een zaak van twee kanten te bekijken. Een socratisch gesprek over quantumtechnologie vormt het doel van opgave 4.7.

Opdracht 4.7

Bestudeer je notities die je gemaakt hebt over jouw opvattingen over quantumtechnologie. In opdracht 3. Ben je meer profeet of meer tovenaar.? Vorm een gespreksgroep van 3 tot 5 personen. Zoek een samenstelling met zowel profeten als tovenaars. Ga het gesprek aan over de wenselijkheid van quantumcomputing Voer het gesprek in drie fasen:

a. Bespreek eerst de voordelen van quantumcomputing: vergeet vooral niet door te vragen. Is de QC sneller? Is dat belangrijk? Waarom. . . etc.
b. Bespreek de nadelen van quantumcomputing.
c. Bespreek welke eisen de komst van quantumcomputing stelt aan de maatschappij.

Een socratisch gesprek kent geen beslissingen. Meningsverschillen worden niet beslecht. Maar dat betekent niet dat er niet een gemeenschappelijke afsluiting mogelijk is. Daarvoor dient opgave 4.8.

Opdracht 4.8

Bereid met je gespreksgroep een presentatie voor met als doelstelling de uitdaging van het quantumtijdperk in beeld te brengen. De presentatie kan bestaan uit een poster, een verslag, een filmpje of ieder andere creatieve uiting.

4.5 Hilbertruimtes

Aan het einde van de negentiende eeuw en in het begin van de twintigste eeuw werd er door veel wiskundige onderzoek gedaan naar abstracte vectorruimtes. Een van de mensen die dit onderzocht van David Hilbert (1862-1943), hij was zeer geïnteresseerd in zogenoemde L^p-ruimtes. Later heeft John von Neumann (1903-1957) zijn werk veralgemeniseerd naar abstracte vectorruimtes en heeft de Hilbertruimtes naar hem vernoemd.

Hilbertruimtes zijn belangrijk voor het begrijpen van quantumtheorie. Ze bieden een manier om op een abstractere manier over dingen te denken met behulp van vectoren. Zo kan je ze gebruiken om de "lengte"van een functies te berekenen of zelfs de stelling van Pythagoras te gebruiken voor functies.

Het standaard inproduct

We beginnen met een korte herhaling van het al bekende inproduct. Voor twee vectoren in het vlak $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ is het standaard inproduct

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Op dezelfde manier kan je het inproduct nemen van twee n-dimensionale vectoren.

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan dan is het inproduct 0, we zeggen dan dat de vectoren orthogonaal op elkaar staan.

Je kan de lengte van vector x berekenen met het inproduct door $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

Opdracht 4.9

a. Laat $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bereken $x \cdot y$.

b. Ga na dat $(x + z) \cdot y = x \cdot y + z \cdot y$.

c. Vind twee vectoren die orthogonaal staan op $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Het complexe geval

Voor complexe vectoren kan je proberen het standaard inproduct op dezelfde manier te definiëren. Dit gaat mis omdat je lengtes krijgt die complex zijn. Kijk bijvoorbeeld naar de vector $x = (i)$ dan zou $\sqrt{i^2} = i$ de lengte van x zijn, terwijl de lengte duidelijk 1 is.

Om wel van lengtes te kunnen spreken is het standaard complex inproduct als volgt gedefinieerd:

$$\langle x, y \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

waarin $\overline{y_1}$ de complex geconjugeerde is van y_1. Ga na dat $||i|| = \sqrt{\langle i, i \rangle} = 1$.

Als voorbeeld berekenen we het inproduct van $x = \begin{pmatrix} 1 + 5i \\ -2 + i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} -7i \\ 4 + 3i \end{pmatrix}$:

$$\langle x, y \rangle = (1 + 5i)(7i) + (-2 + i)(4 - 3i) = -40 + 7i$$

Net als bij reële vectoren kunnen we ook van complexe getallen (niet de nulvector) zeggen of ze orthogonaal op elkaar staan. Maar pas op: Het is heel moeilijk, zo niet onmogelijk, om complexe vectoren te visualiseren.

Opdracht 4.10

a. Bereken $\langle x, y\rangle$ in:

$$a.\ x = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c.\ x = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5+i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4+2i \end{pmatrix}$$

$$b.\ x = \begin{pmatrix} 2i \\ 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -3i \\ i \end{pmatrix} \quad d.\ x = \begin{pmatrix} 4+7i \\ 5-4i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 6-3i \\ 1+8i \end{pmatrix}$$

b. Bereken de lengte van x in:

$$a.\ x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c.\ x = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

$$b.\ x = \begin{pmatrix} -i \\ 3i \end{pmatrix} \qquad d.\ x = \begin{pmatrix} 3-7i \\ -2+6i \end{pmatrix}$$

c. Ga na dat $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+4i \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaal op elkaar staan.

d. Laat zien als $x = \begin{pmatrix} i \\ 3-i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 4 \end{pmatrix}$ dat $\langle x, y\rangle$ niet gelijk is aan $\langle y, x\rangle$ maar aan $\overline{\langle y, x\rangle}$.

Hilbertruimtes

Vectoren worden vaak gezien als (eindige) rijtjes getallen, maar er zijn veel meer dingen die zich hetzelfde gedragen. Een voorbeeld hiervan zijn (reële) functies. Net als normale vectoren kan je functies optellen en met een getal vermenigvuldigen (vaak aangegeven met λ) om een nieuwe functie te krijgen. Ook heb je de functie $f(x) = 0$, de nulfunctie, die net als de nulvector niks doet bij optelling. De (reële) functies vormen een zogenoemde (reële) vectorruimte.

Een Hilbertruimte is een (volledige) complexe vectorruimte met een inproduct zodat:

- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (de complex geconjugeerde van $\langle y, x\rangle$),
- $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z\rangle = \lambda_1\langle x, z\rangle + \lambda_2\langle y, z\rangle$ (λ_1, λ_2 zijn complexe getallen),
- $\langle x, x\rangle$ is een reëel getal en $\langle x, x\rangle \geq 0$,
- Als $\langle x, x\rangle = 0$ dan $x = 0$.

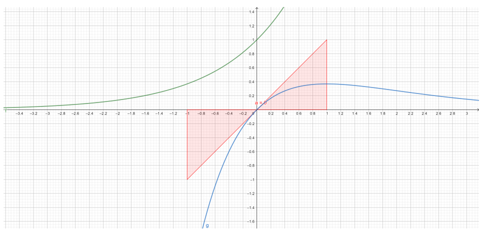
Deze eigenschappen zijn makkelijk af te leiden aan de hand van het inproduct van de vorige paragraaf en vormen een basis voor inproducten van vector ruimtes. Zo kan je dus functie met elkaar "vermenigvuldigen"zodat er een getal uit komt. **Voorbeeld:** Als we kijken naar continue functies met als inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

met $\overline{g(x)}$ is de complex geconjugeerde van $g(x)$, bijvoorbeeld $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$.
Als $f(x) = e^x$ en $g(x) = xe^{-x}$ (dus $\overline{g(x)} = g(x)$) dan geldt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{-1}^{1} xdx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

We zeggen x, y staan orthogonaal op elkaar (in een Hilbertruimte)



Figuur 4.3: groen: f(x), blauw: g(x), rood: $\langle f, g\rangle$

als $\langle x, y\rangle = 0$.
De twee functies in het voorbeeld staan dus orthogonaal op elkaar. Functies die orthogonaal op elkaar staan hoeven elkaar dus niet loodrecht te snijden.

In een Hilbertruimte wordt de lengte van x gegeven door $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Voorbeeld: De lengte van $f(x) = -3ix^4+5x^2+10i$ is $\sqrt{\langle f, f\rangle}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3ix^4 + 5x^2 + 10i)(3ix^4 + 5x^2 - 10i)dx \\
&= \int_{-1}^{1} 9x^8 + 35x^4 + 100dx \\
&= \left[x^9 + 7x^5 + 100x\right]_{-1}^{1} = 216
\end{aligned}$$

Dus $||f|| = \sqrt{216}$.

Opdracht 4.11

Laat het inproduct voor continue functies (die een reëel getal sturen naar een complex getal, bijvoorbeeld e^{ix}) gegeven zijn door

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

met $\overline{g(x)}$ is de complex geconjugeerde van $g(x)$, bijvoorbeeld $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$.
Bereken $\langle f, g\rangle$.

a. Bereken $\langle f, g\rangle$,

$$\begin{aligned}
&a. & f(x) = x + 4, g(x) = x^2 + 7 \\
&b. & f(x) = x^5 + ix + 7, g(x) = 3x^3 + 2ix \\
&c. & f(x) = \cos(x), g(x) = \tan(x) \\
&d. & f(x) = e^{2\pi ix}, g(x) = e^{4\pi ix}
\end{aligned}$$

b. Gebruik hetzelfde inproduct als in de vorige opgave. Bereken $||f||$,

$a.\ f(x) = 5x + 1$ $\qquad$ $c.\ f(x) = 6e^x$

$b.\ f(x) = 2ix^3 + 4x + 1$ $\qquad$ $d.\ f(x) = e^{2\pi ix}$

Opdracht 4.12

Laat het inproduct voor 2-dimensionale reële vectoren gegeven zijn door

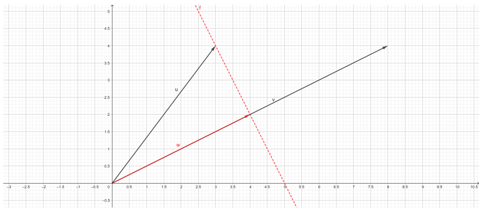
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

a. Wanneer geldt $x_1y_1+(x_2-x_1)(y_2-y_1) = x_1y_1+x_2y_2$. (geef een voorbeeld).

b. Bereken $\langle x, y\rangle$ voor $x = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, en concludeer dat ze orthogonaal op elkaar staan.

c. Laat zien dat x en y niet loodrecht op elkaar staan (hoek van $90°$).

Projectie: In een Hilbertruimte wordt de projectie van x op y (allebei niet nul) gegeven door $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y$.



Figuur 4.4: w is de projectie van u op v (met behulp van een loodlijn).

Dus de projectie van x op y is altijd in de vorm $\lambda \cdot y$ met λ een getal.

Opdracht 4.13

a. Bereken de projectie (met het standaard inproduct) van $x = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ op $y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (dit is de projectie van x op de x-as).

b. Laat het inproduct voor reële functies

$$\langle f, g \rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$$

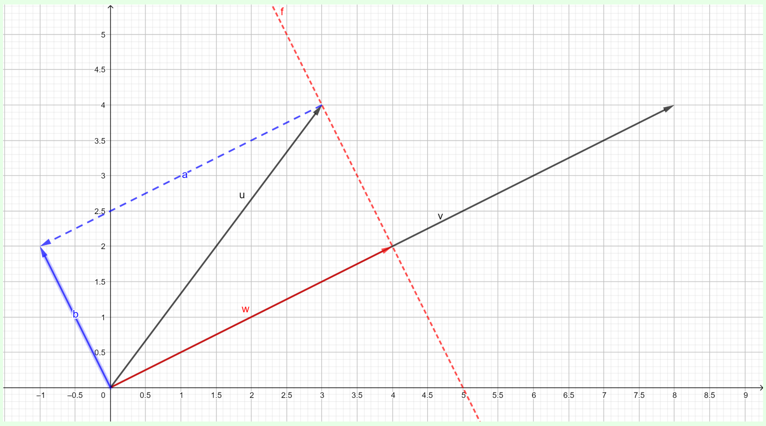
Laat $f(x) = \frac{e^x}{x}, g(x) = x^3 + 4x^2$ en $h(x) = x$. Bereken de projectie van $f(x)$ op $h(x)$, en bereken de projectie van $g(x)$ op $h(x)$

c. Schets de functies gevonden bij **b.**.

d. Laat zien dat de projectie van x op x gelijk is aan x.

Opdracht 4.14

Stel je hebt x en y (met x niet een veelvoud van y) dan kan je z vinden zodat z en y orthogonaal op elkaar staan. Een manier om dit te doen is de projectie van x op y uitrekenen en die van x aftrekken. Dit geeft de formule $z = x - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y$.



Figuur 4.5: b=u-w en inderdaad b staat loodrecht op v.

a. Gebruik deze methode (met het standaard inproduct) om een orthogonaal element te vinden van $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

met behulp van $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ga na of de gevonden vector ook echt orthogonaal staat op y.

b. Laat het inproduct en de functies hetzelfde zijn als bij **b**. van odracht 4.13. Vind twee functies die orthogonaal staan op h.

c. Schets de functies gevonden bij **b**..

Opdracht 4.15

Pythagoras: We gaan in deze opgave laten zien dat de stelling van Pythagoras geldt in elke Hilbertruimte.

a. Laat zien dat voor elk inproduct geldt $\langle x, \lambda_1 y + \lambda_2 z\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x, y\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, y\rangle$ met λ_1, λ_2 complexe getallen. (hint: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$)

b. Schrijf $||x + y||^2$ uit en concludeer $||x + y||^2 = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

c. Laat zien dat als $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$ (dus x en y orthogonaal op elkaar staan) dat dan $||x+y||^2 = ||x||^2+||y||^2$ (de stelling van Pythagoras).

Hilbert ruimten en Fourier analyse zijn twee van de vele wiskundige pijlers waarop de wiskunde van quantumcomputing is gebouwd. I

4.6 Fourieranalyse

In de quantumtheorie spelen golven een belangrijke rol. Fourieranalyse probeert functies te koppelen aan golven. Voor de sinus is dat natuurlijk niet moeilijk want dat is al een golf maar met Fourieranalyse kan je bijna alle functies zien als de som van golven, zelf functies zoals $\frac{1}{2}x$ kan je door maar een paar sinusoïdes bij elkaar op te tellen erg goed benaderen. Ter voorbereiding hiervan zullen we eerst kijken naar een simpelere benaderingsmethode.

Taylorreeksen

Zoals eerder gezegd kan je functies zien als vectoren (rijtjes getallen), in deze paragraaf laten we zien waarom dit zo is. We gaan proberen elke functie als een polynoom (bijvoorbeeld x^4+3x^2+17) te schrijven. Een voordeel hiervan is dat je door de eerste paar termen van het polynoom uit te rekenen je een zeer goede benadering krijgt van de functie (die makkelijk integreerbaar is). Voor een functie als $f(x) = x^9 + 5x^4 + 7$ is dat zeer makkelijk want dat is al een polynoom. We gaan het nu proberen $f(x) = e^x$ te schrijven als het polynoom

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Omdat $f(x) = g(x)$ en $f(0) = 1$ geldt $g(0) = a_0 = 1$. Om a_1 uit te rekenen is het niet handig om een ander punt invullen want

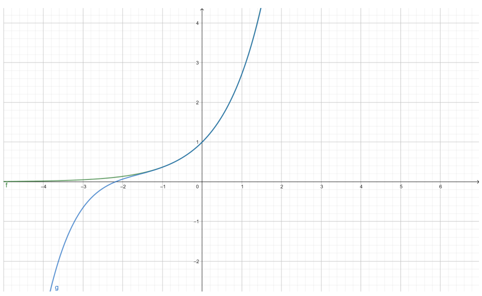
$$g(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

dit geeft geen makkelijke manier om a_1 uit te rekenen. Dus we gebruiken de afgeleide $f'(x) = e^x$ dus $f'(0) = 1$ maar

$$g'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

dus $g'(0) = a_1 = 1$. Op dezelfde manier kan je door de afgeleide van $f'(x)$ (dus $f''(x)$) gebruiken om $a_2 = \frac{1}{2}$ te vinden. Als je de eerste 6 termen uitrekent krijg je:

$$g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$



Je ziet rond 0 dat g een goede benadering is van f, als je meer termen toevoegt zal de benadering steeds beter worden en als je

oneindig veel termen hebt zijn g en f gelijk.
De algemene formule van een Taylorreeks (rond 0) voor een functie f is

$$g(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

Hierbij is $f^{(n)}(0)$ de $n-$de afgeleide in 0 dus $f^{(2)}(0) = f''(0)$ en $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ dus $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $(0! = 1)$.
We bekijken weer $f(x) = e^x$ omdat ook $f'(x) = e^x$ geldt $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ dus

$$g(0) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

Je kan dus e^x zien als de rij getallen $(1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots)$.

Opdracht 4.16

a. Bereken de eerste 4 termen van de Taylorreeks van de volgende functies en plot f en g

a. $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 12x + 3$ *c.* $f(x) = 2e^{2x}$

b. $f(x) = \sin(x)$ *d.* $f(x) = e^{x^2}$

Als je een Taylorreeks probeert te maken van $f(x) = \frac{1}{x}$ heb je een probleem want $f(0)$ is niet gedefinieerd.

b. Vervang x door $x = y+1$ en bereken $f^{(1)}(y)$, $f^{(2)}(y)$ en $f^{(3)}(y)$.

c. Bepaal de eerste 4 termen van de Taylorreeks van $f(y)$.

d. Substitueer $y = x - 1$ in de Taylorreeks en plot f en g

e. Gebruik de zelfde truc om een benadering te maken (4 termen) van $f(x) = \ln(x)$.

Fourierreeksen

In deze paragraaf gaan we een andere benadering vinden van (periodieke) functies aan de hand van sinusoïde. Hiervoor gebruiken we het volgende inproduct:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Als benadering voor de functie f gebruiken we nu de volgende functie

$$\begin{aligned} g(x) =& a \\ &+ b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \dots \\ &+ c_1\cos(x) + c_2\cos(2x) + c_3\cos(3x) + \dots \end{aligned}$$

Als we proberen a uit te rekenen (op dezelfde manier zoals bij Taylorreeksen) komen we in de problemen want als $\sin(x) = 0$ dan $\cos(x) \neq 0$. Daarom gebruiken we dat als $f = g$ dat dan de projectie P op $h(x) = 1$ voor f en g hetzelfde zijn.

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\langle g, h\rangle}{\langle h, h\rangle}h \\ &= \langle a, h\rangle + \langle b_1\sin(x), h\rangle + \langle c_1\cos(x), h\rangle + \dots \end{aligned}$$

maar omdat $h(x) = \cos(0x)$ is h een sinusoïde dus staat h orthogonaal op alle andere sinusoïde. Dus

$$\begin{aligned} P(x) &= \langle a, h\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a dx = a \end{aligned}$$

Ook geldt

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\langle f, h\rangle}{\langle h, h\rangle}h \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \end{aligned}$$

Dus

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \langle f, 1\rangle$$

.

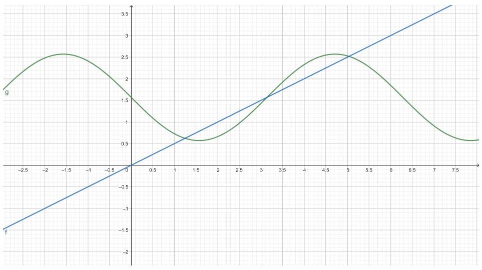
Op dezelfde manier geldt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = 2\langle f, \sin(nx)\rangle \\ c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 2\langle f, \cos(nx)\rangle. \end{aligned}$$

Als voorbeeld bekijken we $f(x) = \frac{1}{2}x$ dan geldt

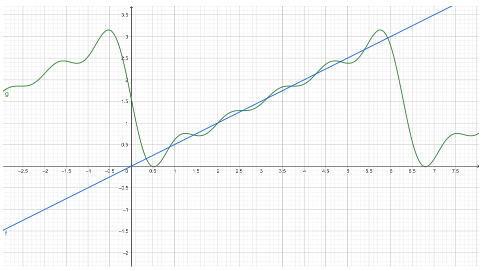
$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -1 \\
c_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Dus we krijgen als benadering $g(x) = \frac{\pi}{2} - \sin(x)$.



Zoals je ziet is het nog niet zo 'n goede benadering. Als je b_2 tot en met b_5 en c_2 tot en met c_5 uitrekent krijg je

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{1}{5}\sin(5x)$$



Dit is al een veel betere benadering, maar alleen in het interval $(0, 2\pi)$ daarna herhaalt de grafiek zich. Dit blijft het geval hoeveel termen je ook uitrekent daarom is deze manier juist geschrikt voor herhalende functies.

Opdracht 4.17

a. a. Laat zien $\int \sin(2x)\cos(x)dx = -\frac{2}{3}\cos^3(x)$.
b. Laat zien dat $\sin(2x)$ en $\cos(x)$ orthogonaal op elkaar staan (met het hierboven genoemde inproduct).

b. Bereken a, b_1, b_2, c_1 en c_2 van de Fourierreeks van de volgende functies (met behulp van je GR) en plot f en g.

$$a.\ f(x) = x^2 - x - 1 \qquad c.\ f(x) = e^x$$
$$b.\ f(x) = \tan\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \qquad d.\ f(x) = \frac{1}{x+1}$$

We kunnen ook een ander inproduct nemen voor een fourierreeks. Beschouw

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Net als hiervoor zoeken we een benadering voor een functie f en die benadering is nog steeds

$$\begin{aligned} g(x) =& a \\ & + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \ldots \\ & + c_1\cos(x) + c_2\cos(2x) + c_3\cos(3x) + \ldots \end{aligned}$$

c. Laat zien met behulp van projectie dat $a = \langle f, 1\rangle$.

Er geldt $b_n = \langle f, \sin(nx)\rangle$ en $c_n = \langle f, \cos(nx)\rangle$.

d. Bereken a, b_1, b_2, c_1 en c_2 van de Fourierreeks van de volgende functies (met behulp van je GR) en vergelijk met de antwoorden gevonden bij opgave 2.

$$a.\ f(x) = x^2 - x - 1.$$
$$b.\ f(x) = e^x.$$

Fouriertransformaties hebben tal van toepassingen in het dagelijks computerleven. Bijvoorbeeld in geluids- en beeldverwerking. Quantum Fouriertransformaties zijn ook een essentiele stap in het algoritme van Shor, waarmee grote getallen kunnen worden ontbondne in priemfactoren. Je begrijpt dat de bancaire sector en internet giganten in dit vakgebied belangrijke spelers zijn.