1 Hilbertruimtes

Aan het einde van de 19e eeuw en in het begin van de 20e eeuw werd er door veel wiskundige onderzoek gedaan naar abstracte vectorruimtes. Een van de mensen die dit onderzocht van David Hilbert (1862-1943), hij was zeer geïnteresseerd in zogenoemde L^p ruimtes. Later heeft John von Neumann (1903-1957) zijn werk veralgemeniseerd naar abstracte vectorruimtes en heeft de Hilbertruimtes naar hem vernoemt.

1.1 Het standaard inproduct

We beginnen met een snelle herhaling van het al bekende inproduct. Voor twee vectoren in het vlak $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ is het standaard inproduct

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Op dezelfde manier kan je het inproduct nemen van twee n-dimensionale vectoren.

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan dan is het inproduct 0, we zeggen dan dat de vectoren orthogonaal op elkaar staan. Je kan de lengte van vector x berekenen met het inproduct door $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

1.1.1 Opgaven

1. Laat $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bereken $x \cdot y$.
2. Ga na dat $(x + z) \cdot y = x \cdot y + z \cdot y$.
3. Vind twee punten die orthogonaal staat op $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Het complexe geval

Voor complexe vectoren kan je proberen het standaard inproduct op dezelfde manier te definiëren. Dit gaat mis omdat je lengtes krijgt die complex zijn. Kijk bijvoorbeeld naar de vector $x = (i)$ dan zou $\sqrt{i^2} = i$ de lengte van x zijn, terwijl de lengte duidelijk 1 is.
Om wel van lengtes te kunnen spreken is het standaard complex inproduct als volgt gedefinieerd

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}$$

Met $\overline{y_1}$ de complex geconjugeerde van y_1.
Nu kunnen we na gaan $||i|| = \sqrt{\langle i, i \rangle} = 1$. Als voorbeeld kijken we naar $x = \begin{pmatrix} 1 + 5i \\ -2 + i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} -7i \\ 4 + 3i \end{pmatrix}$ dan is het inproduct

$$\langle x, y \rangle = (1 + 5i)(7i) + (-2 + i)(4 - 3i) = -40 + 7i$$

Net als bij reële vectoren kunnen we ook van complexe getallen (niet de nulvector) zeggen of ze orthogonaal op elkaar staan (Pas op: Het is heel moeilijk/onmogelijk om complexe vectoren te visualiseer). Dit inproduct heeft een paar eigenschappen en deze eigenschappen gaan de basis vormen van een Hilbert ruimte.

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (de complex geconjugeerde van $\langle y, x \rangle$),
2. $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z \rangle = \lambda_1 \langle x, z \rangle + \lambda_2 \langle y, z \rangle$ (λ_1, λ_2 zijn complexe getallen),
3. $\langle x, x \rangle$ is een reëel getal en $\langle x, x \rangle \geq 0$,
4. Als $\langle x, x \rangle = 0$ dan $x = 0$.

1.2.1 Opgaven

1. Bereken $\langle x, y\rangle$,

$$a.\ x = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c.\ x = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5+i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4+2i \end{pmatrix}$$

$$b.\ x = \begin{pmatrix} 2i \\ 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -3i \\ i \end{pmatrix} \qquad d.\ x = \begin{pmatrix} 4+7i \\ 5-4i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 6-3i \\ 1+8i \end{pmatrix}$$

2. Bereken de lengte van x,

$$a.\ x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c.\ x = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

$$b.\ x = \begin{pmatrix} -i \\ 3i \end{pmatrix} \qquad d.\ x = \begin{pmatrix} 3-7i \\ -2+6i \end{pmatrix}$$

3. Ga na dat $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+4i \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaal op elkaar staan.

4. Laat zien als $x = \begin{pmatrix} i \\ 3-i \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 4 \end{pmatrix}$ dat $\langle x, y\rangle$ niet gelijk is aan $\langle y, x\rangle$ maar aan $\overline{\langle y, x\rangle}$.

1.3 Hilbertruimtes

Vectoren worden vaak gezien als (eindige) rijtjes getallen, maar er zijn veel meer dingen die zich hetzelfde gedragen. Een voorbeeld hiervan zijn (reële) functies. Net als normale vectoren kan je functies optellen en met een getal vermenigvuldigen (vaak aangegeven met λ) om een nieuwe functie te krijgen. Ook heb je de functie $f(x) = 0$, de nulfunctie, die net als de nulvector niks doet bij optelling. De (reële) functie vormen een zogenoemde (reële) vector ruimte.
Een Hilbert ruimte is een (volledige) complexe vector ruimte met een inproduct zodat:

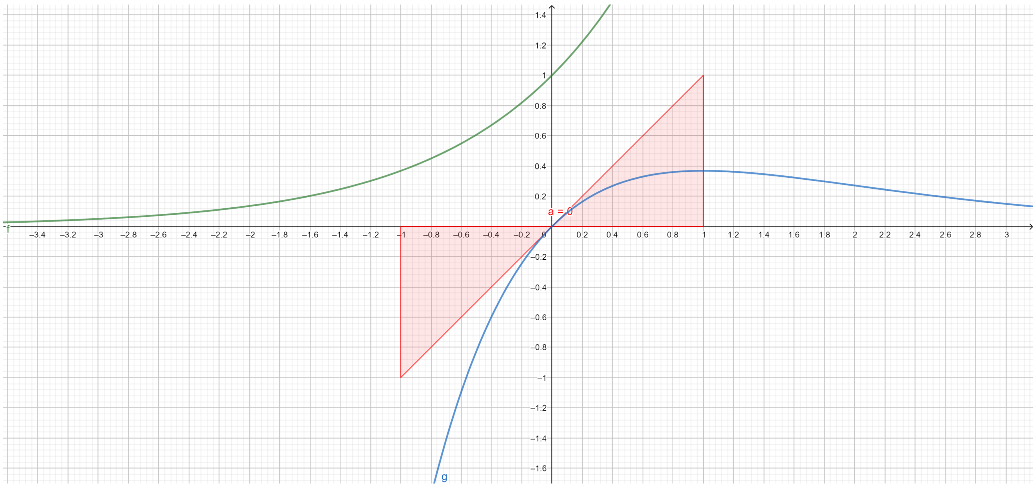
1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (de complex geconjugeerde van $\langle y, x\rangle$),
2. $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z\rangle = \lambda_1\langle x, z\rangle + \lambda_2\langle y, z\rangle$ (λ_1, λ_2 zijn complexe getallen),
3. $\langle x, x\rangle$ is een reëel getal en $\langle x, x\rangle \geq 0$,
4. Als $\langle x, x\rangle = 0$ dan $x = 0$.

Terwijl deze regels gelden voor het standaard inproduct, geldt het ook voor andere inproducten. Neem bijvoorbeeld de continue functies die een reëel getal stuurt naar een complex getal, bijvoorbeeld e^{ix}, met als inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

met $\overline{g(x)}$ is de complex geconjugeerde van $g(x)$, bijvoorbeeld $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$.
Voorbeeld: Als $f(x) = e^x$ en $g(x) = xe^{-x}$ (dus $\overline{g(x)} = g(x)$) dan geldt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{-1}^{1} xdx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$



Figuur 1: groen: f(x), blauw: g(x), rood: $\langle f, g\rangle$

We zeggen x, y staan orthogonaal op elkaar (in een Hilbertruimte) als $\langle x, y\rangle = 0$.
De twee functies in het voorbeeld staan dus orthogonaal op elkaar. Functies die orthogonaal op elkaar staan hoeven elkaar dus niet loodrecht te snijden.
In een Hilbertruimte wordt de lengte van x gegeven door $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Voorbeeld: De lengte van $f(x) = -3ix^4 + 5x^2 + 10i$ is $\sqrt{\langle f, f\rangle}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3ix^4 + 5x^2 + 10i)(3ix^4 + 5x^2 - 10i)dx \\
&= \int_{-1}^{1} 9x^8 + 35x^4 + 100dx \\
&= \left[x^9 + 7x^5 + 100x\right]_{-1}^{1} = 216
\end{aligned}$$

Dus $||f|| = \sqrt{216}$.

1.3.1 Opgaven

1. Laat het inproduct voor continue functies (die een reële getal stuurt naar een complex getal) gegeven zijn door
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$
Bereken $\langle f, g\rangle$,

   a. $f(x) = x + 4, g(x) = x^2 + 7$

   b. $f(x) = x^5 + ix + 7, g(x) = 3x^3 + 2ix$

   c. $f(x) = \cos(x), g(x) = \tan(x)$

   d. $f(x) = e^{2\pi ix}, g(x) = e^{4\pi ix}$

2. Gebruik hetzelfde inproduct als in de vorige opgave. Bereken $||f||$,

   a. $f(x) = 5x + 1$

   b. $f(x) = 2ix^3 + 4x + 1$

   c. $f(x) = 6e^x$

   d. $f(x) = e^{2\pi ix}$

3. Laat het inproduct voor 2-dimensionale reële vectoren gegeven zijn door

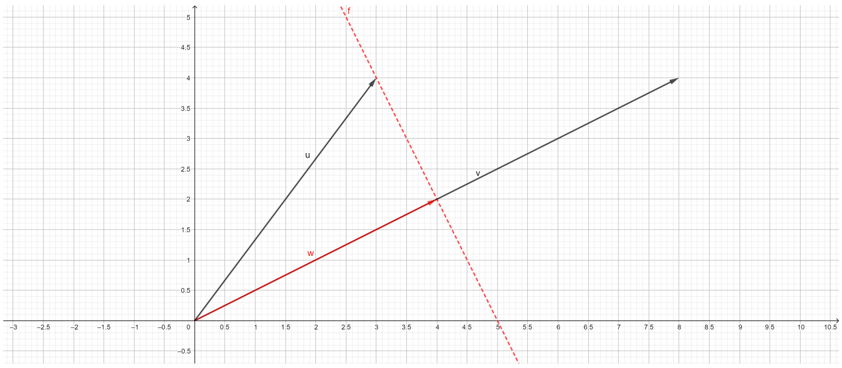
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

a. Wanneer geldt $x_1y_1 + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_1y_1 + x_2y_2$. (geef een voorbeeld).

b. Bereken $\langle x, y\rangle$ voor $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, en concludeer dat ze orthogonaal op elkaar staan.

c. Laat zien dat x en y niet loodrecht op elkaar staan (hoek van 90°).

4. **Projectie:** In een Hilbert ruimt wordt de projectie van x op y (allebei niet nul) gegeven door $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y$.



Figuur 2: w is de projectie van u op v (met behulp van een loodlijn)

a. Bereken de projectie (met het standaard inproduct) van $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ op $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (dit is de projectie van x op de x-as).

b. Laat het inproduct voor reële functies

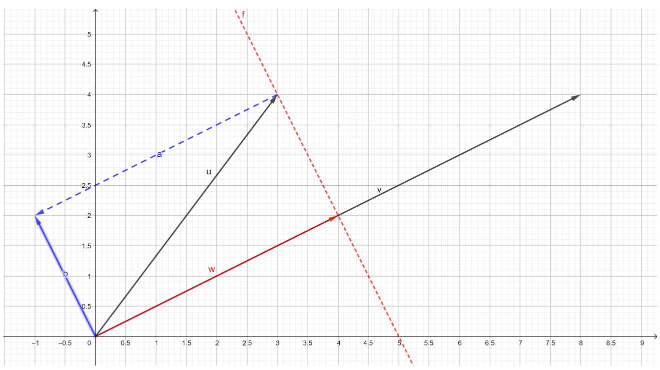
$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$$

. Laat $f(x) = \frac{e^x}{x}, g(x) = x^3 + 4x^2$ en $h(x) = x$. Bereken de projectie van $f(x)$ op $h(x)$, en bereken de projectie van $g(x)$ op $h(x)$

c. Schets de functies gevonden bij b.

d. Laat zien dat de projectie van x op x gelijk is aan x.

5. Stel je hebt x en y (met x niet een veelvoud van y) dan kan je z vinden zodat z en y orthogonaal op elkaar staan. Een manier om dit te doen is de projectie van x op y uitrekenen en die van x aftrekken. Dit geeft de formule $z = x - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y$.



Figuur 3: b=u-w en inderdaad b staat loodrecht op v

a. Gebruik deze methode (met het standaard inproduct) om een orthogonaal element te vinden van $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ met behulp van $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ga na of de gevonden vector ook echt orthogonaal staat op y.
b. Laat het inproduct en de functies hetzelfde zijn als bij 4b. Vind twee functies die orthogonaal staan op h.
c. Schets de functies gevonden bij b.

6. **Pythagoras:** We gaan in deze opgave laten zien dat de stelling van Pythagoras geldt in elke Hilbertruimte.
a. Laat zien dat voor elk inproduct geldt $\langle x, \lambda_1 y + \lambda_2 z\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x, y\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, y\rangle$ met λ_1, λ_2 complexe getallen. (hint: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$)
b. Schrijf $||x+y||^2$ uit en concludeer $||x+y||^2 = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$.
c. Laat zien dat als $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$ (dus x en y orthogonaal op elkaar staan) dat dan $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (de stelling van Pythagoras).