0.1 Qubittoestanden en vectoren

naam:

klas:

datum:

We gebruiken wiskunde om natuurkundige verschijnselen in theorieën te beschrijven. Quantumtheorie maakt gebruik van vectorwiskunde, Ongemerkt maken we daar al gebruik van. De wiskundige bagage voor deze module hebben we in vier kaders weergegeven. Het eerste kader gaat over vectorwiskunde. Hierin leer je hoe je moet rekenen met vectoren en wat een basis inhoudt.

Wiskundekader 1: vectoren

Optellen van vectoren en scalaren

In de onderbouw heb je geleerd dan als je eerst 30 km naar het oosten loopt en daarna 40 km naar het zuiden, dan wil dat niet zeggen dat je 70 km bent verwijderd van het beginpunt. Bij massa ligt dat anders. Als jij 70 kg weegt, op de weegschaal gaat staan met een rugzak van 15 kg waar iemand net 7 kg heeft uitgehaald, dan geeft de weegschaal 78 kg aan. Dat heb je op de basisschool geleerd. Massa heeft geen richting, het is een scalar. Verplaatsingen zijn vectoren. Optellen bij vectoren betekent iets anders dan optellen van scalaren. Hoe zit dat dan bij het optellen van vectoren? In figuur **??** is de optelling van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te zien. Door van een vector de coördinaten te geven ligt die vector vast. Op grond van de overwegingen bij figuur **??** gaan we een vector weergeven m.b.v. zijn componenten. Dus A door bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en B door bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

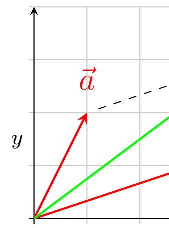


Fig. 1: Optel
vectoren.

Voor de som van de twee vectoren A en B nemen we dan als definitie:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

Coördinatentransformaties

Voor de definitie van de vectorsom hebben we gebruik gemaakt van coördinaten. Een coördinatensysteem is altijd nodig om kwantitatieve uitspraken te doen over fysische grootheden die zich gedragen als vectoren. Voor zo'n systeem van coördinaten is een basis nodig. Die basis wordt gevormd door twee vectoren met lengte één die loodrecht op elkaar staan. De keuze van de basis is vrij. Bekijk figuur **??**. De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn daar weergegeven in twee coördinatensystemen elk met hun eigen basis.

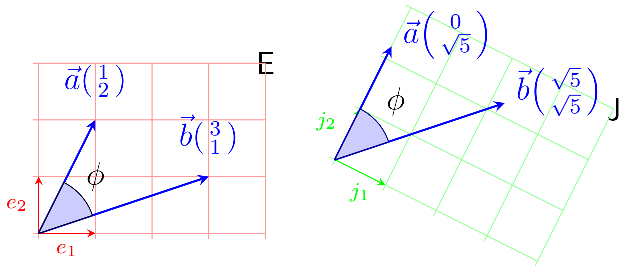


Fig. 2: Twee vectoren. De keuze van het coördinatensysteem is vrij. Bij een transformatie van het ene coördinaten-systeem naar het andere blijven lengte en richting van de vectoren behouden.

Intuïtief lijkt bij de overgang van basis E naar basis J weinig te veranderen. Alleen het ruitjespatroon is gedraaid en er zijn twee nieuwe vectoren in beeld gekomen: de basisvectoren $\vec{j_1}$ en $\vec{j_2}$. Je bent vrij in je keuze. Vaak is de combinatie van een horizontale en een verticale as handig maar niet altijd. De keuze van een coördinatensysteem vindt plaats door twee onderling loodrechte vectoren met lengte één te kiezen. In de twee-dimensionele ruimte vormen die dan een basis. Noemen we de twee basisvectoren $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$, dan geldt voor een willekeurige vector $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$$

De weergave van de vector $\vec{v}$ in die basis is dan $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Alle vectoren $\vec{v}$ vullen dan die tweedimensionale ruimte. In figuur **??** is dat voor twee keuzes van een basis gedaan. Dat zijn de bases E en J.

Opdracht 0.1

Bekijk figuur **??**.

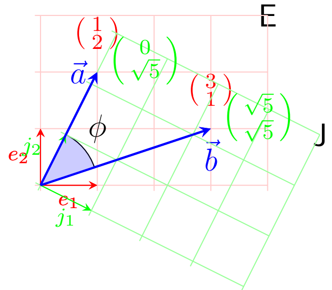
a. Wat zijn de componenten van de vectoren $\vec{j_1}$ en $\vec{j_2}$ in basis J?

a. $\vec{j_1} =$
$j_2 =$
b. $\frac{1}{5}\sqrt{5}($
c. $\vec{e_1} =$
$e_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(\ \ 2\ \ )$
d. $\|A\| = \sqrt{5}$
$\|B\| = \sqrt{(10)}$

In basis E geldt: $\vec{j_2} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

- **b.** Bereken α en β met behulp van vector $\vec{a}$ in figuur **??**.
- **c.** Geef de componenten van de vectoren $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ in basis J.
- **d.** Bepaal de lengte van beide vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
- **e.** Vul tabel **??** in.

In tabel **??** zijn de resultaten nog eens weergegeven.



	in E	in J
$\vec{e_1}$	$\binom{1}{0}$	$\frac{1}{\sqrt5}\binom{2}{1}$
$\vec{e_2}$	$\binom{0}{1}$	
$\vec{j_1}$		$\binom{1}{0}$
$\vec{j_2}$		$\binom{0}{1}$
A	$\binom{1}{2} = 1\binom{1}{0} + 2\binom{0}{1}$	
B	$\binom{3}{1} = 3\binom{1}{0} + 1\binom{0}{1}$	

Tabel 1: Twee bases

e. $e_{2_J} = \frac15\sqrt5\binom{-1}{2}$
$j_{1_E} = \frac15\sqrt5\binom{2}{-1}$
$j_{2_E} = \frac15\sqrt5\binom{1}{2}$
$e_{1_J} = \frac12\sqrt5\binom{2}{1}$
$e_{2_J} = \frac12\sqrt5\binom{-1}{2}$
$\binom{1}{1} = 1\binom{1}{0} + 2\binom{0}{1} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt5\end{pmatrix}$
$\binom{3}{1} = 3\binom{1}{0} + 1\binom{0}{1} = \begin{pmatrix}\sqrt5\\ \sqrt5\end{pmatrix}$