Spelletjes an algoritmes

0.1 Teleportatie

In science fictie komt teleportatie veelvuldig voor. Veelal wordt er een machine gebruikt die een persoon ergens laat verdwijnen en vervolgens op een totaal andere locatie laat verschijnen. Bij quantum teleportatie worden geen voorwerpen geteleporteerd, maar de informatie van een qubit; door slim gebruik te maken van verstrengeling, wordt bij teleportatie een qubit op plek A gemeten, verdwijnt de qubit informatie en wordt de qubit op plaats B gereconstrueerd, zonder de qubit daadwerkelijk naar plaats B te sturen.

(a) Als je een qubit meet die in de toestand $\alpha|0\rangle + \beta 1$ is, meet. Wat is dan de uitkomst van de meting?

- 0
- 1
- 0 met waarschijnlijkheid $|\alpha|^2$ en 1 met waarschijnlijkheid $|\beta|^2$
- iets tussen 0 en 1 in

(b) Wat gebeurt er als je een verstrengelde qubit uit de toestand $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ meet?

- De uitkomst van de qubits is altijd tegengesteld: als jij $|0\rangle$ meet, zal de andere qubit altijd $|1\rangle$ zijn.
- De uitkomst van de qubits is altijd tgelijk als jij $|0\rangle$ meet, zal de andere qubit altijd $|0\rangle$ zijn.
- Je meet altijd $|00\rangle$
- Je meet altijd $|11\rangle$

(c) Kun je van een onbekende qubit toestand $\alpha|0\rangle + \beta 1$ met een enkele meting de exacte toestand leren kennen (dus α en β bepalen)? Waarom wel/niet?

(d) Wanneer dit niet kan, kun je dan een manier bedenken om de toestand te bepalen?

Quantum teleportatie is een techniek om een *onbekende* qubit toestand van A naar B te verplaatsen, zonder de qubit zelf te verplaatsen. Omdat qubits niet zomaar gekopieerd kunnen worden, zal de qubit informatie op plaats A verdwijnen. De qubit zelf is er natuurlijk nog wel, maar zal in een andere toestand zijn.

We zullen nu kijken hoe quantum teleportatie in zijn werk gaat. Bij het teleporteren van een quantum toestand heb je drie qubits nodig: de qubit waarvan je de toestand wilt teleporteren, laten we het qubit T noemen en twee hulp qubits die in verstrengelde toestand verkeren.

Alice wil graag een boodschap overbrengen aan Bob, die ver weg zit, zonder fysiek iets te versturen. Alice heeft de informatie verstopt in de toestand van een qubit; T. T kan elke willekeurige toestand zijn, laten we zeggen $T = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Om deze toestand te kunnen teleporteren, hebben Alice en Bob al eens eerder een verstrengelde toestand gedeeld, Q_A en Q_B. Deze toestand ziet er als volgt uit:

$\frac{|0_A 0_B\rangle+|1_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}}$,

waarbij de annotaties A en B aangeven welke qubit van Alice en welke qubit van Bob is. Laten we eens stap voor stap bekijken hoe Alice de toestand van T kan overbrengen zonder de qubit daadwerkelijk te versturen. We gebruiken daarvoor het schema in figuur **??**. Bedenk dus goed dat Alice met twee qubits begint en Bob met één qubit. De begintoestand van Alice en Bob is

$$T \otimes \frac{|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}} = (\alpha|0_T\rangle + \beta|1_Y\rangle) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}|0_A 0_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_A 1_B\rangle) \quad (1)$$

.

Alice	**Bob**
$\|00\rangle$	$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$
$\|01\rangle$	$\alpha\|1\rangle + \beta\|0\rangle$
$\|10\rangle$	$\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle$
$\|11\rangle$	$\alpha\|1\rangle - \beta\|0\rangle$

Alice laat haar twee qubits met elkaar reageren door ze door een CNOT-poort te halen. Daarna haalt Alice qubit T door een hadamard poort (bedenk dat een Hadamard poort een qubit in superpositie brengt) en meet ze allebei haar qubits. Omdat Alice's qubit A verstrengeld is met Bobs qubit B, zal de interactie met T Bobs toestand ook beïnvloeden. Vervolgens zal de meting van Alice Bobs qubit ook eïnvloeden. Bedenk je dat Alice van tevoren niet weet welke toestand ze gaat meten. Omdat haar ene qubit verstrengeld is en ze haar andere in superpositie heeft gebracht, heeft ze vier mogelijke uitkomsten: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ en $|11\rangle$. Afhankelijk van wat Alice meet, zal Bobs qubit dus ook in vier verschillende toestanden kunnen zijn. Zijn mogelijke toestanden staan in de tabel.

Je ziet dat, als Alice $|00\rangle$ meet, Bob gelijk de goede qubti toestand heeft. Echter, meet Alice iets anders, dan moet Bob nog een of twee rotaties op zijn qubit uitvoeren.

(a) Stel, Alice meet $|01\rangle$, welke rotatie moet Bob dan uitvoeren?

- niks
- X-rotatie
- Hadamard-rotatie
- Z-rotatie

(b) Stel, Alice meet $|10\rangle$, welke rotatie moet Bob dan uitvoeren?

(c) Stel, Alice meet $|11\rangle$, welke rotatie moet Bob dan uitvoeren?

Bob weet natuurlijk niet wat Alice gemeten heeft. Daarom moet Alice Bob op de hoogte brengen van haar bevindingen. Dit kan via een klassiek kanaal, bijvoorbeeld per mail, of via de telefoon. Dit betekent dat Alice en Bob geen toestand kunnen teleporteren zonder contact met elkaar te hebben. De wet dat niks sneller kan gaan dan het licht, is dus niet verbroken.

Wat interessant is aan dit teleportatie protocol, is dat Alice de toestand T niet hoeft te kennen, om deze te teleporteren naar Bob (ga dit na). Daarnaast kan Alice een qubit toestand naar Bob versturen, zonder gebruik te maken van een quantum kanaal. De enige communicatie die Alice en Bob gebruiken is via de telefoon (of mail) en dus klassiek!

Hoe werkt het teleportatieprotocol nou precies?

De begintoestand van Alice en Bob is

$$T \otimes \frac{|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}} = (\alpha\,|0_T\rangle + \beta\,|1_Y\rangle) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0_A 0_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1_A 1_B\rangle) \tag{2}$$

.

Deze toestand kunnen we ook opschrijven door de haakjes weg te werken als:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|0_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|0_T 1_A 1_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,|1_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,|1_T 1_A 1_B\rangle \tag{3}$$

Als eerst laat Alice haar qubits met elkaar communiceren door een CNOT-poort uit te voeren. Hierbij gebruikt ze T als de controle qubit en haar deel van de verstrengelde qubits als de target qubit. Bedenk dat een CNOT-poort, wanneer de controle qubit 0 is, niets met de target qubit doet. En dat waneer de controle qubit 1 is, de target qubit een bitflip ondergaat. Na de CNOT-poort is de totale toestand dus:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|0_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|0_T 1_A 1_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,|1_T 1_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\,|1_T 0_A 1_B\rangle \tag{4}$$

Daarna voert Alice de qubit die ze wil teleporteren, T, door een Hadamard-poort, waardoor de totale toestand als volgt verandert:

$$\frac{\alpha}{2}(|0_T\rangle + |1_T\rangle)\,|0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}(|0_T\rangle + |1_T\rangle)\,|1_A 1_B\rangle + \frac{\beta}{2}(|0_T\rangle - |1_T\rangle)\,|1_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|0_T\rangle - |1_T\rangle))\,|0_A 1_B\rangle \tag{5}$$

Omdat de qubits van Alice en Bob verstrengeld zijn, hebben de poorten die Alice heeft uitgevoerd ook invloed op de qubit van Bob. Om het precieze effect hiervan te zien, gaan we de toestand hierboven net iets anders opschrijven; we gaan het zo opschrijven dat de twee qubits van Alice samen staan. Dit doen we in twee stappen. Eerst zullen we de toestand buiten haakjes halen:

$$\frac{\alpha}{2}\,|0_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|1_T 0_A 0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|0_T 1_A 1_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|1_T 1_A 1_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|0_T 1_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|1_T 1_A 0_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|0_T 0_A 1_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|1_T 0_A 1_B\rangle \tag{6}$$

Wanneer we Alice's qubits apart opschrijven van Bobs qubits, krijgen we de toestand:

$$\frac{\alpha}{2}\,|0_T 0_A\rangle\,|0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|1_T 0_A\rangle\,|0_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|0_T 1_A\rangle\,|1_B\rangle + \frac{\alpha}{2}\,|1_T 1_A\rangle\,|1_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|0_T 1_A\rangle\,|0_B\rangle - \frac{\beta}{2}\,|1_T 1_A\rangle\,|0_B\rangle + \frac{\beta}{2}\,|0_T 0_A\rangle\,|1_B\rangle - \frac{\beta}{2}\,|1_T 0_A\rangle\,|1 \tag{7}$$

En door nu de toestand korter op te schrijven, krijgen we:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,|0_T 0_A\rangle\,(\alpha\,|0_B\rangle + \beta\,|1_B\rangle) + \\
&\frac{1}{2}\,|1_T 0_A\rangle\,(\alpha\,|0_B\rangle - \beta\,|1_B\rangle) + \\
&\frac{1}{2}\,|0_T 1_A\rangle\,(\alpha\,|1_B\rangle + \beta\,|0_B\rangle) + \\
&\frac{1}{2}\,|1_T 1_A\rangle\,(\alpha\,|1_B\rangle - \beta\,|0_B\rangle)
\end{aligned}$$

Het enige wat Alice nu nog hoeft te doen is haar twee qubits meten. Zoals je ziet, geeft elke mogelijke meetuitkomst van haar twee qubits, een andere toestand van de qubits van Bob. Zoals je kunt zien, zal Bob de originele toestand van T meten, wanneer Alice $|00\rangle$ meet. Maar ook wanneer Alice niet $|00\rangle$ meet, kan Bob de originele toestand terugkrijgen door een simpele enkele qubit poort toe te passen. Het enige wat Bob niet weet, is wat Alice's meetuitkomst is. Daarom moet Alice, nadat ze gemeten heeft, haar toestand doorgeven aan Bob via een klassiek kanaal. Dit kan via de telefoon, via e-mail, of hoe ze ook wil. Daarna weet Bob precies wat hij moet doen. Meet Alice $|00\rangle$? Dan meet Bob zijn qubit en weet hij T. Meet Alice $|01\rangle$, dan heeft Bob de toestand $\alpha\,|1_B\rangle + \beta\,|0_B\rangle$. Wanneer hij dan een X-poort op zijn qubits toepast, verandert de toestand in $\alpha\,|0_B\rangle + \beta\,|1_B\rangle$ en dit is weer precies T. Wanneer Alice $|10\rangle$ meet, dan heeft Bob de toestand $\alpha\,|0_B\rangle - \beta\,|1_B\rangle$. Wanneer hij nu een Z-poort toepast, dan wordt zijn qubit: $\alpha\,|0_B\rangle + \beta\,|1_B\rangle$ en heeft hij weer T.

- In welke toestand is de qubit van Bob wanneer Alice $|11\rangle$ meet?
- Kun je nu zelf bedenken welke qubit rotatie(s) Bob moet toepassen als Alice $|11\rangle$ meet? Schrijf Bobs qubit toestand voor jezelf uit om te controleren of je antwoord klopt.
- Waarom zou iemand kunnen denken dat je sneller dan de lichtsnelheid kunt teleporteren? Leg uit waarom dit niet het geval is.
- Denk je dat je een fysiek object, zoals een lamp, of een persoon kunt teleporteren? Waarom wel/niet?
- Stel nou dat Alice en Bob niet de verstrengelde toestand $\frac{|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}}$ delen, maar in plaats daarvan de toestand $\frac{|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle}{\sqrt{2}}$. Hoe werkt het teleportatie protocol dan? Schrijf het protocol voor jezelf uit. Gebruik hiervoor onderstaande handleiding.

a) Laat zien dat, als qubit T in de toestand $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ zit, je de totale toestand van het systeem kunt schrijven als

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(|001\rangle + |010\rangle) + b(|101\rangle + |110\rangle)\right], \tag{8}$$

waarbij de eerste twee qubits dus van Alice zijn en de laatste van Bob.

b We gaan nu een CNOT gate toepassen op de qubits van Alice, waarbij de eerste qubit de control is en de tweede de target. Laat zien dat je de toestand nu kunt schrijven als

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(|001\rangle + |010\rangle) + b(|111\rangle + |100\rangle)\right] \tag{9}$$

c) Zoals je kunt zien in de afbeelding is de volgende stap dat we de eerste qubit door een Hadamard gate laten gaan. Laat zien dat hierdoor de volgende toestand ontstaat:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left[a(|0\rangle + |1\rangle)(|01\rangle + |10\rangle) + b(|0\rangle - |1\rangle)(|11\rangle + |00\rangle)\right] \tag{10}$$

d) Laat nu zien dat deze toestand om te schrijven is tot

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\big[&|00\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle)\\ &+|01\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle)\\ &+|10\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)\\ &+|11\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle)\big]\end{aligned}$$

Dit is een hele interessante toestand. Wanneer Alice nu haar twee qubits meet en haar resultaat via een klassiek kanaal naar Bob verstuurt, weet Bob precies in welke toestand zijn qubit zit (aannemende dat hij weet wat Alice heeft gedaan met haar qubits). Als Alice $|00\rangle$ meet, hoeft Bob niks meer te doen en heeft hij al de juiste toestand voor zijn qubit. Voor de andere drie gevallen moet hij echter nog wat werk doen.

e) Wat kan Bob doen om de juiste toestand te krijgen als hij van Alice te horen krijgt dat ze $|10\rangle$ heeft gemeten?

f) En wat moet hij doen als ze $|01\rangle$ heeft gemeten?

g) Combineer je antwoorden van e) en f) om erachter te komen wat hij moet doen als Alice $|11\rangle$ heeft gemeten.

h) Heeft Alice nog steeds de toestand $|\psi\rangle$? Was dit te verwachten aan de hand van wat je eerder vandaag hebt gehoord?

i) Bonus Heb je tijd over of nog niet genoeg gehad van quantum teleportatie? Kijk dan of dit algoritme ook werkt voor (één van) de andere Bell toestanden.