

Morram

Guia de Recorrências – Expansão, Fórmula Fechada e Complexidade

Este guia apresenta os principais padrões de recorrência usados em Análise de Algoritmos. Para cada padrão, temos:

- A **forma da recorrência**
 - A **expansão passo a passo**
 - A **fórmula fechada**
 - A **complexidade final** Θ
-

Tabela Resumida

1. $T(n) = T(n-1) + 1$

- Expansão: $T(1) + (n-1)$
- Fórmula fechada: $T(n) = n$
- Complexidade: $\Theta(n)$

2. $T(n) = T(n-1) + n$

- Expansão: Soma de 1 até n
- Fórmula fechada: $T(n) = n(n+1)/2$
- Complexidade: $\Theta(n^2)$

3. $T(n) = T(n/2) + 1$

- Expansão: $\log_2(n)$ somas de 1
- Fórmula fechada: $T(n) = 1 + \log_2(n)$
- Complexidade: $\Theta(\log n)$

4. $T(n) = T(n/2) + n$

- Expansão: $n + n/2 + n/4 + \dots$
- Fórmula fechada: $T(n) \approx 2n$
- Complexidade: $\Theta(n)$

5. $T(n) = T(n/3) + n$

- Expansão: $n + n/3 + n/9 + \dots$
- Fórmula fechada: $T(n) \approx 1.5n$

- Complexidade: $\Theta(n)$

6. $T(n) = 2T(n/2) + n$

- Expansão: $n + n + n + \dots$ ($\log_2(n)$ vezes)
- Fórmula fechada: $T(n) = n \log_2(n)$
- Complexidade: $\Theta(n \log n)$

7. $T(n) = 2T(n-1)$

- Expansão: $2 \times 2 \times 2 \times \dots = 2^{(n-1)} \times T(1)$
- Fórmula fechada: $T(n) = 2^{(n-1)}$
- Complexidade: $\Theta(2^n)$

Guia Completo de Recorrências – Expansão, Dedução e Complexidade

Este guia apresenta os principais padrões de recorrência usados em Análise de Algoritmos. Para cada padrão, temos:

- A forma da recorrência
- A expansão detalhada
- A generalização com k
- A condição de parada
- A dedução da fórmula fechada
- A complexidade final Θ

1. $T(n) = T(n - 1) + 1$

- **Expansão:**
 - $T(n) = T(n-1) + 1$
 - $T(n-1) = T(n-2) + 1$
 - $T(n-2) = T(n-3) + 1$
 - ...
 - $T(n) = T(n-k) + k$
- **Parada:**
 - Quando $n-k = 1 \rightarrow k = n-1$
- **Fórmula fechada:**

- $T(n) = T(1) + (n-1)$
 - Se $T(1) = 1 \rightarrow T(n) = n$
 - **Complexidade:**
 - $\Theta(n)$
-

1 2 3 4 2. $T(n) = T(n - 1) + n$

- **Expansão:**
 - $T(n) = T(n-1) + n$
 - $T(n-1) = T(n-2) + (n-1)$
 - $T(n-2) = T(n-3) + (n-2)$
 - ...
 - $T(n) = T(n-k) + (n-k+1) + \dots + n$
 - **Parada:**
 - Quando $n-k = 0 \rightarrow k = n$
 - **Fórmula fechada:**
 - $T(n) = T(0) + 1 + 2 + \dots + n$
 - Soma da PA = $n(n+1)/2$
 - **Complexidade:**
 - $\Theta(n^2)$
-

1 2 3 4 3. $T(n) = T(n / 2) + 1$

- **Expansão:**
 - $T(n) = T(n/2) + 1$
 - $T(n/2) = T(n/4) + 1$
 - $T(n/4) = T(n/8) + 1$
 - ...
 - $T(n) = T(n/2^k) + k$
- **Parada:**
 - Quando $n / 2^k = 1 \rightarrow 2^k = n \rightarrow k = \log_2(n)$
- **Fórmula fechada:**
 - $T(n) = T(1) + \log_2(n)$
 - Se $T(1) = 1 \rightarrow T(n) = 1 + \log_2(n)$

- **Complexidade:**

- $\Theta(\log n)$

1234 4. $T(n) = T(n / 2) + n$

- **Expansão:**

- $T(n) = T(n/2) + n$
 - $T(n/2) = T(n/4) + n/2$
 - $T(n/4) = T(n/8) + n/4$
 - ...
 - $T(n) = T(n/2^k) + n + n/2 + n/4 + \dots + n/2^k$

- **Parada:**

- Quando $n / 2^k = 1 \rightarrow 2^k = n \rightarrow k = \log_2(n)$

- **Fórmula fechada:**

- Soma geométrica: $n(1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/n)$
 - Limite da soma: < 2
 - $T(n) \approx n \times 2 = 2n$

- **Complexidade:**

- $\Theta(n)$
-

1234 5. $T(n) = T(n / 3) + n$

- **Expansão:**

- $T(n) = T(n/3) + n$
 - $T(n/3) = T(n/9) + n/3$
 - $T(n/9) = T(n/27) + n/9$
 - ...
 - $T(n) = T(n/3^k) + n + n/3 + n/9 + \dots + n/3^k$

- **Parada:**

- Quando $n / 3^k = 1 \rightarrow 3^k = n \rightarrow k = \log_3(n)$

- **Fórmula fechada:**

- Soma geométrica: $n(1 + 1/3 + 1/9 + \dots)$
 - Soma da PG = $1 / (1 - 1/3) = 3/2$
 - $T(n) \approx n \times 3/2 = 1.5n$

- **Complexidade:**

- $\Theta(n)$

1234 6. $T(n) = 2T(n / 2) + n$

- **Expansão:**

- $T(n) = 2T(n/2) + n$
 - $T(n/2) = 2T(n/4) + n/2$
 - $T(n/4) = 2T(n/8) + n/4$
 - ...
 - $T(n) = 2^k T(n/2^k) + k \times n$

- **Parada:**

- Quando $n / 2^k = 1 \rightarrow 2^k = n \rightarrow k = \log_2(n)$

- **Fórmula fechada:**

- $T(n) = n \log_2(n) + T(1)$
 - Se $T(1) = 1 \rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

- **Complexidade:**

- $\Theta(n \log n)$
-

1234 7. $T(n) = 2T(n - 1)$

- **Expansão:**

- $T(n) = 2T(n-1)$
 - $T(n-1) = 2T(n-2)$
 - $T(n-2) = 2T(n-3)$
 - ...
 - $T(n) = 2^k T(n-k)$

- **Parada:**

- Quando $n-k = 1 \rightarrow k = n-1$

- **Fórmula fechada:**

- $T(n) = 2^{(n-1)} \times T(1)$

- **Complexidade:**

- $\Theta(2^n)$

