

Morram

Guia de Recorrências – Expansão, Fórmula Fechada e Complexidade

Este guia apresenta os principais padrões de recorrência usados em Análise de Algoritmos. Para cada padrão, temos:

- A **forma da recorrência**
 - A **expansão passo a passo**
 - A **fórmula fechada**
 - A **complexidade final** Θ
-

Tabela Resumida

1. **$T(n) = T(n-1) + 1$**
 - Expansão: $T(1) + (n-1)$
 - Fórmula fechada: $T(n) = n$
 - Complexidade: $\Theta(n)$
2. **$T(n) = T(n-1) + n$**
 - Expansão: Soma de 1 até n
 - Fórmula fechada: $T(n) = n(n+1)/2$
 - Complexidade: $\Theta(n^2)$
3. **$T(n) = T(n/2) + 1$**
 - Expansão: $\log_2(n)$ somas de 1
 - Fórmula fechada: $T(n) = 1 + \log_2(n)$
 - Complexidade: $\Theta(\log n)$
4. **$T(n) = T(n/2) + n$**
 - Expansão: $n + n/2 + n/4 + \dots$
 - Fórmula fechada: $T(n) \approx 2n$
 - Complexidade: $\Theta(n)$
5. **$T(n) = T(n/3) + n$**
 - Expansão: $n + n/3 + n/9 + \dots$
 - Fórmula fechada: $T(n) \approx 1.5n$

- Complexidade: $\Theta(n)$

6. $T(n) = 2T(n/2) + n$

- Expansão: $n + n + n + \dots$ ($\log_2(n)$ vezes)
- Fórmula fechada: $T(n) = n \log_2(n)$
- Complexidade: $\Theta(n \log n)$

7. $T(n) = 2T(n-1)$

- Expansão: $2 \times 2 \times 2 \times \dots = 2^{(n-1)} \times T(1)$
 - Fórmula fechada: $T(n) = 2^{(n-1)}$
 - Complexidade: $\Theta(2^n)$
-

Detalhamento por padrão

1. $T(n) = T(n-1) + 1$

- Expansão: $T(n-1) + 1 \rightarrow T(n-2) + 1 + 1 \rightarrow \dots \rightarrow T(1) + (n-1)$
- Fórmula fechada: $T(n) = n$
- Complexidade: $\Theta(n)$

2. $T(n) = T(n-1) + n$

- Expansão: $T(n-1) + n \rightarrow T(n-2) + (n-1) + n \rightarrow \dots \rightarrow T(0) + 1 + 2 + \dots + n$
- Fórmula fechada: $T(n) = n(n+1)/2$
- Complexidade: $\Theta(n^2)$

3. $T(n) = T(n/2) + 1$

- Expansão: $T(n/2) + 1 \rightarrow T(n/4) + 1 + 1 \rightarrow \dots \rightarrow T(1) + \log_2(n)$
- Fórmula fechada: $T(n) = 1 + \log_2(n)$
- Complexidade: $\Theta(\log n)$

4. $T(n) = T(n/2) + n$

- Expansão: $T(n/2) + n \rightarrow T(n/4) + n/2 + n \rightarrow \dots \rightarrow T(1) + n + n/2 + n/4 + \dots$
- Fórmula fechada: $T(n) \approx 2n$
- Complexidade: $\Theta(n)$

5. $T(n) = T(n/3) + n$

- Expansão: $T(n/3) + n \rightarrow T(n/9) + n/3 + n \rightarrow \dots \rightarrow T(1) + n + n/3 + n/9 + \dots$
- Fórmula fechada: $T(n) \approx 1.5n$
- Complexidade: $\Theta(n)$

6. $T(n) = 2T(n/2) + n$

- Expansão: $2T(n/2) + n \rightarrow 4T(n/4) + 2n \rightarrow 8T(n/8) + 3n \rightarrow \dots \rightarrow 2^k T(n/2^k) + kn$
- Parar quando: $n/2^k = 1 \rightarrow k = \log_2(n)$
- Fórmula fechada: $T(n) = n \log_2(n)$
- Complexidade: $\Theta(n \log n)$

7. $T(n) = 2T(n-1)$

- Expansão: $2T(n-1) \rightarrow 4T(n-2) \rightarrow 8T(n-3) \rightarrow \dots \rightarrow 2^k T(n-k)$
- Parar quando: $n-k = 1 \rightarrow k = n-1$
- Fórmula fechada: $T(n) = 2^{(n-1)}$
- Complexidade: $\Theta(2^n)$