Morram

📘 Guia de Recorrências – Expansão, Fórmula Fechada e Complexidade

Este guia apresenta os principais padrões de recorrência usados em Análise de Algoritmos. Para cada padrão, temos:

- A **forma da recorrência**
- A **expansão passo a passo**
- A **fórmula fechada**
- A **complexidade final Θ**

🧠 Tabela Resumida

1. **$T(n) = T(n-1) + 1$**
   - Expansão: $T(1) + (n-1)$
   - Fórmula fechada: $T(n) = n$
   - Complexidade: $\Theta(n)$
2. **$T(n) = T(n-1) + n$**
   - Expansão: Soma de 1 até n
   - Fórmula fechada: $T(n) = n(n+1)/2$
   - Complexidade: $\Theta(n^2)$
3. **$T(n) = T(n/2) + 1$**
   - Expansão: $\log_2(n)$ somas de 1
   - Fórmula fechada: $T(n) = 1 + \log_2(n)$
   - Complexidade: $\Theta(\log n)$
4. **$T(n) = T(n/2) + n$**
   - Expansão: $n + n/2 + n/4 + \ldots$
   - Fórmula fechada: $T(n) \approx 2n$
   - Complexidade: $\Theta(n)$
5. **$T(n) = T(n/3) + n$**
   - Expansão: $n + n/3 + n/9 + \ldots$
   - Fórmula fechada: $T(n) \approx 1.5n$

- Complexidade: Θ(n)

6. **T(n) = 2T(n/2) + n**
   - Expansão: n + n + n + ... ($\log_2(n)$ vezes)
   - Fórmula fechada: T(n) = n $\log_2(n)$
   - Complexidade: Θ(n log n)
7. **T(n) = 2T(n−1)**
   - Expansão: 2 × 2 × 2 × ... = 2^(n−1) × T(1)
   - Fórmula fechada: T(n) = 2^(n−1)
   - Complexidade: $\Theta(2^n)$

🔍 Detalhamento com Expansões Aprimoradas

1. T(n) = T(n−1) + 1

- T(n) = T(n−1) + 1
- T(n−1) = T(n−2) + 1
- T(n) = T(n−2) + 1 + 1
- T(n) = T(n−3) + 1 + 1 + 1
- ...
- T(n) = T(1) + (n−1)

Fórmula fechada: T(n) = n
Complexidade: Θ(n)

---

2. T(n) = T(n−1) + n

- T(n) = T(n−1) + n
- T(n−1) = T(n−2) + (n−1)
- T(n−2) = T(n−3) + (n−2)
- ...
- T(n) = T(0) + 1 + 2 + 3 + ... + n

Fórmula fechada: T(n) = n(n+1)/2
Complexidade: $\Theta(n^2)$

---

3. $T(n) = T(n/2) + 1$

- $T(n) = T(n/2) + 1$
- $T(n/2) = T(n/4) + 1$
- $T(n/4) = T(n/8) + 1$
- ...
- $T(n) = T(1) + 1 + 1 + 1 + ...$
- Número de somas: $\log_2(n)$

Fórmula fechada: $T(n) = 1 + \log_2(n)$
Complexidade: $\Theta(\log n)$

---

4. $T(n) = T(n/2) + n$

- $T(n) = T(n/2) + n$
- $T(n/2) = T(n/4) + n/2$
- $T(n/4) = T(n/8) + n/4$
- ...
- $T(n) = T(1) + n + n/2 + n/4 + n/8 + ...$
- Soma geométrica: $n(1 + 1/2 + 1/4 + ...) \approx 2n$

Fórmula fechada: $T(n) \approx 2n$
Complexidade: $\Theta(n)$

---

5. $T(n) = T(n/3) + n$

- $T(n) = T(n/3) + n$
- $T(n/3) = T(n/9) + n/3$
- $T(n/9) = T(n/27) + n/9$
- ...
- $T(n) = T(1) + n + n/3 + n/9 + n/27 + ...$
- Soma geométrica: $n(1 + 1/3 + 1/9 + ...) \approx 1.5n$

Fórmula fechada: $T(n) \approx 1.5n$
Complexidade: $\Theta(n)$

---

6. $T(n) = 2T(n/2) + n$

- $T(n) = 2T(n/2) + n$
- $T(n/2) = 2T(n/4) + n/2$
- $T(n/4) = 2T(n/8) + n/4$
- ...
- $T(n) = 2^k T(n/2^k) + k \times n$
- Parar quando $n/2^k = 1 \rightarrow k = \log_2(n)$

Fórmula fechada: $T(n) = n \log_2(n)$
Complexidade: $\Theta(n \log n)$

---

7. $T(n) = 2T(n-1)$

- $T(n) = 2T(n-1)$
- $T(n-1) = 2T(n-2)$
- $T(n-2) = 2T(n-3)$
- ...
- $T(n) = 2^k T(n-k)$
- Parar quando $n-k = 1 \rightarrow k = n-1$
- $T(n) = 2^{(n-1)} \times T(1)$

Fórmula fechada: $T(n) = 2^{(n-1)}$
Complexidade: $\Theta(2^n)$