Problema 1

Pentru a arăta că un secvent este valid, trebuie să îi scriem demonstrația.

Când scriem demonstrația, ne folosim de regulile deducției naturale. Ne uităm la ce concluzie vrem să ajungem, și alegem reguli care ne dau termeni de acea formă.

- $q \to r \vdash (p \lor q) \to (p \lor r)$

  Demonstrație:

  1. p (ipoteză)
  2. $p \lor r$ (introduc $\lor$ la 1)
  3. $p \to (p \lor r)$ (introduc $\to$ între 1 și 2)
  4. q (ipoteză)
  5. $q \to r$ (premisă)
  6. r (elimin implicația 5 cu 4)
  7. $p \lor r$ (introduc $\lor$ la 6)
  8. $q \to (p \lor r)$ (introduc $\to$ între 4 și 7)
  9. $p \lor q$ (ipoteză)
  10. $p \lor r$ (elimin $\lor$ din 9 cu 3 și 8)
  11. $(p \lor q) \to (p \lor r)$ (introduc $\to$ între 9 și 10)

- $p \to \neg p \vdash \neg p$

  Demonstrație:

  1. p (ipoteză)
  2. $p \to \neg p$ (premisă)
  3. $\neg p$ (elimin implicația 2 cu 1)
  4. $p \to \neg p$ (introduc $\to$ între 1 și 3)
  5. $\neg p$ (ipoteză)
  6. $\neg p$ (copiez 2)
  7. $\neg p \to \neg p$ (introduc $\to$ între 5 și 6)
  8. $p \lor \neg p$ (regula *tertium non datur*)
  9. $\neg p$ (elimin $\lor$ din 8 cu 4 și 7)

Problema 2

- Inițial avem $T = \{\, p(x, y, z) \doteq p(u, f(v, v), u) \,\}$ și $S = \emptyset$.

  - Extragem $p(x, y, z) \doteq p(u, f(v, v), u)$. Termenii sunt aplicări ale aceleiași funcții $p(\dots) \doteq p(\dots)$. Eliminăm funcția și egalăm parametrii unul câte unul.

    Noua mulțime de ecuații devine $T = \{\, x \doteq u, y \doteq f(v, v), z \doteq u \,\}$. În continuare S este vidă.

  - Extragem $x \doteq u$. Pentru că egalăm o constantă cu o variabilă, aplicăm substituția $x \leftarrow u$.

    Avem $T = \{\, y \doteq f(v, v), z \doteq u \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow u \,\}$.

  - Extragem $y \doteq f(v, v)$. Pentru că egalăm o variabilă cu un termen, aplicăm substituția $y \leftarrow f(v, v)$.

    Avem $T = \{\, z \doteq u \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow u, y \leftarrow f(v, v) \,\}$.

  - Extragem $z \doteq u$. Introducem substituția $z \leftarrow u$.

    Avem $T = \emptyset$ și $S = \{\, x \leftarrow u, y \leftarrow f(v, v), z \leftarrow u \,\}$.

    Algoritmul se termină.

  Dacă compunem substituțiile din S obținem un unificator pentru expresiile date.

- Inițial avem $T = \{\, f(x, f(x, x)) \doteq f(g(y), f(z, g(a))) \,\}$ și $S = \emptyset$.

  - Extragem $f(x, f(x, x)) \doteq f(g(y), f(z, g(a)))$. Eliminăm f din exterior.

    Avem $T = \{\, x \doteq g(y), f(x, x) \doteq f(z, g(a)) \,\}$, $S = \emptyset$.

  - Extragem $x \doteq g(y)$. Introducem substituția $x \leftarrow g(y)$, și o aplicăm pe termenii rămași în T.

    Avem $T = \{\, f(g(y), g(y)) \doteq f(z, g(a)) \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow g(y) \,\}$.

  - Extragem $f(g(y), g(y)) \doteq f(z, g(a))$ din T. Eliminăm f și introducem noi egalități.

    Avem $T = \{\, g(y) \doteq z, g(y) \doteq g(a) \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow g(y) \,\}$.

  - Extragem $g(y) \doteq z$ din T. Introducem substituția $z \leftarrow g(y)$.

    Avem $T = \{\, g(y) \doteq g(a) \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow g(y), z \leftarrow g(y) \,\}$

  - Extragem $g(y) \doteq g(a)$. Eliminăm g.

    Avem $T = \{\, y \doteq a \,\}$ și $S = \{\, x \leftarrow g(y), z \leftarrow g(y) \,\}$.

- Extragem $y \doteq a$. Introducem substituția $y \leftarrow a$.
  Avem $T = \emptyset$ și $S = \{ x \leftarrow g(y), z \leftarrow g(y), y \leftarrow a \}$.
  Algoritmul se oprește.

Putem lua ca unificator $\{ x \leftarrow g(a), y \leftarrow a, z \leftarrow g(a) \}$.

Problema 3

- Putem rescrie baza de date ca:

$$\begin{aligned} x_3 &\Longleftarrow x_1 \wedge x_2 \\ x_5 &\Longleftarrow x_4 \wedge x_2 \\ x_1 &\Longleftarrow x_6 \\ x_2 & \\ x_6 & \end{aligned}$$

- Putem extinde iterativ baza de cunoștințe pentru a găsi cel mai mic punct fix.

  - Inițial avem în baza de cunoștințe doar faptele

  $$K = \{ x_2, x_6 \}$$

  - După un pas, aplicăm $x_6 \implies x_1$ și obținem

  $$K = \{ x_2, x_6, x_1 \}$$

  - După încă un pas aplicăm $x_1 \wedge x_2 \implies x_3$ și avem

  $$K = \{ x_2, x_6, x_1, x_3 \}$$

  - Dacă am mai face încă un pas, am obține aceeași mulțime.

  K este cel mai mic punct fix pentru funcția f_S.

- În formă clauzală, baza de date ar fi:

$$\begin{gathered} \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \\ \neg x_4 \vee \neg x_2 \vee x_5 \\ \neg x_6 \vee x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{gathered}$$

adică

$$\{\{\neg x_1, \neg x_2, x_3\}, \{\neg x_4, \neg x_2, x_5\}, \{\neg x_6, x_1\}, \{x_2\}, \{x_6\}\}$$

Negăm ținta x_3 și o punem ca rădăcină:

$$\neg x_3$$

Facem rezoluție cu prima clauză și obținem

$$\begin{array}{c} \{\neg x_3\} \\ | \\ \{\neg x_1, \neg x_2\} \end{array}$$

Aici putem face rezoluția cu a treia clauză și obținem

$$\begin{array}{c} \{\neg x_3\} \\ | \\ \{\neg x_1, \neg x_2\} \\ | \\ \{\neg x_2, \neg x_6\} \end{array}$$

Facem rezoluția cu a 4-a și apoi a 5-a clauză și obținem clauza vidă, demonstrând astfel că x_3 este adevărat.

$$\begin{array}{c} \{\neg x_3\} \\ | \\ \{\neg x_1, \neg x_2\} \\ | \\ \{\neg x_2, \neg x_6\} \\ | \\ \{\neg x_6\} \\ | \\ \square \end{array}$$

Problema 4

- Pentru a aduce formula în formă prenex folosim echivalențe logice și redenumiri de variabile:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y (R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists x R(x,x) \\
\iff & \forall x \exists y (R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists z R(z,z) \\
& \hfill \text{(redenumesc } x\text{-ul din dreapta în } z\text{)} \\
\iff & \exists x \forall y \exists z ((R(x,y) \to R(y,x)) \to R(z,z)) \\
& \hfill \text{(extrag cuantificatorii din implicație)}
\end{aligned}
$$

  În acest moment formula este în formă prenex.

$$
\begin{aligned}
\iff & \forall y \exists z ((R(c_x,y) \to R(y,c_x)) \to R(z,z)) \\
& \hfill \text{(înlocuiesc } x \text{ cu o constantă Skolem)} \\
\iff & \forall y ((R(c_x,y) \to R(y,c_x)) \to R(f_z(y), f_z(y))) \\
& \hfill \text{(înlocuiesc } z \text{ cu o funcție Skolem)}
\end{aligned}
$$

  În acest moment formula este în formă Skolem.

-

$$
\begin{aligned}
& \exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y) \\
\iff & (\exists x R(x,y) \to \forall y Q(x,y)) \land (\forall y Q(x,y) \to \exists x R(x,y)) \\
& \hfill \text{(înlocuiesc echivalența cu implicații)} \\
\iff & (\exists x R(x,u) \to \forall y Q(v,y)) \land (\forall z Q(s,z) \to \exists w R(w,t)) \\
& \hfill \text{(redenumesc variabilele)} \\
\iff & \forall x \forall y (R(x,u) \to Q(v,y)) \land \exists z \exists w (Q(s,z) \to R(w,t)) \\
& \hfill \text{(extrag cuantificatorii din implicații)} \\
\iff & \forall x \forall y \exists z \exists w ((R(x,u) \to Q(v,y)) \land (Q(s,z) \to R(w,t))) \\
& \hfill \text{(extrag cuantificatorii din } \land\text{)}
\end{aligned}
$$

  În acest moment formula este în formă prenex.

$$
\begin{aligned}
\iff & \forall x \forall y \exists w ((R(x,u) \to Q(v,y)) \land (Q(s, f_z(x,y)) \to R(w,t))) \\
& \hfill \text{(înlocuiesc } z \text{ cu o funcție Skolem)} \\
\iff & \forall x \forall y ((R(x,u) \to Q(v,y)) \land (Q(s, f_z(x,y)) \to R(f_w(x,y), t))) \\
& \hfill \text{(înlocuiesc } w \text{ cu o funcție Skolem)}
\end{aligned}
$$

  În acest moment formula este în formă Skolem.

Problema 5

- Universul Herbrand pentru limbajul dat este

  $$\{\, b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), \dots, p(b), p(f(b)), p(f(f(b))), \dots \,\}$$

  Expansiunea Herbrand este

  $$\begin{gathered} p(f(f(b))) \land \neg p(f(b)) \\ p(f(f(b))) \land \neg p(f(f(b))) \\ p(f(f(b))) \land \neg p(f(f(f(b)))) \\ p(f(f(b))) \land \neg p(f(f(f(f(b))))) \\ \dots \end{gathered}$$

- Teorema lui Herbrand ne spune că φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

  O consecință este că, dacă găsim un termen în expansiunea Herbrand care este fals, formula nu este satisfiabilă.

  Observăm că $p(f(f(b))) \land \neg p(f(f(b)))$ este fals. Deci φ este nesatisfiabilă.

- Dacă negăm φ, obținem

  $$\begin{aligned} & \neg(\forall x(p(f(f(b))) \land \neg p(f(x)))) \\ \iff & \exists x(\neg p(f(f(b))) \lor p(f(x))) \\ \iff & \exists x(p(f(f(b))) \to p(f(x))) \\ \iff & p(f(f(b))) \to \exists x\, p(f(x)) \end{aligned}$$

  La subpunctul precedent am arătat că $\not\models \varphi$, deci $\models \neg\varphi$.