Exercițiul 1. Pentru un șir de p numere naturale $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ definim **ponderea** ca fiind $pond(a) = (a_p - a_1)^2$.

Se dă un vector de n numere naturale $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ și un număr natural $k \in \overline{1, n}$. O **partiționare** a lui v în k subsecvențe nevide (o *subsecvență* este formată cu elemente din vector aflate pe poziții consecutive) este de forma

$$v = (\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{i_1}}_{s_1}, \underbrace{v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}}_{s_2}, \dots, \underbrace{v_{i_{k-1}+1}, \dots, v_n}_{s_k})$$

Ponderea unei astfel de partiționări este suma ponderilor subsecvențelor în care este partiționat vectorul: $pond(s_1) + \dots + pond(s_k)$.

Să se determine o partiționare de pondere minimă a lui v în k subsecvențe (nevide).

Propuneți un algoritm de complexitate $\mathcal{O}(n^2 k)$ bazat pe metoda programării dinamice pentru rezolvarea acestei probleme (pseudocod, complexitate, justificarea relației de recurență obținută pornind de la principiul de optimalitate, evidențiind subproblemele, relațiile de recurență și ordinea de calcul).

Exemplu. Pentru $k = 3$, $n = 9$ și $v = (3, 1, 8, 7, 13, 12, 10, 5, 4)$ partiționarea în subsecvențele $s_1 = (3, 1)$, $s_2 = (8, 7, 13, 12, 10, 5)$ și $s_3 = (4)$ are ponderea

$$pond(s_1) + pond(s_2) + pond(s_3) = (3-1)^2 + (5-8)^2 + (4-4)^2 = 4 + 9 = 13$$

O partiționare de *pondere minimă* în 3 subsecvențe a acestui vector este $s_1 = (3, 1)$, $s_2 = (8, 7, 13, 12, 10)$, $s_3 = (5, 4)$ cu ponderea $4 + 4 + 1 = 9$.

Rezolvare. Construim o matrice M, cu semnificația: $M[p][i]$ este ponderea minimă a unei partiționări în p subsecvențe a vectorului $v[1..i]$.

Parcurgem întotdeauna vectorul cu un i de la p-ul curent până la n (nu are sens să începem de la 1, pentru că nu putem partiționa vectorul $v[1..i]$ în mai multe subsecvențe decât are elemente).

Pentru $p = 1$, ni se cere să partiționăm vectorul într-o singură subsecvență. Singura posibilitate este să luăm tot vectorul.

$$\begin{aligned}
&i = 1, v[1..1] = (3) && (pond = M[1][1] = (3-3)^2 = 0)\\
&i = 2, v[1..2] = (3, 1) && (pond = M[1][2] = (1-3)^2 = 4)\\
&i = 3, v[1..3] = (3, 1, 8) && (pond = M[1][3] = (8-3)^2 = 25)\\
&\vdots\\
&i = n, v[1..n] = (3, 1, 8, 7, 13, 12, 10, 5, 4) && (pond = M[1][n] = (4-3)^2 = 1)
\end{aligned}$$

Pentru $p > 1$, în timp ce creștem i-ul și luăm tot mai multe elemente din vectorul inițial, mai parcurgem vectorul cu un j de la 1 la i.

Noi am calculat deja care este ponderea minimă pentru o partiționare în $p-1$ subsecvențe a subvectorului $v[1..j]$. Dacă mai adunăm și ponderea lui $v[(j+1)..i]$ determinăm cât ar fi ponderea unei partiționări în $(p-1)+1 = p$ subsecvențe, formată dintr-o partiționare calculată la pașii anteriori, la care am adăugat subsecvența $v[(j+1)..i]$ la pasul acesta.

Exemplu pentru când $p = 2, i = 5$:

$$
\begin{aligned}
v[1..5] =& (3, 1, 8, 7, 13) && \\
M[1] =& (0, 4, 25, 16, 100) && \text{(calculat la pasul anterior)} \\
j = 1: \quad & (\underbrace{3}, \underbrace{1, 8, 7, 13}_{pond=144}) && (pond = M[1][1] + 144) \\
j = 2: \quad & (\underbrace{3, 1}, \underbrace{8, 7, 13}_{pond=25}) && (pond = M[1][2] + 25) \\
j = 3: \quad & (\underbrace{3, 1, 8}, \underbrace{7, 13}_{pond=36}) && (pond = M[1][3] + 36) \\
j = 4: \quad & (\underbrace{3, 1, 8, 7}, \underbrace{13}_{pond=0}) && (pond = M[1][4] + 0)
\end{aligned}
$$

Dintre toate ponderile obținute, o alegem pe cea minimă, și o punem în matrice pe poziția $M[p][i]$, în acest caz pe $M[2][5]$.

Algoritmul în pseudocod:

Inițializare:

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $M[1][i] \leftarrow (v[i] - v[1])^2$
for $p \leftarrow 2$ **to** k **do**
    for $i \leftarrow p$ **to** n **do**
        $minim \leftarrow +\infty$
        for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
            $pondere \leftarrow M[p-1][j] + (v[i] - v[j])^2$
            if $pondere < minim$ **then**
                $minim \leftarrow pondere$
        $M[p][i] \leftarrow minim$

□