Rețele Bayesiene

Definire

O **rețea Bayesiană** este un mod grafic de a reprezenta mai multe **variabile aleatoare** și legăturile dintre ele.

Rețeaua este un **graf orientat aciclic**.

Nodurile din rețea sunt *variabile aleatoare*. Unde avem un **arc** în graf înseamnă că cele două variabile sunt *dependente*, în timp ce lipsa unui arc între două variabile înseamnă că ele sunt *independente*.

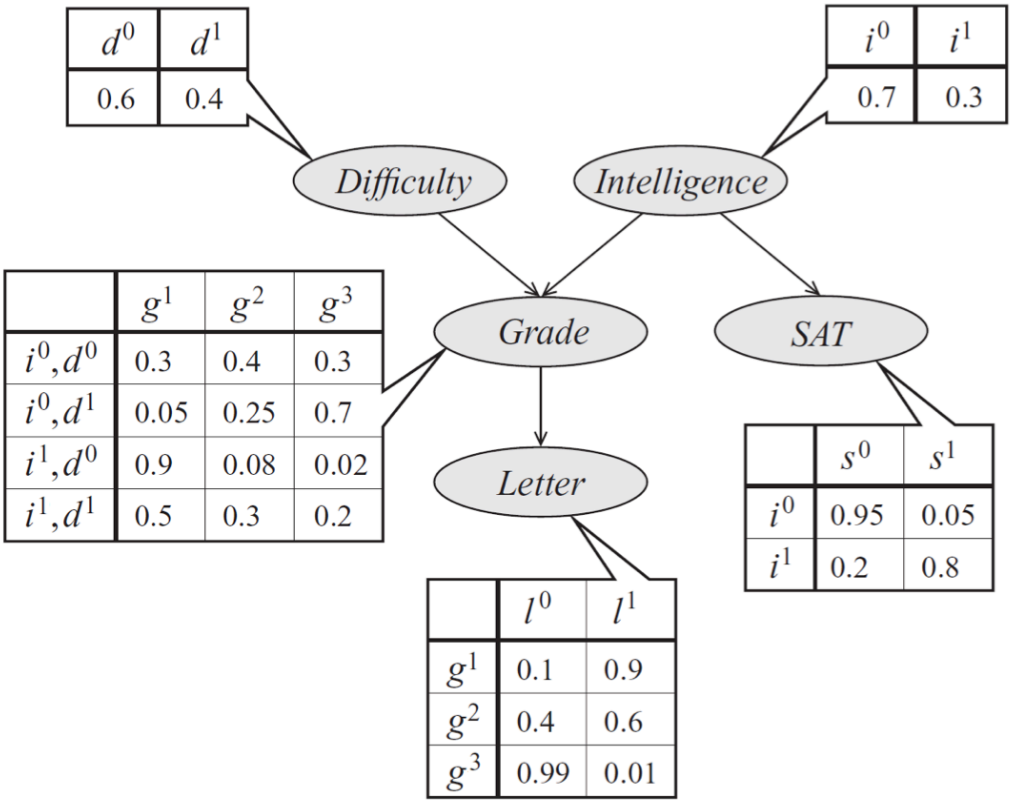
Ca să facem calcule cu o rețea, ni se dă o **variabilă de interogare** pe care o notăm cu X. Noi vrem să aflăm care este **probabilitatea** acestei variabile.

Primim tot ca date de intrare o mulțime E de **variabile dovezi** (E de la *Evidence*).

Suportul cauzal E_X^+ reprezintă variabilele care se află înaintea variabilei de interogare (există un lanț de la ele la variabila de interogare). **Suportul probatoriu** E_X^- reprezintă variabilele care se află după variabila de interogare (există un lanț de la variabila de interogare la ele).

Exemplu

Un exemplu de rețea Bayesiană luat din acest curs.



d^0	d^1
0.6	0.4

i^0	i^1
0.7	0.3

	g^1	g^2	g^3
i^0,d^0	0.3	0.4	0.3
i^0,d^1	0.05	0.25	0.7
i^1,d^0	0.9	0.08	0.02
i^1,d^1	0.5	0.3	0.2

	s^0	s^1
i^0	0.95	0.05
i^1	0.2	0.8

	l^0	l^1
g^1	0.1	0.9
g^2	0.4	0.6
g^3	0.99	0.01

Exemplu. Rețeaua poate să estimeze **nota** la curs (și litera asociată acestei note) pe baza **dificultății** cursului și pe baza **inteligenței** studentului, și să prezică pe baza **inteligenței** lui probabilitatea **să promoveze examenul SAT**.

Alegem variabila de interogare X să fie **nota** la curs ($Grade$). Pentru X:

- suportul cauzal este $E_X^+ = \{\, Difficulty, Intelligence\,\}$
- suportul probatoriu este $E_X^- = \{\, Letter\}$

Exemplu. Alegem X să fie probabilitatea studentului să treacă examenul SAT.

Atunci suportul cauzal este $E_X^+ = \{\, Intelligence\,\}$ și suportul probatoriu E_X^- este mulțimea vidă $\emptyset$.

Model de examen

Notații

- $U = \{ U_1, \dots, U_m \}$ reprezintă **predecesorii direcți** ai nodului X (variabila de interogare).
- u reprezintă o atribuire de valori pentru nodurile din U, adică $U_1 = u_1, U_2 = u_2, \dots, U_m = u_m$ (deci $\mathbb{P}(U_i = u_i) = 1$).
- $Y = \{ Y_1, \dots, Y_n \}$ reprezintă **succesorii direcți** ai nodului X (variabila de interogare).
- y reprezintă o atribuire de valori pentru nodurile din Y, adică $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n$ (deci $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = 1$).
- $E_{U_i \setminus X}$ este mulțimea tuturor nodurilor conectate la U_i, mai puțin cele care trec prin X
- $E_{Y_i \setminus X}$ este mulțimea tuturor nodurilor conectate la Y_i, mai puțin cele care trec prin X

Cerință

Folosind aceste notații, scrieți, în pseudocod, algoritmul pentru răspunsul la interogări care calculează probabilitatea condiționată a posteriori a variabilei de interogare X, adică $\mathbb{P}(X \mid E)$.

Rezolvare

$$\mathbb{P}(X \mid E) = \mathbb{P}(X \mid (E_X^+, E_X^-))$$

Aplicând teorema lui Bayes se obține:

$$\mathbb{P}(X \mid E_X^+, E_X^-) = \frac{\mathbb{P}(X \mid E_X^+) \cdot \mathbb{P}(E_X^- \mid X, E_X^+)}{\mathbb{P}(E_X^- \mid E_X^+)}$$

Termenul $\frac{1}{\mathbb{P}(E_X^- | E_X^+)} = \alpha$ este tratat ca o constantă de normalizare. Avem:

$$\mathbb{P}(X \mid E_X^+, E_X^-) = \alpha \cdot \mathbb{P}(X \mid E_X^+) \cdot \mathbb{P}(E_X^- \mid X, E_X^+)$$

Calculăm pe rând cele două părți:

$$\mathbb{P}(X \mid E_X^+) = \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X | U_i = u_i) \right) \cdot \left(\prod \mathbb{P}(U_i = u_i | E_{U_i \setminus X}) \right)$$

Putem să calculăm direct $\mathbb{P}(X|U_i = u_i)$: pur și simplu luăm din tabel valoarea care corespunde acelei configurații de variabile.

Pentru a calcula $\mathbb{P}(U_i = u_i|E_{U_i \setminus X})$, trebuie să aplicăm recursiv acest algoritm. Considerăm nodul U_i noua variabilă de interogare, și aplicăm din nou algoritmul.

Algoritmul se oprește dacă $E_{U_i \setminus X}$ este vidă. Cu alte cuvinte, cazul de bază e când predecesorii direcți ai lui X nu au alți predecesori la rândul lor.