

# Curs 8

# Cuprins

- 1 Forma normală conjunctivă și forma clauzală
- 2 Literali, clauze, mulțimi de clauze
- 3 Rezoluția în calculul propozițional (recap.)
- 4 Rezoluția în logica de ordinul I

## Forma normală conjunctivă și forma clauzală

# Literali. FNC

- În calculul propozițional un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$literal := p \mid \neg p$       unde  $p$  este variabilă propozițională

# Literali. FNC

- În calculul propozițional un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$$literal := p \mid \neg p \quad \text{unde } p \text{ este variabilă propozițională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negația unei formule atomice.

$$literal := P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n)$$

unde  $P \in \mathbf{R}$ ,  $ari(P) = n$ , și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni.

# Literali. FNC

- În calculul propozițional un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$$\text{literal} := p \mid \neg p \quad \text{unde } p \text{ este variabilă propozițională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negația unei formule atomice.

$$\text{literal} := P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n)$$

unde  $P \in \mathbf{R}$ ,  $\text{ari}(P) = n$ , și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni.

- Pentru un literal  $L$  vom nota cu  $L^c$  literalul complement.

De exemplu, dacă  $L = \neg P(x)$  atunci  $L^c = P(x)$  și invers.

# Literali. FNC

- În calculul propozițional un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$$\text{literal} := p \mid \neg p \quad \text{unde } p \text{ este variabilă propozițională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negația unei formule atomice.

$$\text{literal} := P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n)$$

unde  $P \in \mathbf{R}$ ,  $\text{ari}(P) = n$ , și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni.

- Pentru un literal  $L$  vom nota cu  $L^c$  literalul complement.

De exemplu, dacă  $L = \neg P(x)$  atunci  $L^c = P(x)$  și invers.

O formulă este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă este o conjuncție de disjuncții de literali.

# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .



# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .
- Pentru o formulă din calculul propozițional determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .
- Pentru o formulă din calculul propozițional determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

**1** înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .
- Pentru o formulă din calculul propozițional determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

## 1 înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

## 2 regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \vee \neg\psi$$

# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .
- Pentru o formulă din calculul propozițional determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

## 1 înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

## 2 regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \vee \neg\psi$$

## 3 principiului dublei negații

$$\neg\neg\psi \quad \models \quad \psi$$

# FNC în calculul propozițional

- Pentru orice formulă  $\alpha$  există o FNC  $\alpha^{fc}$  astfel încât  $\alpha \models \alpha^{fc}$ .
- Pentru o formulă din calculul propozițional determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

## 1 înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

## 2 regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \vee \neg\psi$$

## 3 principiului dublei negații

$$\neg\neg\psi \quad \models \quad \psi$$

## 4 distributivitatea

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \quad \models \quad (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \quad \models \quad (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q)$$

# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$



# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$$

# FNC în calculul propozițional

## Exemplu

Determinați FNC pentru formula

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$$

# FNCP și forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este **formă normală conjunctivă prenex (FNCP)** dacă
  - este în formă prenex  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$  ( $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  oricare  $i$ )
  - $\psi$  este **FNC**

# FNCP și forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este **formă normală conjunctivă prenex (FNCP)** dacă
  - este în formă prenex  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$  ( $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  oricare  $i$ )
  - $\psi$  este **FNC**
- O formulă este **formă clauzală** dacă este **enunț universal** și **FNCP**:  
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$
 unde  $\psi$  este **FNC**

# FNCP și forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este **formă normală conjunctivă prenex (FNCP)** dacă
  - este în formă prenex  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$  ( $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  oricare  $i$ )
  - $\psi$  este **FNC**
- O formulă este **formă clauzală** dacă este **enunț universal** și **FNCP**:  
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$
 unde  $\psi$  este **FNC**

## Exemplu

- $\forall y \exists z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(z) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(y)))$   
este FNCP

# FNCP și forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este **formă normală conjunctivă prenex (FNCP)** dacă
  - este în formă prenex  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$  ( $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  oricare  $i$ )
  - $\psi$  este **FNC**
- O formulă este **formă clauzală** dacă este **enunț universal** și **FNCP**:  
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$
 unde  $\psi$  este **FNC**

## Exemplu

- $\forall y \exists z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(z) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(y)))$   
este FNCP
- $\forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(z) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(y)))$   
este formă clauzală.

# Forma clauzală în logica de ordinul I

- Pentru orice formulă  $\varphi$  din logica de ordinul I există o formă clauzală  $\varphi^{fc}$  astfel încât  
 $\varphi$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\varphi^{fc}$  este satisfiabilă



# Forma clauzală în logica de ordinul I

- Pentru orice formulă  $\varphi$  din logica de ordinul I există o formă clauzală  $\varphi^{fc}$  astfel încât

$\varphi$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\varphi^{fc}$  este satisfiabilă

- Pentru o formulă  $\varphi$ , forma clauzală  $\varphi^{fc}$  se poate calcula astfel:

- 1 se determină forma rectificată
- 2 se cuantifică universal variabilele libere
- 3 se determină forma prenex
- 4 se determină forma Skolem

# Forma clauzală în logica de ordinul I

- Pentru orice formulă  $\varphi$  din logica de ordinul I există o formă clauzală  $\varphi^{fc}$  astfel încât

$\varphi$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\varphi^{fc}$  este satisfiabilă

- Pentru o formulă  $\varphi$ , forma clauzală  $\varphi^{fc}$  se poate calcula astfel:

- 1 se determină forma rectificată
- 2 se cuantifică universal variabilele libere
- 3 se determină forma prenex
- 4 se determină forma Skolem

În acest moment am obținut o formă Skolem  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$

# Forma clauzală în logica de ordinul I

- Pentru orice formulă  $\varphi$  din logica de ordinul I există o formă clauzală  $\varphi^{fc}$  astfel încât

$\varphi$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\varphi^{fc}$  este satisfiabilă

- Pentru o formulă  $\varphi$ , forma clauzală  $\varphi^{fc}$  se poate calcula astfel:

- 1 se determină forma rectificată
- 2 se cuantifică universal variabilele libere
- 3 se determină forma prenex
- 4 se determină forma Skolem

în acest moment am obținut o formă Skolem  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$

- 5 se determină o FNC  $\psi'$  astfel încât  $\psi \models \psi'$

# Forma clauzală în logica de ordinul I

- Pentru orice formulă  $\varphi$  din logica de ordinul I există o formă clauzală  $\varphi^{fc}$  astfel încât

$\varphi$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\varphi^{fc}$  este satisfiabilă

- Pentru o formulă  $\varphi$ , forma clauzală  $\varphi^{fc}$  se poate calcula astfel:

- 1 se determină forma rectificată
- 2 se cuantifică universal variabilele libere
- 3 se determină forma prenex
- 4 se determină forma Skolem

în acest moment am obținut o formă Skolem  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$

- 5 se determină o FNC  $\psi'$  astfel încât  $\psi \models \psi'$

- 6  $\varphi^{fc}$  este  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi'$

## Literali, clauze, mulțimi de clauze

# Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.

# Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă  $L_1, \dots, L_n$  sunt literali atunci clauza  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  o vom scrie ca mulțimea  $\{L_1, \dots, L_n\}$   
clauză = mulțime de literali

# Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă  $L_1, \dots, L_n$  sunt literali atunci clauza  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  o vom scrie ca mulțimea  $\{L_1, \dots, L_n\}$   
clauză = mulțime de literali
- Clauza  $C = \{L_1, \dots, L_n\}$  este satisfiabilă dacă  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  este satisfiabilă.



# Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă  $L_1, \dots, L_n$  sunt literali atunci clauza  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  o vom scrie ca mulțimea  $\{L_1, \dots, L_n\}$   
clauză = mulțime de literali
- Clauza  $C = \{L_1, \dots, L_n\}$  este satisfiabilă dacă  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  este satisfiabilă.
- O clauză  $C$  este trivială dacă conține un literal și complementul lui.

# Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă  $L_1, \dots, L_n$  sunt literali atunci clauza  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  o vom scrie ca mulțimea  $\{L_1, \dots, L_n\}$   
clauză = mulțime de literali
- Clauza  $C = \{L_1, \dots, L_n\}$  este satisfiabilă dacă  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  este satisfiabilă.
- O clauză  $C$  este trivială dacă conține un literal și complementul lui.
- Când  $n = 0$  obținem clauza vidă, care se notează  $\square$

# Clauze

- O **clauză** este o **disjuncție de literali**.
- Dacă  $L_1, \dots, L_n$  sunt literali atunci clauza  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  o vom scrie ca mulțimea  $\{L_1, \dots, L_n\}$   
**clauză = mulțime de literali**
- Clauza  $C = \{L_1, \dots, L_n\}$  este **satisfiabilă** dacă  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  este satisfiabilă.
- O clauză  $C$  este **trivială** dacă conține un literal și complementul lui.
- Când  $n = 0$  obținem **clauza vidă**, care se notează  $\square$
- Prin definiție, **clauza  $\square$  nu este satisfiabilă**.

# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o conjuncție de clauze.

# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o conjuncție de clauze.
- Dacă  $C_1, \dots, C_k$  sunt clauze atunci  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  o vom scrie ca mulțimea  $\{C_1, \dots, C_k\}$

FNC = mulțime de clauze

# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o **conjuncție de clauze**.
- Dacă  $C_1, \dots, C_k$  sunt clauze atunci  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  o vom scrie ca mulțimea  $\{C_1, \dots, C_k\}$   
**FNC = mulțime de clauze**
- O mulțime de clauze  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  este **satisfiabilă** dacă  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  este satisfiabilă

# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o **conjuncție de clauze**.
- Dacă  $C_1, \dots, C_k$  sunt clauze atunci  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  o vom scrie ca mulțimea  $\{C_1, \dots, C_k\}$   
**FNC = mulțime de clauze**
- O mulțime de clauze  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  este **satisfiabilă** dacă  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  este satisfiabilă
- Când  $k = 0$  obținem **mulțimea de clauze vidă**, pe care o notăm  $\{\}$

# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o conjuncție de clauze.
- Dacă  $C_1, \dots, C_k$  sunt clauze atunci  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  o vom scrie ca mulțimea  $\{C_1, \dots, C_k\}$   
FNC = mulțime de clauze
- O mulțime de clauze  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  este satisfiabilă dacă  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  este satisfiabilă
- Când  $k = 0$  obținem mulțimea de clauze vidă, pe care o notăm  $\{\}$
- Prin definiție, mulțimea de clauze vidă  $\{\}$  este satisfiabilă.



# Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o **conjuncție de clauze**.
- Dacă  $C_1, \dots, C_k$  sunt clauze atunci  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  o vom scrie ca mulțimea  $\{C_1, \dots, C_k\}$   
**FNC = mulțime de clauze**
- O mulțime de clauze  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  este **satisfiabilă** dacă  $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  este satisfiabilă
- Când  $k = 0$  obținem **mulțimea de clauze vidă**, pe care o notăm  $\{\}$
- Prin definiție, mulțimea de clauze vidă  $\{\}$  este **satisfiabilă**.

**$\{\}$  este satisfiabilă, dar  $\{\square\}$  nu este satisfiabilă**

## Forma clauzală

- Dacă  $\varphi$  este o formulă în **calculul propozițional**, atunci

$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

# Forma clauzală

- Dacă  $\varphi$  este o formulă în **calculul propozițional**, atunci

$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

- Dacă  $\varphi$  o formulă în **logica de ordinul I**, atunci

$$\varphi^{fc} = \forall x_1 \dots \forall x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \right) \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

# Forma clauzală

- Dacă  $\varphi$  este o formulă în **calculul propozițional**, atunci

$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

- Dacă  $\varphi$  o formulă în **logica de ordinul I**, atunci

$$\varphi^{fc} = \forall x_1 \dots \forall x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \right) \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

$\varphi$  este **satisfiabilă** dacă și numai dacă

$\varphi^{fc}$  este satisfiabilă dacă și numai dacă

$\{\{L_{11}, \dots, L_{1n_1}\}, \dots, \{L_{k1}, \dots, L_{kn_k}\}\}$  este satisfiabilă

# Forma clauzală

## Exemplu

□ În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

# Forma clauzală

## Exemplu

□ În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

determinăm  $\varphi^{fc} := (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

# Forma clauzală

## Exemplu

□ În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

determinăm  $\varphi^{fc} := (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

și analizăm mulțimea de clauze  $\{\{\neg p, q\}, \{q, \neg p\}\}$ .

# Forma clauzală

## Exemplu

- În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

determinăm  $\varphi^{fc} := (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

și analizăm mulțimea de clauze  $\{\{\neg p, q\}, \{q, \neg p\}\}$ .

- În logica de ordinul I:

pentru a verifica satisfiabilitatea formulei

$\varphi := \forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (Q(z) \rightarrow (\neg P(g(z)) \vee Q(y))))$



# Forma clauzală

## Exemplu

- În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

determinăm  $\varphi^{fc} := (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

și analizăm mulțimea de clauze  $\{\{\neg p, q\}, \{q, \neg p\}\}$ .

- În logica de ordinul I:

pentru a verifica satisfiabilitatea formulei

$\varphi := \forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (Q(z) \rightarrow (\neg P(g(z)) \vee Q(y))))$

determinăm

$\varphi^{fc} := \forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(z) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(y)))$

# Forma clauzală

## Exemplu

- În calculul propozițional:

pentru a verifica satisfiabilitatea lui  $\varphi := (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

determinăm  $\varphi^{fc} := (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

și analizăm mulțimea de clauze  $\{\{\neg p, q\}, \{q, \neg p\}\}$ .

- În logica de ordinul I:

pentru a verifica satisfiabilitatea formulei

$\varphi := \forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (Q(z) \rightarrow (\neg P(g(z)) \vee Q(y))))$

determinăm

$\varphi^{fc} := \forall y \forall z ((P(f(y)) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(z) \vee \neg P(g(z)) \vee Q(y)))$

și analizăm mulțimea de clauze

$\{\{P(f(y)), Q(z)\}, \{\neg Q(z), \neg P(g(z)), Q(y)\}\}$

# Deducție și satisfiabilitate

Fie  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule în logica propozițională (enunțuri în calculul cu predicate).

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$  este echivalent cu

# Deducție și satisfiabilitate

Fie  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule în logica propozițională (enunțuri în calculul cu predicate).

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$  este echivalent cu

$\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$  este echivalent cu

# Deducție și satisfiabilitate

Fie  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule în logica propozițională (enunțuri în calculul cu predicate).

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$  este echivalent cu

$\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$  este echivalent cu

$\models \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi$  este echivalent cu

# Deducție și satisfiabilitate

Fie  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule în logica propozițională (enunțuri în calculul cu predicate).

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$  este echivalent cu

$\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$  este echivalent cu

$\models \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi$  este echivalent cu

$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$  este satisfiabilă

Pentru a cerceta satisfiabilitatea este suficient să studiem forme clauzale

$$\{\{L_{11}, \dots, L_{1n_1}\}, \dots, \{L_{k1}, \dots, L_{kn_k}\}\}$$

atât în logica propozițională, cât și în calculul cu predicate.

# Rezoluție

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității formelor clauzale.

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității formelor clauzale.

- Rezoluția în calculul propozițional (recap.)
- Rezoluția în logica de ordinul I
  - cazul clauzelor fără variabile
  - cazul general



## Rezoluția în calculul propozițional (recap.)

## Regula rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  clauze, iar  $p$  este variabila propozițională astfel încât  $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$ .

# Regula rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  clauze, iar  $p$  este variabila propozițională astfel încât  $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$ .

## Propoziție

Regula *Rez* păstrează satisfiabilitatea. Sunt echivalente:

- mulțimea de clauze  $\{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}\}$  este satisfiabilă,
- clauza  $C_1 \cup C_2$  este satisfiabilă.

# Regula rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  clauze, iar  $p$  este variabila propozițională astfel încât  $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$ .

## Propoziție

Regula *Rez* păstrează satisfiabilitatea. Sunt echivalente:

- mulțimea de clauze  $\{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}\}$  este satisfiabilă,
- clauza  $C_1 \cup C_2$  este satisfiabilă.

## Exemplu

$$\frac{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}}{\{q, \neg q\}}$$

# Regula rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  clauze, iar  $p$  este variabila propozițională astfel încât  $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$ .

## Propoziție

Regula *Rez* păstrează satisfiabilitatea. Sunt echivalente:

- mulțimea de clauze  $\{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}\}$  este satisfiabilă,
- clauza  $C_1 \cup C_2$  este satisfiabilă.

## Exemplu

$$\frac{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}}{\{q, \neg q\}}$$

Este mulțimea de clauze  $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$  satisfiabilă?

# Derivare prin rezoluție

Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din  $\mathcal{C}$  este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din  $\mathcal{C}$  sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este **rezolvent**).

# Derivare prin rezoluție

Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din  $\mathcal{C}$  este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din  $\mathcal{C}$  sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este **rezolvent**).

## Exemplu

Fie  $\mathcal{C} = \{\{\neg q, \neg p\}, \{q\}, \{p\}\}$  o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție pentru  $\square$  din  $\mathcal{C}$  este

$$C_1 = \{\neg q, \neg p\}$$

$$C_2 = \{q\}$$

$$C_3 = \{\neg p\} \quad (\text{Rez}, C_1, C_2)$$

$$C_4 = \{p\}$$

$$C_5 = \square \quad (\text{Rez}, C_3, C_4)$$

# Derivare prin rezoluție

Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din  $\mathcal{C}$  este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din  $\mathcal{C}$  sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este **rezolvent**).

## Exemplu

Fie  $\mathcal{C} = \{\{\neg q, \neg p\}, \{q\}, \{p\}\}$  o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție pentru  $\square$  din  $\mathcal{C}$  este

$$C_1 = \{\neg q, \neg p\}$$

$$C_2 = \{q\}$$

$$C_3 = \{\neg p\} \quad (\text{Rez}, C_1, C_2)$$

$$C_4 = \{p\}$$

$$C_5 = \square \quad (\text{Rez}, C_3, C_4)$$

## Teorema de completitudine

$\models \varphi$  dacă și numai dacă există o derivare prin rezoluție a lui  $\square$  din  $(\neg \varphi)^{fc}$ .



# Procedura Davis-Putnam DPP (informal)

**Intrare:** o mulțime  $\mathcal{C}$  de clauze

Se repetă următorii pași:

- se elimină clauzele triviale
- se alege o variabilă  $p$
- se adaugă la mulțimea de clauze toți rezolvenții obținuți prin aplicarea *Rez* pe variabila  $p$
- se șterg toate clauzele care conțin  $p$  sau  $\neg p$

**Ieșire:** dacă la un pas s-a obținut □, mulțimea  $\mathcal{C}$  nu este satisfiabilă; altfel  $\mathcal{C}$  este satisfiabilă.

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

*Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?*

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

*Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?*

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

Se elimină clauzele în care apare  $r$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_1 := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

Se elimină clauzele în care apare  $r$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_1 := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$

Alegem variabila  $q$  și selectăm  $\mathcal{C}_1^q := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ,  $\mathcal{C}_1^{\neg q} := \emptyset$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este vidă  $\mathcal{R}_1 := \emptyset$ .

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

Se elimină clauzele în care apare  $r$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_1 := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$

Alegem variabila  $q$  și selectăm  $\mathcal{C}_1^q := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ,  $\mathcal{C}_1^{\neg q} := \emptyset$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este vidă  $\mathcal{R}_1 := \emptyset$ .

Se elimină clauzele în care apare  $q$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_2 := \{\}$  mulțimea de clauze vidă

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

Se elimină clauzele în care apare  $r$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_1 := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$

Alegem variabila  $q$  și selectăm  $\mathcal{C}_1^q := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ,  $\mathcal{C}_1^{\neg q} := \emptyset$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este vidă  $\mathcal{R}_1 := \emptyset$ .

Se elimină clauzele în care apare  $q$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_2 := \{\}$  mulțimea de clauze vidă

Deoarece  $\{\}$  este satisfiabilă, rezultă că  $\mathcal{C}_0$  este satisfiabilă.

# Procedura Davis-Putnam DPP

## Exemplu

Este  $\mathcal{C}_0 = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}, \{q, \neg r\}\}$  satisfiabilă?

Alegem variabila  $r$  și selectăm  $\mathcal{C}_0^r := \{\{q, \neg p, r\}\}$ ,

$\mathcal{C}_0^{\neg r} := \{\{p, \neg r\}, \{q, \neg r\}\}$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ;

Se observă că  $p, \neg p \in \{q, \neg p, p\}$  deci  $\mathcal{R}_0 := \{\{q, \neg p\}\}$

Se elimină clauzele în care apare  $r$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_1 := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$

Alegem variabila  $q$  și selectăm  $\mathcal{C}_1^q := \{\{q, p\}, \{q, \neg p\}\}$ ,  $\mathcal{C}_1^{\neg q} := \emptyset$ .

Mulțimea rezolvenților posibili este vidă  $\mathcal{R}_1 := \emptyset$ .

Se elimină clauzele în care apare  $q$  și se adaugă noii rezolvenți

$\mathcal{C}_2 := \{\}$  mulțimea de clauze vidă

Deoarece  $\{\}$  este satisfiabilă, rezultă că  $\mathcal{C}_0$  este satisfiabilă.

**Atenție!** La fiecare pas se alege pentru prelucrare o **singură** variabilă.



## Rezoluția în logica de ordinul I

## Clauze închise

- Fie  $C$  o clauză. Spunem că  $C'$  este o **instanță** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $C' = \theta(C)$ .

## Clauze închise

- Fie  $C$  o clauză. Spunem că  $C'$  este o **instanță** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $C' = \theta(C)$ .

Spunem că  $C'$  este o **instanță închisă** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$  such that  $C' = \theta(C)$  ( $C'$  se obține din  $C$  înlocuind variabilele cu termeni din universul Herbrand)

# Clauze închise

- Fie  $C$  o clauză. Spunem că  $C'$  este o **instanță** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $C' = \theta(C)$ .

Spunem că  $C'$  este o **instanță închisă** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$  such that  $C' = \theta(C)$  ( $C'$  se obține din  $C$  înlocuind variabilele cu termeni din universul Herbrand)

- Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. Definim

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \{\theta(C) \mid C \in \mathcal{C}, \theta : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}\}$$

$\mathcal{H}(\mathcal{C})$  este mulțimea instanțelor închise ale clauzelor din  $\mathcal{C}$ .

# Clauze închise

- Fie  $C$  o clauză. Spunem că  $C'$  este o **instanță** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $C' = \theta(C)$ .

Spunem că  $C'$  este o **instanță închisă** a lui  $C$  dacă există o substituție  $\theta : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$  such that  $C' = \theta(C)$  ( $C'$  se obține din  $C$  înlocuind variabilele cu termeni din universul Herbrand)

- Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. Definim

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \{\theta(C) \mid C \in \mathcal{C}, \theta : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}\}$$

$\mathcal{H}(\mathcal{C})$  este mulțimea instanțelor închise ale clauzelor din  $\mathcal{C}$ .

## Teoremă

O mulțime de clauze  $\mathcal{C}$  este satisfiabilă dacă și numai dacă  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  este satisfiabilă. O mulțime de clauze  $\mathcal{C}$  este nesatisfiabilă dacă și numai dacă există o submulțime finită a lui  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  care este nesatisfiabilă.

# Clauze închise

## Exemplu

Cercetați satisfiabilitatea mulțimii de clauze

$$\mathcal{C} = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(y)\}, \{\neg Q(z)\}\}$$

Dacă  $c$  este constantă atunci

$$\{\{\neg P(c), Q(c)\}, \{P(c)\}, \{\neg Q(c)\}\} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{C}).$$

# Clauze închise

## Exemplu

Cercetați satisfiabilitatea mulțimii de clauze

$$\mathcal{C} = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(y)\}, \{\neg Q(z)\}\}$$

Dacă  $c$  este constantă atunci

$$\{\{\neg P(c), Q(c)\}, \{P(c)\}, \{\neg Q(c)\}\} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{C}).$$

Considerăm toate valorile de adevăr pentru  $P(c)$  și  $Q(c)$ :

$P(c)$	$Q(c)$	$(\neg P(c) \vee Q(c)) \wedge P(c) \wedge \neg Q(c)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

# Clauze închise

## Exemplu

Cercetați satisfiabilitatea mulțimii de clauze

$$\mathcal{C} = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(y)\}, \{\neg Q(z)\}\}$$

Dacă  $c$  este constantă atunci

$$\{\{\neg P(c), Q(c)\}, \{P(c)\}, \{\neg Q(c)\}\} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{C}).$$

Considerăm toate valorile de adevăr pentru  $P(c)$  și  $Q(c)$ :

$P(c)$	$Q(c)$	$(\neg P(c) \vee Q(c)) \wedge P(c) \wedge \neg Q(c)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\{\{\neg P(c), Q(c)\}, \{P(c)\}, \{\neg Q(c)\}\}$  este nesatisfiabilă, deci  $\mathcal{C}$  este nesatisfiabilă.

Putem gândi formulele atomice închise ca variabile propoziționale.



## Rezoluția pe clauze închise

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  **clauze închise**, iar  $L$  este o **formulă atomică închisă** astfel încât  $\{L, \neg L\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{L, \neg L\} \cap C_2 = \emptyset$ .

## Rezoluția pe clauze închise

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  **clauze închise**, iar  $L$  este o **formulă atomică închisă** astfel încât  $\{L, \neg L\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{L, \neg L\} \cap C_2 = \emptyset$ .

### Propoziție

Regula *Rez* păstrează satisfiabilitatea. Sunt echivalente:

- mulțimea de clauze  $\{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}\}$  este satisfiabilă,
- clauza  $C_1 \cup C_2$  este satisfiabilă.

# Rezoluția pe clauze închise

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde  $C_1, C_2$  **clauze închise**, iar  $L$  este o **formulă atomică închisă** astfel încât  $\{L, \neg L\} \cap C_1 = \emptyset$  și  $\{L, \neg L\} \cap C_2 = \emptyset$ .

## Propoziție

Regula *Rez* păstrează satisfiabilitatea. Sunt echivalente:

- mulțimea de clauze  $\{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}\}$  este satisfiabilă,
- clauza  $C_1 \cup C_2$  este satisfiabilă.

## Teoremă

Fie  $\varphi$  o formulă arbitrară în logica de ordinul I. Atunci  $\models \varphi$  dacă și numai dacă există o derivare pentru  $\square$  din  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  folosind *Rez*, unde  $\mathcal{C}$  este mulțimea de clauze asociată lui  $(\neg\varphi)^{fc}$ .

# Rezoluția pe clauze închise

## Exemplu

Fie  $f, g$  simboluri de funcții unare,  $P, Q$  simboluri de predicate unare. Cercetați satisfiabilitatea formulei:

$$\varphi = \forall x((\neg P(x) \vee Q(f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(x))$$

# Rezoluția pe clauze închise

## Exemplu

Fie  $f, g$  simboluri de funcții unare,  $P, Q$  simboluri de predicate unare. Cercetați satisfiabilitatea formulei:

$$\varphi = \forall x((\neg P(x) \vee Q(f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(x))$$

Determinăm forma clauzală:

$$\mathcal{C} = \{\{\neg P(x), Q(f(x))\}, \{P(g(x))\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

# Rezoluția pe clauze închise

## Exemplu

Fie  $f, g$  simboluri de funcții unare,  $P, Q$  simboluri de predicate unare.  
Cercetați satisfiabilitatea formulei:

$$\varphi = \forall x((\neg P(x) \vee Q(f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(x))$$

Determinăm forma clauzală:

$$\mathcal{C} = \{\{\neg P(x), Q(f(x))\}, \{P(g(x))\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

Pentru  $c$  o constantă obținem următoarea derivare:

$$C_1 = \{\neg P(g(c)), Q(f(g(c)))\}$$

$$C_2 = \{P(g(c))\}$$

$$C_3 = \{Q(f(g(c)))\}$$

*Rez,  $C_1, C_2$*

$$C_4 = \{\neg Q(f(g(c)))\}$$

$$C_5 = \square$$

*Rez,  $C_3, C_4$*

# Rezoluția pe clauze arbitrare

## Observații:

- Unificarea literalilor revine la unificarea argumentelor

Dacă  $\sigma : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  o substituție, atunci sunt echivalente

- $\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(P(t'_1, \dots, t'_n))$
- $\sigma(\neg P(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(\neg P(t'_1, \dots, t'_n))$
- $\sigma(t_1) = \sigma(t'_1), \dots, \sigma(t_n) = \sigma(t'_n)$

# Rezoluția pe clauze arbitrare

## Observații:

- Unificarea literalilor revine la unificarea argumentelor

Dacă  $\sigma : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$  o substituție, atunci sunt echivalente

- $\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(P(t'_1, \dots, t'_n))$
- $\sigma(\neg P(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(\neg P(t'_1, \dots, t'_n))$
- $\sigma(t_1) = \sigma(t'_1), \dots, \sigma(t_n) = \sigma(t'_n)$

- Redenumirea variabilelor în clauze păstrează validitatea

## Exemplu

Deoarece  $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models (\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi)$  obținem

$$\forall x((P_1(x) \vee P_2(x)) \wedge (Q_1(x) \vee Q_2(x)))$$

$$\models (\forall x(P_1(x) \vee P_2(x))) \wedge (\forall x(Q_1(x) \vee Q_2(x)))$$

$$\models (\forall x(P_1(x) \vee P_2(x))) \wedge (\forall y(Q_1(y) \vee Q_2(y)))$$

$$\models \forall x \forall y (P_1(x) \vee P_2(x)) \wedge (Q_1(y) \vee Q_2(y))$$



# Rezoluția pe clauze arbitrare

Regula rezoluției pentru clauze arbitrare

$$\text{Rez} \frac{C_1, C_2}{(\sigma C_1 \setminus \sigma Lit_1) \cup (\sigma C_2 \setminus \sigma Lit_2)}$$

dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

- 1  $C_1, C_2$  clauze **care nu au variabile comune**,
- 2  $Lit_1 \subseteq C_1$  și  $Lit_2 \subseteq C_2$  sunt **mulțimi de literalii**,
- 3  $\sigma$  este un **cgu** pentru  $Lit_1$  și  $Lit_2^c$ , adică  $\sigma$  unifică **toți literalii** din  $Lit_1$  și  $Lit_2^c$ .

O clauză  $C$  se numește **rezolvent** pentru  $C_1$  și  $C_2$  dacă există o **redenumire de variabile**  $\theta : V \rightarrow V$  astfel încât  $C_1$  și  $\theta C_2$  nu au variabile comune și  $C$  se obține din  $C_1$  și  $\theta C_2$  prin *Rez*.

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți un rezolvent pentru clauzele:

$$C_1 = \{P(f(x), g(y)), Q(x, y)\} \text{ și}$$

$$C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(y)), Q(f(a), g(y))\}$$

- redenumim variabilele pentru a satisface condițiile din *Rez*  
 $\theta C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z)), Q(f(a), g(z))\}$  unde  $\theta = \{y \leftarrow z\}$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți un rezolvent pentru clauzele:

$$C_1 = \{P(f(x), g(y)), Q(x, y)\} \text{ și}$$

$$C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(y)), Q(f(a), g(y))\}$$

- redenumim variabilele pentru a satisface condițiile din *Rez*  
 $\theta C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z)), Q(f(a), g(z))\}$  unde  $\theta = \{y \leftarrow z\}$

- determinăm  $Lit_1$  și  $Lit_2$   
 $Lit_1 = \{P(f(x), g(y))\}$  și  $Lit_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z))\}$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți un rezolvent pentru clauzele:

$$C_1 = \{P(f(x), g(y)), Q(x, y)\} \text{ și}$$

$$C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(y)), Q(f(a), g(y))\}$$

- redenumim variabilele pentru a satisface condițiile din Rez  
 $\theta C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z)), Q(f(a), g(z))\}$  unde  $\theta = \{y \leftarrow z\}$

- determinăm  $Lit_1$  și  $Lit_2$

$$Lit_1 = \{P(f(x), g(y))\} \text{ și } Lit_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z))\}$$

- găsim un cgu  $\sigma$  care este unificator pentru

$$Lit_1 = \{P(f(x), g(y))\} \text{ și } Lit_2^\sigma = \{P(f(f(a)), g(z))\}$$

$$\sigma = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow z\}$$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți un rezolvent pentru clauzele:

$$C_1 = \{P(f(x), g(y)), Q(x, y)\} \text{ și}$$

$$C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(y)), Q(f(a), g(y))\}$$

- redenumim variabilele pentru a satisface condițiile din Rez  
 $\theta C_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z)), Q(f(a), g(z))\}$  unde  $\theta = \{y \leftarrow z\}$

- determinăm  $Lit_1$  și  $Lit_2$

$$Lit_1 = \{P(f(x), g(y))\} \text{ și } Lit_2 = \{\neg P(f(f(a)), g(z))\}$$

- găsim un cgu  $\sigma$  care este unificator pentru

$$Lit_1 = \{P(f(x), g(y))\} \text{ și } Lit_2^c = \{P(f(f(a)), g(z))\}$$

$$\sigma = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow z\}$$

- Rezolventul este  $C = (\sigma C_1 \setminus \sigma Lit_1) \cup (\sigma(\theta C_2) \setminus \sigma Lit_2)$

$$C = \{Q(f(a), z), Q(f(a), g(z))\}$$

# Rezoluția în logica de ordinul I

- Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din mulțimea  $\mathcal{C}$  pentru o clauză  $C$  este o secvență  $C_1, \dots, C_n$  astfel încât  $C_n = C$  și, pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C_i \in \mathcal{C}$  sau  $C_i$  este un rezolvent pentru două cauze  $C_j, C_k$  cu  $j, k < i$ .

# Rezoluția în logica de ordinul I

- Fie  $\mathcal{C}$  o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din mulțimea  $\mathcal{C}$  pentru o clauză  $C$  este o secvență  $C_1, \dots, C_n$  astfel încât  $C_n = C$  și, pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C_i \in \mathcal{C}$  sau  $C_i$  este un rezolvent pentru două cauze  $C_j, C_k$  cu  $j, k < i$ .

## Teoremă

O mulțime de clauze  $\mathcal{C}$  este nesatisfiabilă dacă și numai dacă există o derivare a clauzei vide  $\square$  din  $\mathcal{C}$  prin *Rez*.

Rezoluția este corectă și completă în calculul cu predicate,  
dar nu este procedură de decizie.

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți o derivare a  $\square$  din  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  unde:

$$C_1 = \{ \neg P(x, y), P(y, x) \}$$

$$C_2 = \{ \neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z) \}$$

$$C_3 = \{ P(x, f(x)) \}$$

$$C_4 = \{ \neg P(x, x) \}$$



# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți o derivare a  $\square$  din  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  unde:

$$C_1 = \{ \neg P(x, y), P(y, x) \}$$

$$C_2 = \{ \neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z) \}$$

$$C_3 = \{ P(x, f(x)) \}$$

$$C_4 = \{ \neg P(x, x) \}$$

$$C'_3 = \{ P(x_1, f(x_1)) \}$$

redenumire în  $C_3$

$$C_5 = \{ P(f(x), x) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_1 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_1, C'_3$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți o derivare a  $\square$  din  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  unde:

$$C_1 = \{ \neg P(x, y), P(y, x) \}$$

$$C_2 = \{ \neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z) \}$$

$$C_3 = \{ P(x, f(x)) \}$$

$$C_4 = \{ \neg P(x, x) \}$$

$$C'_3 = \{ P(x_1, f(x_1)) \}$$

redenumire în  $C_3$

$$C_5 = \{ P(f(x), x) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_1 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_1, C'_3$

$$C''_3 = \{ P(x_2, f(x_2)) \}$$

redenumire în  $C_3$

$$C_6 = \{ \neg P(f(x), z), P(x, z) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_2 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_2, C''_3$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți o derivare a  $\square$  din  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  unde:

$$C_1 = \{ \neg P(x, y), P(y, x) \}$$

$$C_2 = \{ \neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z) \}$$

$$C_3 = \{ P(x, f(x)) \}$$

$$C_4 = \{ \neg P(x, x) \}$$

$$C'_3 = \{ P(x_1, f(x_1)) \}$$

redenumire în  $C_3$

$$C_5 = \{ P(f(x), x) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_1 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_1, C'_3$

$$C''_3 = \{ P(x_2, f(x_2)) \}$$

redenumire în  $C_3$

$$C_6 = \{ \neg P(f(x), z), P(x, z) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_2 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_2, C''_3$

$$C'_5 = \{ P(f(x_3), x_3) \}$$

redenumire în  $C_5$

$$C_7 = \{ P(x, x) \}$$

Rez,  $\sigma = \{x_3 \leftarrow x, z \leftarrow x\}, C_6, C'_5$

# Rezoluția în logica de ordinul I

## Exemplu

Găsiți o derivare a  $\square$  din  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  unde:

$$C_1 = \{ \neg P(x, y), P(y, x) \}$$

$$C_2 = \{ \neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z) \}$$

$$C_3 = \{ P(x, f(x)) \}$$

$$C_4 = \{ \neg P(x, x) \}$$

$$C'_3 = \{ P(x_1, f(x_1)) \}$$

$$C_5 = \{ P(f(x), x) \}$$

$$C''_3 = \{ P(x_2, f(x_2)) \}$$

$$C_6 = \{ \neg P(f(x), z), P(x, z) \}$$

$$C'_5 = \{ P(f(x_3), x_3) \}$$

$$C_7 = \{ P(x, x) \}$$

$$C'_4 = \{ \neg P(x_4, x_4) \}$$

$$C_5 = \square$$

redenumire în  $C_3$

$\text{Rez}, \sigma = \{x_1 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_1, C'_3$

redenumire în  $C_3$

$\text{Rez}, \sigma = \{x_2 \leftarrow x, y \leftarrow f(x)\}, C_2, C''_3$

redenumire în  $C_5$

$\text{Rez}, \sigma = \{x_3 \leftarrow x, z \leftarrow x\}, C_6, C'_5$

redenumire în  $C_4$

$\text{Rez}, \sigma = \{x_4 \leftarrow x\}, C_7, C'_4$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

Cercetați dacă din ipotezele (i1)-(i6) se deduce (c), unde

- (i1) Jack owns a dog.
- (i2) Anyone who owns a dog is a lover of animals.
- (i3) Lovers of animals do not kill animals.
- (i4) Either Jack killed Tuna or curiosity killed Tuna.
- (i5) Tuna is a cat.
- (i6) All cats are animals.
- (c) Curiosity killed Tuna.

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

Cercetați dacă din ipotezele (i1)-(i6) se deduce (c), unde

- (i1) Jack owns a dog.
- (i2) Anyone who owns a dog is a lover of animals.
- (i3) Lovers of animals do not kill animals.
- (i4) Either Jack killed Tuna or curiosity killed Tuna.
- (i5) Tuna is a cat.
- (i6) All cats are animals.
- (c) Curiosity killed Tuna.

Vom formaliza ipotezele și concluzia în logica de ordinul I și vom face demonstrația folosind rezoluția.

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

Formalizăm ipotezele și determinăm forma clauzală:

(i1) Jack owns a dog.

$$\exists x (D(x) \wedge O(jack, x))$$

$$\mathbf{R} = \{D, O\}, \mathbf{C} = \{jack\}$$

$$D(dog) \wedge O(jack, dog)$$

Skolemizare

$$\mathbf{R} = \{D, O\}, \mathbf{C} = \{jack, dog\}$$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i2) Anyone who owns a dog is a lover\_of\_animals.

$$\forall x (\exists y (D(y) \wedge O(x, y))) \rightarrow L(x) \qquad \mathbf{R} = \{D, O, L\}, \mathbf{C} = \{jack, dog\}$$



## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i2) Anyone who owns a dog is a lover\_of\_animals.

$$\forall x (\exists y (D(y) \wedge O(x, y))) \rightarrow L(x) \quad \mathbf{R} = \{D, O, L\}, \mathbf{C} = \{jack, dog\}$$

$$\forall x ((\neg(\exists y (D(y) \wedge O(x, y))) \vee L(x))$$

$$\forall x ((\forall y (\neg D(y) \vee \neg O(x, y))) \vee L(x))$$

$$\forall x \forall y (\neg D(y) \vee \neg O(x, y)) \vee L(x))$$

$$\neg D(y) \vee \neg O(x, y)) \vee L(x)$$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i3) Lovers\_of\_animals do not kill animals.

$$\forall x (L(x) \rightarrow (\forall y A(y) \rightarrow \neg K(x, y)))$$

$$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K\}, \mathbf{C} = \{jack, dog\}$$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i3) Lovers\_of\_animals do not kill animals.

$$\forall x (L(x) \rightarrow (\forall y A(y) \rightarrow \neg K(x, y)))$$

$$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K\}, \mathbf{C} = \{jack, dog\}$$

$$\forall x (\neg L(x) \vee (\forall y \neg A(y) \vee \neg K(x, y)))$$

$$\forall x \forall y (\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y))$$

$$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i4) Either Jack killed Tuna or curiosity killed Tuna.

$K(\text{jack}, \text{tuna}) \vee K(\text{curiosity}, \text{tuna})$

$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K\}, \mathbf{C} = \{\text{jack}, \text{dog}, \text{tuna}, \text{curiosity}\}$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i4) Either Jack killed Tuna or curiosity killed Tuna.

$K(jack, tuna) \vee K(curiosity, tuna)$

$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K\}, \mathbf{C} = \{jack, dog, tuna, curiosity\}$

(i5) Tuna is a cat.

$C(tuna)$

$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K, C\}, \mathbf{C} = \{jack, dog, tuna, curiosity\}$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

(i4) Either Jack killed Tuna or curiosity killed Tuna.

$$K(jack, tuna) \vee K(curiosity, tuna)$$

$$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K\}, \mathbf{C} = \{jack, dog, tuna, curiosity\}$$

(i5) Tuna is a cat.

$$C(tuna)$$

$$\mathbf{R} = \{D, O, L, A, K, C\}, \mathbf{C} = \{jack, dog, tuna, curiosity\}$$

(i6) All cats are animals.

$$\forall x C(x) \rightarrow A(x)$$

$$\neg C(x) \vee A(x)$$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

- (i1)  $D(dog) \wedge O(jack, dog)$
- (i2)  $\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$
- (i3)  $\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$
- (i4)  $K(jack, tuna) \vee K(curiosity, tuna)$
- (i5)  $C(tuna)$
- (i6)  $\neg C(x) \vee A(x)$
- (c)  $K(curiosity, tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

- (i1)  $D(dog)$
- (i1)  $O(jack, dog)$
- (i2)  $\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$
- (i3)  $\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$
- (i4)  $K(jack, tuna) \vee K(curiosity, tuna)$
- (i5)  $C(tuna)$
- (i6)  $\neg C(x) \vee A(x)$
- (¬c)  $\neg K(curiosity, tuna)$



## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$

$K(jack, tuna) \vee K(curiosity, tuna)$

$C(tuna)$

$\neg C(x) \vee A(x)$

$\neg K(curiosity, tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$

$K(jack, tuna)$

$C(tuna)$

$\neg C(x) \vee A(x)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$

$K(jack, tuna)$

$C(tuna)$

$\neg C(x) \vee A(x) \{x \leftarrow tuna\}$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y)$

$K(jack, tuna)$

$A(tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x, y) \{y \leftarrow tuna\}$

$K(jack, tuna)$

$A(tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg K(x, tuna)$

$K(jack, tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(x) \vee \neg K(x, tuna) \{x \leftarrow jack\}$

$K(jack, tuna)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x)$

$\neg L(jack)$



## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(x, y) \vee L(x) \{x \leftarrow jack\}$

$\neg L(jack)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(jack, y)$

## Exemplu: "Did curiosity kill the cat?"

### Exemplu

$D(dog)$

$O(jack, dog)$

$\neg D(y) \vee \neg O(jack, y) \{y \leftarrow dog\}$

# "Curiosity killed the cat!"

## Exemplu

$O(jack, dog)$

$\neg O(jack, dog)$

# "Curiosity killed the cat!"

## Exemplu

$O(jack, dog)$

$\neg O(jack, dog)$



# "Curiosity killed the cat!"

## Exemplu

$O(jack, dog)$

$\neg O(jack, dog)$



În concluzie, am arătat că

$$\{(i1), (i2), (i3), (i4), (i5), (i6)\} \models (c)$$



Pe săptămâna viitoare!