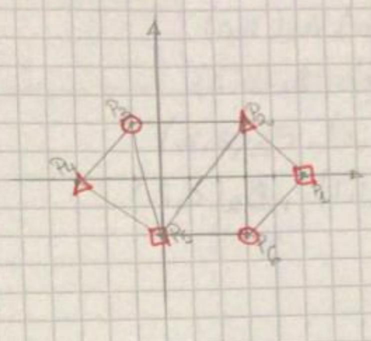
## Exercițiul 3

$P = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$



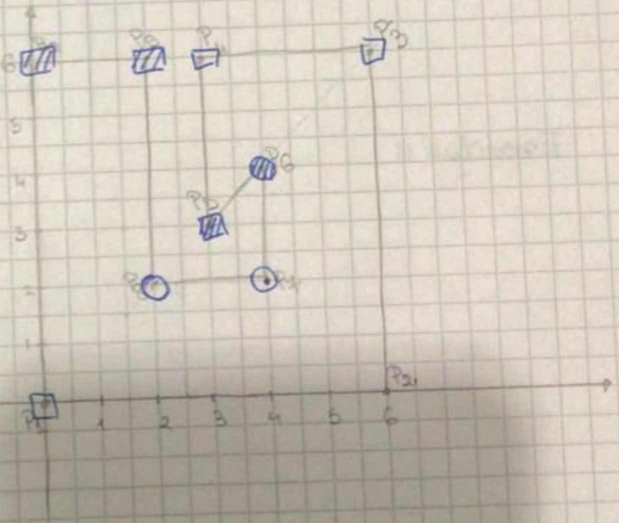

O → 2
Δ → 2 ⇒ 2 camere sunt necesare
□ → 2

→ dar pentru că este poligon convex este suficientă o singură cameră

$P_9P_8P_7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 24 + \cancel{4} - 12 - \cancel{8} - 4 >$
$=$

$P_8P_7P_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 4 - 8 - 12$
$= -4$ este viraj dreapta în sens trig

## Exercițiul 4




▨ E → $P_{i-1}P_{i+1}$ este în interior → CONVEX

● M → $P_{i-1}P_{i+1}$ - este în exterior
↳ CONCAV

□ → vf convex neprincipal > 0

O → vf concav neprincipal < 0

▨ ⇒ $P_1$ → vârf convex neprincipal : $P_{10}P_2$ este viraj stânga
~~$P_5$ are $P_5P_7$ în exteriorul P.~~
$P_2$ → □ : $P_1P_3$ este viraj stânga
$P_5$ → ▨ $P_6$ → ●
$P_3$ → □ : $P_2P_4$ v. stânga $P_4$ → v. st. □
$P_7$ → O $P_8$ → O

# XIII. Soluțiile ecuațiilor trigonometrice simple

## XIII.1. Ecuații fundamentale

$1. \sin x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k \in Z\}$

$2. \cos x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in Z\}$

$3. tgx = a, a \in R \Rightarrow x \in \{arctga + k\pi | k \in Z$

$4. ctgx = a, a \in R \Rightarrow x \in \{accctga + k\pi | k \in Z\}$

## XIII.2. Tabele de valori:

| x / funcția | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |

| x / funcția | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tg $x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | / | 0 | / | 0 |
| ctg $x$ | / | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | / | 0 | / |

| x / funcția | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arcsin $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| arcos $x$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

| x / funcția | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arctg $x$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| arcctg $x$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

## —Noțiuni Introductive → Exerciții

Exercițiul 1:

i) $A=(3,3)$ $B=(2,4)$ $C=(5,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+15+12-6-20-3=0 \Rightarrow A,B,C \text{ - puncte coliniare}$$

ii) $A=(1,4,-2)$ $B=(4,1,1)$ $P=(2,3,-1)$

• $r(A,P,B)=$

$\vec{AP}=P-A=(2,3,-1)-(1,4,-2)=(1,-1,1)$ ①

$\vec{PB}=B-P=(4,1,1)-(2,3,-1)=(2,-2,2)=2(1,-1,1)$ ②
$=2\vec{AP}$

Din 1 și 2 $\Rightarrow$ $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{PB}$ $|\cdot 2$

$2\vec{AP}=\vec{PB} \Leftrightarrow \vec{PB}=2\vec{AP}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r(A,P,B)=\frac{1}{2}}$

• $r(B,P,A)=$

$\vec{BP}=P-B=(2,3,-1)-(4,1,1)=(-2,2,-2)=2(-1,1,-1)=2\vec{PA}$

$\vec{PA}=A-P=(1,4,-2)-(2,3,-1)=(-1,1,-1)$

$\vec{BP}=2\vec{PA}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r(B,P,A)=2}$

• $r(P,A,B)=$

$\vec{PA}=A-P=(-1,1,-1)$

$\vec{AB}=B-A=(4,1,1)-(1,4,-2)=(3,-3,3)=-3(-1,1,-1)$

$\vec{PA}=-\frac{1}{3}\vec{AB}$ $\boxed{r(P,A,B)=-\frac{1}{3}}$

Exercițiul 2 $\alpha,\beta=?$ a.î. $A,P,B\in\mathbb{R}^2$ $A=(6,2)$ $P=(\alpha,\beta)$ $B=(2,-2)$
să fie coliniare și $r(A,P,B)=2$.

$r(A,P,B)=2 \Leftrightarrow \vec{AP}=2\vec{PB}$

$\vec{AP}=P-A=(\alpha,\beta)-(6,2)=(\alpha-6,\beta-2)$

$\vec{PB}=B-P=(2,-2)-(\alpha,\beta)=(2-\alpha,-2-\beta)$

$(\alpha-6,\beta-2)=2(2-\alpha,-2-\beta)$

$\begin{cases}\alpha-6=2(2-\alpha)\\ \beta-2=2(-2-\beta)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-6=4-2\alpha\\ \beta-2=-4-4\beta\end{cases} \Leftrightarrow$

Ex1: $A=(1,2,3)$ $B(2,1,-1)$ $C=(0,3,7)$ (ex posibil pt examen)

$r(A, C, B) = ?$

$\vec{AC} = C - A = (0,3,7) - (1,2,3) = (-1, 1, 4)$

$\vec{CB} = B - C = (2, -2, -8)$

$\vec{AC} = -\frac{1}{2} \vec{CB}$ $\Rightarrow$ C NU este între A și B.

$-\frac{1}{2} = r(A, C, B)$

( Combinații liniare, afine și convexe )

VECTORI PUNCTE

Exemplu: (pentru $\theta(ABC)$

$\begin{cases} \alpha-6=4-2\alpha \\ \beta-2=-4-4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha=4+6 \\ \beta+4\beta=-4+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{10}{3} \\ 5\beta=-2 \end{cases}$ $(\alpha,\beta)=\left(\frac{10}{3},-\frac{2}{5}\right)$

**Exercitiul 3** $M(x_M, y_M)$ $\rho=6$ $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} x_M=\rho\cos\theta \\ y_M=\rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=6\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3} \\ y_M=6\cdot\sin\frac{\pi}{6}=3 \end{cases}$ $M=(3\sqrt{3},3)$

$N(-4,4)$

$x_M=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ $N_1\left(4\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$

$y_M=\operatorname{arctg}\frac{4}{-4}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

## Exercitiul 5

$u=(-1,-1,0)$ $\quad w=(-2,1,3)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & w_1 & e_1 \\ u_2 & w_2 & e_2 \\ u_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & e_1 \\ -1 & 1 & e_2 \\ 0 & 3 & e_3 \end{vmatrix} = e_3 - 3e_1 - 3e_2 - 2e_3$$

$$= -e_3 - 3e_1 - 3e_2 = -3e_1 - 3e_2 - e_3$$

$$= (-3,-3,-1)$$

## Exercitiul 6

$P=(2,2)$ $\quad Q=(4,4)$

$R_1=(8,8)$ $\quad R_2=(6,0)$ $\quad R_3=(-2,-1)$

$P,Q,R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 16 + 8 - 8 - 32 - 16 = 0 \Rightarrow P,Q,R_1 \text{ puncte coliniare}$$

$P,Q,R_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 8 - 8 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow \cancel{P,Q,R_2}$$

$R_2$ este în "dreapta" muchiei PQ

$P,Q,R_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\cancel{4} - \cancel{4} + \cancel{8} - 8 + 8 + 2 = 2 > 0 \Rightarrow R_3 \text{ este în stânga muchiei PQ.}$$

• centrul de greutate

$$\boxed{\frac{m_A}{m_A+m_B}A+\frac{m_B}{m_A+m_B}B}$$

COMBINAȚIE CONVEXĂ a punctelor A și B.

EXEMPLU: $A=(1,2,3)$ $B=(2,1,-1)$ $C=(0,3,7)$.

$r(A,C,B)=-\frac{1}{2}$ $\quad \cdot 2$

$\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (calcul anterior) $\Rightarrow \overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=0=\overrightarrow{CC}$ (toți vectorii au originea C)

$2\cancel{C}\overrightarrow{A}-\cancel{C}\overrightarrow{B}=0=\cancel{C}\overrightarrow{C}$ ⚠

$\underline{\underline{C=2A-B}}$

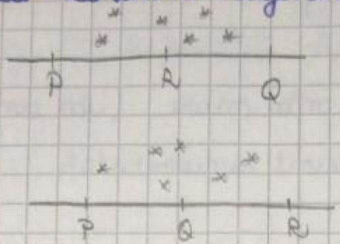
CONCLUZIE: Dacă A, P, B sunt coliniare distincte putem concluziona poziția

Curs 3

15.10.2019

Algoritmul lui $2$ = comentarii

- tratarea cazurilor degenerate

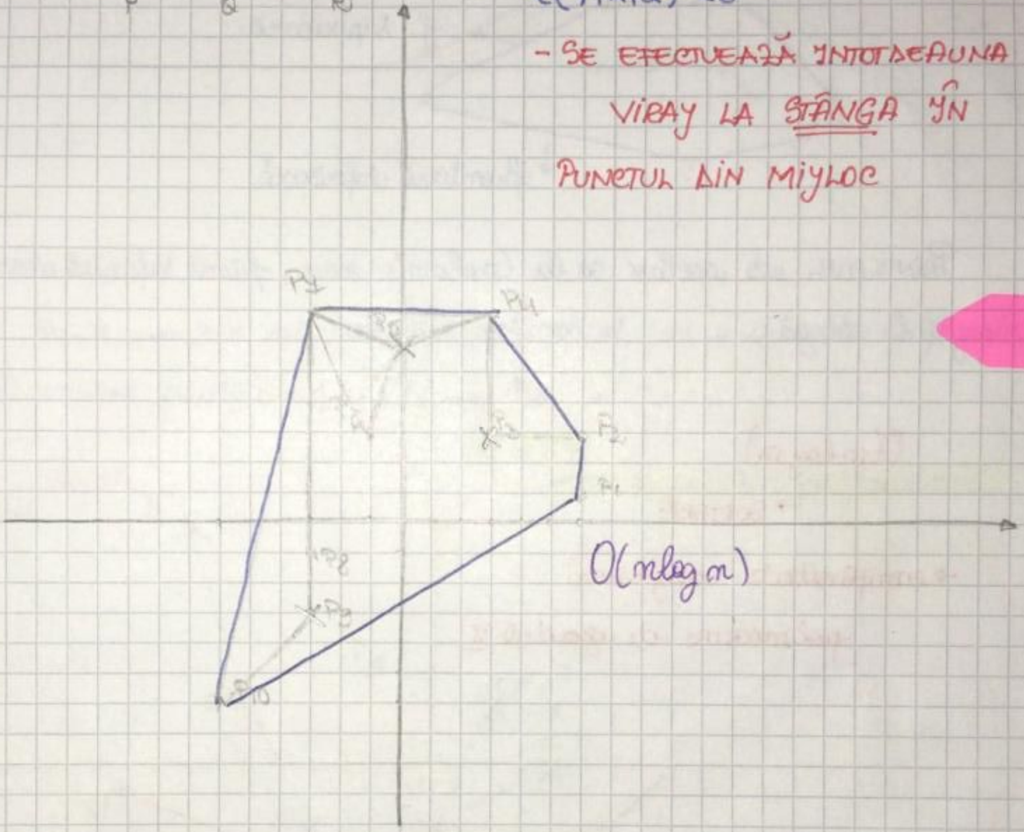



$\vec{PQ}$ → muchia frontierei
$r(P, R, Q) > 0$

$\vec{PQ}$ - nu este muchia frontierei

$r(P, R, Q) < 0$

- SE EFECTUEAZĂ ÎNTOTDEAUNA VIRAJ LA STÂNGA ÎN PUNCTUL DIN MIJLOC




$O(n \log n)$

$P_1(6,1)$ $P_2 = (6,3)$ $P_3 = (3,3)$ $P_4 = (3,7)$
$P_5 = (0,6)$ $P_6 = (-1,3)$ $P_7 = (-3,7)$ $P_8 = (-3,-1)$
$P_9 = (-3,-3)$ $P_{10} = (-6,-6)$

puncte deja sortate

$\mathcal{L}$: $P_1\ P_2\ \cancel{P_3}\ P_4\ \cancel{P_5}\ \cancel{P_6}\ P_7\ \cancel{P_8}\ \cancel{P_9}\ P_{10}\ P_1$

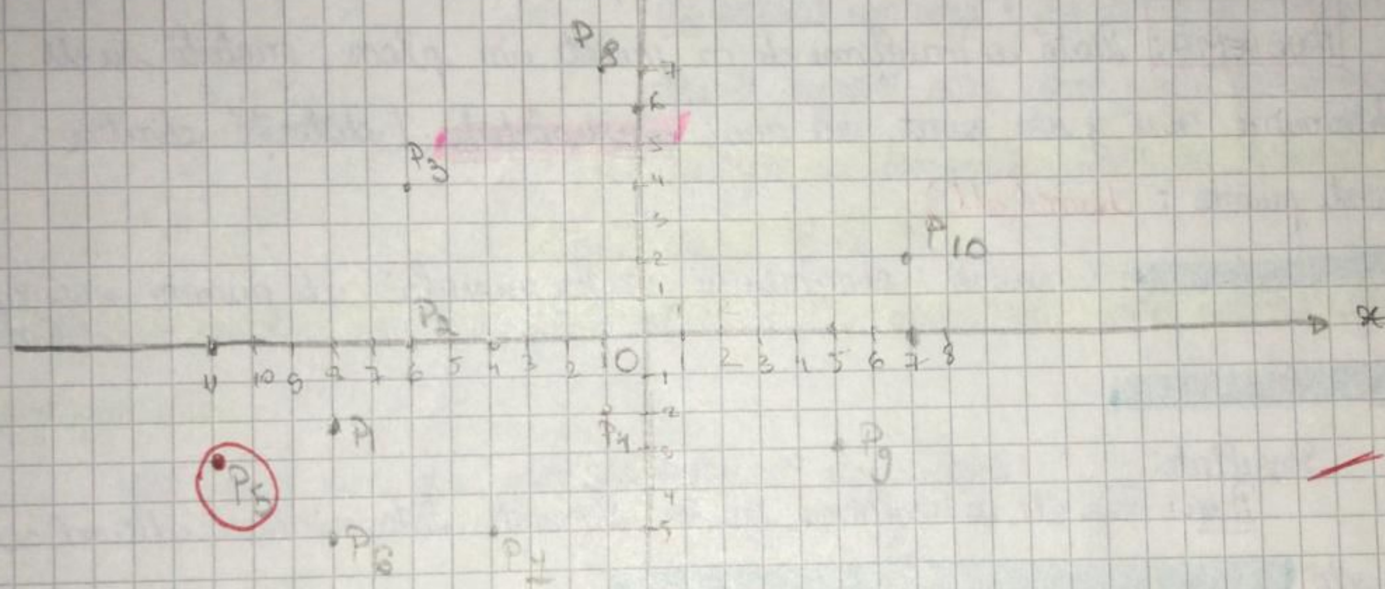
câte 3. $\underbrace{P_7\ \cancel{P_8}\ \cancel{P_9}}_{\text{coliniare elimin mij}}$

$P_1 P_2 P_4 P_7 P_{10} P_1$ → frontiera acoperirii convexe

$\mathcal{L}$: $P_1 P_2\ \cancel{P_3}\ P_4\ \cancel{P_5}\ \cancel{P_6}\ P_7\ \cancel{P_8}\ \cancel{P_9}\ P_{10}\ P_1$

Jarvis' march
- fără sortare

$O(m \cdot h)$
→ nr de puncte de pe frontieră.



- $P_5$ este "cel mai din stânga" (lexicografic) → aparține frontierei ac convexe
- determinarea succesorului lui $P_5$ : $P_5 P_1 \cancel{P_2}$ → PIVOT
  $P_5 P_1 P_3$
  $P_5 \cancel{P_1} P_4$ → $P_4$ este la dreapta lui $\overrightarrow{P_5P_1}$

L: $P_5$

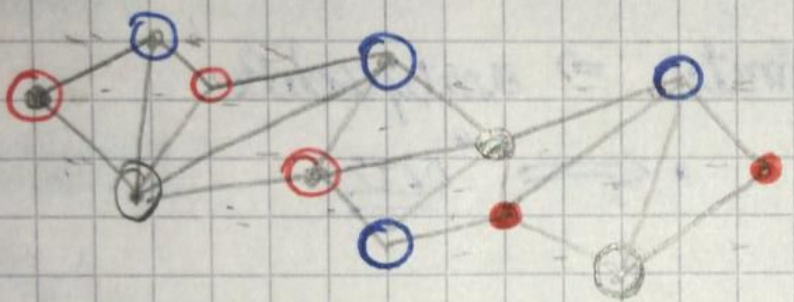
$P_5 \cancel{P_4} P_6$ $P_5 P_6 \cancel{P_8}$ $P_5 P_6 \cancel{P_{10}}$ ⇒ $P_6$ este succ lui $P_5$.
$P_5 P_6 \cancel{P_7}$ $P_5 P_6 \cancel{P_9}$

un poligon poate fi triangulat cu ajutorul diagonalelor

TEOREMĂ: Orice triangulare a unui poligon cu n vârfuri conține n-2 TRIUNGHIURI

Exemplu: Problema galeriei de artă
Amplasarea camerelor

12 LATURI
12-2 triunghiuri



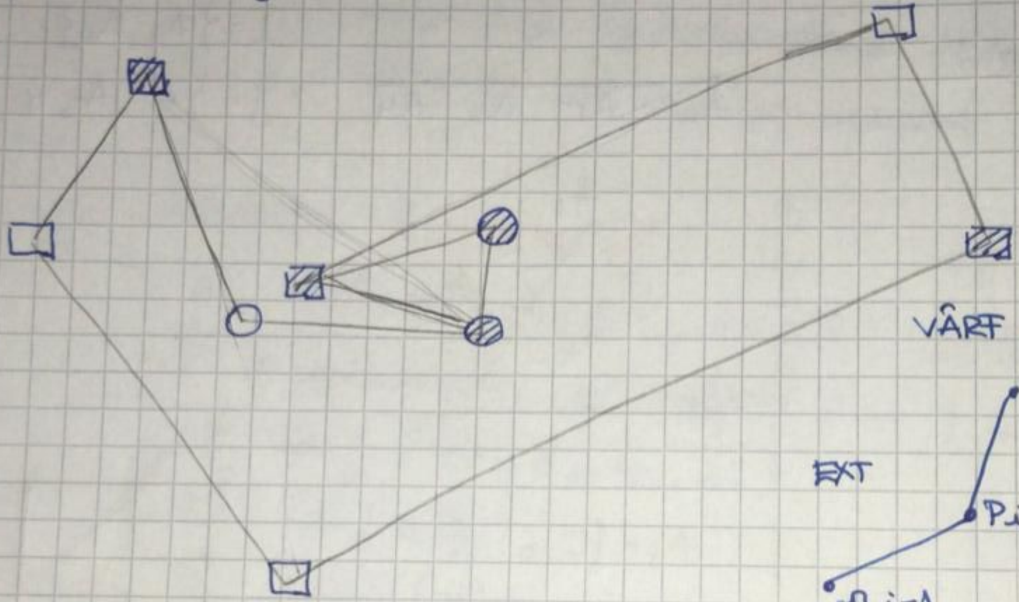
— colorarea poligonului
● → 5
● → 4
● → 3

"3-colorare"

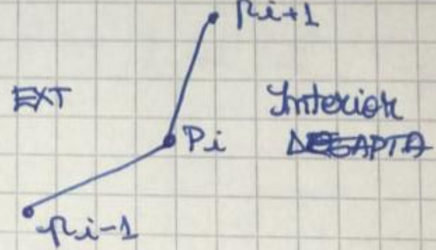
Contraexemplu pentru 3-colorare:

CURS 5

Exemplu: Ear cutting



VÂRF CONCAV



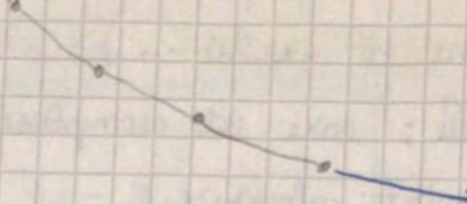

E $O(n)$ - diagonala $P_{i-1}P_{i+1}$ este în interior

M - diagonala $P_{i-1}P_{i+1}$ este în totalitate în exterior

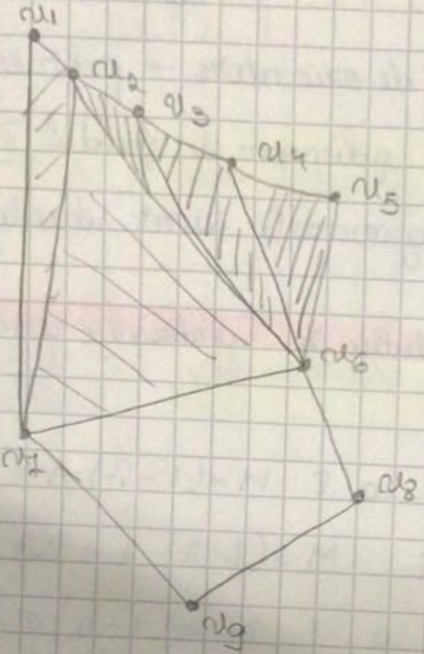
vf convex neprincipal - determinantul $> 0$

vf concav neprincipal - —"— $< 0$

VÂRF CONVEX



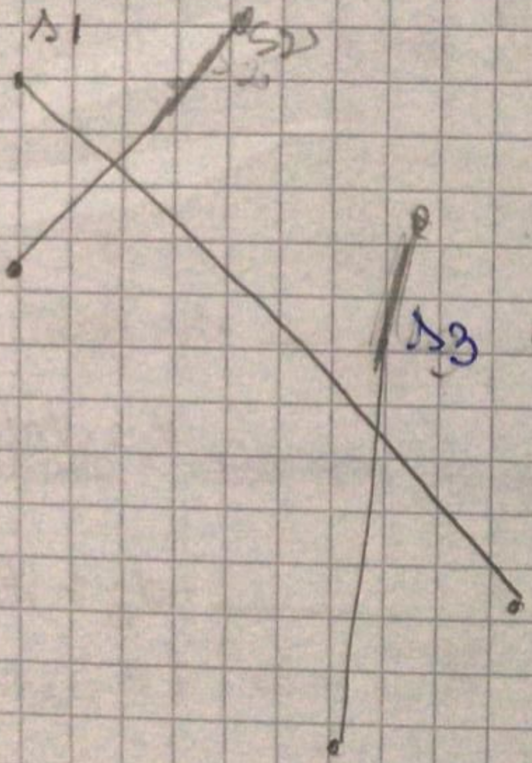
vf nou întâlnit adăugat în vf stivei




| EVENIMENT | STIVĂ |
|---|---|
| | $v_2$, $v_1$ |
| $v_3$ (c. 2b) | $v_3$, $v_2$, $v_1$ |
| $v_4$ (c. 2b) | $v_4$, $v_3$, $v_2$, $v_1$ |
| $v_5$ (c. 2b) | $v_5$, $v_4$, $v_3$, $v_2$, $v_1$ |
| $v_6$ (c. 2a) | ~~$v_5$~~, ~~$v_4$~~, ~~$v_3$~~, ~~$v_2$~~, ~~$v_1$~~ + diagonale și triunghiuri → $v_6$, $v_2$, $v_1$ |
| $v_7$ (c. 1) | ~~$v_6$~~, ~~$v_2$~~, ~~$v_1$~~ + d. și t. $v_7$, $v_6$ |
| $v_8$ (c. 1) | ~~$v_7$~~, ~~$v_6$~~ → $v_8$, $v_7$ + triunghi / diag. |
| $v_9$ | Δ. |

...ieți la fiecare pas ce diagonale au fost ... triunghiuri au fost eliminate.

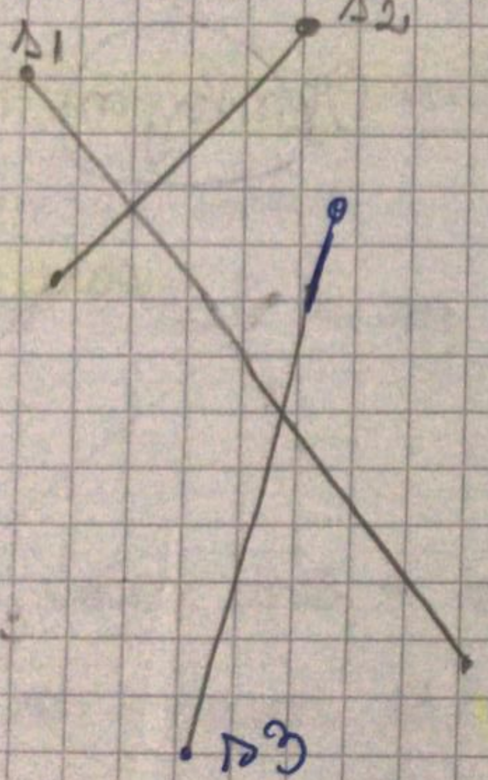
Ex: Var 2 = Statutul = listă (mulțime ordonată) $\log_2 n$
arbore binar de căutare




| EV | STATUT |
|---|---|
| | $\emptyset$ |
| $u_{s_2}$ | $(s_2)$ |
| $u_{s_1}$ | $(s_1, s_2)$ $s_1 \cap s_2$? da |
| $s_1 \cap s_2$ | $(s_2, s_1)$ |
| $u_{s_3}$ | $(s_2, s_1, s_3)$ $s_1 \cap s_3$? da |
| $d_{s_2}$ | inserat $(s_1, s_3)$ |
| $s_1 \cap s_3$ | |
| $d_{s_1}$ | $s_3$ |
| $d_{s_3}$ | $\cancel{\emptyset}$ |

Ex1:

Var 1 : Statutul = mulțime

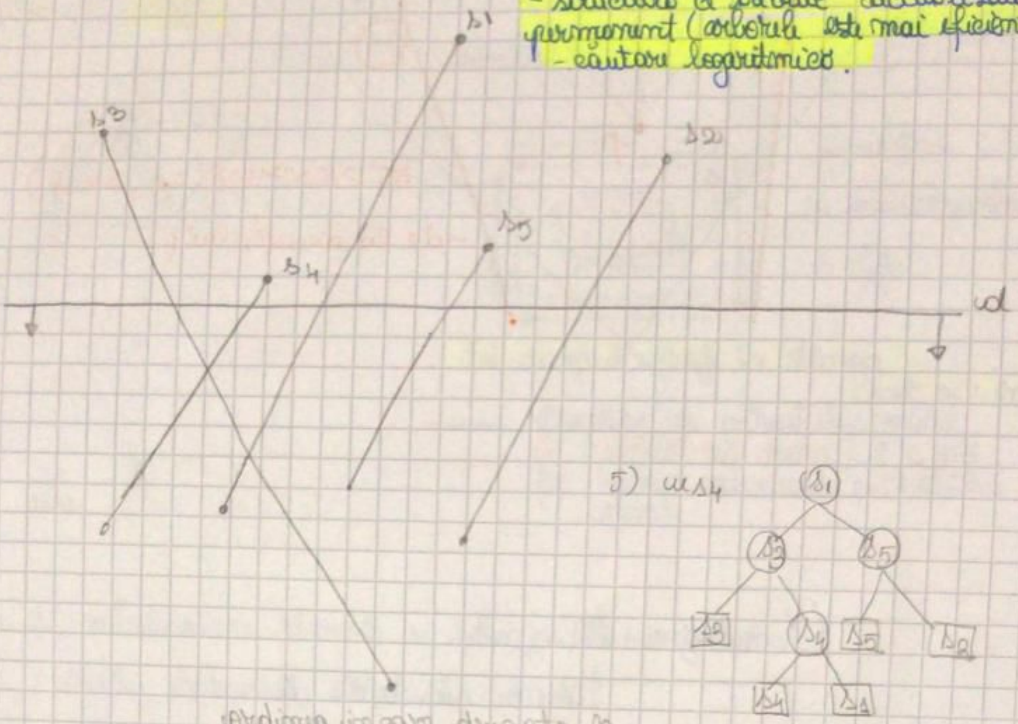



| EVENIMENT | STATUT |
|---|---|
| | $\emptyset$ |
| $u\, s_2$ | $\{s_2\}$ |
| $u\, s_1$ | $\{s_1, s_2\}$ |
| $u\, s_3$ | $\{s_1, s_2, s_3\}$ |
| $d\, s_2$ | $\{s_1, s_3\}$ |
| $d\, s_1$ | $\{s_3\}$ |
| $d\, s_3$ | $\emptyset$ |

12.11.2019

# CURS 7 – Intersecții de segmente

- structură ce trebuie actualizată permanent (arborele este mai eficient)
- căutare logaritmică.

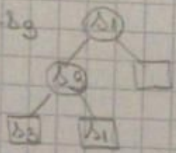



ordinea în care dreapta le intersectează

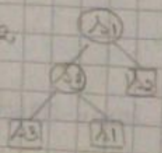
1) u $s_1$


- subarborele din stânga fără (balansări)

2) u $s_3$

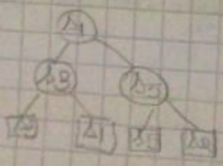



3) u $s_2$

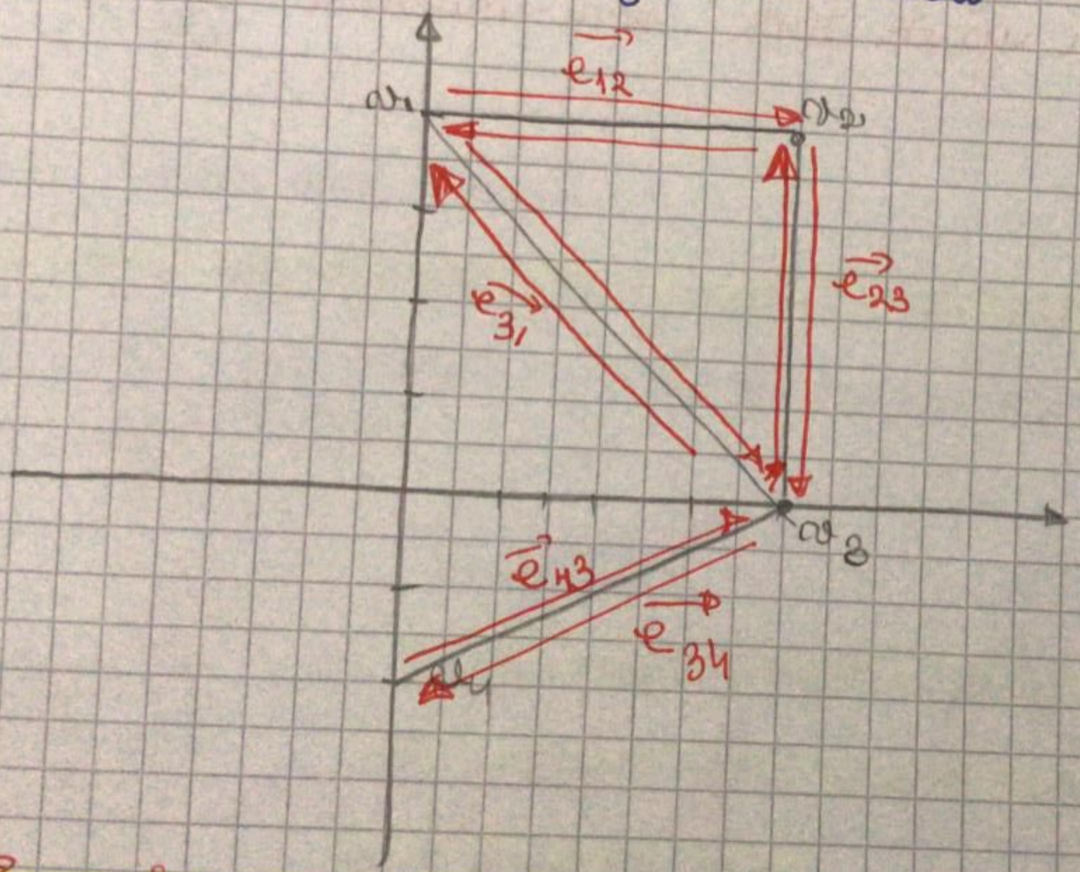



cred că respectă ordinea segmentelor frumoasă

4) u $s_5$



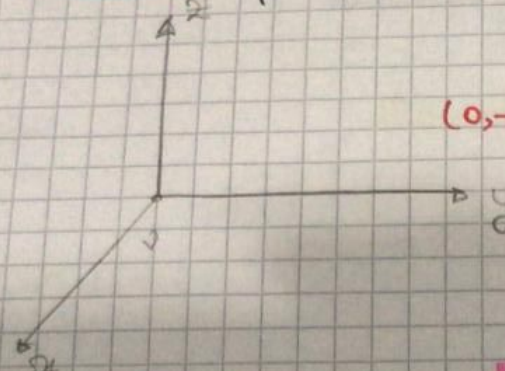
Exemplu de subdiviziune planară și listă dublu înlănțuită
( DCEL = doubly connected edge list ) asociată

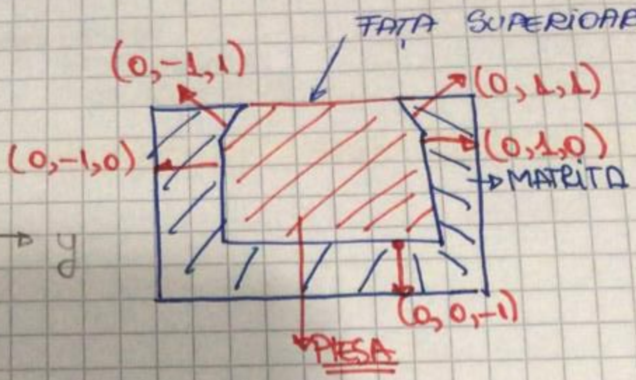



| vârf | coordonate |
|---|---|
| $v_1$ | $(0,4)$ |
| $v_2$ | $(4,4)$ |
| $v_3$ | $(4,0)$ |
| $v_4$ | $(0,-2)$ |

Notăm $\overrightarrow{e_{ij}}$ muchia de la $v_i$ la $v_j$

(2) (a) • Orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe ... în a matriței




obiectul nu poate fi extras

Normalele: $(0,-1,1)$; $(0,1,1)$; $(0,1,0)$; $(0,0,-1)$; $(0,-1,0)$

Cf teoriei scriem inecuații de tipul (*f)

$(0,-1,1) \rightarrow 0\cdot x + (-1)y + 1 \leq 0$ | $y \geq 1$ | inecuații incompat.

$(0,1,1) \rightarrow 0\cdot x + 1\cdot y + 1 \leq 0$ | $y \leq -1$ | → SISTEMUL NU ARE SOLUȚIE => OBIECTUL

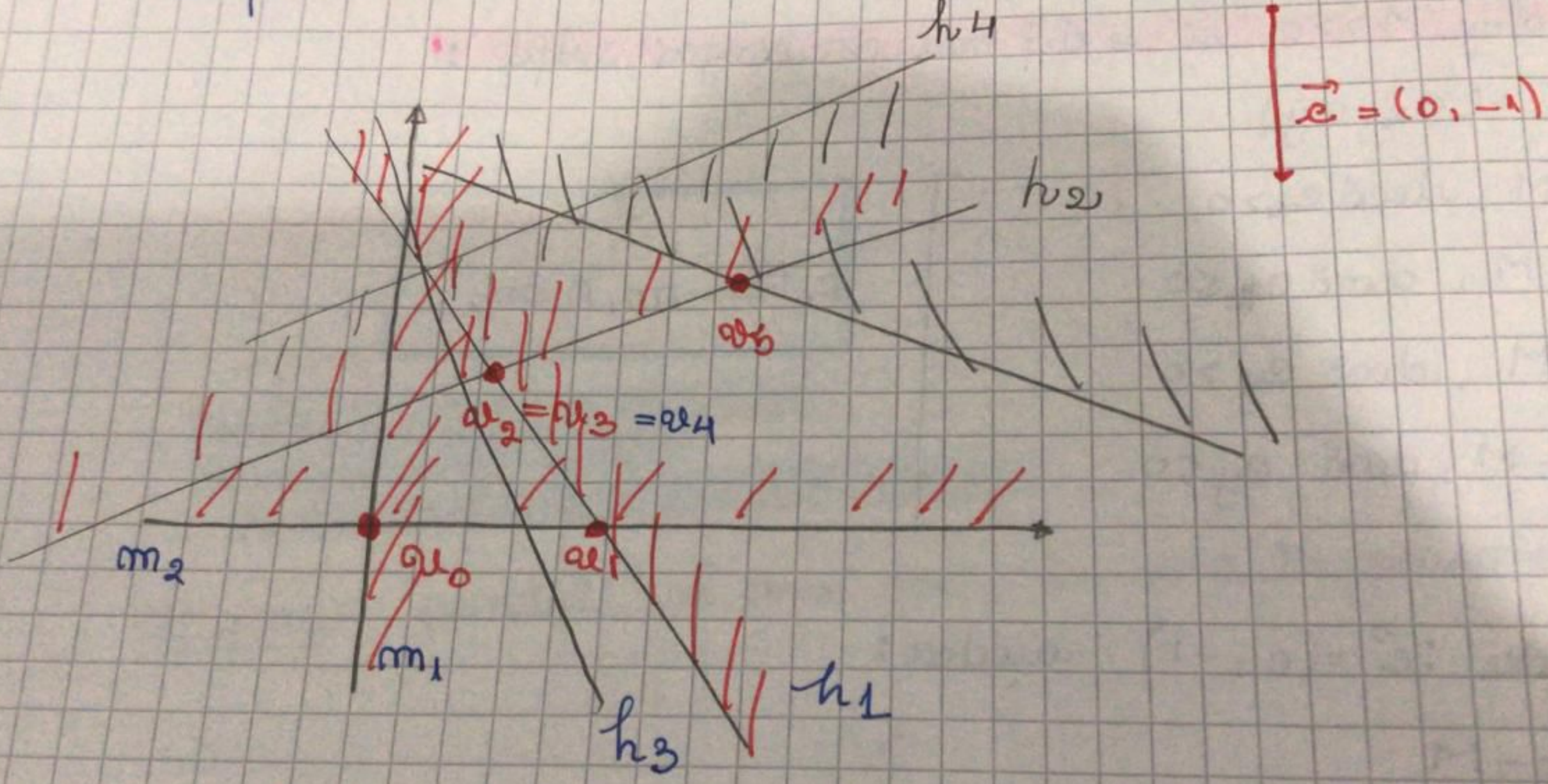
$(0,1,0) \rightarrow 0\cdot x + 1\cdot y + 0 \leq 0$ | $y \leq 0$ | $\boxed{NU}$ POATE FI

$(0,0,-1) \rightarrow 0\cdot x + 0\cdot y + (-1) \leq 0$ | $-1 \leq 0$ | EXTRAS.

$(0,-1,0) \rightarrow 0\cdot x + (-1)\cdot y + 0 \leq 0$ | $-y \leq 0$, $y \geq 0$

(2b):

Exemplu:



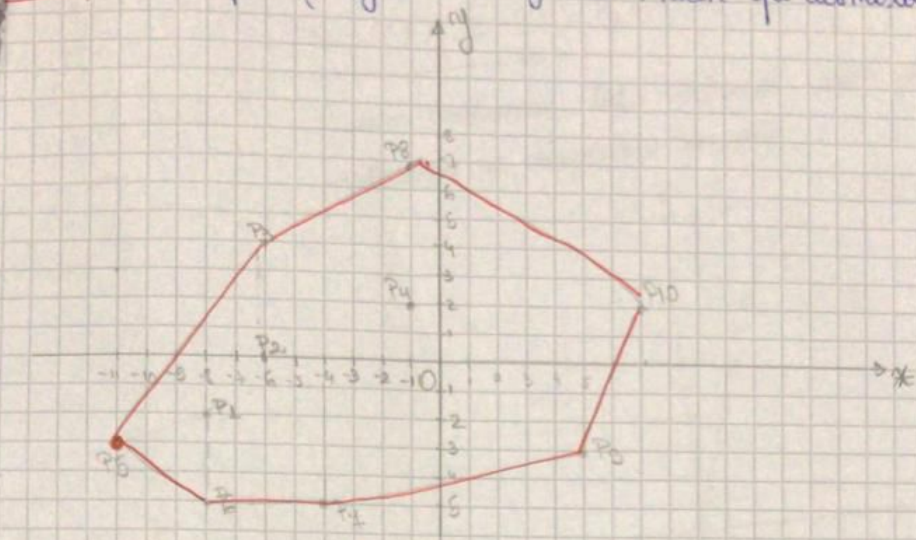

$u_3 = u_2$? pt că $u_2 \in h_3$

$u_4 = u_2$ $\quad$ $u_3 \in h_4$

$u_5 \neq u_4$ — " — $u_4 \notin h_5$

Algoritmul Jarvis's March nu necesită sortare !!!

Exercițiul 5: Aplicați algoritmul Jarvis March pt următoarele puncte.




• Se alege un vârf care sigur este vârf al acoperirii convexe (cel mai de jos din stânga)

$P_1 = (-8,-2)$ $P_4 = (-1,-2)$ $P_7 = (-4,-5)$ $P_{10} = (7,2)$

$P_2 = (-6,0)$ $P_5 = (-11,-3)$ $P_8 = (-1,7)$

$P_3 = (-6,4)$ $P_6 = (-8,-5)$ $P_9 = (5,-3)$

$k \leftarrow 1$ $L \leftarrow P_5$ valid ← true

$P_5P_1P_2$ ($P_2$ este în dreapta lui $P_5P_1$ = ?) → NU

$P_5P_1P_3$ (NU) → $P_5P_1P_4$ (NU) → $P_5P_1P_6$ (DA) → $P_5P_6P_7$ → $P_5P_6P_8$ → $P_5P_6P_9$ → $P_5P_6P_{10}$

⇒ $P_6$ este succesorul lui $P_5$

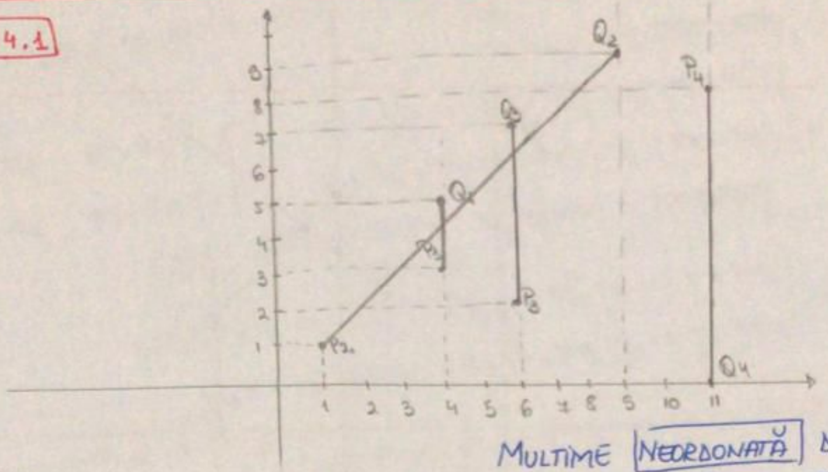
$S = P_6$ $t_1 \leftarrow P_5$ $k = 2$, $L \leftarrow P_5P_6$

$P_6P_1P_2$ → $P_6P_2P_3$ → $P_6P_3P_4$ → $P_6P_4P_5$ → $P_6P_4P_7$ → $P_6P_7P_8$ → $P_6P_7P_9$

→ $P_6P_7P_{10}$ ⇒ $P_7$ este succesorul lui $P_6$. $S = P_7$ $k = 3$ $L \leftarrow P_5P_6P_7$

# INTERSECȚII DE SEGMENTE - EXERCIȚII

## EXERCIȚIUL 4.1




MULȚIME $\boxed{\text{NEORDONATĂ}}$ DE SEGMENTE

| EVENIMENT | STATUT |
|---|---|
| $u_{s_2}$ | $\{s_2\}$ |
| $u_{s_4}$ | $\{s_2, s_4\}$ $s_2 \cap s_4$ ? NU |
| $u_{s_3}$ | $\{s_3, s_2, s_4\}$ $s_3 \cap s_2$ ? DA |
| $u_{s_1}$ | $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ |
| $d_{s_1}$ | $\{s_2, s_3, s_4\}$ |
| $d_{s_3}$ | $\{s_2, s_4\}$ |
| $d_{s_2}$ | $\{s_4\}$ |
| $d_{s_4}$ | $\emptyset$ |

## EXERCIȚIUL 4.2

| EVENIMENT | STATUT |
|---|---|
| $u_{s_2}$ | $(s_2)$ |
| $u_{s_3}$ | $(s_3, s_2)$ |
| $u_{s_4}$ | $(s_3, s_2, s_4)$ |
| $u_{s_1}$ | $(s_3, s_1, s_2, s_4)$ |
| $s_1 \cap s_2$ | $(s_3, s_2, s_1, s_4)$ |
| $s_3 \cap s_2$ | $(s_2, s_3, s_1, s_4)$ |
| $s_3 \cap s_1$ | $(s_2, s_1, s_3, s_4)$ |
| $d_{s_2}$ | $(s_1, s_3, s_4)$ |
| $d_{s_1}$ | $(s_3, s_4)$ |
| $d_{s_3}$ | $s_4$ |
| $d_{s_4}$ | $\emptyset$ |