Curs 5

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, ari)$

Termenii lui $\mathcal{L}$, notați $Trm_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $ar(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $ar(R) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ sunt formule

Semantica

Pentru a stabili dacă o formulă este adevărată, avem nevoie de o interpretare într-o structură!

Cuprins

Logica de ordinul I - semantica(recap.)

Structură

Definiție

O structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea n, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea n, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

- A se numește universul structurii $\mathcal{A}$.
- $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește interpretarea lui f (respectiv R, c) in $\mathcal{A}$.

Structură

Exemplu

$\mathcal{L}_1$: $\mathbf{R} = \{<\}$, $\mathbf{F} = \{s, +\}$, $\mathbf{C} = \{0\}$ cu $ari(s) = 1$, $ari(+) = ari(<) = 2$.

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}})$ unde

- $s^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad s^{\mathcal{N}}(n) := n + 1,$
- $+^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad +^{\mathcal{N}}(n, m) := n + m,$
- $<^{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad <^{\mathcal{N}} = \{(n, m) \mid n < m\},$
- $0^{\mathcal{N}} := 0$

Modelarea unei lumi

Presupunem că putem descrie o lume prin:

- o mulțime de obiecte
- funcții
- relații

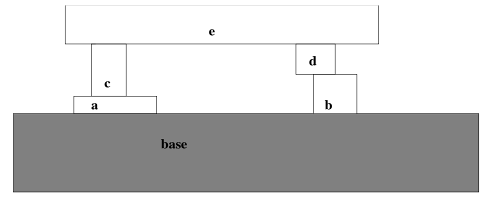
unde

- funcțiile duc obiecte în obiecte
- relațiile cu n argumente descriu proprietățile a n obiecte

Modelarea unei lumi

Exemplu

Să considerăm o lume în care avem cutii:



- Putem descrie lumea folosind obiecte

$$O = \{base, a, b, c, d, e\}.$$

- Putem descrie ce obiect se află deasupra altui obiect folosind un predicat binar *on*:

$$on = \{(e, c), (c, a), (e, d), (d, b), (a, base), (b, base)\}$$

Sursa exemplului: `https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/`

Structură

Exemplu

Lumea în care avem cutii.

- Limbajul $\mathcal{L}$
  - $\mathbf{R} = \{on\}$
  - $\mathbf{F} = \emptyset$
  - $\mathbf{C} = \emptyset$
  - $ari(on) = 2$
- O structură $\mathcal{A}$:
  - $A = \{base, a, b, c, d, e\}$
  - $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \emptyset.$
  - $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \emptyset.$
  - $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{on^{\mathcal{A}}\}$, unde
    $on^{\mathcal{A}} = \{(e, c), (c, a), (e, d), (d, b), (a, base), (b, base)\} \subseteq A^2.$

Interpretare

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o ($\mathcal{L}$-)structură.

Definiție

O interpretare a variabilelor lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție

$$I : V \to A.$$

Definiție

Inductiv, definim interpretarea termenului t în $\mathcal{A}$ sub I ($t_I^{\mathcal{A}}$) prin:

- dacă $t = x_i \in V$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := I(x_i)$
- dacă $t = c \in \mathbf{C}$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := f^{\mathcal{A}}((t_1)_I^{\mathcal{A}}, \ldots, (t_n)_I^{\mathcal{A}})$

Interpretare

Definim inductiv faptul că o formulă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub interpretarea I astfel:

- $\mathcal{A}, I \vDash P(t_1, \ldots, t_n)$ dacă $P^{\mathcal{A}}((t_1)_I^{\mathcal{A}}, \ldots, (t_n)_I^{\mathcal{A}})$
- $\mathcal{A}, I \vDash \neg\varphi$ dacă $\mathcal{A}, I \nvDash \varphi$
- $\mathcal{A}, I \vDash \varphi \vee \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$ sau $\mathcal{A}, I \vDash \psi$
- $\mathcal{A}, I \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$ și $\mathcal{A}, I \vDash \psi$
- $\mathcal{A}, I \vDash \varphi \to \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \nvDash \varphi$ sau $\mathcal{A}, I \vDash \psi$
- $\mathcal{A}, I \vDash \forall x\, \varphi$ dacă pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \vDash \varphi$
- $\mathcal{A}, I \vDash \exists x\, \varphi$ dacă există $a \in A$ astfel încât $\mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \vDash \varphi$

unde pentru orice $a \in A$, $I_{x \leftarrow a}(y) = \begin{cases} I(y) & \text{dacă } y \neq x \\ a & \text{dacă } y = x \end{cases}$

Interpretare

- O formulă φ este adevărată într-o structură $\mathcal{A}$, notat $\mathcal{A} \models \varphi$, dacă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub orice interpretare.

  Spunem că $\mathcal{A}$ este model al lui φ.

- O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\models \varphi$, dacă este adevărată în orice structură.

Model

Exemplu

Fie limbajul $\mathcal{L}$ cu $\mathbf{F} = \{s\}$, $\mathbf{R} = \{P\}$, $\mathbf{C} = \{0\}$ cu $ari(s) = ari(P) = 1$.

Fie structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathcal{N}}, P^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}})$ unde $0^{\mathcal{N}} := 1$ și

- $s^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s^{\mathcal{N}}(n) := n^2$
- $P^{\mathcal{N}} \subset \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{N}} = \{n \mid n \text{ este impar }\}$

Demonstrați că $\mathcal{N} \vDash \forall x\, (P(x) \to P(s(x)))$.

Fie $I : V \to \mathbb{N}$ o interpretare. Observăm că
$\mathcal{N}, I \vDash P(x)$ dacă $P^{\mathcal{N}}(I(x))$, adică $\mathcal{N}, I \vDash P(x)$ dacă $I(x)$ este impar.

$\mathcal{N}, I \vDash \forall x\, (P(x) \to P(s(x)))$ dacă
$\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \vDash P(x) \to P(s(x))$ oricare $n \in N$
$\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \not\vDash P(x)$ sau $\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \vDash P(s(x))$ oricare $n \in N$
$I_{x \leftarrow n}(x)$ nu este impar sau $I_{x \leftarrow n}(s(x))$ este impar oricare $n \in \mathbb{N}$
n este par sau n^2 este impar oricare $n \in \mathbb{N}$

ceea ce este întodeauna adevărat.

Logica de ordinul I - semantică

O structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea n, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea n, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O interpretare a variabilelor lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-interpretare) este o funcție $I : V \to A$.

Inductiv, definim interpretarea termenului t în $\mathcal{A}$ sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o formulă este adevărată în $\mathcal{A}$ în interpretarea I notat $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $(\mathcal{A}, I)$ este model pentru φ.

O formulă φ este adevărată într-o structură $\mathcal{A}$, notat $\mathcal{A} \vDash \varphi$, dacă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub orice interpretare. Spunem că $\mathcal{A}$ este model al lui φ.

O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\vDash \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este validă dacă $\vDash \varphi$.

O formulă φ este satisfiabilă dacă există o structură $\mathcal{A}$ și o $\mathcal{A}$-interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Consecință logică

Definiție

O formulă φ este o consecință logică a formulelor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, notat

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi,$$

dacă pentru orice structură $\mathcal{A}$

$$\text{dacă } \mathcal{A} \models \varphi_1 \text{ și } \ldots \text{ și } \mathcal{A} \models \varphi_n, \text{ atunci } \mathcal{A} \models \varphi$$

Problemă semidecidabilă!

Nu există algoritm care să decidă mereu dacă o formula este sau nu consecință logică a altei formule în logica de ordinul I!

Formule echivalente

- Fie φ și ψ două formule. Notăm prin

$$\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\models \psi$$

faptul că $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, adică φ și ψ au aceleași modele.

Exemplu

Dacă P este un simbol de relație de aritate 1 și x și y sunt variabile distincte, atunci

$$\forall x\, P(x) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \forall y\, P(y) \qquad \text{și} \qquad P(x) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} P(y)$$

Validitate și satisfiabilitate

Propoziție

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Demonstrație

Exercițiu!

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Apariții libere sau legate

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

- Orice apariție a unei variabile x într-o formula $\forall x\, \varphi$ sau $\exists x\, \varphi$ se numește legată. Celelalte apariții se numesc libere.

Exemplu

Fie limbajul $\mathcal{L}_r$ cu un singur simbol de relație R de aritate 2.

Fie următoarea formulă

$$\forall y\, \underline{(\forall y\, \underline{(R(y,x) \vee R(y,z))} \to \forall x\, \underline{R(x,y)})}$$

- Prima aparitie a lui x este liberă,
- dar a doua apariție a lui x este legată de apariția lui $\forall x$.
- Primele două apariții ale lui y sunt legate de a doua apariție a lui $\forall y$,
- iar a treia apariție a lui y este legată de prima apariție a lui $\forall y$.
- z este liberă.

Forma rectificată

- O formulă φ este în formă rectificată dacă:
  1. nici o variabilă nu apare și liberă și legată
  2. cuantificatori distincți leagă variabile distincte
- Pentru orice formulă φ există o formulă φ^r în formă rectificată astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi^r$.
- Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obține prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

Exemplu

$$\forall x\, P(x) \land \exists x\, \forall y\, R(x, y) \land S(x) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\, P(x) \land \exists x_1\, \forall y\, R(x_1, y) \land S(x_2)$$

În continuare vom presupune că
toate formulele sunt în formă rectificată.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

- Variabilele libere ale unei formule φ sunt variabilele care nu sunt cuantificate.
- Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită prin inducție după formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi) & \\
FV(\varphi \circ \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi), & \text{dacă } \circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\} \\
FV(\forall x\, \varphi) & = & FV(\varphi) - \{x\} & \\
FV(\exists x\, \varphi) & = & FV(\varphi) - \{x\} &
\end{array}
$$

- O variabilă $v \in Var(\varphi)$ care nu este liberă se numește legată în φ.
- Un enunț este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice structură $\mathcal{A}$ și orice enunț φ, o $\mathcal{A}$-interpretare I nu joacă niciun rol în a determina dacă $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Variabile libere. Varibile legate. Enunțuri

Exemplu

Fie limbajul $\mathcal{L}_r$ cu un singur simbol de relație R de aritate 2.

Care din următoarele formule sunt enunțuri?

1. $\forall x \, \forall y \, R(x, y)$ - enunț
2. $\forall x \, \forall y (R(x, y) \vee R(x, z))$
3. $\forall x \, \forall y (R(x, y) \vee \forall z \, R(x, z))$ - enunț
4. $\forall x \, R(x, y)$

Enunțuri

Fie φ o formulă și $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propozitie

Pentru orice structură $\mathcal{A}$ avem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \vDash \forall x_1 \cdots \forall x_n \, \varphi.$$

Demonstrație

Exercițiu!

A verifica validitatea unei formule revine la
a verifica validitatea enunțului asociat.

Substituții

- Substituțiile înlocuiesc variabilele libere cu termeni.
- O substituție aplicată unui termen întoarce un alt termen.
- Ce se întâmpla când aplicăm o substituție unei formule?
  - Fie φ formula $P(z,z) \land \exists y\, (\neg P(x,y))$
  - $\{x \leftarrow y\}\varphi$ este $P(z,z) \land \exists y\, (\neg P(y,y))$

    Atenție! substituțiile afectează satisfiabilitatea formulei.

  - Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$.

$$\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}\varphi$$

Forma prenex

O formulă prenex este o formulă de forma

$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \varphi$$

unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte și φ nu conține cuantificatori.

Exemplu

Fie R este un simbol de relație de aritate 2. Formula

$$\forall x \, \exists y \, \forall z ((R(x, y) \vee \neg R(x, z)) \wedge R(x, x))$$

este în formă prenex.

Cum calculăm forma prenex?

- Se înlocuiesc $\to$ și $\leftrightarrow$:

$$
\begin{aligned}
\varphi \to \psi &\quad \boxminus \quad \neg\varphi \vee \psi \\
\varphi \leftrightarrow \psi &\quad \boxminus \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)
\end{aligned}
$$

- Se aplică următoarele echivalențe:

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\, \neg\varphi &\quad \boxminus \quad \forall x\, \varphi & \qquad \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi &\quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \\
\neg\forall x\, \neg\varphi &\quad \boxminus \quad \exists x\, \varphi & \qquad \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi &\quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \vee \psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\, \varphi &\quad \boxminus \quad \forall x\, \neg\varphi & \qquad \forall x\, \forall y\, \varphi &\quad \boxminus \quad \forall y\, \forall x\, \varphi \\
\neg\forall x\, \varphi &\quad \boxminus \quad \exists x\, \neg\varphi & \qquad \exists x\, \exists y\, \varphi &\quad \boxminus \quad \exists y\, \exists x\, \varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\, \varphi \vee \psi &\quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\
\forall x\, \varphi \wedge \psi &\quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\
\exists x\, \varphi \vee \psi &\quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\
\exists x\, \varphi \wedge \psi &\quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)
\end{aligned}
$$

Forma prenex

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 2.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall x\, \neg(\exists y\, R(x,y) \to \exists x\, R(x,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \neg(\exists v\, R(x,v) \to \exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \neg(\neg\exists v\, R(x,v) \vee \exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, (\exists v\, R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \forall z\, \neg R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, \forall z\, (R(x,v) \wedge \neg R(z,y))
\end{aligned}
$$

Forma prenex

Teorema de formă prenex

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă prenex astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după structura formulei φ.

- φ este formulă atomică.
  Atunci φ este în formă prenex, deci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \forall x \psi$.
  Conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă prenex astfel încât $\psi \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.
  Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$.

Forma prenex

Demonstrație (cont.)

- $\varphi = \neg\psi$.
  Conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \psi_0$ în formă prenex astfel încât $\psi \mathrel{\text{H}} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Notăm $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$ și definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n\, \neg\psi_0.$$

  Atunci φ^* este în formă prenex, $\varphi^* \mathrel{\text{H}} \neg\psi^* \mathrel{\text{H}} \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Forma prenex

Demonstrație (cont.)

- $\varphi = \psi \vee \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \ldots S_m z_m \chi_0$$

astfel încât $\psi \mathrel{\text{H}} \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \mathrel{\text{H}} \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n S_1 z_1 \ldots S_m z_m (\psi_0 \vee \chi_0).$$

Atunci φ^* este în formă prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\varphi^* \mathrel{\text{H}} \psi^* \vee \chi^* \mathrel{\text{H}} \psi \vee \chi = \varphi.$$

Deoarece φ a fost în formă rectificată, echivalența $\mathrel{\text{H}}$ este justificată de următoarele proprietăți:

$$\forall x \varphi \vee \psi \mathrel{\text{H}} \forall x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$
$$\exists x \varphi \vee \psi \mathrel{\text{H}} \exists x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$\square$

Forma Skolem

Forma Skolem

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul.

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducere de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

În continuare φ este un enunț în formă prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Vom asocia lui φ un enunț universal φ^{sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

- Un enunț se numește universal dacă conține doar cuantificatori universali.

Forma Skolem

Fie φ enunț în formă prenex. Definim φ^{sk} și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă φ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă φ este universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,
$$\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi[x/f(x_1 \ldots x_k)]$$

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ. Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{sk}.

Definiție

φ^{sk} este o formă Skolem a lui φ.

Forma Skolem

Exemplu

Fie P un simbol de relație de aritate 1 și $\varphi = \exists x\, P(x)$.
Atunci

$$\varphi^1 = (P(x))[x/c] = P(c),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = P(c)$.

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x\, \forall y\, \forall z\, R(x, y, z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y\, \forall z\, R(x, y, z))[x/c] = \forall y\, \forall z\, R(c, y, z),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y\, \forall z\, R(c, y, z)$.

Forma Skolem

Exemplu

Fie P un simbol de relatie de aritate 2 și $\varphi = \forall y \, \exists z \, P(y, z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y \, P(y, z))[z/f(y)] = \forall y \, P(y, f(y))$$

unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y \, P(y, f(y))$.

Forma Skolem

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj și $P, R \in \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{F}$, $ari(P) = ari(R) = 2$ și $ari(f) = 1$. Determinați forma Skolem pentru:

$$\varphi := \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v (R(y,z) \land P(f(u),v)).$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi^1 & = & \forall y\ (\forall u\, \exists v\, (R(y,z) \land P(f(u),v)))[z/g(y)]) \\ & = & \forall y\, \forall u\, \exists v\, (R(y,g(y)) \land P(f(u),v)), \\ & & \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\ \varphi^2 & = & \forall y\, \forall u\, (R(y,g(y)) \land P(f(u),v))[v/h(y,u)] \\ & = & \forall y\, \forall u\, (R(y,g(y)) \land P(f(u),h(y,u))), \\ & & \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.} \end{array}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{sk} = \varphi^2 = \forall y\, \forall u\, (R(y,g(y)) \land P(f(u),h(y,u))).$$

Forma Skolem

Teorema de formă Skolem

Fie φ un enunț în formă prenex.

1. $\vDash \varphi^{sk} \to \varphi$, deci $\varphi^{sk} \vDash \varphi$ în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.
2. φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{sk} este satisfiabilă.

Demonstrație [schiță]

1. Folosind următoarele proprietăți
   $\vDash \varphi(x/t) \to \exists x\, \varphi$
   $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\, \varphi$ și
   $\vDash \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$
   putem demonstra că $\vDash \varphi^1 \to \varphi$, $\vDash \varphi^2 \to \varphi^1$, etc.
2. "$\Leftarrow$" Se aplică (1).
   "$\Rightarrow$" exercițiu. $\square$

Forma Skolem

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

Exemplu

Fie $\mathcal{L} = \{R\}$ unde R este simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$.

Atunci $\varphi^{sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \{f, R\}$.

Fie $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$-structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n astfel încât $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\models \varphi^{sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. $\square$

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la un singur tip de structuri.

Modele Herbrand

Universul Herbrand

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tututor termenilor fără variabile.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 2 și două simboluri de constantă a și b.

Universul Herbrand pentru limbajul $\mathcal{L}$ este mulțimea:

$$a, b, f(a, b), f(f(a, b), b), f(f(a, a), f(b, b)), \ldots$$

Structură Herbrand

O structură Herbrand este o structură $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$, unde

- pentru orice simbol de constantă c, $c^{\mathcal{H}} = c$
- pentru orice simbol de funcție f de aritate n, $f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

Atenție! Într-o structură Herbrand nu fixăm o definiție pentru relații: pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) \subseteq (T_{\mathcal{L}})^n$

Model Herbrand

- O interpretare Herbrand este o interpretare $H : V \to T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand $\mathcal{H}$ este model al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $\mathcal{H}$ este model Herbrand al lui φ.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \ldots\}$

$\mathcal{H} \vDash \forall x\, R(x, x)$.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1 \, \psi$ un enunț în forma Skolem.
Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand reduce problema satisfiabilității la găsirea unui model Herbrand.

Pe săptămâna viitoare!