SINTEZE EXAMEN

~~Nu știu să întrebi de cursuri pt~~

Fie $(V, +, \cdot)|_K$ sp. vectorial, $S \subset V$, $S \neq \emptyset$.

1) SISTEM DE GENERATORI

Subspațiul generat de S

S sistem de generatori $\Leftrightarrow \langle S \rangle = V$

$\forall x \in V$,
i.e: $\exists x_1 \dots x_m \in S$
$\exists a_1 \dots a_m \in K$ a.î.
$x = a_1 x_1 + \dots a_m x_m$

2) SISTEM LINIAR INDEPENDENT

Definiție:

- S - sistem liniar independent (SLI) $\Leftrightarrow$
  $\forall x_1 \dots x_m \in S$
  $\forall a_1 \dots a_m \in K$ | a.î. $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0_V$
  $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots a_m = 0_K$

OBS!
- Orice submulțime a unui sistem liniar independent este SLI

- CRITERIUL DE LINIAR INDEPENDENȚĂ:
- S - SLI $\Leftrightarrow$ matricea componentelor din v în raport cu orice reper are rangul maxim.

3) SISTEM LINIAR DEPENDENT

$\exists x_1 \dots x_m \in S$
$\exists a_1 \dots a_m \in K$, | a.î. $a_1 x_1 + \dots a_m x_m = 0_V$
$\boxed{\text{cu } a_1 \dots a_m \text{ NU TOȚI NULI}}$

4) BAZA

Fie $B \subset V$. B - bază a lui V $\Leftrightarrow$ • B e SLI
• B e sist de generatori

Definiție:

$\forall x \in V, \exists! \, a_1 \dots a_m$ a.î. $x = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$

OBS!!

Baza canonică

$B_c = \{e_1 \dots e_n\}$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$; $e_n = (0, \dots, 1)$

5) Reper = Bază, unde contează ordinea vectorilor.

6) Teorema schimbului: Orice SLI poate înlocui r elemente din sistemul de generatori, păstrând proprietatea de sistem de generatori.

$x_1 \dots x_m \in V$ sist de generatori
$y_1 \dots y_r \in V$ SLI
$\Rightarrow \{y_1 \dots y_r, \cancel{x}_{r+1} \dots \cancel{x}_m\}$ sistem de generatori.

CONCESINȚĂ: Orice SLI poate fi extins la o bază.

PROP1: Cardinalul oricărui sist finit de generatori $\geq$ card SLI finit.

PROP2: Oricare 2 baze ale unui spațiu vectorial finit au același cardinal.

Dacă dimensiunea unui spațiu este n, atunci
n → nr maxim de vectori ce formează un SLI
n → nr minim de vectori ce formează un sistem de generatori

7) Teorema lui Grassman: Fie V_1 și V_2 două subspații ale lui V

$$\boxed{\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

OBS:
$V_1 \cap V_2 = \{v \in V \mid v \in V_1 \text{ și } v \in V_2\}$
$V_1 + V_2 = \{\underbrace{v_1 + v_2}_{v} \mid v_1 \in V_1 \text{ și } v_2 \in V_2\}$

1) SPAȚIU VECTORIAL

$(K,+,\cdot)$ corp comutativ

V e mulțime nevidă

V este sp vect $\Leftrightarrow$

1) $(V,+)$ grup abelian
2) $a(bx)=(ab)x$, $\forall a,b\in K, x\in V$
3) $a(x+y)=ax+ay$
4) $(a+b)x=ax+bx$
5) $1_K\cdot x=x$, unde 1_K elem neutru

Exemple:

$(K,+,\cdot)/K$; $(\mathbb{R},+,\cdot)/\mathbb{R}$

$K'\subset K$; $(K,+,\cdot)/K$ sp. vect $\Rightarrow (K,+,\cdot)/K'$ sp. vect

2) SUBSPAȚIU VECTORIAL

$(V,+,\cdot)/K$ sp vectorial; $V'\subset V$ sub. nevidă.

V' subs. vectorial $\Leftrightarrow$

$\forall x,y\in V'$, $\forall a,b\in K$ | $ax+by\in V'$

Ex:

$(\mathbb{R}^m,+,\cdot)/\mathbb{R}\subset(\mathbb{R}^m,+,\cdot)/\mathbb{R}$ sub vect.

3) SUBSPAȚIU VECTORIAL GENERAT DE MULȚIMEA M:

$\langle M\rangle \Rightarrow$ acoperire liniară / subs. generat de M.

$\langle M\rangle$ mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu elemente din M.

$\langle M\rangle$ cel mai mic subspațiu vect al lui V care include mulțimea M.

$\langle M\rangle=\{x\in V \mid \exists x_1,\dots x_m\in M,\ a_1\dots a_m\in K$ a.î. $x=a_1x_1+\dots a_mx_m\}$

unde $(V,+,\cdot)/K$ ~~corp~~ sp. vect și $M\subset V$.

4) SISTEM DE GENERATORI

$(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial, $S\subset V$, $S\neq\emptyset$

$\boxed{S \text{ s.n sist. de gen} \Leftrightarrow \langle S\rangle=V}$

i.e: $\forall x$ ~~$\exists x_1$~~ $\exists x_1\dots x_m\in S$

$\exists a_1\dots a_m\in K$ a.î.

$x=a_1x_1+\dots a_mx_m$

OBS

- Dacă X este un sistem de generatori pentru V și $X\subset Y\subset V$, atunci Y este un sistem de generatori pentru V

5) SISTEM LINIAR INDEPENDENT

$(V,+,K)$ sp vectorial; $S\subset V$ sub. nevidă.

S s.n sistem liniar independent $\Leftrightarrow$

$\exists x_1\dots x_m\in S$, $\exists a_1\dots a_m\in K$ | a.î. $a_1x_1+\dots+a_mx_m=0_V \Rightarrow a_1=\dots a_m=0_K$

6) SISTEM LINIAR DEPENDENT

$\dots$ $a_1x_1+\dots a_mx_m=0_V$, unde $a_1\dots a_m$ nu sunt toți nuli

PROP

Orice submulțime a unui sistem liniar independent e liniar independent.

7) ~~SI~~ BAZĂ

Fie $(V,+,\cdot)/K$ sp vectorial și $B\subset V$ submulț nevidă.

B s.n bază a lui V $\Leftrightarrow$ 1) B e SLI
2) B e sist de generatori.

$\forall x\in V$, $\exists!\ a_1,\dots a_m\in K$ a.î. $\boxed{x=a_1x_1+\dots a_mx_m}$

Baza canonică:

$B_C=\{e_1\dots e_m\}$

$e_1=(1,0\dots 0)$; $e_2=(0,1,\dots 0)$; $e_m=(0,\dots 1)$

Dacă pentru o bază se ține cont și de ordinea vectorilor în bază, atunci în locul cuvântului bază se va folosi „reper".

Teorema schimbului → Orice SLI poate înlocui r elemente din sistemul de generatori, păstrând proprietatea de sist de gen.

Fie $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp. vectorial

$x_1 \dots x_m \in V$ sist de generatori

$y_1 \dots y_n \in V$ sist ~~lin~~ indep.

⟹ $\{ y_1 \dots y_r, u_{r+1}, \dots u_m \}$ sistem de generatori

Să se dem că $y_1 \dots y_n$ este sist de gen.

$\exists\ a_1 \dots a_m \in K$ a.î. $y_1 = a_1 x_1 + \dots a_m x_m$

P.P $a_1 = a_2 = \dots a_m = 0 \rightarrow$ contradicție $\Rightarrow a_1 \neq 0$

Consecințe:

→ Orice SLI poate fi extins la o bază.

PROP: Cardinalul oricărui sist finit de gen $\geq$ card SLI finit

NU ORICE SIST DE GEN. SE POATE

PROP: Oricare două baze ale unui sp. vectorial finit au același cardinal

~~OBS: Da~~

Într-un spațiu n-dimensional, un sistem format din n vectori ~~A~~ liniar independenți formează o bază.

Dacă dim. unui spațiu e n, atunci

n → nr maxim de vectori ce formează un SLI

n → nr minim ce formează un sist de generatori