SEMINAR 1
ALGEBRĂ

Inele

$(R,+,\cdot)$: $(R,+)$ grup abelian

: $(R,\cdot)$ monoid $\Rightarrow \exists\, e_{neutru} \Rightarrow$ inel unitar.

Noi lucrăm cu inele unitare

: distributivitatea adunării față de înmulțire.

- $\mathbb{C}, \mathbb{R}$, $+, \cdot \rightarrow$ inele, corpuri
- $(\mathbb{N}, +, \cdot) \Rightarrow$ nu este inel. (pentru că $(\mathbb{N}, +)$ nu e grup).

$\mathbb{Z}_p \Rightarrow$ inel.

$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot) \Rightarrow$ inel comutativ, cu $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$K\mathbb{Z}$ nu este un inel unitar (este inel neunitar)
(pentru că $1 \not\exists K \cdot \mathbb{Z}$.

Inele finite: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \Rightarrow$ inel finit cu n elemente.

$U(\mathbb{Z}/m) = \{\hat{x} \in \mathbb{Z}_m \mid \text{grad}(x, m) = 1\}$ unde

• Fie R_1 și R_2 două inele. Arătați că $R_1 \times R_2$ este inel cu operațiile efectuate pe componente și că elementele inversabile din $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$

~~$\exists (a,b)$~~ $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

$(a,b)(a',b') = (aa' ; b,b')$.

Asociativitate:

Fie $(a,b), (a',b'), (a'',b'') \in R_1 \times R_2$ ~~a?~~

$\left[(a,b) + (a',b')\right] + (a'',b'')$

$(a+a', b+b') + a'', b''$

$= a + (a' + a''), (b+b') + b''$

(2) E. nulu $(0, 0)$

$(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = a,b$

(3) $.(-a, -b) \to$ Elemente simetrizabile

$(a,b) + (-a, -b) = (0,0)$

$(0,0) = (0,0)$

(4) $(a,b)\cdot(1,1)=(1,1)\cdot(a,b)=(a,b)$

(5) $(a,b)\in U(R_1\times R_2) \Leftrightarrow \exists (a',b')\in R_1\times R_2$ a.î.

$(a,b)\cdot(a',b')=(a',b')\cdot(a,b)=(1,1)$

$(aa',bb')=(a'a,b'b)=(1,1)$

$\Leftrightarrow \exists a'\in R_1$ și $b'\in R_2$ a.î. $aa'=a'a=1$, $bb'=b'b=1 \Leftrightarrow a\in U(R_1)$, $b\in U(R_2)$

$\rightarrow (a,b)\in U(R_1)\times U(R_2)$

$\rightarrow U(R_1\times R_2)=U(R_1)\times U(R_2)$

Definiție:

$x\in R$ s.n. idempotent dacă $x^2=x$: Not: $Idem(R)$

$x\in R$ s.n. nilpotent $\exists n\in \mathbb{N}$ a.î. $x^n=0$. Not: $N(R)$

Ex: $Idem(R_1\times R_2)=Idem(R_1)\times Idem(R_2)$

$N(R_1\times R_2)=N(R_1)\times N(R_2)$

$Idem(R_1\times R_2)\ni(a,b) \Leftrightarrow (a,b)^2=(a,b)$

$\Leftrightarrow (a,b)(a,b)=(a,b) \Leftrightarrow (a^2,b^2)=(a,b)$

$\Leftrightarrow a^2=a$, $b^2=b \Leftrightarrow a\in Idem(R_1)$, $b\in Idem(R_2)$ $(a,b)\in Idem(R_1)\times Idem(R_2)$

$N(R_1 \times R_2) = N(R_1) \times N(R_2)$

$N(R_1 \times R_2) \ni (a, b) \Leftrightarrow \exists\, n$ a.î. $(a, b)^n = (0, 0)$

$\Rightarrow (\underbrace{(a, b), (a, b) \dots (a, b)}_{n \text{ ori}}) = (0, 0)$

$= (a^n, b^n) = (0, 0) \Rightarrow a^n = 0$
$b^n = 0 \Leftrightarrow a \in N(R_1)$
$b \in N(R_2)$

„$\Leftarrow$"?

$a \in N(R_1) \Rightarrow \exists\, n_1$ a.î. $a^{n_1} = 0$

$b \in N(R_1) \Rightarrow \exists\, n_2$ a.î. $b^{n_2} = 0 \Rightarrow$; pentru $n = \max(n_1, n_2)$ $a^n = 0$ şi $b^n = 0$ $\Big| \Rightarrow$ „$\Leftarrow$" „A"

Lema chineză a resturilor (LCR)

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$

Atunci $\mathbb{Z}/_m \times \mathbb{Z}/_n \simeq \mathbb{Z}/_{m,n}$ (izo de inele)

$\Leftrightarrow$ m şi n sunt prime între ele.

i.e. $(m, n) = 1$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_3 \simeq \mathbb{Z}_6 \\ \mathbb{Z}/_8 \times \mathbb{Z}/_5 \simeq \mathbb{Z}_{40} \end{array}\right\}$ inele izomorfe

$\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \not\simeq \mathbb{Z}_4 \Rightarrow$ inele neizomorfe.

5/6

$\frac{\mathbb{R}}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$

gcd $\Rightarrow$ greatest common divisor

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\simeq \mathbb{Z}_4$, pt că:

$\underbrace{(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{\text{conține elemente de ordin cel mult 2}} \Rightarrow \operatorname{Im}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \not\exists$

conține elemente de ordin cel mult 2 | Conține elemente de ordin mai mare ca 2

LCR extinsă: dacă $(n_i, n_j) = 1, \forall i \neq j$

$\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_t} \simeq \mathbb{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_t}$

n de indic.

Demonstrăm formula pentru $\varphi(n)$

$\varphi(n) = \varphi(\underbrace{p_1^{\alpha_1}}_{n_1} \cdot \underbrace{p_2^{\alpha_2}}_{n_2} \cdots \underbrace{p_t^{\alpha_t}}_{n_t}) = ; (n_i; n_j) = 1 \; \forall i \neq j$

pt că $p_i \neq p_j$

$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \simeq \mathbb{Z}_{n_2} \simeq \mathbb{Z}_{n_t}$

$|U(\mathbb{Z}_n)| = |U(\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}(n_t))|$

$= |U(\mathbb{Z}_{n_1})| \cdot |U(\mathbb{Z}_{n})| \cdots |U(\mathbb{Z}_{n_t})|$

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ cu $p_1 \dots p_t$ prime distincte

Atunci $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)$

Temă: Câte elemente sunt idempotente?
Câte elemente sunt nilpotente.

$|Idem(\mathbb{Z}_3)| = 2$

$|Idem(\mathbb{Z}_4)| = 2$

$\dots(\mathbb{Z}_5) = 2$

$(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}\} = 4$

$\mathbb{Z}_7$

$\mathbb{Z}_8$

$\vdots$

$\mathbb{Z}_n$

La nilpotenți luăm cazuri $(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{14})$