CURSUL 11: APLICAŢII LINIARE ŞI MATRICI. DIAGONALIZABILITATE

G. MINCU

În acest curs, k va fi un corp comutativ, V un k-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$, iar bazele considerate vor fi ordonate.

1. Matricea schimbării de bază

Fie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ şi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ două baze ale lui V. Există atunci constantele unic determinate $a_{ij} \in k$ astfel încât

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,$$
$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Am pus astfel în evidenţă o matrice $(a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(k)$.

Definiţia 1. Vom numi matricea $(a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(k)$ de mai sus **matricea de trecere** (sau **matricea de schimbare de bază**) de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

Vom nota matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ cu $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Observaţia 1. $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$.

Propoziţia 1. Dacă $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt baze ordonate ale lui V, atunci

$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$$

Corolarul 1. $M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$

2. Matricea unui endomorfism

Fie $u \in \mathrm{End}_k(V)$ şi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază a lui V. Atunci, există şi sunt unic determinaţi scalarii $a_{ij} \in k$ astfel încât

$$u(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,$$
$$u(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Am pus astfel în evidenţă o matrice $(a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(k)$.

Definiţia 2. Vom numi matricea $(a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(k)$ de mai sus **matricea morfismului u în baza $\mathcal{B}$.**

Vom nota matricea endomorfismului u în baza $\mathcal{B}$ cu $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Propoziţia 2. Fie $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$, $\mathcal{B}$ o bază a lui V, şi $\lambda \in k$. Atunci:
(i) $M_{\mathcal{B}}(u+v) = M_{\mathcal{B}}(u) + M_{\mathcal{B}}(v)$.
(ii) $M_{\mathcal{B}}(u \circ v) = M_{\mathcal{B}}(u) \cdot M_{\mathcal{B}}(v)$.
(iii) $M_{\mathcal{B}}(\lambda u) = \lambda M_{\mathcal{B}}(u)$.

Corolarul 2. Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui V. Aplicaţia $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}_k(V) \to \mathcal{M}_n(k)$, $\varphi_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u)$ este un izomorfism de inele unitare.

Corolarul 3. (i) $M_{\mathcal{B}}(1_V) = I_n$.
(ii) $u \in \mathrm{End}_k(V)$ este inversabil dacă şi numai dacă $M_{\mathcal{B}}(u)$ este inversabilă.
(iii) Dacă $u \in \mathrm{End}_k(V)$ este inversabil, atunci $M_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}(u))^{-1}$.

Propoziţia 3. Fie $u \in \mathrm{End}_k(V)$, $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ baze ale lui V, şi S matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Atunci, $M_{\mathcal{B}'}(u) = S^{-1} M_{\mathcal{B}}(u) S$.

Propoziţia 3 ne sugerează introducerea următoarei noţiuni:

Definiţia 3. Spunem că matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ sunt **asemenea** dacă există $U \in \mathrm{Gl}_n(k)$ astfel încât $B = U^{-1} A U$.

Notăm faptul că matricile A şi B sunt asemenea prin $A \approx B$.

Propoziţia 4. Relaţia de asemănare este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_n(k)$.

Observaţia 2. Fie $u \in \mathrm{End}_k(V)$ şi $\mathcal{B}$ o bază a lui V. Clasa de asemănare a lui $M_{\mathcal{B}}(u)$ în $\mathcal{M}_n(k)$ este $\{M_{\mathcal{D}}(u) : \mathcal{D} \text{ este bază a lui } V\}$.

3. Diagonalizabilitate. Vectori şi valori proprii

Definiţia 4. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(k)$ se numeşte **diagonalizabilă** dacă există o matrice diagonală $D \in \mathcal{M}_n(k)$ astfel încât $A \approx D$.

Definiţia 5. $u \in \mathrm{End}_k(V)$ se numeşte **diagonalizabil** dacă există o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui V astfel încât $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiţia anterioară ne sugerează şi introducerea următoarelor noţiuni:

Definiţia 6. $\lambda \in k$ se numeşte **valoare proprie** pentru endomorfismul $u \in \mathrm{End}_k(V)$ dacă există $v \in V \setminus \{0\}$ astfel încât $u(v) = \lambda v$.

Definiţia 7. v ca în definiţia 6 se numeşte **vector propriu** asociat valorii proprii λ a lui u.

Observaţia 3. $u \in \mathrm{End}_k(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă V admite o bază alcătuită exclusiv din vectori proprii pentru u.

Iată şi variantele relative ale celor două definiţii anterioare:

Definiţia 8. $\lambda \in k$ se numeşte **valoare proprie** pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(k)$ dacă există $v \in k^n \setminus \{0\}$ astfel încât $A \cdot v = \lambda v$.

Definiţia 9. v ca în definiţia 8 se numeşte **vector propriu** asociat valorii proprii λ a lui A.

Observaţia 4. Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui V. $\lambda \in k$ este valoare proprie pentru $u \in \mathrm{End}_k(V)$ dacă şi numai dacă ea este valoare proprie pentru $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Notaţii: $\sigma_k(u) = \{\lambda \in k : \lambda \text{ este valoare proprie pentru } u\}$;
$\sigma_k(A) = \{\lambda \in k : \lambda \text{ este valoare proprie pentru } A\}$.

Temă: Scrieţi varianta relativă a afirmaţiei din observaţia 3!

Propoziţia 5. λ este valoare proprie pentru $A \in \mathcal{M}_n(k)$ dacă şi numai dacă $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Definiţia 10. Polinomul $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \det(XI_n - A)$ se numeşte **polinomul caracteristic** al matricii $A \in \mathcal{M}_n(k)$.

Observaţia 5. Dacă $P_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, atunci $a_{n-1} = -\operatorname{Tr} A$, iar $a_0 = (-1)^n \det A$.

Temă: Exprimaţi coeficienţii lui P_A în funcţie de elementele lui A!

Propoziţia 6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$. Dacă $A \approx B$, atunci $\det(XI - A) = \det(XI - B)$.

Cugetaţi asupra întrebării: Este valabilă reciproca?

Observaţia 6. Dacă $u \in \mathrm{End}_k(V)$, atunci, conform propoziţiei 6, $P_{M_{\mathcal{B}}(u)}$ nu depinde de baza $\mathcal{B}$, ci doar de endomorfismul u.

Definiţia 11. Polinomul $P_{M_{\mathcal{B}}(u)}$ se numeşte **polinomul caracteristic** al endomorfismului u.

Vom nota polinomul caracteristic al lui $u \in \mathrm{End}_k(V)$ cu P_u.

Definiţia 12. Numim **multiplicitatea aritmetică** a valorii proprii λ a matricei $A \in \mathcal{M}_n(k)$ ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ a polinomului P_A.

Notăm cu $m_a(\lambda)$ multiplicitatea aritmetică a valorii proprii λ a lui A.

Pentru $\lambda \in \sigma_k(u)$, **notăm** $V_\lambda = \{v \in V : u(v) = \lambda v\}$.

Propoziţia 7. $V_\lambda \leq_k V$.

Definiţia 13. V_λ se numeşte **subspaţiul propriu** al lui V asociat lui λ.

Definiţia 14. Numărul natural nenul $\dim_k V_\lambda$ se numeşte **multiplicitatea geometrică** a valorii proprii λ a endomorfismului $u \in \mathrm{End}_k(V)$).

Notăm cu $m_g(\lambda)$ multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ a lui u.

Temă: Scrieţi variantele relative ale definiţiilor 13 şi 14 şi definiţi $V_\lambda(A)$ pentru $A \in \mathcal{M}_n(k)$ şi $\lambda \in \sigma_k(A)$.

Propoziţia 8. Fie $A \in \mathcal{M}_n(k)$ şi $\lambda \in \sigma_k(A)$. Atunci, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Propoziţia 9. Fie $u \in \mathrm{End}_k(V)$. Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sunt valori proprii distincte ale lui u, iar $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sunt vectori proprii asociaţi acestora, atunci $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sunt liniar independenţi.

Din propoziţia 9 şi din observaţia 3 rezultă:

Propoziţia 10. Fie $u \in \mathrm{End}_k(V)$. Atunci, u este diagonalizabil dacă şi numai dacă $V = \dot{\sum\limits_{\lambda \in \sigma_k(V)}} V_\lambda$.

Din cele precedente obţinem imediat următoarea caracterizare a diagonalizabilităţii:

Teorema 1. $u \in \mathrm{End}_k(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă pentru orice rădăcină λ a lui P_u avem $\lambda \in k$ şi $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.