CURSUL 7: SPAŢII VECTORIALE

G. MINCU

1. Subspaţiul vectorial generat de o submulţime

Definiţia 1. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $M \subset V$. Prin **k-subspaţiul vectorial al lui V generat de M** înţelegem cel mai mic (în sensul incluziunii) k-subspaţiu vectorial al lui V care conţine submulţimea M.

Vom nota k-subspaţiul vectorial al lui V generat de M cu ${}_k{<}M{>}$. Dacă $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, vom folosi, în loc de ${}_k{<}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}{>}$, notaţia ${}_k{<}v_1, v_2, \dots, v_n{>}$.

Propoziţia 1. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $M \subset V$. Atunci,

$$ {}_k{<}M{>} = \bigcap_{\substack{W \leq_k V \\ W \supset M}} W. $$

Propoziţia 2. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $M \subset V$. Atunci,

$$ {}_k{<}M{>} = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n : n \in \mathbb{N}^*,\ a_1, \dots, a_n \in k,\ x_1, \dots, x_n \in M\}. $$

Observaţia 1. Dacă $v \in V$, atunci ${}_k{<}v{>} = kv$.

Definiţia 2. Dacă V este un k-spaţiu vectorial, iar $v \in V \setminus \{0\}$, atunci ${}_k{<}v{>}$ se numeşte **dreapta vectorială** determinată de v în V.

Observaţia 2. Dacă $v_1, v_2 \dots, v_n \in V$, atunci

$$ {}_k{<}v_1, v_2 \dots, v_n{>} = \{a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_nv_n :\ a_1, \dots, a_n \in k\}. $$

Observaţia 3. Fie V un k-spaţiu vectorial.
(i) Dacă $V_1, V_2 \leq_k V$, atunci ${}_k{<}V_1 \cup V_2{>} = V_1 + V_2$.
(ii) Mai general, dacă pentru orice $i \in I$ avem $V_i \leq_k V$, atunci

$$ {}_k{<}\bigcup_{i \in I} V_i{>} = \sum_{i \in I} V_i. $$

2. sistem de generatori pentru un spaţiu vectorial

Definiţia 3. Fie V un k-spaţiu vectorial. Submulţimea G a lui V se numeşte **sistem de generatori** al lui V dacă ${}_k{<}G{>} = V$.

Definiţia 4. k-spaţiul vectorial V se numeşte **finit generat** dacă el admite un sistem finit de generatori.

Observaţia 4. Submulţimea G a k-spaţiului vectorial V este sistem de generatori pentru V dacă şi numai dacă orice vector din V se poate scrie sub formă de combinaţie liniară de elemente ale lui G.

Observaţia 5. Submulţimea G a k-spaţiului vectorial V este sistem de generatori pentru V dacă şi numai dacă $V = \sum_{g \in G} kg$.

Exemplul 1. Dacă V este un k-spaţiu vectorial, atunci V este sistem de generatori pentru V.

Exemplul 2. Dacă a este un element nenul al corpului k, atunci $\{a\}$ este sistem de generatori pentru ${}_k k$.

Exemplul 3. Mulţimea tuturor monoamelor în variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituie un sistem de generatori pentru ${}_k k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

Observaţia 6. Dacă G este un sistem de generatori al k-spaţiului vectorial V, iar $G \subset G' \subset V$, atunci şi G' este sistem de generatori pentru V.

3. Dependenţă şi independenţă liniară

Definiţia 5. Fie V un k-spaţiu vectorial, iar $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$. Spunem că vectorii $v_1, v_2 \ldots, v_n$ sunt **liniar dependenţi** dacă există $a_1, a_2 \ldots, a_n \in k$, nu toţi nuli, astfel încât $a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_nv_n = 0$. În caz contrar, vectorii $v_1, v_2 \ldots, v_n$ se numesc **liniar independenţi**.

Observaţia 7. În condiţiile definiţiei anterioare, $v_1, v_2 \ldots, v_n$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă

$$\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in k \quad a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Definiţia 6. Fie V un k-spaţiu vectorial, iar $M \subset V$. Spunem că M este **liniar dependentă** (sau **legată**) dacă ea conţine o submulţime finită liniar dependentă. Spunem că M este **liniar independentă** (sau **liberă**) dacă ea nu este liniar dependentă.

Observaţia 8. Submulţimea M a k-spaţiului vectorial V este liniar independentă dacă şi numai dacă orice submulţime finită a sa este liniar independentă.

Observaţia 9. Dacă L este o submulţime liniar independentă a k-spaţiului vectorial V, iar $L' \subset L$, atunci L' este liniar independentă.

Din teoria sistemelor de ecuaţii liniare obţinem cu uşurinţă următorul criteriu de verificare a independenţei liniare a unor vectori:

Propoziţia 3. k un corp comutativ. Vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in k^n$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă determinantul componentelor lor este nenul.

Teorema schimbului. Fie V un k-spaţiu vectorial, $G = \{g_1, g_2 \ldots, g_n\} \subset V$ un sistem de generatori, iar $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_r\} \subset V$ un sistem liniar independent. Atunci, $r \leq n$ şi, după o eventuală renumerotare a elementelor lui G, $\{l_1, l_2, \ldots, l_r, g_{r+1}, g_{r+2} \ldots, g_n\}$ este sistem de generatori pentru V.

4. Bază şi dimensiune

Definiţia 7. Submulţimea B a k-spaţiului vectorial V se numeşte **bază** dacă ea este şi sistem de generatori, şi sistem liniar independent.

Observaţia 10. Submulţimea B a k-spaţiului vectorial V este bază pentru V dacă şi numai dacă orice vector din V se scrie în mod unic sub formă de combinaţie liniară de elemente ale lui B.

Observaţia 11. Submulţimea B a k-spaţiului vectorial V este bază pentru V dacă şi numai dacă $V = \dot{\sum_{b \in B}} kb$.

Exemplul 4. $\{1\}$ este bază pentru ${}_k k$.

Exemplul 5. Dacă $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, atunci $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază pentru ${}_k k^n$.

Definiţia 8. Baza din exemplul anterior se numeşte **baza canonică** a lui ${}_k k^n$.

Exemplul 6. Notând cu E_{ij} matricea care are 1 pe poziţia i, j şi 0 în rest, $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ este bază pentru ${}_k\mathcal{M}_{m,n}(k)$.

Definiţia 9. Baza din exemplul anterior se numeşte **baza canonică** a lui ${}_k\mathcal{M}_{m,n}(k)$.

Exemplul 7. $\{1, X, X^2, \ldots\}$ este k-bază a lui $k[X]$.

Definiţia 10. Baza din exemplul anterior se numeşte **baza canonică** a lui ${}_k k[X]$.

Teorema 1. Fie ${}_kV$ un spaţiu vectorial, $L \subset V$ un sistem liniar independent şi G un sistem de generatori al lui V cu proprietatea $L \subset G$. Atunci, există o bază B a lui V cu proprietatea $L \subset B \subset G$.

Demonstraţie în cazul în care G este finit: Fie m cel mai mare număr natural cu proprietatea că G admite submulţimi liniar independente de cardinal m care conţin pe L (există astfel de m, deoarece G este finită!) şi fie B o astfel de submulţime. Atunci, orice $g \in G \setminus B$ se scrie ca o combinaţie liniară de elemente din B, deoarece altminteri ar fi contrazisă definiţia lui m. Rezultă că B este şi sistem de generatori, deci este bază a lui V. □

Teorema 2. Din orice sistem de genratori al unui spaţiu vectorial se poate extrage o bază.

Teorema 3. Orice sistem liniar independent al unui spaţiu vectorial se poate completa la o bază.

Teorema 4. Orice spaţiu vectorial admite baze.

Temă: Demonstraţi teoremele 2, 3 şi 4 folosind teorema 1!

Teorema 5. Orice două baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial au acelaşi cardinal.

Demonstraţie în cazul spaţiilor finit generate: Fie ${}_kV$ un spaţiu vectorial finit generat şi B_1 şi B_2 baze ale sale. Privim B_1 ca fiind sistem de generatori, iar B_2 ca fiind sistem liniar independent, aplicăm teorema schimbului, şi obţinem $|B_2| \leq |B_1|$. Schimbând rolurile lui B_1 şi B_2, obţinem şi $|B_1| \leq |B_2|$, de unde egalitatea dorită. □

Definiţia 11. Prin **dimensiunea** unui spaţiu vectorial înţelegem cardinalul unei baze a acestuia.

Vom nota dimensiunea k-spaţiului vectorial V cu $\dim_k V$.

Definiţia 12. Spaţiul vectorial ${}_kV$ se numeşte **finit dimensional** dacă dimensiunea sa este finită, şi **infinit dimensional** în caz contrar.

Exemplul 8. Conform exemplului 4, $\dim_k k = 1$.

Exemplul 9. Conform exemplului 5, $\dim_k k^n = n$.

Exemplul 10. Conform exemplului 6, $\dim_k \mathcal{M}_{m,n}(k) = mn$.

Exemplul 11. Conform exemplului 7, $\dim_k k[X] = \aleph_0$.

Observaţia 12. ${}_kk$, ${}_kk^n$ şi ${}_k\mathcal{M}_{m,n}(k)$ sunt finit dimensionale; ${}_kk[X]$ este infinit dimensional.

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.