CURSUL 9: DETERMINANŢI

G. MINCU

În acest curs, notaţia R va desemna, în lipsa menţiunii exprese contrare, un inel comutativ şi unitar.

1. Definiţia determinanţilor

Definiţia 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$. Prin **determinantul** matricei A înţelegem elementul

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1}$$

al lui R.

Notaţii frecvent folosite pentru determinantul matricei A: $|A|$ sau $\det A$.

Observaţia 1. Pentru $n = 1$, $\quad |A| = a_{11}$.
Pentru $n = 2$, $\quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Pentru $n = 3$,
$|A| = a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Definiţia 2. Prin linia (coloana) i a determinantului $|A|$, vom înţelege linia (coloana) i a matricei A.

Observaţia 2. Fie $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$şi $\varphi : R \to S$ un morfism de inele. Aplicând φ fiecărui element al lui A obţinem matricea $B = (\varphi(a_{ij}))_{1 \le i,j \le n}$. Atunci $\varphi(|A|) = |B|$.

Demonstraţie: $\varphi(|A|) = \varphi(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}) =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \varphi(a_{1\sigma(1)}) \varphi(a_{2\sigma(2)}) \cdots \varphi(a_{n\sigma(n)}) = |B|$. $\quad \square$

2. Proprietăţi ale determinanţilor

Teorema 1. a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(R)$, atunci $\det^T A = \det A$
b) Dacă un determinant are o linie nulă, atunci el este nul.
c) Dacă înmulţim o linie a unui determinant cu un element $\lambda \in R$, determinantul se înmulţeşte cu λ.
d) Dacă o linie a unui determinant $|A|$ are forma $(b_1 + c_1, ..., b_n + c_n)$, atunci $|A| = |B| + |C|$, unde $|B|$ resp. $|C|$ sunt determinanţii obţinuţi din $|A|$ înlocuind linia respectivă cu $(b_1, ..., b_n)$ resp. $(c_1, ..., c_n)$.

e) Dacă un determinant are două linii proporţionale, atunci el este nul.
f) Dacă într-un determinant permutăm două linii, atunci determinantul îşi schimbă semnul.
g) Un determinant nu se schimbă dacă la o linie adunăm o altă linie înmulţită cu un element $\lambda \in R$.
h) Proprietăţile $(b)-(g)$ au loc şi pentru coloane.

Demonstraţie: Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(R)$.

a) Inelul R fiind comutativ, $|{}^T A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$
$= \sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau) a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)} = |A|$.

b) şi c) rezută din faptul că fiecare termen din (1) conţine exact un factor din linia i şi anume pe $a_{i\sigma(i)}$.

d) este o consecinţă imediată a distributivităţii înmulţirii din R în raport cu adunarea.

e) Conform lui (c), e suficient să tratăm cazul a două linii egale, şi fie acestea, pentru simplitate, primele două. Cum $S_n = A_n \cup A_n(12)$ este o partiţie a lui S_n, avem: $|A| = \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(2)}a_{2\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)} = 0$.

f) Pentru simplitate, considerăm cazul când se permută primele două linii ale matricei A şi fie D matricea astfel obţinută. Remarcăm că funcţia $S_n \to S_n$, $\sigma \mapsto \sigma(12)$ este bijectivă. Deci putem înlocui în formula (1), σ cu $\sigma(12)$ şi obţinem $|A| =$
$= -\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(2)}a_{2\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = -|D|$.

g) Fie B matricea obţinută din A prin adunarea la linia i a elementelor liniei j înmulţite cu un element $\lambda \in R$. Aplicând proprietatea (d) pentru linia i a matricei B obţinem $|B| = |A| + \Delta$, unde Δ este un determinant cu două linii proporţionale, deci, conform e), $\Delta = 0$.

h) rezultă din (a). $\square$

Observaţia 3. Dacă un determinant are două linii (sau două coloane) egale, atunci el este nul.

Corolarul 1. Dacă una din liniile (resp. coloanele) unui determinant este combinaţie liniară de celelalte linii (resp. coloane), atunci determinantul este nul. În particular, dacă R este corp şi $|A| \neq 0$, atunci liniile lui A (resp. coloanele lui A) constituie o bază a R-spaţiului vectorial R^n.

3. Dezvoltarea determinanţilor

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$.

Definiţia 3. Fie $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prin **minor de ordin k** al matricei A înţelegem determinantul oricărei matrici de tipul

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix},$$

unde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ şi $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$

Observaţia 4. Un minor de ordin k al matricii A este prin urmare determinantul unei ,,submatrici" a lui A dată de intersecţia a k linii şi k coloane ale lui A.

Definiţia 4. Dat fiind minorul M aflat la intersecţia a k linii şi k coloane ale matricii A, prin **minorul complementar lui** M **în** A înţelegem minorul aflat la intersecţiile celorlalte $n-k$ linii şi $n-k$ coloane ale lui A.

Vom nota cu $\overline{M}$ minorul complementar lui M.

Definiţia 5. Prin complementul algebric al minorului M de ordin k al lui A aflat la intersecţiile liniilor $i_1, i_2, \ldots, i_k$ cu coloanele $j_1, j_2, \ldots, j_k$ înţelegem elementul $(-1)^s\overline{M}$ al lui R, unde $s = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$.

Vom nota cu M' complementul algebric al minorului M.

Observaţia 5. Cu notaţiile din definiţia 5, complementul algebric al lui $\overline{M}$ este $(-1)^s M$.

Definiţia 6. În situaţia $k = 1$, complementul algebric al lui $|a_{ij}|$ se mai numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij} şi se notează A_{ij}.

Observaţia 6. Complementul algebric al lui $|a_{ij}|$ este $(-1)^{i+j}A_{ij}$, unde A_{ij} este determinantul matricei obţinute din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.

Lema 1. Fie M un minor de ordin m al matricei $A \in \mathcal{M}_n(R)$ şi M' complementul său algebric. Fie $M = M_1 + \cdots + M_{m!}$ şi $M' = N_1 + \cdots + N_{(n-m)!}$ scrierile desfăşurate ale celor doi minori. Atunci, fiecare produs M_iN_j este un termen din desfăşurarea lui $|A|$.

Demonstraţie: Pentru început, presupunem că M este m-minorul "stânga-sus", adică cel definit de primele m linii şi m coloane ale lui A. Atunci M' este chiar minorul complementar al lui M, deoarece $1+\cdots+m+1\cdots+m = 2m$ este număr par. Fie $(-1)^{\alpha}a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{mt_m}$ resp. $(-1)^{\beta}a_{m+1t_{m+1}}a_{m+2t_{m+2}}\cdots\ a_{mt_n}$ un termen din dezvoltarea lui M resp. M' unde α resp. β este numărul de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} m+1 & \cdots & n \\ t_{m+1} & \cdots & t_n \end{pmatrix}$. E suficient să observăm că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m & m+1 & \cdots & n \\ t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} & \cdots & t_n \end{pmatrix}$ are $\alpha+\beta$ inversiuni, deoarece $t_1, ..., t_m \in \{1, ..., m\}$ şi $t_{m+1}, ..., t_n \in \{m+1, ..., n\}$.

Presupunem acum că M este m-minorul definit de definit de liniile $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leq n$ şi coloanele $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leq n$. Prin $k_1 - 1$ permutări de linii vecine, aducem elementele liniei k_1 pe prima linie, apoi aducem, prin $k_2 - 2$ permutări de linii vecine, elementele liniei k_2 pe a doua linie, ş.a.m.d. Continuăm pe coloane. Procedând astfel aducem minorul M în poziţia stânga-sus S prin $k_1+\cdots+k_m-(1+\cdots+m)$ permutări de linii vecine şi $l_1+\cdots+l_m-(1+\cdots+m)$ permutări de coloane vecine. Făcând astfel, ordinea liniilor şi coloanelor din M şi M' se păstrează iar $|A|$ se înmulţeşte cu $(-1)^w$ cu $w = k_1+\cdots+k_m+l_1+\cdots+l_m$. Ne-am redus astfel la cazul analizat anterior deoarece $M' = (-1)^w\overline{M}$, unde $\overline{M}$ este minorul complementar al lui M. $\square$

Teorema 2. (**Regula lui Laplace**)
Fie $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$ şi $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leq n$. Fie Γ mulţimea minorilor de ordin m ai lui A cu elemente de pe liniile k_1,k_2,...,k_m. Atunci

$$|A| = \sum_{M\in\ \Gamma} MM'.$$

Un rezultat similar are loc pentru coloanele lui A.

Demonstraţie: Fie M, N doi m-minori distincţi cu elemente din liniile $k_1, ..., k_m$. Atunci dezvoltările lui MM' şi NN' nu au termeni comuni, deoarece M, N au cel puţin o coloană diferită. Deci, conform lemei 1, în suma din membrul drept al relaţiei din enunţ se găsesc $C_n^m m!(n-m)! = n!$ termeni din dezvoltarea lui $|A|$, adică toţi. $\square$

Observaţia 7. În cazul $m = 1$ obţinem exprimarea

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn},$$

numită **dezvoltarea determinantului după linia** k. Analog,

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}$$

se numeşte **dezvoltarea determinantului după coloana** k.

Teorema 3. Fie $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$ şi fie $1 \leq k, l \leq n$ fixate. Atunci

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = \delta_{kl}|A| \text{ şi}$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = \delta_{kl}|A|,$$

unde δ_{kl} este simbolul lui Kronecker.

Definiţia 7. Matricea adjunctă a lui A este transpusa matricei obţinute din A prin înlocuirea fiecărui element a_{ij} cu complementul său algebric A_{ij}.

Notăm adjuncta matricei $a \in \mathcal{M}_n(R)$ cu A^*.

Corolarul 2.

$$AA^* = A^*A = |A|I_n.$$

4. Aplicaţii

Teorema 4. (Regula lui Cramer) Fie $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$ şi $b_1, ..., b_n \in R$. Dacă $|A|$ este un element inversabil în R, atunci sistemul de ecuaţii liniare

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., n$$

este compatibil determinat cu soluţia unică $(\Delta_1|A|^{-1},...,\Delta_n|A|^{-1})$, unde Δ_j este determinantul obţinut din $|A|$ prin înlocuirea coloanei j cu vectorul termenilor liberi $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Demonstraţie: Fie A_{ij} complementul algebric al lui a_{ij} în matricea A. Înmulţind cu A^* egalitatea $Ax = b$ se obţine $|A|x = A^*b$. Pentru $k = 1, ..., n$, deducem că $|A|x_k = A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_k$ care este dezvoltarea după coloana k a determinantului matricei obţinute din A prin înlocuirea coloanei k cu vectorul b; deci $x_k = \Delta_k|A|^{-1}$. $\square$

Vom folosi următoarea **notaţie:** Fie A o matrice de tip (n, p), $m \leq n, p$ şi $I \subseteq \{1, ..., n\}$, $J \subseteq \{1, ..., p\}$ mulţimi cu m elemente. Notăm cu A_I^J

m-minorul lui A cu format cu liniile cu indici din I şi coloanele cu indici din J.

Teorema 5. (Formula Binet-Cauchy)
Fie A şi B matrice de tip (n,p) şi respectiv (p,q), şi fie $m \leq n,p,q$. Fie $I \subseteq \{1,...,n\}$ şi $K \subseteq \{1,...,q\}$ două submulţimi cu m elemente. Atunci

$$(AB)_I^K = \sum_J A_I^J B_J^K$$

suma făcându-se după toate submulţimile $J \subseteq \{1,...,p\}$ cu m elemente.

Demonstraţie: Fie $C = AB$, $I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ şi $K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$ cu $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ şi $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$. Punem $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ şi $C = (c_{ik})$. Fie $s_1,...,s_m$ o permutare a numerelor $k_1,...,k_m$, adică $\{s_1,...,s_m\} = \{k_1,...,k_m\}$. Atunci signatura permutării $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & ... & k_m \\ s_1 & s_2 & ... & s_m \end{pmatrix}$ este $(-1)^{Inv(s_1,...,s_m)}$ unde $Inv(s_1,...,s_m)$ este numărul perechilor (u,v), $1 \leq u < v \leq m$, cu $s_u > s_v$. Avem

$$C_I^K = C_{i_1,...,i_m}^{k_1,...,k_m} = \sum_{\{s_1,...,s_m\}=\{k_1,...,k_m\}} (-1)^{Inv(s_1,...,s_m)} c_{i_1 s_1} \cdots c_{i_m s_m} =$$

$$= \sum_{\{s_1,...,s_m\}=\{k_1,...,k_m\}} (-1)^{Inv(s_1,...,s_m)} (\sum_{t_1=1}^{p} a_{i_1 t_1} b_{t_1 s_1}) \cdots (\sum_{t_m=1}^{p} a_{i_m t_m} b_{t_m s_m}) =$$

$$= \sum_{t_1=1}^{p} \cdots \sum_{t_m=1}^{p} a_{i_1 t_1} \cdots a_{i_m t_m} \sum_{\{s_1,...,s_m\}=\{k_1,...,k_m\}} (-1)^{Inv(s_1,...,s_m)} b_{t_1 s_1} \cdots b_{t_m s_m} =$$

$$= \sum_{t_1=1}^{p} \cdots \sum_{t_m=1}^{p} a_{i_1 t_1} \cdots a_{i_m t_m} B_{t_1,...,t_m}^{k_1,...,k_m}$$

unde $B_{t_1,...,t_m}^{k_1,...,k_m}$ desemnează m-minorul lui B cu liniile $t_1,...,t_m$ şi coloanele $k_1,...,k_m$ în această ordine. Acest minor este nul dacă numerele $t_1,...,t_m$ nu sunt distincte. Deci putem scrie

$$C_I^K = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq p} \sum_{\{t_1,...,t_m\}=\{j_1,...,j_m\}} a_{i_1 t_1} \cdots a_{i_m t_m} (-1)^{Inv(t_1,...,t_m)} B_{j_1,...,j_m}^{k_1,...,k_m} =$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq p} B_{j_1,...,j_m}^{k_1,...,k_m} \sum_{\{t_1,...,t_m\}=\{j_1,...,j_m\}} (-1)^{Inv(t_1,...,t_m)} a_{i_1 t_1} \cdots a_{i_m t_m} =$$

$= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq p} B_{j_1,...,j_m}^{k_1,...,k_m} A_{i_1,...,i_m}^{j_1,...,j_m} = \sum_J A_I^J B_J^K$. $\square$

Corolarul 3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$, atunci $\det(AB) = \det A \det B$.

Demonstraţie: Aplicăm formula Binet-Cauchy cu $m = p = q = n$. □

Teorema 6. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(R)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A$ este element inversabil al lui R. Dacă A este inversabilă, inversa sa este $(\det A)^{-1}A^*$.

Demonstraţie: Dacă A este inversabilă, fie $B \in \mathcal{M}_n(R)$ astfel încât $AB = I_n$. Atunci $1 = |I_n| = |AB| = |A||B|$, deci $|A| \in U(R)$. Reciproc, să presupunem că $|A| \in U(R)$. Atunci $A(|A|^{-1}A^*) = (|A|^{-1}A^*)A = I_n$, cf. teoremei 3. □

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.