CURSUL 10: SISTEME LINIARE. RANGUL UNEI MATRICE

G. MINCU

În acest curs, notaţia k va desemna, în lipsa menţiunii exprese contrare, un corp comutativ.[1]

1. Sisteme de ecuaţii liniare

Fie $m, n \geq 1$. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare

$$(\mathcal{S}) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., m$$

unde $a_{ij}, b_i \in k$. Scris matriceal, sistemul este $Ax = b$, unde A este matricea de tip (m, n) cu elementele a_{ij} numită matricea sistemului, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ este vectorul necunoscutelor şi $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ este vectorul termenilor liberi. O soluţie a sistemului este un vector coloană $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ cu elemente din k astfel încât $Ac = b$.

Definiţia 1. Sistemul $(\mathcal{S})$ se numeşte **incompatibil** dacă nu admite nici o soluţie, **compatibil determinat** dacă admite o soluţie unică şi **compatibil nedeterminat** dacă admite cel puţin două soluţii.

Definiţia 2. Două sisteme se zic **echivalente** dacă au aceleaşi soluţii.

Observaţia 1. Se vede uşor că următoarele transformări conduc la sisteme echivalente cu cel dat:
a. Adunarea la o ecuaţie a altei ecuaţii înmulţite cu un element din k.
b. Permutarea a două ecuaţii.
c. Înmulţirea unei ecuaţii cu un element nenul din k.

Fie $B = (A|\ b)$ matricea extinsă a sistemului, adică matricea sistemului la care am adăugat vectorul coloană al termenilor liberi. Transformările a, b, c de mai sus produc asupra matricei B următoarele transformări:

[1] Acest material este preluat din [1]

1. Adunarea la o linie a altei linii înmulţite cu un element din k.
2. Permutarea a două linii.
3. Înmulţirea unei linii cu un element nenul din k.

Definiţia 3. Transformările 1-3 de mai sus se numesc transformări elementare pe linii.

Observaţia 2. Transformările de mai sus sunt inversabile.

Definiţia 4. Spunem că două matrice A, B de acelaşi tip sunt **echivalente pe linii** dacă A se obţine din B printr-o succesiune de transformări elementare pe linii.

Observaţia 3. Aşa cum îi arată şi numele, ,,echivalenţa pe lini" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea matricelor de acelaşi tip.

Vom nota cu $A \overset{l}{\sim} B$ faptul că A şi B sunt echivalente pe linii.

Propoziţia 1. Fie C o matrice de tip (p, q) cu elemente din k. Dacă f este una din tranformările elementare $1-3$ şi $f(C)$ este matricea obţinută din C prin efectuarea transformării f, atunci $f(C) = f(I_p)C$, unde I_p este matricea unitate.

Demonstraţie: Calcul direct. $\square$

Apar astfel următoarele tipuri de matrice:

1. $T_{ij}(a)$ = matricea unitate în care la linia j s-a adunat linia i înmulţită cu elementul $a \in k$.
2. P_{ij} = matricea unitate cu liniile i şi j permutate.
3. $D_i(u)$ = matricea unitate cu linia i înmulţită cu elementul $u \in k^*$.

Definiţia 5. Matricele $T_{ij}(a)$, P_{ij} şi $D_i(u)$ se numesc **matrice elementare**

Observaţia 4. $T_{ij}(a)T_{ij}(-a) = I_p$, $P_{ij}^2 = I_p$ şi $D_i(u)D_i(u^{-1}) = I_p$, deci matricele elementare sunt inversabile.

Definiţia 6. Numim matrice eşalon (pe linii) o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ . & \cdots & . & . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \end{pmatrix}.$$

Observaţia 5. O matrice eşalon este o matrice ce verifică următoarele condiţii:

1. Primul element nenul din fiecare linie, numit *pivot*, este egal cu 1.
2. Pivotul de pe linia $i + 1$ este la dreapta pivotului de pe linia i.

3. Pivotul este singurul element nenul de pe coloana sa.
4. Eventualele linii nule apar la sfârşit.

Teorema 1. O matrice eşalon inversabilă este egală cu matricea unitate.

Demonstraţie: O matricea eşalon este superior triunghiulară. Dacă este şi inversabilă, atunci pivoţii apar pe diagonala principală, deci este matricea unitate. $\square$

Teorema 2. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ este echivalentă pe linii cu o matrice eşalon unică.

Demonstraţie: ***Existenţa:*** Dacă $A = 0$, atunci A este matrice eşalon. Presupunem că $A \neq 0$. Procedăm astfel: Găsim prima coloană cu elemente nenule, să zicem coloana j. Prin permutări de linii, aducem un element nenul α al ei pe prima linie şi apoi, împărţind prima linie la α, facem $\alpha = 1$, obţinând astfel un pivot în poziţia $(1, j)$. Prin transformări de tip 1, anulăm elementele aflate dedesubt pe coloana pivotului. Apoi, se aplică acelaşi algoritm submatricei obţinute din A eliminând linia 1 şi primele j coloane. La sfârşit, prin transformări de tip 1, anulăm elementele aflate deasupra pe coloana fiecărui pivot.
Unicitatea: Facem inducţie după m.
Din $(0, 0, \ldots, 0, 1, a_{r+1}, \ldots, a_n) \overset{l}{\sim} (0, 0, \ldots, 0, 1, b_{s+1}, \ldots, b_n)$ rezultă că există $t \in k^*$ astfel încât

$$(0, 0, \ldots, 0, 1, b_{s+1}, \ldots, b_n) = (t)(0, 0, \ldots, 0, 1, a_{r+1}, \ldots, a_n),$$

de unde $r = s$, $t = 1$ şi $a_i = b_i$ pentru orice $i \in \{r+1, \ldots, n\}$. Prin urmare, afirmaţia este adevărată pentru $m = 1$.
Fie acum $m > 1$; presupunem afirmaţia adevărată pentru toate matricile cu mai puţin de m linii. Fie $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ două matrici eşalon cu proprietăţile $A \overset{l}{\sim} E_1$ şi $A \overset{l}{\sim} E_2$. Există atunci $U_1, U_2 \in GL_m(k)$ astfel încât $U_1 E_1 = A = U_2 E_2$. Dacă $E_1 = 0$, atunci $E_2 = 0$ şi am terminat. Dacă $E_1 \neq 0$, atunci $E_2 \neq 0$; notăm cu j_1, respectiv j_2, coloana pivotului de pe prima linie a lui E_1, respectiv E_2. Dacă $j_1 < j_2$, notăm $U = U_2^{-1} U_1$ şi avem $U E_1 = E_2$; comparând coloanele j_1 ale acestor matrici, rezultă că $u_{11} = u_{21} = \ldots = u_{m1} = 0$, deci $\det U = 0$, contradicţie. Cazul $j_1 > j_2$ se elimină analog. Prin urmare, $j_1 = j_2$. Procedând ca mai sus, obţinem $u_{11} = 1$ şi $u_{21} = \ldots = u_{m1} = 0$. În consecinţă, matricile E_1 şi E_2 au aceeaşi primă linie, pe care o notăm cu L. Notând $E_1 = \left(\frac{L}{E_1'}\right)$, $E_2 = \left(\frac{L}{E_2'}\right)$ şi U' matricea obţinută din U înlăturând prima linie şi prima coloană, obţinem $U' E_1' = E_2'$. Conform ipotezei de inducţie, obţinem $E_1' = E_2'$, deci şi $E_1 = E_2$. $\square$

Corolarul 1. Dacă A este o matrice, atunci există matricele elementare E_1, ..., E_k astfel încât $E_k \cdots E_1 A$ este matrice eşalon.

Corolarul 2. O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă ea este produs de matrice elementare.

Demonstraţie: Fie A o matrice pătratică inversabilă de ordin n. Conform corolarului precedent, există matricele elementare E_1, ..., E_k astfel încât $C = E_k \cdots E_1 A$ este matrice eşalon. Conform teoremei 1, $C = I_n$, deci $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Reciproca este evidentă. $\square$

Observaţia 6. Cu notaţiile precedente, $A^{-1} = E_k \cdots E_1$, deci A^{-1} se poate obţine făcând asupra lui I_n secvenţa de transformări elementare ce duce pe A în I_n. Deci, eşalonând matricea $(A\ I_n)$ se obţine matricea $(I_n\ A^{-1})$. Obţinem astfel un algoritm de calcul al inversei unei matrice prin transformări elementare.

Din teorema 2 şi din consideraţiile anterioare referitoare la sistemele de ecuaţii liniare rezultă

Teorema 3. Orice sistem de ecuaţii liniare este echivalent cu un sistem având matricea extinsă o matrice eşalon.

Presupunem că sistemul de ecuaţii liniare

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, ..., m$$

are matricea extinsă B matrice eşalon. Observăm că dacă apare un pivot în ultima coloană a lui B, atunci sistemul are o ecuaţie de forma $0 = 1$, deci este incompatibil. În continuare presupunem că B nu are pivoţi pe ultima coloană. Fie p_1,...,p_k coloanele ce au pivoţi. Numim necunoscutele x_{p_1},...,x_{p_k} **necunoscute principale**, celelalte necunoscute x_{s_1},...,x_{s_l} fiind numite **necunoscute secundare**. Trecând necunoscutele secundare în membrul drept şi neglijând ecuaţiile de forma $0 = 0$, sistemul devine

$$x_{p_i} = b_i - \sum_{j=1}^{l} a_{is_j} x_{s_j}, \quad i = 1, ..., k.$$

Deci sistemul este compatibil, necunoscutele secundare, dacă există, putând lua valori arbitrare. Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 4. Fie un sistem de ecuaţii liniare cu matricea extinsă B matrice eşalon. Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă B nu are pivoţi pe ultima coloană. Dacă este compatibil, sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă nu există necunoscute secundare, adică matricea sistemului are câte un pivot pe fiecare coloană.

Definiţia 7. Metoda de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare prin eşalonarea matricei extinse poartă numele de **metoda lui Gauss a eliminării**.

2. Rangul unei matrice

Definiţia 8. Fie $A \in M_{mn}(k) \setminus \{0\}$. Numim **rangul** lui A cel mai mare dintre ordinele minorilor nenuli ai lui A.

Observaţia 7. Considerăm că matricea nulă are rangul zero.

Vom nota rangul matricii A cu $\operatorname{rang} A$.

Observaţia 8. $\operatorname{rang}(A) = r$ dacă şi numai dacă A are un r-minor nenul şi toţi minorii de ordin $\geq r+1$ sunt nuli.

Observaţia 9. Conform regulii lui Laplace, $rang(A) = r$ dacă şi numai dacă A are un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin $r+1$ nuli.

Observaţia 10. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$, atunci $0 \leq \operatorname{rang}(A) \leq \min(m,n)$ şi $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}({}^T A)$.

Observaţia 11. Dacă $A \in M_n(k)$, atunci $\operatorname{rang}(A) = n$ dacă şi numai dacă $|A| \neq 0$.

Teorema 5. *Fie* $A \in M_{m,n}(k)$ *şi* $B \in M_{n,p}(k)$. *Atunci* $\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B))$.

Demonstraţie: Din formula Binet-Cauchy, rezultă că orice r-minor al lui AB este combinaţie liniară de r-minori ai lui A şi B. $\square$

Corolarul 3. Fie $A \in M_{m,n}(k)$, $U \in GL_m(k)$ şi $V \in GL_n(k)$. Atunci

$$\operatorname{rang}(UA) = \operatorname{rang}(AV) = \operatorname{rang}(A).$$

Demonstraţie: Din teorema precedentă, $\operatorname{rang}(UA) \leq \operatorname{rang}(A)$ şi $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(U^{-1}UA) \leq \operatorname{rang}(UA)$, deci $\operatorname{rang}(UA) = \operatorname{rang}(A)$. Cealaltă egalitate se probează analog. $\square$

Corolarul 4. Două matrice echivalente pe linii au acelaşi rang.

Teorema lui Kronecker. Fie $A \in M_{m,n}(k)$. Atunci $\operatorname{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea k-subspaţiului lui k^n generat de liniile lui A şi este de asemenea egal cu dimensiunea k-subspaţiului lui k^m generat de coloanele lui A.

Demonstraţie: Fie $l(A)$, respectiv $c(A)$, dimensiunea subspaţiului generat de liniile, respectiv de coloanele lui A. Arătăm că $\operatorname{rang}(A) = l(A)$. Se vede uşor că transformările elementare nu afectează $l(A)$. Conform corolarului 4, putem presupune că A este matrice eşalon. Fie p numărul de pivoţi ai lui A. Este imediat că primele p linii sunt liniar independente, iar celelalte sunt nule. Deci $l(A) = p$. Totodată, A are un p-minor egal cu 1 (pe cel având pivoţii pe diagonala principală), deci $rang(A) = p$. Pe de altă parte, $rang(A) = rang(^T A) = l(^T A) = c(A)$. □

Corolarul 5. rang(A) este egal cu numărul de pivoţi ai formei eşalon a lui A.

Corolarul 6. *Fie* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(k)$. *Presupunem că* A *are un* r*-minor nenul* M *astfel încât toţi* $(r+1)$*-minorii lui* A *obţinuţi din* M *prin bordare sunt nuli. Atunci* rang$(A) = r$.

Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că M constă în primele r linii şi r coloane ale lui A. Notăm liniile lui A cu A_1,...,A_m. Cum M este un r-minor nenul, rang$(A) \geq r$ şi liniile A_1,...,A_r sunt liniar independente.

Presupunem că rang$(A) \geq r+1$. Conform teoremei lui Kronecker, putem presupune că liniile A_1,...,A_{r+1} sunt liniar independente. Pentru $j \in \{1,...,n\}$, luăm $(r+1)$-minorul $M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{r+11} & \cdots & a_{r+1r} & a_{r+1j} \end{vmatrix}$.
M_j este nul, deoarece pentru $j \in \{1,...,r\}$ M_j are două coloane egale, iar pentru $j = r+1,...,n$ se aplică ipoteza. Complemenţii algebrici d_1,...,d_r,$d_{r+1} = M$ ai elementelor de pe coloana $r+1$ nu depind de j. Dezvoltând M_j după coloana $r+1$, obţinem $0 = d_1 a_{1j} + \cdots + d_r a_{rj} + M a_{r+1j}$ pentru $j = 1,...,n$. Deci $d_1 A_1 + \cdots + d_r A_r + M A_{r+1} = 0$, iar $M \neq 0$. Rezultă că liniile A_1,...,A_{r+1} sunt liniar dependente, contradicţie. □

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse a acestuia.

Demonstraţia I: Fie A matricea sistemului şi B matricea extinsă. Conform teoremei 3 şi corolarului 3, putem presupune că B (deci şi A) este matrice eşalon. Condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul B nu are pivoţi pe ultima coloană. Se aplică teorema 4. □

Demonstraţia II: Fie c_1,...,c_n coloanele lui A, b vectorul termenilor liberi şi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sistemul $Ax = b$ se scrie sub forma $x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = b$. Deci, sistemul $Ax = b$ este compatibil dacă şi numai dacă b este combinaţie liniară de c_1,...,c_n, ceea ce este echivalent cu ${}_k < c_1, ..., c_n >=_k < c_1, ..., c_n, b >$. Mulţumită incluziunii evidente, această ultimă relaţie este echivalentă cu $\dim_k < c_1, ..., c_n >= \dim_k < c_1, ..., c_n, b >$, adică cu $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$. $\square$

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.