Curs 9

Cuprins

Bibliografie:

- Logic Programming, The University of Edinburgh
  https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/
- J.W.Lloyd, Foundations of Logic Programming, 1987

Logica Horn

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

- clauză:

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\} \quad \text{sau} \quad Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

  unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- clauză program definită: $k = 1$
  - cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P$
  - cazul $n = 0$: $\top \rightarrow P$ (clauză unitate, fapt)

  Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

- scop definit (țintă, întrebare): k=0
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow \bot$

- clauza vidă $\square$: $n = k = 0$

Clauza Horn = clauză program definită sau clauză scop ($k \leq 1$)

Programare logica

- Logica clauzelor definite/Logica Horn: un fragment al logicii de ordinul I în care singurele formule admise sunt clauze Horn
  - formule atomice: $P(t_1, \ldots, t_n)$
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P$
    unde toate Q_i, P sunt formule atomice, $\top$ sau $\bot$

- Problema programării logice: reprezentăm cunoștințele ca o mulțime de clauze definite KB și suntem interesați să aflăm răspunsul la o întrebare de forma $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$, unde toate Q_i sunt formule atomice

$$KB \models Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

  - Variabilele din KB sunt cuantificate universal.
  - Variabilele din $Q_1, \ldots, Q_n$ sunt cuantificate existențial.

Limbajul PROLOG are la bază logica clauzelor Horn.

Modele Herbrand

Definim o ordine între modelele Herbrand:

$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ este definită astfel:

pentru orice $R \in \mathbf{R}$ *cu* $ari(R) = n$ *și pentru orice termeni* $t_1, \ldots, t_n$
dacă $\mathcal{H}_1 \models R(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $\mathcal{H}_2 \models R(t_1, \ldots, t_n)$

Semantica unui program logic definit KB este dată de
cel mai mic model Herbrand al lui KB!

- Definim $\mathcal{LH}_{KB} := \bigcap\{\mathcal{H} \mid \mathcal{H}$ model Herbrand pentru $KB\}$
- $\mathcal{LH}_{KB} \models KB$.
- Vom caracteriza cel mai mic model Herbrand $\mathcal{LH}_{KB}$ printr-o construcție de punct fix.

Cel mai mic model Herbrand

- O instanță de bază a unei clauze $Q_1(x_1) \wedge \ldots \wedge Q_n(x_n) \rightarrow P(y)$ este rezultatul obținut prin înlocuirea variabilelor cu termeni fără variabile.

- Pentru o mulțime de clauze definite KB, o formulă atomică P și o mulțime de formule atomice X,

  $$oneStep_{KB}(P, X) \text{ este adevărat}$$

  dacă există o instanță de bază a unei clauze $Q_1(x_1) \wedge \ldots \wedge Q_n(x_n) \rightarrow P(y)$ din KB astfel încât P este instanța lui $P(y)$ și instanța lui $Q_i(x_i)$ este în X, pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

- Baza Herbrand $B_{\mathcal{L}}$ este mulțimea formulelor atomice fără variabile.

- Pentru o mulțime de clauze definite KB, definim

  $$f_{KB} : \mathcal{P}(B_{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathcal{P}(B_{\mathcal{L}})$$

  $$f_{KB}(X) = \{P \in B_{\mathcal{L}} \mid oneStep_{KB}(P, X)\}$$

Cel mai mic model Herbrand

Fie KB un program logic definit.

- f_{KB} este continuă
- Din teorema Knaster-Tarski, f_{KB} are un cel mai mic punct fix FP_{KB}.
- FP_{KB} este reuniunea tuturor mulțimilor

$$f_{KB}(\{\}),\ f_{KB}(f_{KB}(\{\})),\ f_{KB}(f_{KB}(f_{KB}(\{\}))), \ldots$$

Propoziție (caracterizarea $\mathcal{LH}_{KB}$)

Pentru orice $R \in \mathbf{R}$ cu $ari(R) = n$ și pentru orice $t_1, \ldots, t_n$ termeni, avem

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathcal{LH}_T} \text{ ddacă } R(t_1, \ldots, t_n) \in FP_{KB}$$

Sistem de deducție pentru logica Horn

Sistem de deducție *backchain*

Sistem de deducție pentru clauze Horn

Pentru un program logic definit KB avem

- Axiome: orice clauză din KB
- Regula de deducție: regula *backchain*

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \ldots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \land Q_2 \land \ldots \land Q_n \to P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \land Q_2 \land \ldots \land Q_n \to P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P.

Sistem de deducție

Exemplu

KB conține următoarele clauze definite:

$$\begin{array}{l} father(jon, ken). \\ father(ken, liz). \\ father(X, Y) \rightarrow ancestor(X, Y) \\ daugther(X, Y) \rightarrow ancestor(Y, X) \\ ancestor(X, Y) \wedge ancestor(Y, Z) \rightarrow ancestor(X, Z) \end{array}$$

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \ldots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P

Sistem de deducție

Pentru o țintă Q, trebuie să găsim o clauză din KB

$$Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P,$$

și un unificator θ pentru Q și P. În continuare vom verifica $\theta(Q_1), \ldots, \theta(Q_n)$.

Exemplu

Pentru ținta

$$ancestor(ken, Z),$$

putem folosi o clauză

$$father(Y, X) \rightarrow ancestor(Y, X)$$

cu unificatorul

$$\{Y/ken, X/Z\}$$

pentru a obține o nouă țintă

$$father(ken, Z).$$

Sistem de deducție

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \ldots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \land Q_2 \land \ldots \land Q_n \to P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \land Q_2 \land \ldots \land Q_n \to P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P.

Exemplu

$$\frac{\dfrac{father(ken, liz)}{father(ken, Z)} \quad (father(Y, X) \to ancestor(Y, X))}{ancestor(ken, Z)}$$

Puncte de decizie în programarea logica

Având doar această regulă, care sunt punctele de decizie în căutare?

- Ce clauză să alegem.
  - Pot fi mai multe clauze a căror parte dreaptă se potrivește cu o țintă.
  - Aceasta este o alegere de tip **SAU**: este suficient ca oricare din variante să reușească.
- Ordinea în care rezolvăm noile ținte.
  - Aceasta este o alegere de tip **ȘI:** trebuie arătate toate țintele noi.
  - Ordinea în care le rezolvăm poate afecta găsirea unei derivări, depinzând de strategia de căutare folosită.

Strategia de căutare din Prolog

- Regula *backchain* conduce la un sistem de deducție complet:

  Pentru o mulțime de clauze KB și o țintă Q,
  dacă $KB \models Q$,
  atunci există o derivare a lui Q folosind regula *backchain*.

- Strategia de căutare din Prolog este de tip *depth-first*,
  - de sus în jos
    - pentru alegerile de tip **SAU**
    - alege clauzele în ordinea în care apar în program
  - de la stânga la dreapta
    - pentru alegerile de tip **ȘI**
    - alege noile ținte în ordinea în care apar în clauza aleasă

Sistemul de inferență backchain

Notăm cu $KB \vdash_b Q$ dacă există o derivare a lui Q din KB folosind sistemul de inferență *backchain*.

Teoremă

Sistemul de inferență backchain *este corect și complet pentru formule atomice fără variabile Q.*

$$KB \models Q \quad \text{dacă și numai dacă} \quad KB \vdash_b Q$$

Sistemul de inferență *backchain* este corect și complet și pentru formule atomice cu variabile Q:

$$KB \models \exists x Q(x) \text{ dacă și numai dacă } KB \vdash_b \theta(Q)$$

pentru o substituție θ.

Corectitudine

Propoziție (Corectitudine)

Dacă $KB \vdash_b Q$, atunci $KB \models Q$.

Demonstrație [schiță]

- Presupunem că toate clauzele din KB sunt adevărate.
- Ne uităm, inductiv, la cazurile care pot să apară în derivarea lui Q.

$\square$

Completitudine

Teoremă (Completitudine)

Dacă $KB \models Q$, atunci $KB \vdash_b Q$.

Trebuie să arătăm că

pentru orice structură și orice interpretare,
dacă orice clauză din KB este adevărată, atunci și Q este adevărată,

$$\Downarrow$$

există o derivare a lui Q din KB.

Demonstrația este mai simplă deoarece

este suficient să ne uităm la modelul Herbrand!

Cel mai mic model Herbrand

Teoremă

Pentru orice KB un program logic definit și Q o formulă atomică,

$$KB \vdash_B Q \quad \text{ddacă} \quad \mathcal{LH}_{KB} \models Q \quad \text{ddacă} \quad KB \models Q.$$

Demonstrație (schiță)

Demonstrăm numai prima echivalență.

- Implicația de la stânga la dreapta rezultă ușor din corectitudinea sistemului de inferență *backchain*.
- Implicația de la dreapta la stânga este mai complicată.
  - Q apare în interpretările simbolurilor de predicate din $\mathcal{LH}$
  - Deci Q este obținut după un număr finit n de aplicări ale lui f_{KB}
  - Se arată prin inducție după n că pentru fiecare formulă care apare prin aplicări ale lui f_{KB} există o derivare în sistemul de inferență *backchain*.

Rezoluție SLD

Regula *backchain* și rezoluția SLD

- Regula *backchain* este implementată în programarea logică prin rezoluția SLD (Selected, Linear, Definite).
- Prolog are la bază rezoluția SLD.

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$$

unde

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB (în care toate variabilele au fost redenumite) și
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q

Rezoluția SLD

Exemplu

```
father(eddard,sansa).
father(eddard,jonSnow).

stark(eddard).
stark(catelyn).

stark(X) :- father(Y,X),
stark(Y).
```

```
?- stark(jonSnow)
```

SLD $\boxed{\dfrac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q.

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$

$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$

$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

$$\theta(X) = jonSnow$$

SLD $\boxed{\dfrac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q.

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$
$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$
$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

$$\frac{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}{\neg stark(eddard)}$$

$$\frac{\neg stark(eddard)}{\square}$$

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite și $Q_1 \land \ldots \land Q_m$ o întrebare, unde Q_i sunt formule atomice.

- O derivare din KB prin rezoluție SLD este o secvență

$$G_0 := \neg Q_1 \lor \ldots \lor \neg Q_m, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_k, \ldots$$

  în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula SLD.
- Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește SLD-respingere.

Rezoluția SLD

Teoremă (Completitudinea SLD-rezoluției)

Sunt echivalente:

- *există o SLD-respingere a lui $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$ din KB,*
- $KB \vdash_b Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$,
- $KB \models Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_m$.

Demonstrație

Rezultă din completitudinea sistemului de deducție backchain și din faptul că:

există o SLD-respingere a lui $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$ din KB

ddacă

$$KB \vdash_b Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$$

$\square$

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Arbori SLD

- Presupunem că avem o mulțime de clauze definite KB și o țintă $G_0 = \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m$

- Construim un arbore de căutare (arbore SLD) astfel:
  - Fiecare nod al arborelui este o țintă (posibil vidă)
  - Rădăcina este G_0
  - Dacă arborele are un nod G_i, iar G_{i+1} se obține din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in KB$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1}. Muchia dintre G_i și G_{i+1} este etichetată cu C_i.

- Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\Box$ (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din KB.

Rezoluția SLD

Exemplu

- Fie KB următoarea mulțime de clauze definite:
  1. $grandfather(X, Z) :- father(X, Y), parent(Y, Z)$
  2. $parent(X, Y) :- father(X, Y)$
  3. $parent(X, Y) :- mother(X, Y)$
  4. $father(ken, diana)$
  5. $mother(diana, brian)$

- Găsiți o respingere din KB pentru

$$:- grandfather(ken, Y)$$

Rezoluția SLD

Exemplu

- Fie KB următoarea mulțime de clauze definite:
  1. $grandfather(X, Z) \vee \neg father(X, Y) \vee \neg parent(Y, Z)$
  2. $parent(X, Y) \vee \neg father(X, Y)$
  3. $parent(X, Y) \vee \neg mother(X, Y)$
  4. $father(ken, diana)$
  5. $mother(diana, brian)$

- Găsiți o respingere din KB pentru

$$\neg grandfather(ken, Y)$$

Rezoluția SLD

Exemplu

1. $grandfather(X, Z) \lor \neg father(X, Y) \lor \neg parent(Y, Z)$
2. $parent(X, Y) \lor \neg father(X, Y)$
3. $parent(X, Y) \lor \neg mother(X, Y)$
4. $father(ken, diana)$
5. $mother(diana, brian)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \neg grandfather(ken, Y) \arrow[d, "1"] & \\
 & \neg father(ken, V) \lor \neg parent(V, Y) \arrow[d, "4"] & \\
 & \neg parent(diana, Y) \arrow[dl, "2"] \arrow[dr, "3"] & \\
\neg father(diana, Y) & & \neg mother(diana, Y) \arrow[d, "5"] \\
 & & \square
\end{tikzcd}
$$

Rezoluția SLD

Exemplu

2. $parent(X, Y) \lor \neg father(X, Y)$

$$\neg parent(diana, Y) \xrightarrow{2} \neg father(diana, Y)$$

Aplicarea SLD:

- redenumesc variabilele: $parent(X, Y_2) \lor \neg father(X, Y_2)$
- determin unificatorul: $\theta = X/diana, Y_2/Y$
- aplic regula: $\dfrac{\neg parent(diana, Y)}{\neg father(diana, Y)}$

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Exercițiu

Desenați arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos și ținta
`?- p(X,X).`

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```

Rezoluția SLD - arbori de căutare

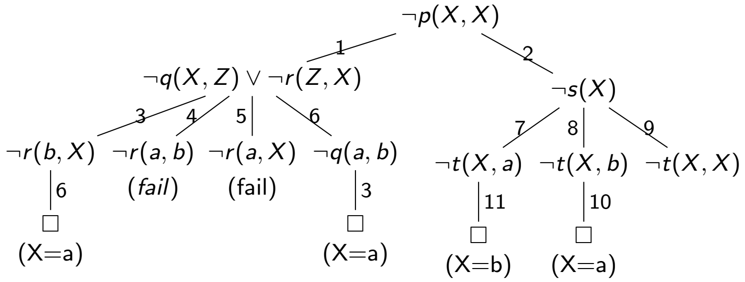
```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10. t(a,b).
11. t(b,a).
```

$p(X, Y) \vee \neg q(X, Z) \vee \neg r(Z, Y)$
$p(X, X) \vee \neg s(X)$
$q(X, b)$

$q(b, a)$
$q(X, a) \vee \neg r(a, X)$
$r(b, a)$

$s(X) \vee \neg t(X, a)$
$s(X) \vee \neg t(X, b)$
$s(X) \vee \neg t(X, X)$

$t(a, b)$
$t(b, a)$



Limbajul Prolog

- Am arătat că sistemul de inferență din spatele Prolog-ului este complet.
  - Dacă o întrebare este consecință logică a unei mulțimi de clauze, atunci există o derivare a întrebării.
- Totuși, strategia de căutate din Prolog este incompletă!
  - Chiar dacă o întrebare este consecință logică a unei mulțimi de clauze, Prolog nu găsește mereu o derivare a întrebării.

Exemplu

```
warmerClimate :- albedoDecrease.
warmerClimate :- carbonIncrease.
iceMelts :- warmerClimate.
albedoDecrease :- iceMelts.
carbonIncrease.

?- iceMelts.
! Out of local stack
```

Exemplu

```
warmerClimate :- albedoDecrease.
warmerClimate :- carbonIncrease.
iceMelts :- warmerClimate.
albedoDecrease :- iceMelts.
carbonIncrease.

?- iceMelts.
! Out of local stack
```

Limbajul Prolog

Exemplu (cont.)

Există o derivare a lui *iceMelts* în sistemul de deducție din clauzele:

$$\begin{array}{rcl}
\mathit{albedoDecrease} & \rightarrow & \mathit{warmerClimate} \\
\mathit{carbonIncrease} & \rightarrow & \mathit{warmerClimate} \\
\mathit{warmerClimate} & \rightarrow & \mathit{iceMelts} \\
\mathit{iceMelts} & \rightarrow & \mathit{albedoDecrease} \\
\top & \rightarrow & \mathit{carbonIncrease}
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathit{carbonInc.} \qquad \mathit{carbonInc.} \rightarrow \mathit{warmerClim.}}{\mathit{warmerClim.}} \qquad \mathit{warmerClim.} \rightarrow \mathit{iceMelts}}{\mathit{iceMelts}}$$

Pe săptămâna viitoare!