Curs 7

Cuprins

1 Modele Herbrand

2 Decidabilitate și semi-decidabilitate

3 Clauze Horn

4 Cel mai mic model Herbrand

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, ari)$

Termenii lui $\mathcal{L}$, notați $Trm_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $ar(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $ar(R) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ sunt formule

Logica de ordinul I - semantică

O structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea n, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea n, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O interpretare a variabilelor lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-interpretare) este o funcție $I : V \to A$.

Inductiv, definim interpretarea termenului t în $\mathcal{A}$ sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o formulă este adevărată în $\mathcal{A}$ în interpretarea I notat $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $(\mathcal{A}, I)$ este model pentru φ.

O formulă φ este adevărată într-o structură $\mathcal{A}$, notat $\mathcal{A} \vDash \varphi$, dacă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub orice interpretare. Spunem că $\mathcal{A}$ este model al lui φ.

O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\vDash \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este validă dacă $\vDash \varphi$.

O formulă φ este satisfiabilă dacă există o structură $\mathcal{A}$ și o $\mathcal{A}$-interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Enunț. Formă prenex. Formă Skolem

- Un enunț este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice formulă φ există un enunț în formă prenex α astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \alpha$.
- Pentru orice enunț în formă prenex α există un enunț în formă Skolem α^{sk} astfel încât

$$\alpha \text{ este satisfiabilă dacă și numai dacă } \alpha^{sk} \text{ este satisfiabilă.}$$

Validitate și satisfiabilitate

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.

Modele Herbrand

Universul Herbrand

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tututor termenilor fără variabile.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 2 și două simboluri de constantă a și b.

Universul Herbrand pentru limbajul $\mathcal{L}$ este mulțimea:

$$a, b, f(a, b), f(f(a, b), b), f(f(a, a), f(b, b)), \ldots$$

Structură Herbrand

O structură Herbrand este o structură $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$, unde

- pentru orice simbol de constantă c, $c^{\mathcal{H}} = c$
- pentru orice simbol de funcție f de aritate n, $f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

Atenție! Într-o structură Herbrand nu fixăm o definiție pentru relații: pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) \subseteq (T_{\mathcal{L}})^n$

Structură Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \ldots\}$

Model Herbrand

- O interpretare Herbrand este o interpretare $H : V \to T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand $\mathcal{H}$ este model al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $\mathcal{H}$ este model Herbrand al lui φ.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \ldots\}$

$\mathcal{H} \vDash \forall x\, R(x, x)$.

Model Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, f(a)), (f(a), f(f(a))), (f(f(a)), f(f(f(a)))), \ldots\}$

$\mathcal{H} \not\models \forall x\, R(x, x)$.

Model Herbrand

Exemplu

- Considerăm structura Herbrand în care toate simbolurile de relație sunt adevărate peste tot, adică
- pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}} = (T_{\mathcal{L}})^n$.
- Această structură este model pentru orice mulțime de formule atomice.
- Exercițiu: De ce?

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t, i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Propoziția 1

Fie $\mathcal{A}$ o structură, $I : V \to A$ o interpretare și $a = t_I^{\mathcal{A}}$. Atunci

1. pentru orice termen u avem $u[x/t]_I^{\mathcal{A}} = u_{I_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}$
2. pentru orice formulă φ avem

$$\mathcal{A}, I \vDash \varphi[x/t] \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \vDash \varphi$$

Intuitiv, a schimba evaluarea I atribuind variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui variabila x cu un termen t a cărui interpretare prin I este a.

Interpretări Herbrand

Propoziția 2

Fie $\mathcal{H}$ o structură Herbrand, $H : V \to T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

1. $t_H^{\mathcal{H}} = t$
2. $\mathcal{H}, H \vDash \varphi[x/t]$ dacă și numai dacă $\mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \vDash \varphi$

Demonstrație

1. prin inducție structurală pe termeni.
2. Următoarele echivalențe sunt adevărate

$$\mathcal{H}, H \vDash \varphi[x/t] \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t_H^{\mathcal{H}}} \vDash \varphi \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \vDash \varphi$$

Prima echivalență rezultă din Propoziția 1, iar a doua rezultă din punctul 1.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1 \, \psi$ un enunț în forma Skolem.
Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Demonstrație

Dacă φ are un model Herbrand atunci este, evident, satisfiabilă. Vom demonstra afirmația inversă.

Fie $\mathcal{A}$ un model pentru φ, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Vrem să construim un model Herbrand $\mathcal{H}$ pentru φ, ceea ce revine la a da o interpretare pentru simbolurile de relații.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

Dacă $R \in \mathbf{R}$ și $ari(R) = n$ definim

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathcal{H}} \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \vDash R(t_1, \ldots, t_n) \qquad (*)$$

Demonstrăm prin inducție după $k \geq 0$ că

oricare ar fi $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1\, \psi$ un enunț în forma Skolem,
$\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică $\mathcal{H} \vDash \varphi$

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând $(*)$ rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică $\mathcal{H} \vDash \varphi$.

- Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1$ și o demonstrăm pentru k. Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \ldots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$.

  Observăm că α nu satisface ipoteza de inducție deoarece poate conține x_k ca variabilă liberă.

  Fie $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Observăm că $\alpha[x_k/t]$ este enunț în formă Skolem, deci $\mathcal{A} \vDash \alpha[x_k/t]$ implică $\mathcal{H} \vDash \alpha[x_k/t]$ din ipoteza de inducție.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$ pentru orice interpretare I, ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \vDash \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H.
- Folosind Propoziția 2 obținem
- $\mathcal{H}, H_{x_k \leftarrow t} \vDash \alpha$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretare H, deci
- $\mathcal{H}, H \vDash \forall x_k\, \alpha$ pentru orice interpretare H, adică $\mathcal{H} \vDash \varphi$ $\square$

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1 \, \psi$ un enunț în forma Skolem.
Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand reduce problema satisfiabilității la găsirea unui model Herbrand.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $ari(P) = ari(R) = 1$.
Cercetați satisfiabilitatea formulelor:

- $\varphi = \forall x \forall y \, (P(x) \land R(y) \to P(y))$

  Știm că este suficient să găsim un model Herbrand.

  Considerăm structura Herbrand $\mathcal{H}$ cu

  - $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - $P^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$

  Se observă că $\mathcal{H} \vDash \varphi$, deci φ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

- $\psi = (P(c_1) \to R(c_3)) \land (\neg P(c_1) \to P(c_2))$.
  Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...	...	...	...

  Observăm că formula este adevărată într-o interpretare în care $P(c_2)$ este adevărată, iar $P(c_1)$ și $R(c_3)$ sunt false.

  Considerăm structura Herbrand $\mathcal{H}$ cu

  - $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - $P^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$

  Se observă că $\mathcal{H} \vDash \psi$, deci ψ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $ari(P) = ari(R) = 1$. Cercetați validitatea formulei

$$\chi = \forall x \, \forall y \, \forall z \, (\neg(P(x) \to R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \to P(y)))$$

- A cerceta validitatea lui χ este echivalent cu a cerceta satisfiabilitatea lui $\neg\chi$

$$\neg\chi = \exists x \, \exists y \, \exists z \, ((P(x) \to R(z)) \wedge (\neg P(x) \to P(y)))$$

- Determinăm forma Skolem: $\mathcal{L}^{sk} = \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\neg\chi)^{sk} = (P(c_1) \to R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \to P(c_2))$$

- Din exercițiul anterior știm că $(\neg\chi)^{sk}$ este satisfiabilă, deci $\neg\chi$ este satisfiabilă. În concluzie, χ nu este adevărată în logica de ordinul I, i.e $\not\models \chi$.

Universul Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \psi$.

- Definim $T(\varphi)$, universul Herbrand al formulei φ, astfel:
  - dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
  - dacă φ nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c și considerăm că $c \in T(\varphi)$,
  - dacă f este un simbol de funcție care apare în φ cu $ari(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\varphi)$.

Exemplu

- pt. $\varphi_1 = \forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$ avem $T(\varphi_1) = \{c\}$
- pt. $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \wedge P(f(c)))$ avem $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$

Intuitiv, $T(\varphi)$ este mulțimea termenilor care se pot construi folosind simbolurile de funcții care apar în φ.

Expansiunea Herbrand a unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$.

- Definim expansiunea Herbrand a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)\}$$

Exemplu

- $\varphi_1 = \forall x \, \forall y \, (P(x) \land R(y) \to P(y))$
  $T(\varphi_1) = \{c\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \land R(c) \to P(c)\}$

- $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \land P(f(c)))$
  $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_2) = \{\neg P(c) \land P(f(c)), \neg P(f(c)) \land P(f(c)),$
  $\neg P(f(f(c))) \land P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \land P(f(c)), \ldots\}$

Expansiunea Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$.

Teoremă

Sunt echivalente:

- φ este satisfiabilă,
- φ are un model Herbrand $\mathcal{H}$ cu proprietatea că $\mathbf{R}^{\mathcal{H}} \subseteq T(\varphi)^n$ pentru orice relație $R \in \mathbf{R}$ cu $ari(R) = n$ care apare în φ,
- mulțimea de formule $\mathcal{H}(\varphi)$ este satisfiabilă.

Expansiunea Herbrand al unei formule

Exemplu

- $\varphi_1 = \forall x \forall y\, (P(x) \land R(y) \to P(y))$
  $T(\varphi_1) = \{c\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \land R(c) \to P(c)\}$

  $\mathcal{H}(\varphi_1)$ este satisfiabilă: $P^{\mathcal{H}} = R^{\mathcal{H}} = \{c\}$

- $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \land P(f(c)))$
  $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_2) = \{\neg P(c) \land P(f(c)), \neg P(f(c)) \land P(f(c)),$
  $\neg P(f(f(c))) \land P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \land P(f(c)), \ldots\}$

  $\mathcal{H}(\varphi_2)$ nu este satisfiabilă: conține formula $\neg P(f(c)) \land P(f(c))$.

Logica de ordinul I

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.
- Teorema lui Herbrand reduce verificarea satisfiabilitătii unui enunț în forma Skolem la verificarea satisfiabilității în universul Herbrand.
- În situații particulare Teorema lui Herbrand ne dă o procedură de decizie a satisfiabilității, dar acest fapt nu este adevărat în general:

  dacă limbajul $\mathcal{L}$ conține cel putin o constantă și cel puțin un simbol de funcție f cu $ari(f) \geq 1$ atunci universul Herbrand $T_{\mathcal{L}}$ este infinit.

Decidabilitate și semi-decidabilitate

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O problemă de decizie este o problemă cu răspuns binar T/F.

Este n număr prim?

- O problemă de decizie $\mathfrak{D}(x)$ este decidabilă dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x, întoarce T când $\mathfrak{D}(x)$ este adevărată și F când $\mathfrak{D}(x)$ este falsă.

- O problemă de decizie $\mathfrak{D}(x)$ este semi-decidabilă (recursiv enumerabilă) dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x, întoarce T când $\mathfrak{D}(x)$ este adevărată, dar este posibil să nu se termine când $\mathfrak{D}(x)$ este falsă.

$\mathfrak{D}(n) =$ "n este număr prim" este decidabilă.

Problema validității [1]

Vom analiza problema validității în logica de ordinul I, adică:

$$\mathfrak{D}(\varphi) = \text{"}\varphi \text{ este validă"}$$

- În logica de ordinul I, problema validității $\mathfrak{D}(\varphi)$ este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității $\mathfrak{D}(\varphi)$ nu este decidabilă.

[1] Referințe
M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2009
`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathfrak{D}(\varphi)$?

Teorema de compactitate - cazul propozițional

În calculul propozițional o mulțime de formule Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Corolar

Fie φ un enunț în forma Skolem (în logica de ordinul I) și $\mathcal{H}(\varphi)$ expansiunea Herbrand. Sunt echivalente:

- φ nu este satisfiabilă,
- există o submulțime finită a lui $\mathcal{H}(\varphi)$ care nu este satisfiabilă.

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathfrak{D}(\varphi)$?

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

1. se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\phi)^{sk}$)
2. fie $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\}$ o enumerare pentru $\mathcal{H}(\psi)$
3. pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ execută
   dacă $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ nu este satisfiabilă atunci
   { **Ieșire:** φ este valid;
   stop }

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

- Problema corespondenței lui Post (PCP)

  Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w_1'), \ldots, (w_k, w_k')\}$ cu $w_i, w_i' \in \{0,1\}^+$. O soluție pentru $\mathbf{P}$ este o secvență de indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ cu $n \geq 1$ astfel încât

$$w_{i_1} \cdots w_{i_n} = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}.$$

Exemplu

$$\mathbf{P}: \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 101 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline 00 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array}$$

Secvența (1,3,2,3) este soluție:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 101 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline 00 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{c} 101110011 \\ 101110011 \end{array}$$

- PCP este nedecidabiă (E.Post, 1946)

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Demonstrație (schiță)

Vom arăta că problema validității poate fi redusă la PCP:

fiind dată o problemă de corespondență $\mathbf{P} = \{(w_1, w_1'), \ldots, (w_k, w_k')\}$ *există o formulă* $\varphi_{\mathbf{P}}$ *astfel încât*

$$\mathbf{P} \textit{ are o soluție dacă și numai dacă } \models \varphi_{\mathbf{P}}.$$

Definim $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f_0, f_1\}$, $\mathbf{R} = \{P\}$, $\mathbf{C} = \{e\}$, $ari(f_0) = ari(f_1) = 1$ și $ari(P) = 2$

Pentru $b_1 \ldots b_n \in \{0,1\}^+$ definim $f_{b_1 \ldots b_n} := f_{b_n}(f_{b_{n-1}}(\cdots(f_{b_1}(e))\cdots))$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schiță)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w_1'), \ldots, (w_k, w_k')\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model $\mathcal{A}$:
$A = \{0,1\}^*$, $e^{\mathcal{A}} := \lambda$, $f_0^{\mathcal{A}}(w) := w0$, $f_1^{\mathcal{A}}(w) := w1$

$$P^{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \text{există } n \geq 1 \text{ și } i_1, \ldots, i_n \text{ astfel încât } \mathbf{w} = w_{i_1} \cdots w_{i_n} \text{ și } \mathbf{w}' = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}\}$$

Considerăm următoarele formule:
$\varphi_1 := \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{w_i}(e), f_{w_i'}(e))$
$\varphi_2 := \forall x \forall y \left(P(x,y) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{w_i}(x), f_{w_i'}(y))\right)$
$\psi := \exists z P(z,z)$ și $\varphi_{\mathbf{P}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi$

Observăm că $\mathcal{A} \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. În consecință, dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi_{\mathbf{P}}$ atunci $\mathcal{A} \vDash \psi$, deci $\mathbf{P}$ are o soluție. *Cealaltă implicație este tehnică.*

În consecință, $\vDash \varphi_{\mathbf{P}}$ implică existența unei soluții pentru $\mathbf{P}$.

$\square$

Logica de ordinul I

- În logica de ordinul I, problema validității este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității nu este decidabilă.

Clauze Horn

Clauze în logica de ordinul I

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\}$$

unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- formula corespunzătoare este

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n \vee P_1 \vee \ldots \vee P_k)$$

  unde $x_1, \ldots, x_m$ sunt toate variabilele care apar în clauză

- echivalent, putem scrie

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k)$$

- cuantificarea universală a clauzelor este implicită

$$Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

- clauză:

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\} \quad \text{sau} \quad Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

  unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- clauză program definită: $k = 1$
  - cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P$
  - cazul $n = 0$: $\top \rightarrow P$ (clauză unitate, fapt)

  Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

- scop definit (țintă, întrebare): k=0
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow \bot$

- clauza vidă $\square$: $n = k = 0$

Clauza Horn = clauză program definită sau clauză scop ($k \leq 1$)

Clauze Horn țintă

- scop definit (țintă, întrebare): $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow \perp$
  - fie $x_1, \ldots, x_m$ toate variabilele care apar în $Q_1, \ldots, Q_n$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n) \; \text{⫤⊨} \; \neg \exists x_1 \ldots \exists x_m (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n)$$

  - clauza țintă o vom scrie $Q_1, \ldots, Q_n$

Negația unei "întrebări" în PROLOG este clauză Horn țintă.

Programare logica

- Logica clauzelor definite/Logica Horn: un fragment al logicii de ordinul I în care singurele formule admise sunt clauze Horn
  - formule atomice: $P(t_1, \ldots, t_n)$
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$
    unde toate Q_i, P sunt formule atomice, $\top$ sau $\bot$

- Problema programării logice: reprezentăm cunoștințele ca o mulțime de clauze definite KB și suntem interesați să aflăm răspunsul la o întrebare de forma $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$, unde toate Q_i sunt formule atomice

$$KB \models Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

  - Variabilele din KB sunt cuantificate universal.
  - Variabilele din $Q_1, \ldots, Q_n$ sunt cuantificate existențial.

Limbajul PROLOG are la bază logica clauzelor Horn.

Logica clauzelor definite

Exemplu

Fie următoarele clauze definite:

$$\begin{aligned}
&father(jon, ken).\\
&father(ken, liz).\\
&father(X, Y) \rightarrow ancestor(X, Y)\\
&daugther(X, Y) \rightarrow ancestor(Y, X)\\
&ancestor(X, Y) \land ancestor(Y, Z) \rightarrow ancestor(X, Z)
\end{aligned}$$

Putem întreba:

- $ancestor(jon, liz)$
- dacă există Q astfel încât $ancestor(Q, ken)$ (adică $\exists Q\, ancestor(Q, ken)$)

Cel mai mic model Herbrand

Modele Herbrand

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tututor termenilor lui $\mathcal{L}$ fără variabile.

Un model Herbrand este o structură $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{P}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$, unde

- pentru orice simbol de constantă c, $c^{\mathcal{H}} = c$
- pentru orice simbol de funcție f de aritate n, $f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
- pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) \subseteq (T_{\mathcal{L}})^n$

Pentru a defini un model Herbrand concret trebuie sa definim interpretarea relațiilor.

Cel mai mic model Herbrand

Definim o ordine între modelele Herbrand:

$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ este definită astfel:

pentru orice $R \in \mathbf{R}$ *cu* $ari(R) = n$ *și pentru orice termeni* $t_1, \ldots, t_n$
dacă $\mathcal{H}_1 \models R(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $\mathcal{H}_2 \models R(t_1, \ldots, t_n)$

Semantica unui program logic definit KB este dată de
cel mai mic model Herbrand al lui KB!

- De ce există? Este unic?
- Definim $\mathcal{LH}_{KB} := \bigcap\{\mathcal{H} \mid \mathcal{H}$ model Herbrand pentru $KB\}$
- $\mathcal{LH}_{KB} \models KB$.
  Exercițiu: De ce?

Cel mai mic model Herbrand

Fie KB un program logic definit.

Propoziție

Pentru orice formulă atomică Q,

$$KB \vDash Q \quad \text{ddacă} \quad \mathcal{LH}_{KB} \vDash Q.$$

Demonstrație

$KB \vDash Q$
ddacă $KB \cup \{\neg Q\}$ nesatisfiabilă
ddacă $KB \cup \{\neg Q\}$ nu are niciun model Herbrand
ddacă $\neg Q$ este falsă în toate modelele Herbrand ale lui KB
ddacă Q este adevărată în toate modelele Herbrand ale lui KB
ddacă Q este adevărată în $\mathcal{LH}_{KB}$

Vom caracteriza cel mai mic model Herbrand $\mathcal{LH}_{KB}$ printr-o construcție de punct fix.

Cel mai mic model Herbrand

- O formulă fără variabile se numește închisă.
- Baza Herbrand $B_{\mathcal{L}}$ este mulțimea formulelor atomice închise.
- O instanță închisă a unei clauze $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$ este rezultatul obținut prin înlocuirea variabilelor cu termeni fără variabile.
- Pentru o mulțime de clauze definite KB, dacă $P \in B_{\mathcal{L}}$ și $X \subseteq B_{\mathcal{L}}$ spunem că

  $$oneStep_{KB}(P, X) \text{ este adevărat}$$

  dacă există $Q_1, \ldots, Q_n \in X$ astfel încât $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$ este o instanță de închisă a unei clauze din KB.
- Pentru o mulțime de clauze definite KB, definim

  $$f_{KB} : \mathcal{P}(B_{\mathcal{L}}) \to \mathcal{P}(B_{\mathcal{L}})$$

  $$f_{KB}(X) = \{P \in B_{\mathcal{L}} \mid oneStep_{KB}(P, X)\}$$
- f_{KB} este continuă (exercițiu).

Cel mai mic model Herbrand

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cu un simbol de constantă 0, un simbol de funcție unară s și un simbol de relație unară par.
- $T_{\mathcal{L}} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\}$
- Fie KB mulțimea clauzelor:

$$par(0) \qquad\qquad par(x) \rightarrow par(s(s(x)))$$

- Instanțe de bază:
  - $par(0) \rightarrow par(s(s(0)))$
  - $par(s(0)) \rightarrow par(s(s(s(0))))$

- $f_{KB}(\{\}) = \{par(0)\}$
- $f_{KB}(\{par(0)\}) = \{par(0), par(s(s(0)))\}$
- $f_{KB}(\{par(s(0))\}) = \{par(0), par(s(s(s(0))))\}$
- $f_{KB}(\{par(s(s(0)))\}) = \{par(0), par(s(s(s(s(0)))))\}$

Cel mai mic model Herbrand

Fie KB un program logic definit.

- Din teorema Knaster-Tarski, f_{KB} are un cel mai mic punct fix FP_{KB}.
- FP_{KB} este reuniunea tuturor mulțimilor

$$f_{KB}(\{\}),\ f_{KB}(f_{KB}(\{\})),\ f_{KB}(f_{KB}(f_{KB}(\{\}))),\ldots$$

Teoremă. Caracterizarea $\mathcal{LH}_{KB}$ ca punct fix.

Pentru orice $R \in \mathbf{R}$ cu $ari(R) = n$ și pentru orice $t_1, \ldots, t_n$ termeni, avem

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathcal{LH}_{KB}} \text{ ddacă } R(t_1, \ldots, t_n) \in FP_{KB}$$

Relațiile care definesc cel mai mic model Herbrand al unui program Prolog sunt caracterizate folosind teorema de punct fix Knaster-Tarski.

Sărbători fericite!