CURSUL 6: SPAŢII VECTORIALE

G. MINCU

1. Spaţii vectoriale

Fie k un corp.

Definiţia 1. Numim **spaţiu vectorial la stânga peste corpul** k (sau k**-spaţiu vectorial la stânga**) orice grup abelian $(V, +)$ înzestrat cu o ,,lege de compoziţie externă" $k \times V \to V$, $(a, x) \mapsto ax$ cu următoarele proprietăţi:
(1) $\forall a \in k \quad \forall x, y \in V \quad a(x + y) = ax + ay$,
(2) $\forall a, b \in k \quad \forall x \in V \quad (a + b)x = ax + bx$,
(3) $\forall a, b \in k \quad \forall x \in V \quad (ab)x = a(bx)$,
(4) $\forall x \in V \quad 1x = x$.

Definiţia 2. Numim **spaţiu vectorial la dreapta peste corpul** k (sau k**-spaţiu vectorial la dreapta**) orice grup abelian $(V, +)$ înzestrat cu o ,,lege de compoziţie externă" $V \times k \to V$, $(x, a) \mapsto xa$ cu următoarele proprietăţi:
(1′) $\forall a \in k \quad \forall x, y \in V \quad (x + y)a = xa + ya$,
(2′) $\forall a, b \in k \quad \forall x \in V \quad x(a + b) = xa + xb$,
(3′) $\forall a, b \in k \quad \forall x \in V \quad x(ab) = (xa)b$,
(4′) $\forall x \in V \quad x1 = x$.

Definiţia 3. Elementele lui V se numesc **vectori**, iar cele ale lui k se numesc **scalari**.

Notaţii.
Vom desemna faptul că V este un k-spaţiu vectorial la stânga prin notaţia ${}_kV$, iar faptul că V este un k-spaţiu vectorial la dreapta prin notaţia V_k.
Vom nota cu 0_k scalarul nul şi cu 0_V vectorul nul (iar când nu este pericol de confuzie vom renunţa la indicii k şi V).

Observaţia 1. Singura diferenţă semnificativă între cele două definiţii de mai sus apare la nivelul relaţiilor (3) şi (3′). Într-adevăr, scrise cu scalarii în stânga, relaţiile (1′), (2′) şi (4′) ar coincide cu (1), (2), respectiv (4), în timp ce relaţia (3′) ar deveni $\forall a, b \in k \ \forall x \in V \ (ab)x = b(ax)$.

Observaţia 2. În lumina observaţiei anterioare, în situaţia în care corpul k este comutativ, noţiunile de spaţiu vectorial la stânga şi la dreapta coincid.

Observaţia 3. Vom formula consideraţiile ulterioare pentru spaţii vectoriale la stânga, cititorul interesat urmând să le adapteze singur la situaţia spaţiilor vectoriale la dreapta. Prin urmare, din acest moment, în lipsa menţiunii exprese contrare, prin spaţiu vectorial vom înţelege spaţiu vectorial la stânga.

Propoziţia 1. Fie ${}_kV$ un spaţiu vectorial, $a \in k$ şi $x \in V$. Atunci
(i) $ax = 0_V$ dacă şi numai dacă $a = 0_K$ sau $x = 0_V$.
(ii) $(-a)x = a(-x) = -ax$.

Demonstraţie: (i) Avem $0_kx = (0_k + 0_k)x = 0_kx + 0_kx$, deci, scăzând din ambii membri 0_kx, rezultă $0_kx = 0_V$. La fel se arată că $a0_V = 0_V$. Reciproc, dacă $ax = 0_V$ şi $a \neq 0_k$, atunci a este inversabil în k şi rezultă $x = 1x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}0_V = 0_V$.
(ii) rezultă din egalităţile $0_V = (a-a)x = ax+(-a)x$ şi $0_V = a(x-x) = ax + a(-x)$. $\square$

Exemplul 1. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci k^n are o structură de k-spaţiu vectorial obţinută definind adunarea vectorilor prin $(x_1, ..., x_n)+(y_1, ..., y_n) = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$ şi înmulţirea cu scalari prin $a(x_1, ..., x_n) = (ax_1, ..., ax_n)$, pentru $a, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in k$. k^n se numeşte **spaţiul vectorial standard de dimensiune n.**

Observaţia 4. k^n are şi o structură de k-spaţiu vectorial la dreapta obţinută definind adunarea vectorilor prin $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$ şi înmulţirea cu scalari prin $(x_1, ..., x_n)a = (x_1a, ..., x_na)$, pentru $a, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in k$.

Exemplul 2. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\mathcal{M}_{m,n(}k)$ are o structură de k-spaţiu vectorial în raport cu adunarea uzuală a matricilor şi cu înmulţirea cu scalari dată prin

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3. Dacă X este o mulţime nevidă arbitrară, atunci mulţimea $\mathcal{F}$ a funcţiilor definite pe X cu valori în k are o structură de k-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite astfel:
adunarea: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pentru orice $x \in X$
înmulţirea cu scalari: $(af)(x) = af(x)$ pentru orice $a \in k$ şi $x \in X$.

Exemplul 4. Dacă k este subcorp al inelului R, atunci R se organizează ca un k-spaţiu vectorial în care grupul subiacent este $(R, +)$, iar înmulţirea cu scalari este dată de restricţia la $k \times R$ a înmulţirii din R. Această situaţie are foarte multe cazuri particulare relevante. De exemplu, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sunt $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale. De asemenea, $M_n(k)$, $k[X]$, $k(X)$ şi $k[[X]]$ sunt k-spaţii vectoriale.

Exemplul 5. Fie p un număr prim şi $(G, +)$ un grup abelian. Dacă $px = 0$ pentru orice $x \in G$, atunci G are o structură de $\mathbb{Z}_p$- spaţiu vectorial, înmulţirea cu scalari fiind (corect!) definită prin $\hat{a}x = ax$ ($a \in \mathbb{Z}$, $x \in G$).

Exemplul 6. Dacă ${}_kV_1$,...,${}_kV_n$ sunt spaţii vectoriale, atunci produsul cartezian $V_1 \times \cdots \times V_n$ are o structură de k- spaţiu vectorial cu adunarea $(v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n) = (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$ şi înmulţirea cu scalari $a(v_1, ..., v_n) = (av_1, ..., av_n)$ ($a \in k$, $v_i, w_i \in V_i$, $i \in \{1, ..., n\}$).

Definiţia 4. k- spaţiul vectorial $V_1 \times \cdots \times V_n$ se numeşte **produsul direct al spaţiilor vectoriale V_1,...,V_n.**

2. Morfisme de spaţii vectoriale

Definiţia 5. Fie V, W două k-spaţii vectoriale. O funcţie $f : V \to W$ se numeşte **morfism de spaţii vectoriale** sau **aplicaţie liniară** dacă:
(i) $\forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
(ii) $\forall a \in k\ \forall x \in V \quad f(ax) = af(x)$.

Propoziţia 2. Fie V, W două k-spaţii vectoriale. Funcţia $f : V \to W$ este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă

$$\forall a, b \in k \ \ \forall x, y \in V \quad f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

Observaţia 5. Dacă f este un morfism de spaţii vectoriale, atunci f este în particular morfism de grupuri abeliene, deci $f(0) = 0$, iar $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in V$.

Propoziţia 3. Dacă $f : U \to V$ şi $g : V \to W$ sunt morfisme de k-spaţii vectoriale, atunci $g \circ f$ este morfism de k-spaţii vectoriale.

Definiţia 6. Numim **endomorfism de k-spaţii vectoriale** orice morfism de k-spaţii vectoriale $f : V \to V$.

Definiţia 7. Morfismul de k-spaţii vectoriale $f : V \to W$ se numeşte **izomorfism** dacă:
i) f este funcţie inversabilă şi
ii) f^{-1} este morfism de k-spaţii vectoriale.

Propoziţia 4. Fie V şi W două k-spaţii vectoriale şi o funcţie $f : V \to W$. Atunci, f este izomorfism de k-spaţii vectoriale dacă şi numai dacă f este morfism bijectiv de k-spaţii vectoriale.

Definiţia 8. k-spaţiile vectoriale V şi W se numesc **izomorfe** dacă există un izomorfism de k-spaţii vectoriale între ele.

Definiţia 9. Numim **automorfism de k-spaţii vectoriale** orice izomorfism de k-spaţii vectoriale $f : V \to V$.

Exemplul 7. Dacă V este un k-spaţiu vectorial, atunci $\mathbf{1}_V$ este un automorfism de k-spaţii vectoriale.

Notaţii:
Vom nota cu $\mathbf{Hom_k(V, W)}$ mulţimea morfismelor de k-spaţii vectoriale de la V la W.
Vom nota cu $\mathbf{End_k(V)}$ mulţimea endomorfismelor de k-spaţiu vectorial ale lui V.
Vom nota cu $\mathbf{Aut_k(V)}$ mulţimea automorfismelor de k-spaţiu vectorial ale lui V.

Definiţia 10. Fie $f : V \to W$ un morfism de k-spaţii vectoriale. Numim **nucleul** lui f, şi notăm $\ker f$, mulţimea $\{a \in V : f(a) = 0\}$.

Propoziţia 5. Morfismul de k-spaţii vectoriale $f : V \to W$ este injectiv dacă şi numai dacă $\ker f = \{0\}$.

3. Subspaţii vectoriale

Definiţia 11. Fie V un k-spaţiu vectorial. Submulţimea nevidă W a lui V se numeşte k-subspaţiu vectorial al lui V dacă:
(i) $\forall x, y \in W \quad x + y \in W$
(ii) $\forall a \in k \; \forall x \in W \quad ax \in W$.

Propoziţia 6. Fie V un k-spaţiu vectorial şi W o submulţime nevidă a sa. W este k-subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă

$$\forall a, b \in k \;\; \forall x, y \in W \quad ax + by \in W.$$

Notaţie: Vom desemna prin notaţia $W \leq_k V$ situaţia în care W este k-subspaţiu vectorial al lui V.

Exemplul 8. $\{0\} \leq_k V$ şi $V \leq_k V$.

Exemplul 9. $\mathbb{Q} \leq_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \leq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Mai general, dacă k este subcorp al lui L, atunci $k \leq_k L$.

Exemplul 10. Dacă corpul k este comutativ, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n \in k$, atunci $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0\} \leq_k k^n$.

Exemplul 11. $\{A \in \mathcal{M}_n(k) : \ {}^tA = A\} \leq_k \mathcal{M}_n(k)$ şi
$\{A \in \mathcal{M}_n(k) : \ {}^tA = -A\} \leq_k \mathcal{M}_n(k)$.

Exemplul 12.

$\{f \in k[X_1, X_2, \ldots, X_n] : \mathrm{grad}\, f \leq d\} \leq_k k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ şi
$\{f \in k[X_1, X_2, \ldots, X_n] : f \text{este omogen de grad } d\} \leq_k k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

4. Operaţii cu subspaţii vectoriale

Propoziţia 7. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie de subspaţii vectoriale ale sale. Atunci, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$ este un k-subspaţiu vectorial al lui V.

Propoziţia 8. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $W_1, W_2, \ldots, W_n$ subspaţii vectoriale ale sale. Atunci, $\{w_1 + w_2 + \cdots + w_n : w_i \in W_i\}$ este un k-subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 12. Subspaţiul vectorial din propoziţia 13 se numeşte **suma** subspaţiilor vectoriale $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ale lui V şi se notează $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$.

Definiţia 13. Fie V un k-spaţiu vectorial şi $W_1, W_2, \ldots, W_n$ subspaţii vectoriale ale sale. Spunem că suma $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ este **directă** dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ avem $W_i \cap \sum\limits_{j \neq i} W_j = \{0\}$.

Notaţie: Dacă suma subspaţiilor vectoriale $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ale lui V este directă, atunci ea se notează $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

Exemplul 13. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \dot{+} (\{0\} \times \mathbb{R})$,
$\mathbb{R}^3 = \{(0, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} + \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, dar
$\mathbb{R}^3 \neq \{(0, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \dot{+} \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.