5) Fie $P=(2,2)$, $Q=(4,4)$. Stabiliți, folosind testul de orientare, poziția relativă a punctelor $R_1=(8,8)$, $R_2=(6,0)$, $R_3=(-2,-1)$ față de muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$. Care este poziția lor față de $\overrightarrow{QP}$?

$$D(P,Q,R)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}$$

- $D(P,Q,R)=0 \Rightarrow R$ este pe PQ
- $D(P,Q,R)<0 \Rightarrow R$ este în dreapta $\overrightarrow{PQ}$
- $D(P,Q,R)>0 \Rightarrow R$ este în stânga $\overrightarrow{PQ}$

$R_1=(8,8)$

$$D(P,Q,R_1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 8\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix}=32+8+16-8-32-16=0 \Rightarrow \text{pe segm.}$$

$$D(P,Q,R_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=2+12-8-24=-18 \Rightarrow \text{dreapta}$$

$$D(P,Q,R_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix}=\cancel{-4+8-8-8+8+2}$$

$$-\cancel{4}+\cancel{8}-\cancel{4}-\cancel{8}+\cancel{8}+2=2 \Rightarrow \text{stânga}$$

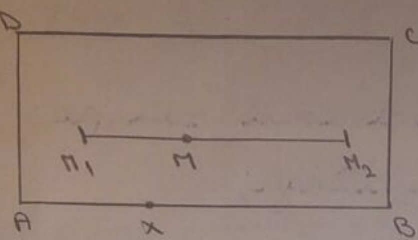
Acoperiri convexe

• **Algoritmi naivi/lenți:**

Două abordări: 1) găsirea punctelor extreme

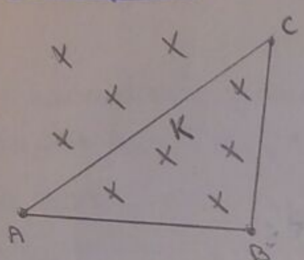
2) determinarea muchiilor frontierei acoperirii conv.

1) Puncte extreme



- vârful A este punct extrem, deoarece nu putem găsi P, Q în dreptunghi a.î. $A \in [PQ]$;
- M nu este punct extrem ($M \in [M_1, M_2]$)
- X nu este punct extrem ($X \in]AB[$)

• **Exemplul 2:**



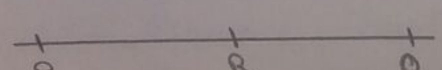
- punctul K nu este punct extrem, fiind situat în interiorul $\triangle ABC$

• Cum stabilim dacă un punct M este în interiorul unui $\triangle ABC$ sau pe laturile sale?

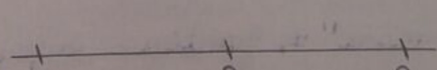
- cu arii
- folosind „de aceeași parte"
- combinații convexe

• **Algoritmul lent 2:**

- comentarii despre cazurile degenerate
- testăm dacă $\overrightarrow{PQ}$ este muchie a frontierei, când R - coliniar cu P și Q

(1) 

$\overrightarrow{PQ}$ este muchie, $r(P,R,Q) > 0$

(2) 

$\overrightarrow{PQ}$ nu este muchie, $r(P,R,Q) < 0$

• **Algoritmi „clasici"**

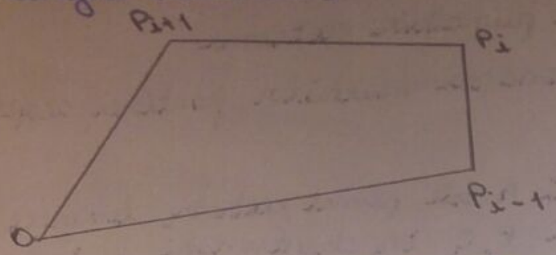
1) Graham's scan

$\mathcal{P}$ = mulțime de puncte din $\mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{P} = n$

I Găsirea unui punct interior al $Conv(\mathcal{P})$ → se poate lua baricentrul lui $\mathcal{P}$ sau centrul de greutate al unui $\triangle$ format din 3 pct. necoliniare din $\mathcal{P}$; după o translație, acest punct devine originea;

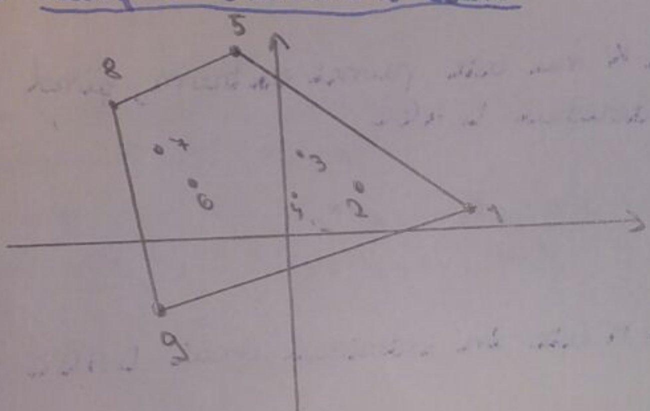
II Sortarea (ordonarea) în ~~ordinea~~ raport cu unghiul polar și distanța polară față de noua origine

III Parcurgere (scanare)



P_i este punct extrem $\Leftrightarrow$ nu este situat în interiorul sau pe laturile $\Delta O P_{i-1} P_{i+1} \Leftrightarrow P_{i-1} P_i P_{i+1}$ este viraj la stânga;

• Exemplu Graham's Scan



$P_1 P_2$

$P_1 P_2 P_3$

$P_1 P_2 P_3 P_4$

$P_1 P_2 P_3 \cancel{P_4} P_5$

$P_1 P_2 \cancel{P_3} P_5$

$P_1 \cancel{P_2} P_5$

$P_1 P_5 P_6$

$P_1 P_5 \cancel{P_6} P_7$

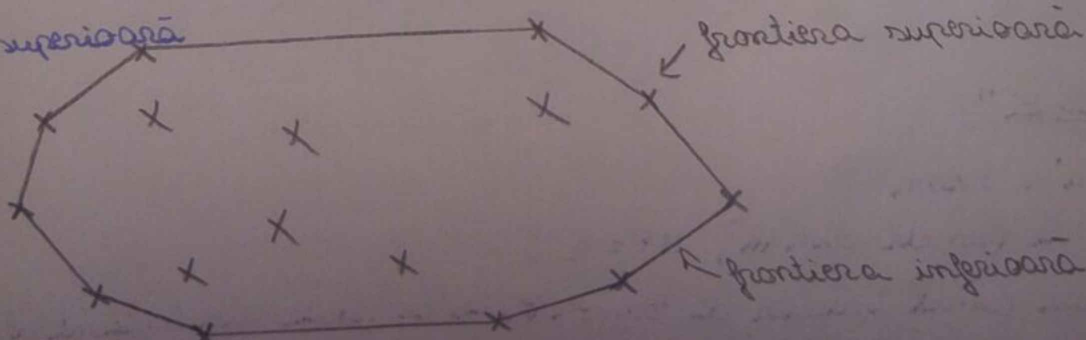
$P_1 P_5 \cancel{P_7} P_8$

$P_1 P_5 P_8$

$P_1 P_5 P_8 P_9$

• Graham's Scan (varianta Andrew)

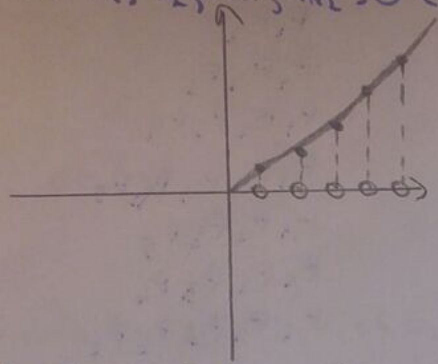
- sortarea: lexicografic
- se determină punctele „cel mai mic/mare" $\Rightarrow$ frontiera inferioară/superioară



• Principiul de lucru: același ca la Graham's Scan (păstrate doar viraje la stânga);

• Teoremă: Problema sortării poate fi transformată, în timp liniar, în problema acoperirii convexe;

Dem: Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ (nu neapărat ordonate)

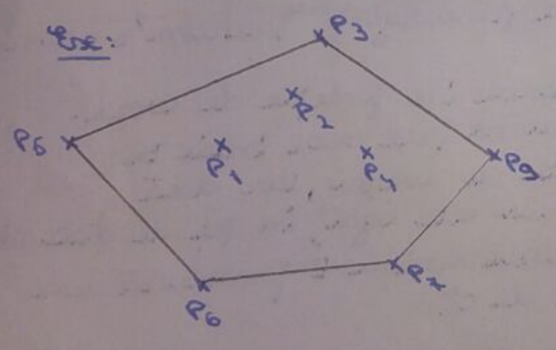


• Se consideră parabola $y = x^2$ și pct. $A_1, A_2, \ldots A_n$ pe această parabolă de coordonate $A_i = (x_i, x_i^2)$;

A sorta nr. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este echivalent cu a găsi frontiera acoperirii convexe pentru $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

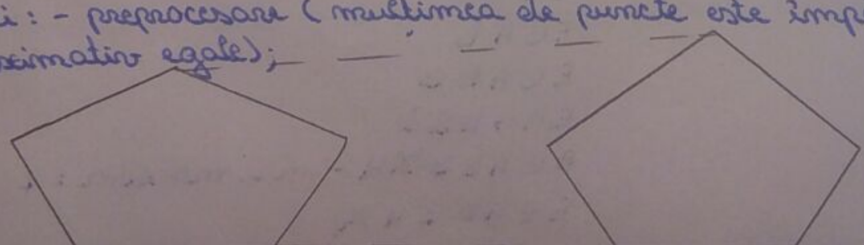
• Jarvis' march:

Ex:



• Algoritm „Divide et impera"

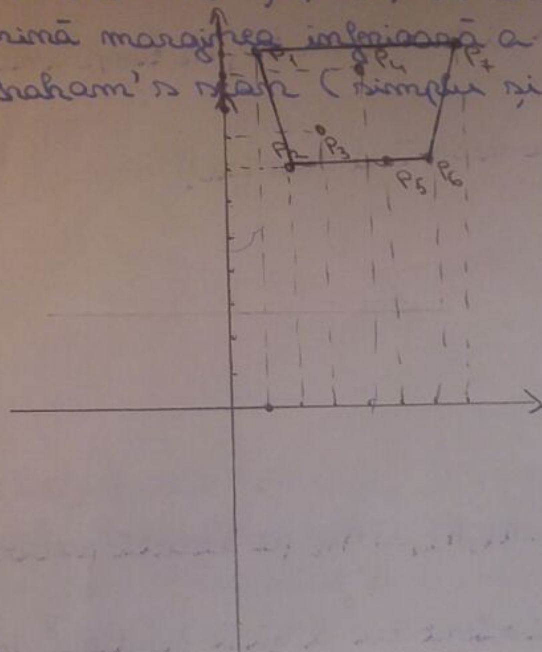
Idei: - preprocesare (mulțimea de puncte este împărțită în jumătăți aproximativ egale);



- date 2 poligoane P_1, P_2, având n_1, respectiv n_2 puncte, dreptele suport cu proprietatea că intersectează poligoanele și au toate punctele poligoanelor de aceeași parte pot fi det. cu un alg. de complexitate $O(n_1+n_2)$

Exerciții, probleme, aplicații

1) Fie $\Omega = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1=(1,11)$, $P_2=(2,7)$, $P_3=(3,8)$, $P_4=(4,10)$, $P_5=(5,7)$, $P_6=(6,7)$, $P_7=(7,11)$. Detaliați cum evoluează lista $\mathcal{L}$ care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui Ω, cu Graham's scan (simplu și Andrew);



P_1P_2

$P_1P_2P_3$

$P_1P_2P_3P_4$

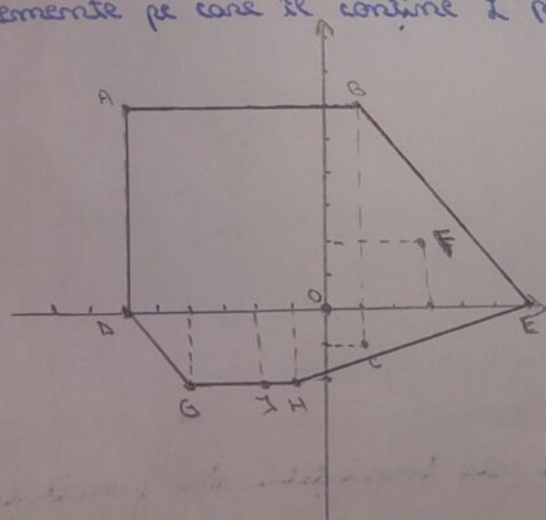
$P_1P_2P_3\cancel{P_4}P_5$

$P_1P_2\cancel{P_3}P_5$

$P_1P_2\cancel{P_5}P_6$

$P_1P_2\cancel{P_6}P_6P_7$

2) Considerăm punctele $A=(-6,6)$, $B=(1,6)$, $C=(1,-1)$, $D=(-6,0)$, $E=(6,0)$, $F=(3,2)$, $G=(-4,-2)$, $H=(-1,-2)$, $I=(-2,-2)$. Precizați care este nr. maxim de elemente pe care îl conține $\mathcal{L}$ pe parcursul parcurgerii Graham's scan.



Sortarea în funcție de coord. polare se face mai întâi în funcție de unghi, iar dacă unghiul este egal, în fct. de distanță. În cazul nostru E formează un unghi de 0°.

E F

E ~~F~~ B

E B A

E B A D

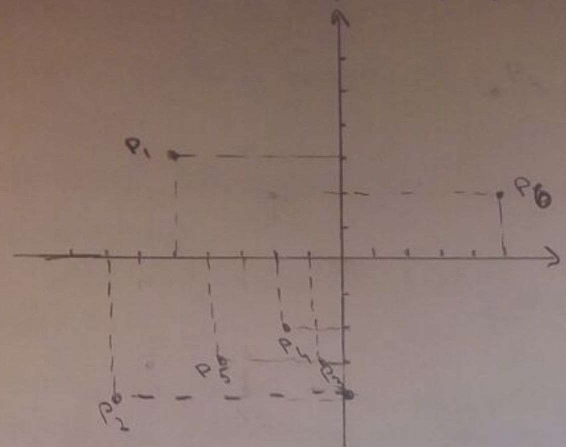
E B A D G

E B A D G I

E B A D G ~~I~~ H - nr. maxim = 7

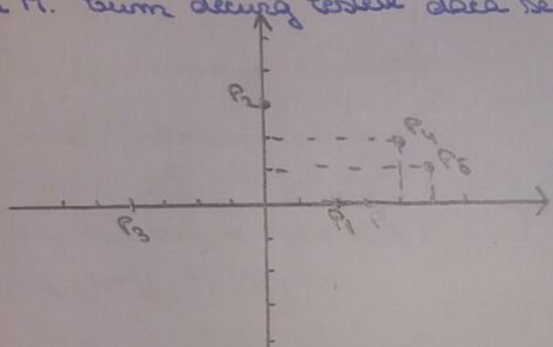
E B A D G H ~~C~~

3) Dați un exemplu de mulțime M din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, L_i are 3 elemente, dar pe parcurs nr. maxim = 5.



P_1P_2
$P_1P_2P_3$
$P_1P_2P_3P_4$
$P_1P_2P_3P_4P_5$ - maxim
$P_1P_2P_3P_4\cancel{P_5}P_6$
$P_1P_2P_3\cancel{P_4}P_6$
$P_1P_2\cancel{P_3}P_6$
$P_1P_2P_6$

4) Fie punctele $P_1=(2,0)$, $P_2=(0,3)$, $P_3=(-4,0)$, $P_4=(4,2)$, $P_5=(5,1)$.
Precizați testele care trebuie efectuate, atunci când este aplicat Jarvis' march, pentru det. succesorului M al „celui mai din stânga punct" și a succesorului lui M. Cum decurg testele dacă se începe de la „cel mai de jos punct"?



La Jarvis' march se alege un punct care sigur este pe frontieră, se merge în sens trigonometric și se verifică dacă restul punctelor sunt în stânga punctului respectiv.

$P_3 \Rightarrow P_1$: verific dacă P_2, P_4 și P_5 sunt în stânga lui P_1; DA $\Rightarrow$ P_1 - pe front.
$P_1 \to P_5$: verific dacă P_2, P_4 sunt în stânga lui P_5; DA $\Rightarrow$ P_5 - pe fr.

5) Dați un exemplu de mulțime cu 8 elemente M din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care frontiera acoperirii convexe are 3 elem. și pt. care, la găsirea succesorului celui mai din stânga punct, toate celelalte puncte sunt testate.

Triangulări

• **Problema galeriei de artă**

- un poligon poate fi triangulat cu ajutorul ~~triangulărilor~~ diagonalelor;

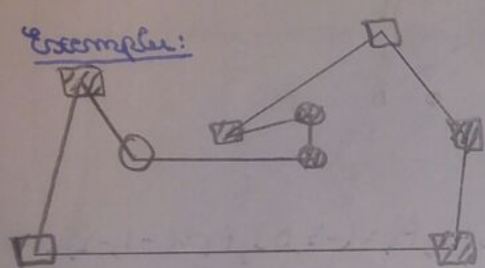
1) **Algoritmul Ear cutting/ear clipping:**

Terminologie:

• P_i este vârf principal dacă $[P_{i-1}, P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului

• Pentru un poligon dat, vârfurile pot fi clasate folosind 2 criterii:
- dacă segmentul determinat de predecesor / succesor inters. laturile pol.
- natura virajului (concav sau convex);

Exemplu:



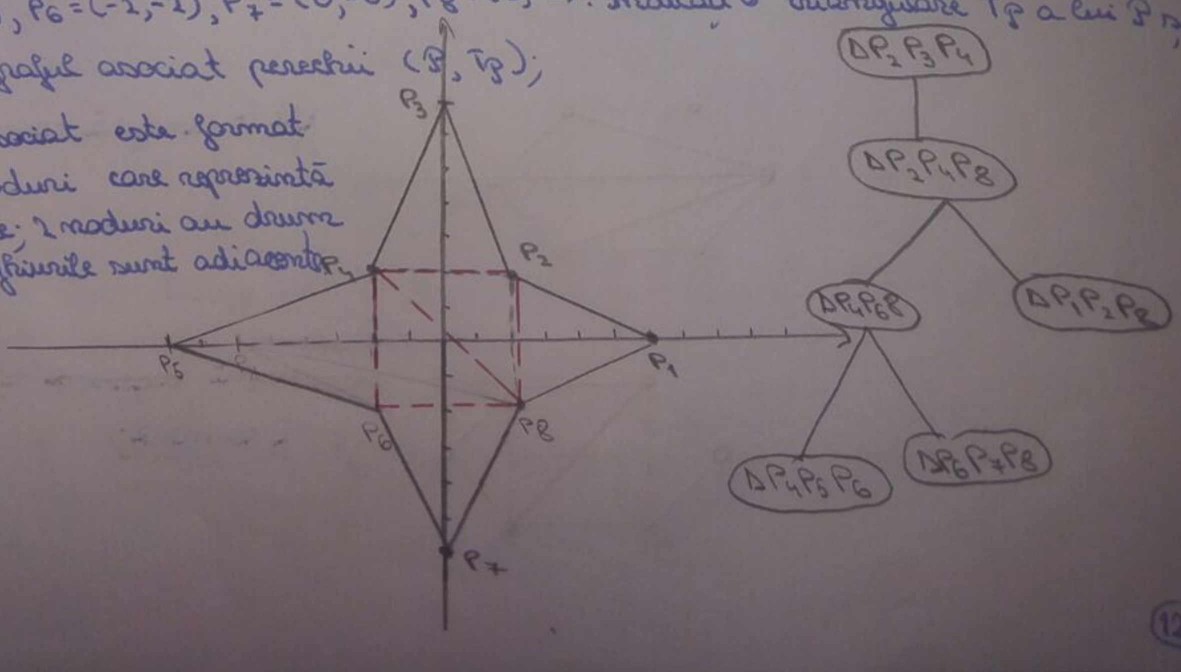
- ▨ - ear (vârf principal, convex)
- ◍ - mouth (vârf principal, concav)
- ◻ - vf. neprincipal, convex
- ○ - vf. nepr., concav

• Se efectuează 2 teste:
- natura vf. virajului (P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) să fie „la stânga";
- să nu existe niciun alt vf. al poligonului situat în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$

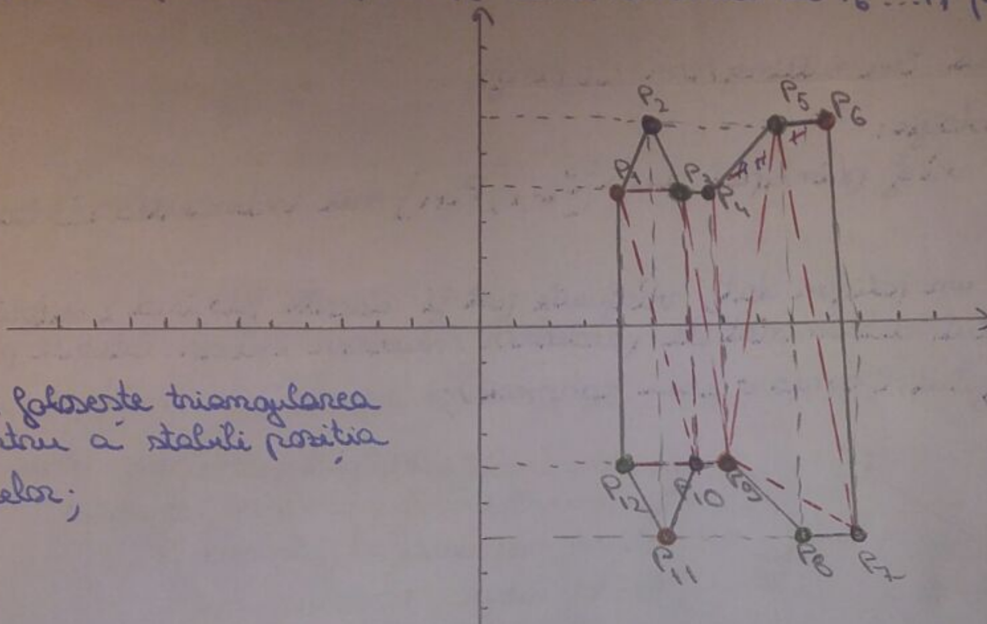
Exerciții, probleme, aplicații

1) Fie P poligonul dat de punctele $P_1 = (6,0)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (0,7)$, $P_4 = (-2,2)$, $P_5 = (-8,0)$, $P_6 = (-2,-2)$, $P_7 = (0,-6)$, $P_8 = (2,-2)$. Indicați o triangulare T_P a lui P și construiți graful asociat perechii (P, T_P);

! graful asociat este format din noduri care reprezintă triunghiurile; 2 noduri au drum dacă triunghiurile sunt adiacente

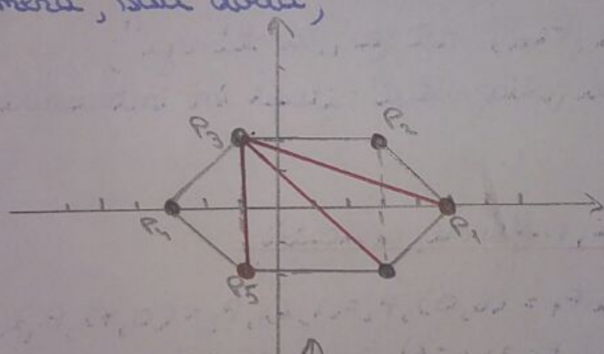


2) Aplicați metoda din ~~din teorema de~~ dem. teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_1P_2\ldots P_{12}$, unde $P_1=(4,4)$, $P_2=(5,6)$, $P_3=(6,4)$, $P_4=(7,4)$, $P_5=(9,6)$, $P_6=(11,6)$ iar punctele $P_7\ldots P_{12}$ sunt simetrice cu $P_6\ldots P_1$ pe Ox.

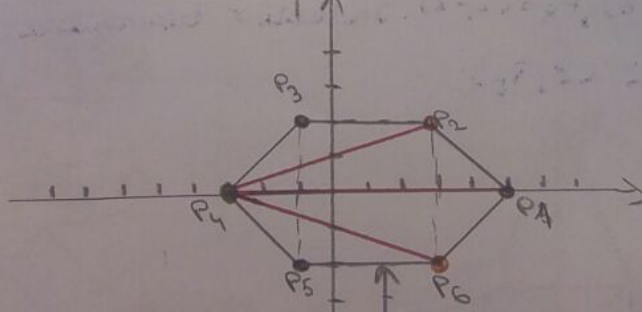


! Se folosește triangularea pentru a stabili poziția camerelor;

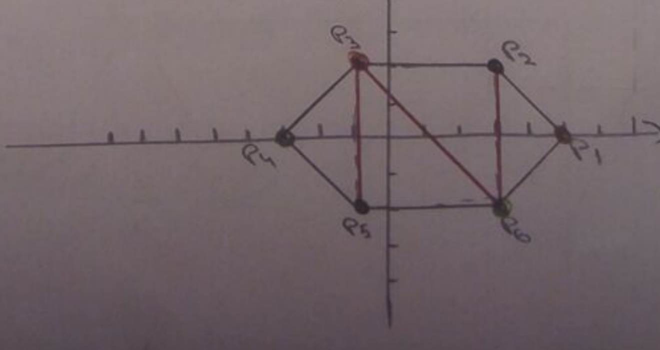
3) $P=(P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, $P_1=(5,0)$, $P_2=(3,2)$, $P_3=(-1,2)$, $P_4=(-3,0)$, $P_5=(-1,-2)$, $P_6=(3,-2)$. Arătați că TGA poate fi aplicată în 2 moduri, folosind o singură cameră, sau două;



Este suficientă o sg. cameră, în P_3



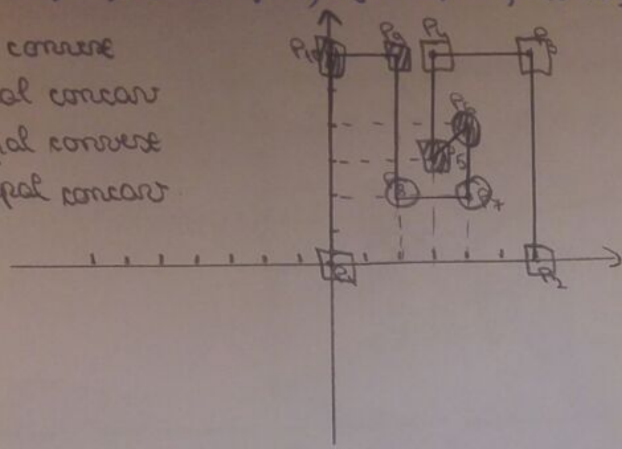
tot o singură cameră



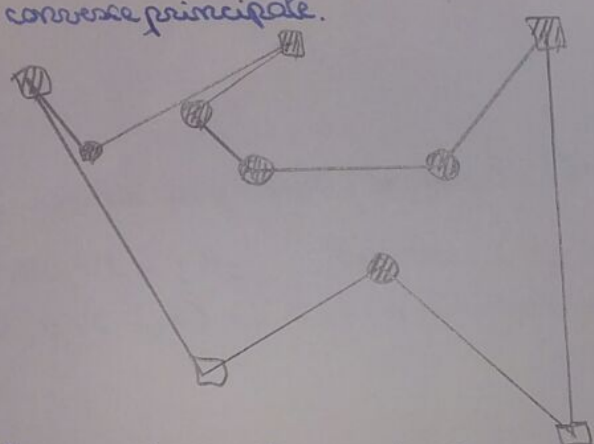
sunt ~~necesare și~~ suficiente 2 camere;

4) $P = (P_1 P_2 \ldots P_{10})$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (6,0)$, $P_3 = (6,6)$, $P_4 = (3,6)$, $P_5 = (3,3)$, $P_6 = (4,4)$, $P_7 = (4,2)$, $P_8 = (2,2)$, $P_9 = (2,6)$, $P_{10} = (0,6)$. Stabiliți natura vf.

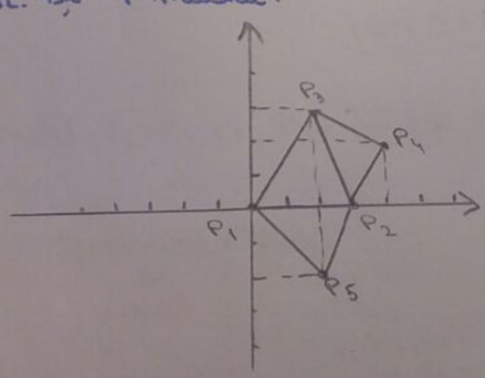
- vf. principal convex
- vf. principal concav
- vf. neprincipal convex
- vf. neprincipal concav



5) Dați exemplu de poligon care să aibă mai multe vf. principale concave decât convexe principale.



6) Dați ex. de o mulțime de puncte din $\mathbb{R}^2$ care să adm. o triangulare cu 3 tr. și 7 muchii.



$P_1(0,0)$
$P_2(4,0)$
$P_3(2,4)$
$P_4(4,3)$
$P_5(2,-2)$

7) Dați ex. de mulțime $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ din $\mathbb{R}^2$ a.î. M să conț. o triangulare ce conține 14 muchii.

$3n - h - 3$ = nr. de vf. de pe acoperirea convexă.

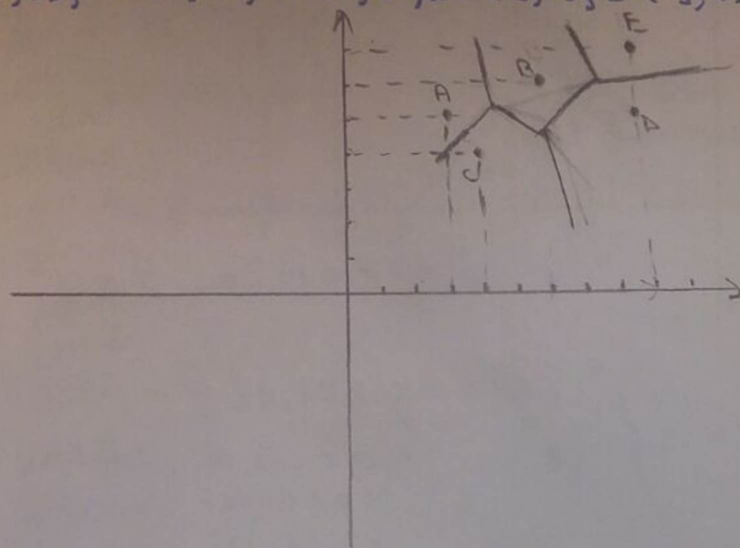
8) Fie ABCD un patrulater convex. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ΔABC
Dem. că diag. AC este ilegală dacă și numai dacă $D \in \mathcal{C}$.

Rezolvat la curs 6;

DIAGRAME VORONOI

• Exerciții, probleme, aplicații

1) Determinați, folosind metoda diagramelor Voronoi, triang. Delaunay pentru $A=(3,5)$, $B=(6,6)$, $C=(6,4)$, $D=(9,5)$, $E=(9,7)$.



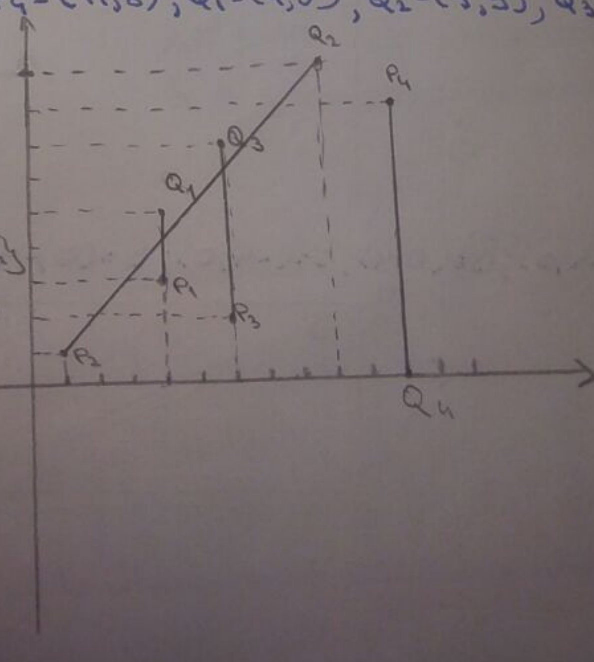
2) Calculați nr. de segmente conținute în diagrama Voronoi asoc. mult. de puncte $M=\{A_0 \dots A_5, B_0 \dots B_5, C_0 \dots C_5\}$ unde ~~A_i~~ $A_i=(i+1, i+1)$, $B=(-i,i)$ și $C_i=(0,i)$ pentru $i=0,\dots,5$;

$n_v \leq 2n-5$
$n_m \leq 3n-6$

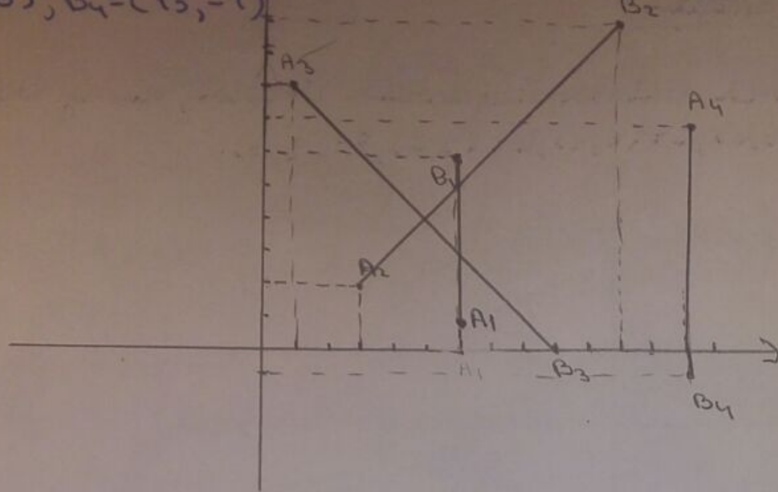
INTERSECȚII

1) $P_1=(4,3)$, $P_2=(1,1)$, $P_3=(6,2)$, $P_4=(11,8)$, $Q_1=(4,5)$, $Q_2=(9,9)$, $Q_3=(6,7)$, $Q_4=(11,0)$.

Eveniment	Statut
u s_2	$\{s_2\}$
u s_4	$\{s_2, s_4\}$
u s_3	$\{s_3, s_2, s_4\}$
u s_1	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
d s_1	$\{s_2, s_3, s_4\}$
d s_3	$\{s_2, s_4\}$
d s_2	$\{s_4\}$
d s_4	$\emptyset$

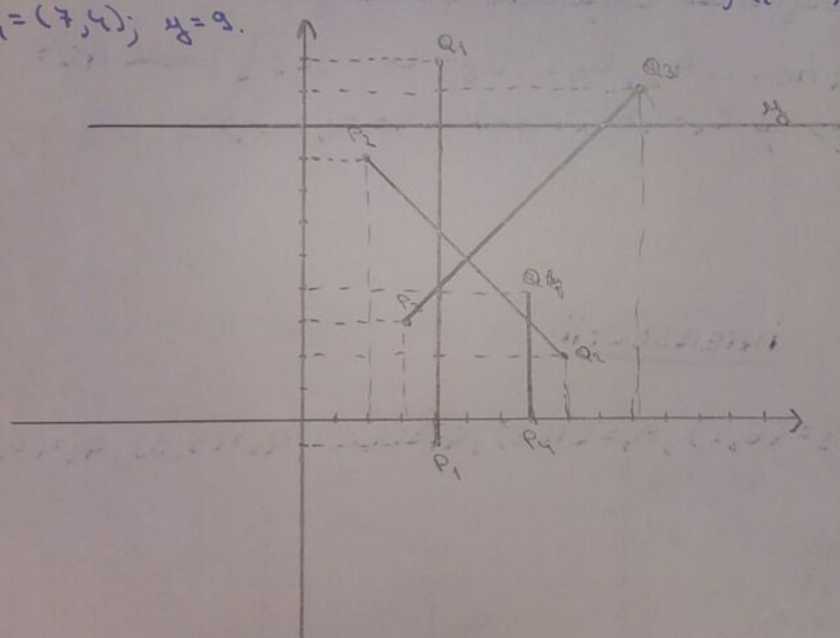


2) $A_1=(6,1)$; $A_2=(3,2)$; $A_3=(1,8)$; $A_4=(13,7)$; $B_1=(6,6)$; $B_2=(11,10)$; $B_3=(9,0)$; $B_4=(13,-1)$



eveniment	statut
u s_2	$\{s_2\}$
u s_3	$\{s_3, s_2\}$
u s_4	$\{s_3, s_2, s_4\}$
u s_1	$\{s_3, s_1, s_2, s_4\}$
$s_1 \cap s_2$	$\{s_3, s_2, s_1, s_4\}$
$s_3 \cap s_2$	$\{s_3, s_2, s_1, s_4\}$
$s_1 \cap s_3$	$\{s_2, s_1, s_3, s_4\}$
d s_2	$\{s_1, s_3, s_4\}$
d s_1	$\{s_3, s_4\}$
d s_3	$\{s_4\}$
d s_4	$\emptyset$

3) $P_1=(4,-1)$; $P_2=(2,8)$; $P_3=(3,3)$; $P_4=(7,0)$; $Q_1=(4,11)$; $Q_2=(8,2)$; $Q_3=(10,10)$; $Q_4=(7,4)$; $y=9$.

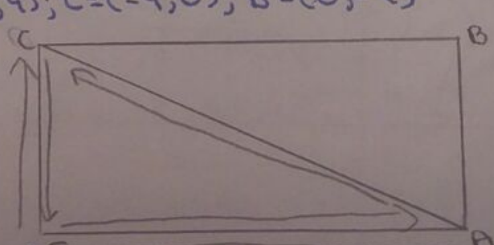


evenimente eliminate:
u $[P_1Q_1]$; u $[P_3Q_3]$

even. rămase: d $[P_2Q_2]$,
$[P_1Q_1] \cap [P_2Q_2]$,
$[P_3Q_3] \cap [P_2Q_2]$,
$[P_3Q_3] \cap [P_1Q_1]$,
u $[P_4Q_4]$
u $[P_3Q_3]$
$P_2Q_2 \cap P_4Q_4$
d $[P_2Q_2]$
d $[P_4Q_4]$
d $[P_1Q_1]$

statut: $\{P_1Q_1, P_3Q_3\}$

4) $A=(4,0)$; $B=(0,4)$; $C=(-4,0)$; $D=(0,-4)$



Programare liniară

1) $P_1: v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); v_2 = (1,0); v_3 = (0,1); v_4 = (-1,0); v_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ \langle (1,0), (0,1) \rangle = 0 \\ \langle (0,1), (0,1) \rangle = 1 \\ \langle (-1,0), (0,1) \rangle = 0 \\ \left\langle \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Piesa nu poate fi extrasă din matriță}$$

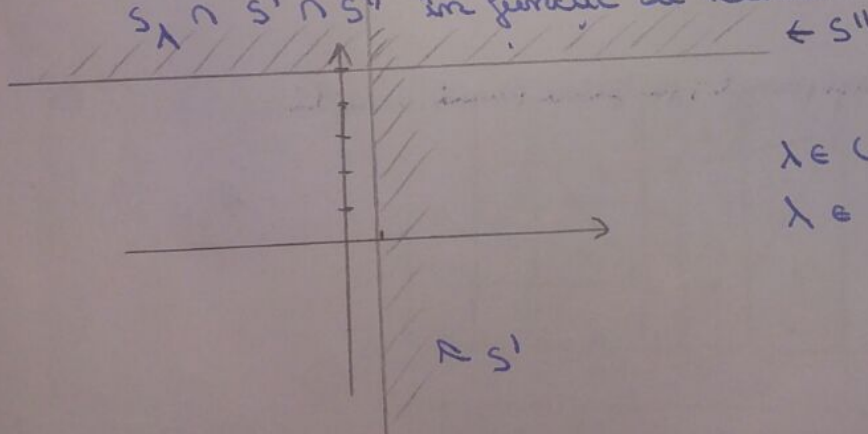
$$P_2: \left.\begin{array}{l} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1) \right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \langle (1,0), (0,1) \rangle = 0 \\ \langle (0,1), (0,1) \rangle = 1 \\ \langle (-1,0), (0,1) \rangle = 0 \\ \left\langle \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1) \right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \text{ — '' — }$$

2) $S_\lambda : x - y - \lambda \leq 0 \; (\lambda \in \mathbb{R})$

$S' : x - 1 \geq 0$

$S'' : y - 5 \geq 0$

$S_\lambda \cap S' \cap S''$ în funcție de natura lui λ



$\lambda \in (-\infty, 4] \Rightarrow$ intersecție nemărg.

$\lambda \in (4, \infty) \Rightarrow$ intersecție nemărg

3) $p = (-1,1)$; $d : (y = 3x+4)$; $p \in d$?; $d^* \in p^*$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x+4 \\ y = 1 \\ x = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1 = 3\cdot(-1)+4 \Leftrightarrow 1 = -3+4 \Rightarrow p \in d$$

d^* - reprezintă dualele; dualul unui punct este o dreaptă și p^* - viceversa

$P(-1,1) \Rightarrow P^*:(y = P_x x - P_y) \Rightarrow P^*:(y = -x - 1)$

$d:(y=3x+4) \Rightarrow d^*(m_d; -n_d) \Rightarrow d^*(3,-4)$

$\quad\ \ \downarrow \quad \downarrow$

$\quad m_d \quad n_d$

$\cdot\ 4 = -3-1 \Rightarrow d^* \in P^*$

4) $P_1=(2,5)$; $P_2=(1,6)$;

Ecuația dreptei P_1P_2.

$P_1P_2: \dfrac{x - x_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} = \dfrac{y - y_{P_1}}{y_{P_2} - y_{P_1}} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{1-2} = \dfrac{y-5}{6-5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-1} = y-5 \Leftrightarrow 2-x = y-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y-7=0 \Leftrightarrow y = -x+7$

d^* și P^* se fac ca mai sus

5) $d:(y=2x+1)$

$P=(1,8)$

P - deasupra lui d și d^* - deasupra lui P^*

$8 \overset{?}{=} 2+1 \Leftrightarrow 8>3 \Rightarrow y>2x+1$ pentru $P=(1,8) \Rightarrow P$ este deasupra lui d

$d^* = (2,-1)$

$P^*: y = x-8$

$-1 \overset{?}{=} -6 \Leftrightarrow -1>-6 \Rightarrow y > x-8$ pt. $d^* = (2,-1) \Rightarrow d^*$ este deasupra lui P^*

6) 3 drepte trec prin același punct; pe fiecare punct dreaptă

CURS 1

• Date $A, B \in \mathbb{R}^n$

- un punct $(1-\alpha)A + \alpha B$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se numește combinație afină / baricentrică a punctelor A, B → pe dreapta AB

- un punct $(1-\alpha)A + \alpha B$, cu $\alpha [0,1]$ se numește combinație convexă a punctelor A, B → pe segmentul $[AB]$

• Combinații liniare vs. combinații afine (baricentrice)

- în $\mathbb{R}^n$ $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ - vectori ⇒ combinația liniară este de forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p + v_p$; cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$

- $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathbb{R}^n$ puncte ⇒ combinația afină / baricentrică este de forma $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_p A_p$; cu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ și $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 1$

• Legătura dintre raportul $r(A, P, B)$ definit cu vectori și scrierea lui P ca o combinație ~~liniară~~ afină dintre A și B (def. cu puncte);

„puncte → vectori"

Fie $P = (1-\alpha)A + \alpha B$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$
(avem α - combinație afină)

$r = r(A, P, B) = ?$ (în funcție de α) ⇒ trecem la relații vectoriale

$\Rightarrow \overrightarrow{PP} = (1-\alpha)\overrightarrow{PA} + \alpha \overrightarrow{PB} \overset{(\alpha \neq 1)}{\Rightarrow} P \neq B \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{AP} = ? \cdot \overrightarrow{PB}$
↘ $r(A, P, B)$

$$\boxed{r(A, P, B) = \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

„vectori → puncte"

• Fie P a.î. $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{PB}$ (știu raportul $r(A, P, B)$)

• Vrem să găsim α a.î. $P = (1-\alpha)A + \alpha B$

• Avem: $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{PA} + r \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PA} + r \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{r+1}\overrightarrow{PP} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{PA} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{PB} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B \quad (r \neq -1; P \neq B)$

• Produs vectorial

• geometric : - dați v, w necoliniari
- produsul vectorial ~~este~~ $v \times w$ este un vector:
- perpendicular pe v, w
- are sensul dat de regula șurubului

• în $\mathbb{R}^3$ (abordare numerică)

$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

$v \times w = ?$ (în $\mathbb{R}^3$)

Exerciții, probleme, aplicații

1) Calculați rapoartele $r(A,P,B)$, $r(B,P,A)$, $r(P,A,B)$ (stabiliți mai întâi dacă punctele sunt coliniare), pentru: ~~A=~~

a) $A=(3,3)$

$B=(2,4)$

$P=(5,1)$

b) $A=(1,4,-2)$

$P=(2,3,-1)$

$B=(4,1,1)$

a) !

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$ condiția de coliniaritate a 3 puncte;

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12+2+15-20-3-6=0 \Rightarrow A, B, P - \text{coliniare}$$

• $r(A,P,B)=?$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= P-A = (2,-2) \\ \overrightarrow{PB} &= B-A = (-3,3) \\ \overrightarrow{AP} &= r(A,P,B)\cdot\overrightarrow{PB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(A,P,B) = -\frac{2}{3}$$

• $r(B,P,A)=?$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= P-B = (3,-3) \\ \overrightarrow{PA} &= A-P = (-2,2) \\ \overrightarrow{BP} &= r(B,P,A)\cdot\overrightarrow{PA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(B,P,A) = -\frac{3}{2}$$

• $r(P,A,B)=?$

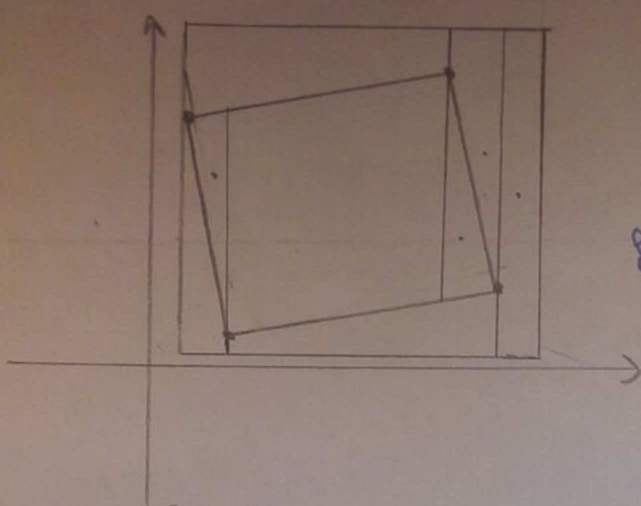
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= A-P = (-2,2) \\ \overrightarrow{AB} &= B-A = (-1,1) \\ \overrightarrow{PA} &= r(P,A,B)\cdot\overrightarrow{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(P,A,B) = 2$$

b) !

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_P & z_P & 1 \\ x_B & z_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} z_A & y_A & 1 \\ z_P & y_P & 1 \\ z_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

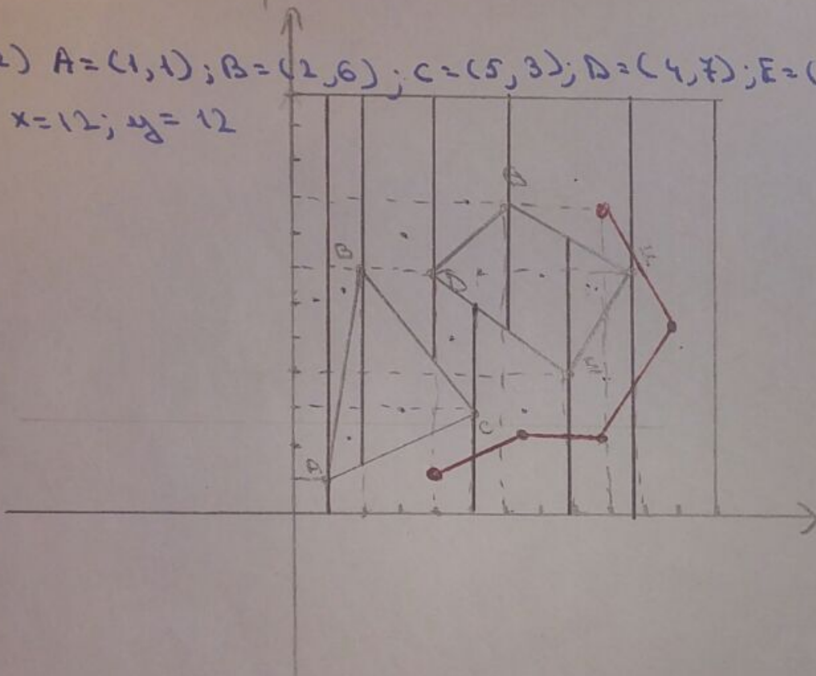
Hărți trapezoidale

1)



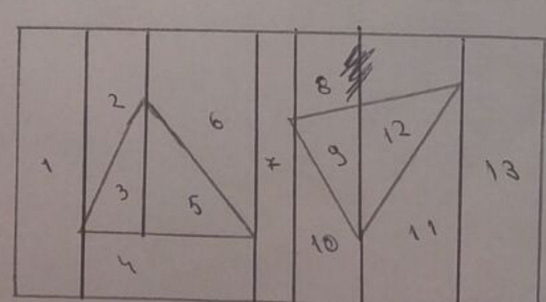
8 trapeze
4 degenerate (cele care au formă regulată)

2) A=(1,1); B=(2,6); C=(5,3); D=(4,7); E=(8,4); F=(10,7); G=(6,9);
x=12; y=12

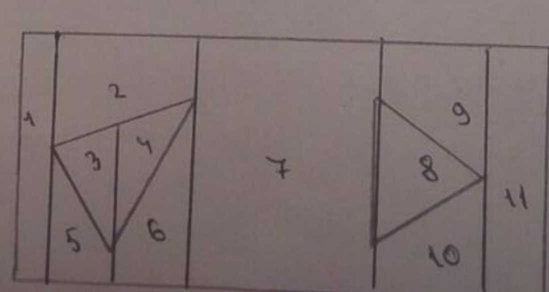


15 trapeze

3)



13 trapeze



11 trapeze

Numărul de trapeze depinde de poz. rel. a triunghiurilor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2+16-12-1-8 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2-\cancel{8}+\cancel{4}-1+\cancel{4} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\cancel{6}-1+4-3+\cancel{2}+\cancel{4} = 0 \quad (3)$$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ A, P, B sunt coliniare;

• $r(A,P,B) = ?$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= P-A = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{PB} &= B-P = (2,-2,2) \\ \overrightarrow{AP} &= r(A,P,B)\cdot\overrightarrow{PB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(A,P,B) = \frac{1}{2}$$

• $r(B,P,A) = ?$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= P-B = (-2,2,-2) \\ \overrightarrow{PA} &= A-P = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{BP} &= r(B,P,A)\cdot\overrightarrow{PA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(B,P,A) = \cancel{-\tfrac{1}{2}}\ 2$$

• $r(P,A,B) = ?$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= A-P = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{AB} &= B-A = (3,-3,3) \\ \overrightarrow{PA} &= r(P,A,B)\cdot\overrightarrow{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(P,A,B) = -\frac{1}{3}$$

2) Determinați α, β astfel ca punctele A, P, B din planul $\mathbb{R}^2$, cu $A=(6,2)$, $P=(\alpha,\beta)$, $B=(2,-2)$, să fie coliniare și $r(A,P,B)=2$.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6\beta - 2\alpha + 4 - 2\beta + 24 - 2\alpha = 0 \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\beta - 4\alpha + 28 = 0.$$

$$\cancel{\overrightarrow{AP} = r(A,P,B)\cdot\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow r(A,P,B) = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \Leftrightarrow 2 = \frac{P-A}{B-A} \Leftrightarrow}$$
$$\cancel{\Leftrightarrow \frac{(\alpha-2,\ \beta+2)}{(-4,-4)} = 2 \Rightarrow (\alpha-2,\ \beta+2) = (-8,-8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AP} = P - A = (\alpha - 6, \beta - 2) \\ \vec{PB} = B - P = (2-\alpha, -2-\beta) \\ \vec{AP} = r(A,P,B)\cdot\vec{PB} \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha-6, \beta-2) = 2\cdot(2-\alpha, -2-\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha-6, \beta-2) = (4-2\alpha, -4-2\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 6 = 4 - 2\alpha \\ \beta - 2 = -4 - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 10 \\ 3\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{10}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\cdot\left(\frac{10}{3}\right) + 28 = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} - \frac{40}{3} + 28 = 0$$

3) Determinați coordonatele carteziene ale punctului M de coordonate polare $\rho = 6$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, respectiv coordonatele polare ale punctului $N(-4,4)$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$$

coordonate carteziene în fct. de polare — coord. polare în fct. de carteziene

$$\begin{cases} x = 6\cos\frac{\pi}{6} \\ y = 6\sin\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ y = 6\cdot\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{3} \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-4)^2+4^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 4\sqrt{2} \\ \theta = \cancel{\operatorname{arctg}} -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

4) Calculați produsul vectorial $v \times w$ pentru vectorii $v = (1,-1,0)$, $w = (-2,1,3)$;

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$; unde e_1, e_2, e_3 - coord. bazei canonice

$$v \times w = \begin{vmatrix} 1 & -2 & e_1 \\ -1 & 1 & e_2 \\ 0 & 3 & e_3 \end{vmatrix} = e_3 - 3e_1 - 3e_2 - 2e_3 = -e_3 - 3e_1 - 3e_2 = (-3, -3, -1)$$