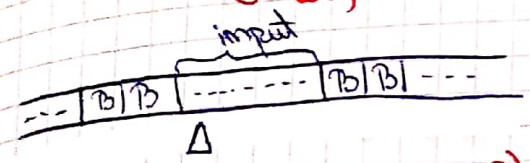
02.10.2019.

Mașini Turing



$MT = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$

Q = mult. finită de stări

Σ = alfabet de intrare

Γ = alfabetul benzii

$B \in (\Gamma \setminus \Sigma)$ = simbolul "blank"

$\Sigma \subseteq (\Gamma \setminus \{B\})$

$q_0 \in Q$ = stare inițială

$F \subset Q$ = mulțimea stărilor finale

δ = fct. de tranziție, $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \longrightarrow 2^{Q \times (\Gamma \setminus \{B\}) \times \{\leftarrow, \rightarrow\}}$

Reprezentarea nr. N în baza 1:

$\rightarrow x_{(10)} = \underbrace{1 \ldots 1}$, $(\forall) x \in N^*$, mimic pt. $x=0$

$\rightarrow x_{(10)} = \underbrace{1 \overset{x}{\ldots} 1}_{x+1}$, $(\forall) x \in N$

① Se dă $x \in N$ în baza 1. Să se deplasezeze cu 4 poziții spre dreapta.

Ex: $x=5$ înainte: B B 1 1 1 1 1 1 B B ...

Δ

după: ... B B 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 B B ...

B 1 1 1 1 1 B
B 0 0 0 0 1 1 B

$(|x|+4)-4$.

P1) Cât timp citim 1, scriem 1, pas →

P2) De 4 ori, citim B, scriem 1, pas →

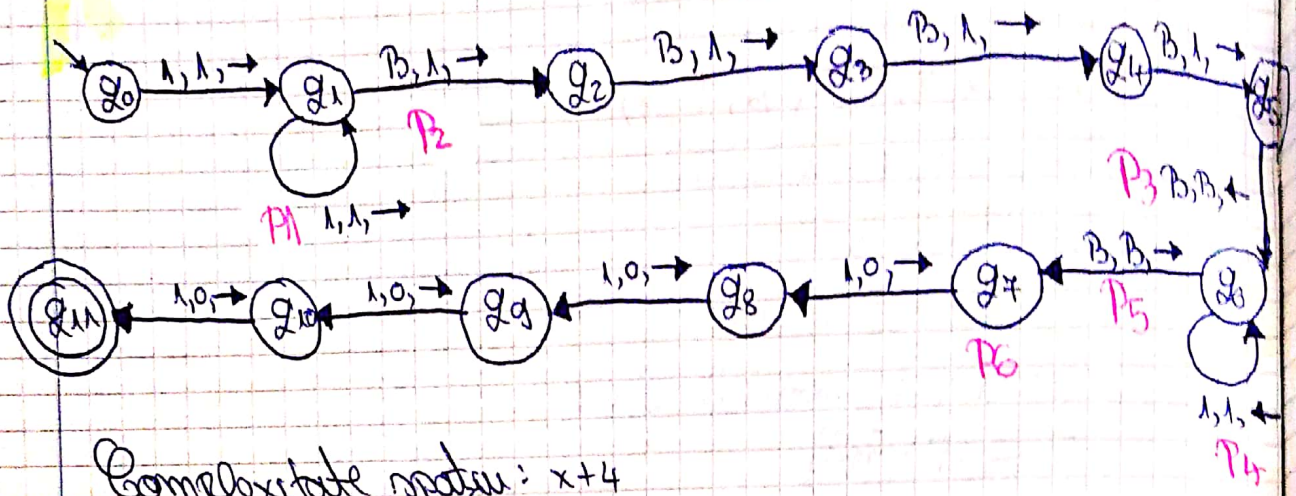
P3) citim B, scriem B, pas ←

P4) Cât timp citim 1, scriem 1, pas ←

Scanned by CamScanner

P5) citim B, scriem B, pas →

P6) De 4 ori, citim 1, scriem 0, pas →



Complexitate spațiu: $x+4$

Complexitate timp: $\underbrace{x}_{P_1} + \underbrace{4}_{P_2} + \underbrace{1}_{P_3} + \underbrace{x+4}_{P_4} + \underbrace{1}_{P_5} + \underbrace{4}_{P_6} = 2x+14 = O(x)$

2. Se dau $x, y \in \mathbb{N}$. Calculați suma lor.

Ex.: $x=2$ | ... | B | B | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B | ...

$y=3$ | ... | B | B | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B | ...

inițializare:

P1) citim 1, scriem 1', pas →

P2) Cât timp citim 1 sau 0, nu modificăm, pas →

P3) citim B, scriem 2, pas ←

P4) Cât timp citim 1, 0 sau 2, nu modificăm, pas ←

P5) citim 1', scriem 1', pas →

recursivitate:

P6) a) citim 1, scriem 1', pas →, P7.

SAU

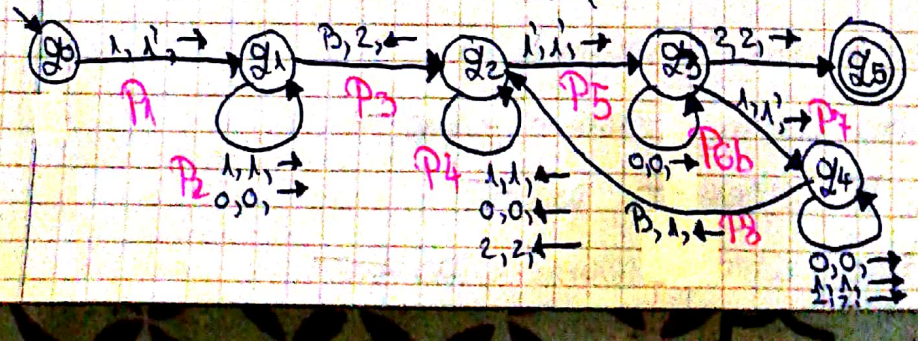
b) citim 0, scriem 0, pas →, P6a

SAU

c) citim 2, scriem 2, pas →, STOP.

P7) Cât timp citim 0, 1 sau 2, nu modificăm, pas →

P8) citim B, scriem 1, pas ←, P4.



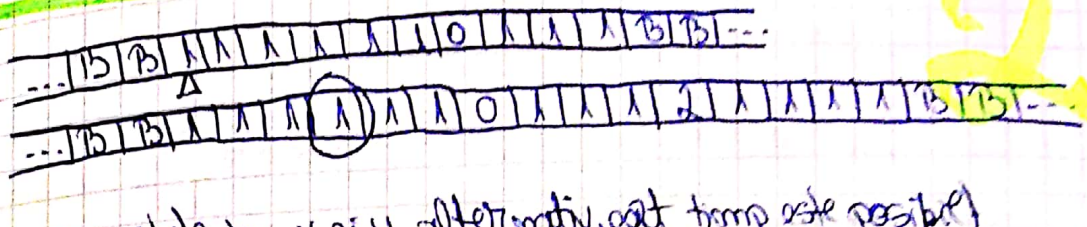
Complexitate spațiu: $(x+y)+(x+y) = 2(x+y)$

Complexitate timp: $\underbrace{1}_{P_1} + \underbrace{x+y}_{P_2} + \underbrace{1}_{P_3} + \underbrace{(x+y)\cdot(2(x+y))}_{P_4 \text{ în recursivitate}} = O((x+y)^2)$

16.10.2019.

2

3. Se dau $x, y \in \mathbb{N}$. Calculați modulul diferenței.



P1) (marcăm o unitate din x și y alternativ, cât timp este posibil)

a) citim 1 din x, scriem 1', pas → SAU P3a

b) cât timp citim 1 din x, scriem 1, pas →

c) (schimbăm starea) 0, 0, →

d) cât timp citim 1' din y, scriem 1', pas →

e) citim 1 din y, scriem 1', ← SAU P2a (pt. x > y)

f) cât timp citim 1' din y, scriem 1', pas ←

g) (schimbăm starea) 0, 0, ←

h) cât timp citim 1 din x, scriem 1, ←

i) citim 1' din x, scriem 1', →

SARI LA P1(a)

P2) a) citim B, scriem 2, pas →

b) citim B, scriem 1, pas →

c) citim B, scriem 1, pas ←, mergi P4

P3) a) citim 0, scriem 0, pas →

b) cât timp citim 1 sau 1' din y, nu modificăm, pas →

c) citim B, scriem 2, pas →

d) citim B, scriem 1, pas ←, mergi P4.

P4) a) cât timp citim 1, scriem 1, pas ←

b) citim 2, scriem 2, pas ← (schimbăm starea)

c) citim 1 din y, scriem 1, pas ←, sari la P4d)

SAU

citim 1' din y, scriem 1', pas ←, sari la P4e)

d) cât timp 1 din y, 1, pas ←

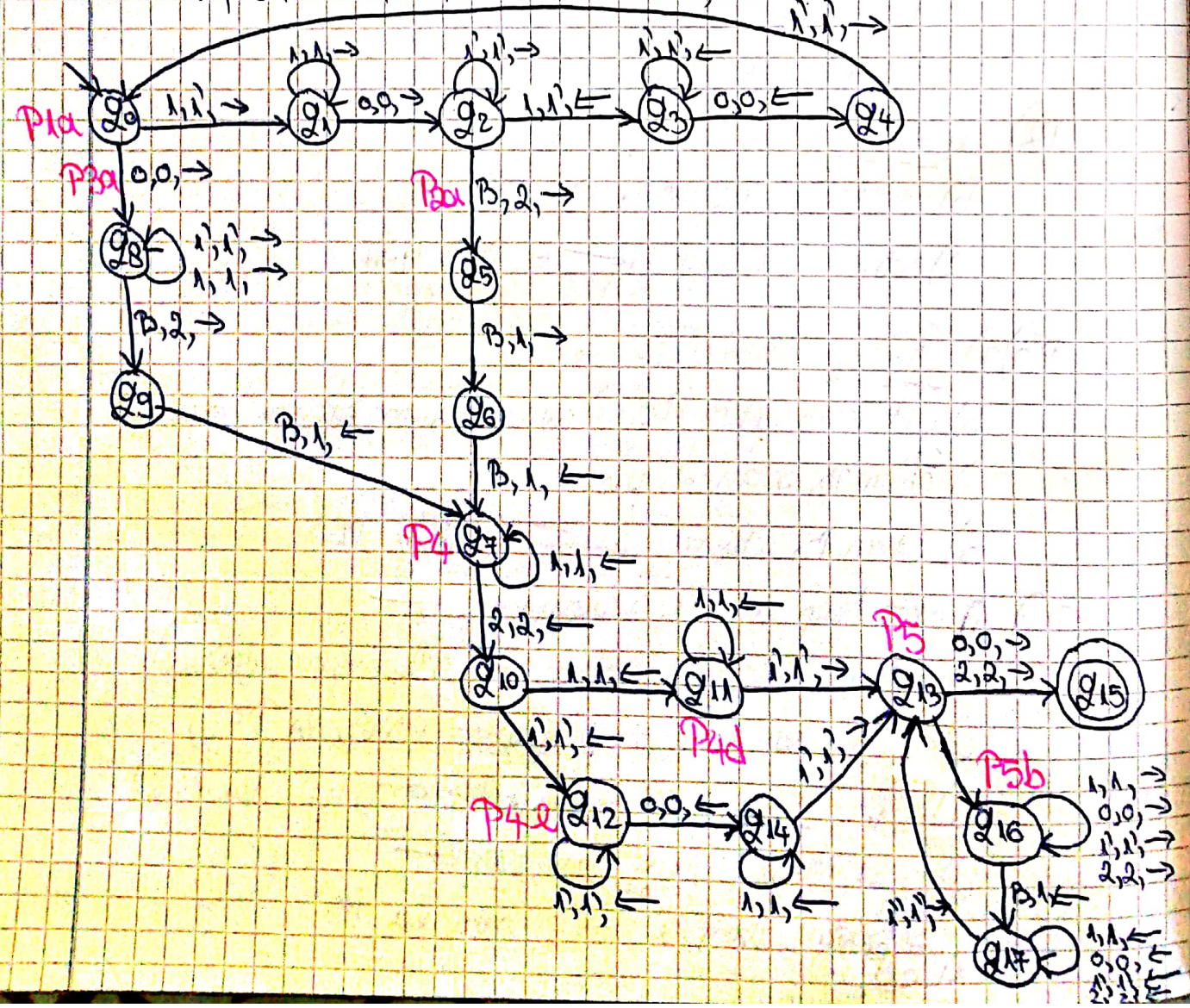
și

citim 1' din y, 1', →, sari la P5

Scanned by CamScanner

e) cât timp 1' din y, 1', pas ←
- 0'', 0, ← (schimbăm starea)
- cât timp 1 din x, 1, pas ←
- 1'' din x, 1'', pas →, sare la P5

P5) (copiem rezultatul ca fiind partea memorată de la finalul lui x sau a lui y)
a) citim 0, 0, →, stare finală
SAU
- citim 2, 2, →, stare finală
SAU
- citim 1, 1'', pas →, sari P5b)
b) cât timp 1, 0, 1' sau 2, nu modificăm, pas →
c) B, 1, ←
d) cât timp 1, 0, 1' sau 2, nu modificăm, ←
e) citim 1'', 1'', → SAU P5a)



Scanned by CamScanner

Complexitate spațiu:

$x+y+|x-y|$

Complexitate timp:

$$\underbrace{\min(x;y)}_{\text{nr. de reveniri la P1a}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{distanța parcursă la P1}} + \max(\underbrace{3}_{P2};\underbrace{y+3}_{P3}) + \max(\underbrace{|y-x|}_{P4d};\underbrace{y+|x-y|}_{P4e}) +$$

$$+ \underbrace{|x-y|}_{\text{nr. de reveniri la P5a}} \cdot \underbrace{(y+|x-y|)}_{\text{distanța parcursă la P5}} \Longrightarrow O(\max^2(x;y))$$

4. Să se accepte limbajul $L=\{a^m b^k c^{2m} / m,k \geq 1\}$

m=3	...	B	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	B	...	
k=2	...	B	B	a'	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	B	...	

P1) (marcăm câte 1a, 1b și 2c cât timp e posibil)

a) a, a, →

b) cât timp citim a sau b', nu modificăm, →

c) b, b', → SAU sari la P2a

d) cât timp b sau c', nu modificăm, →

e) c, c', →

f) c, c', ←

g) cât timp c', b, b' sau a, nu modificăm, ←

h) a', a', →, sari la P1a

P2) a) c', c', →

b) cât timp c', c', →

c) c, c', →

d) c, c', ←

e) cât timp c', b' sau a, nu modificăm, ←

f) a', a', → SARI la P3.

Scanned by CamScanner

P3) (marcăm câte un a și 2c cât timp e posibil)

a) $a, a', \rightarrow$ SAU P4a)

b) cât timp a, b' sau c', nu modific, $\rightarrow$

c) $c, c', \rightarrow$

d) $c, c', \leftarrow$

e) cât timp c', b' sau a, nu modific, $\leftarrow$

f) $a', a', \rightarrow$, SARI la P3a)

P4) a) $b', b', \rightarrow$

b) cât timp b' sau c', nu modificăm, $\rightarrow$

c) $B, B, \leftarrow$ STARE FINALĂ

Complexitate spațiu:

$|w|_c \overset{NOT}{=} p$.

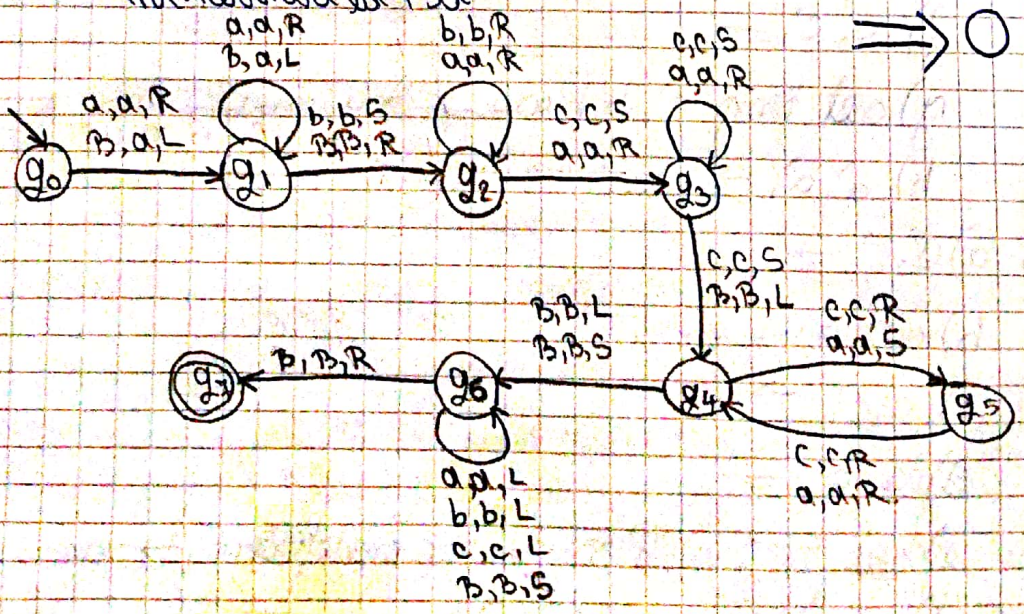
$m+K+p=|w|$

Complexitate timp:

$$\underbrace{\min\left(m;K;\frac{p}{2}\right)}_{\text{nr. teleportări la P1a}}\cdot 2\underbrace{\left(\underbrace{m-K}_{a\text{-uri}}+\underbrace{K}_{b'\text{-uri}}+\underbrace{2K}_{c'\text{-uri}}\right)}_{\text{distanța parcursă la P1}}+\underbrace{2K}_{P2b}+\underbrace{2K+K+m-K}_{P2e}+$$

$$\underbrace{\min\left(m-K;\frac{p-2K}{2}\right)}_{\text{nr. teleportări la P3a}}\cdot\underbrace{(K+2m)}_{P3}+\underbrace{(K+2m)}_{P4}\Longrightarrow O(\overset{\leq|w|}{m}(\overset{\leq|w|}{m+K}))$$

$$\Longrightarrow O(\overset{\leq|w|}{|w|^2})$$



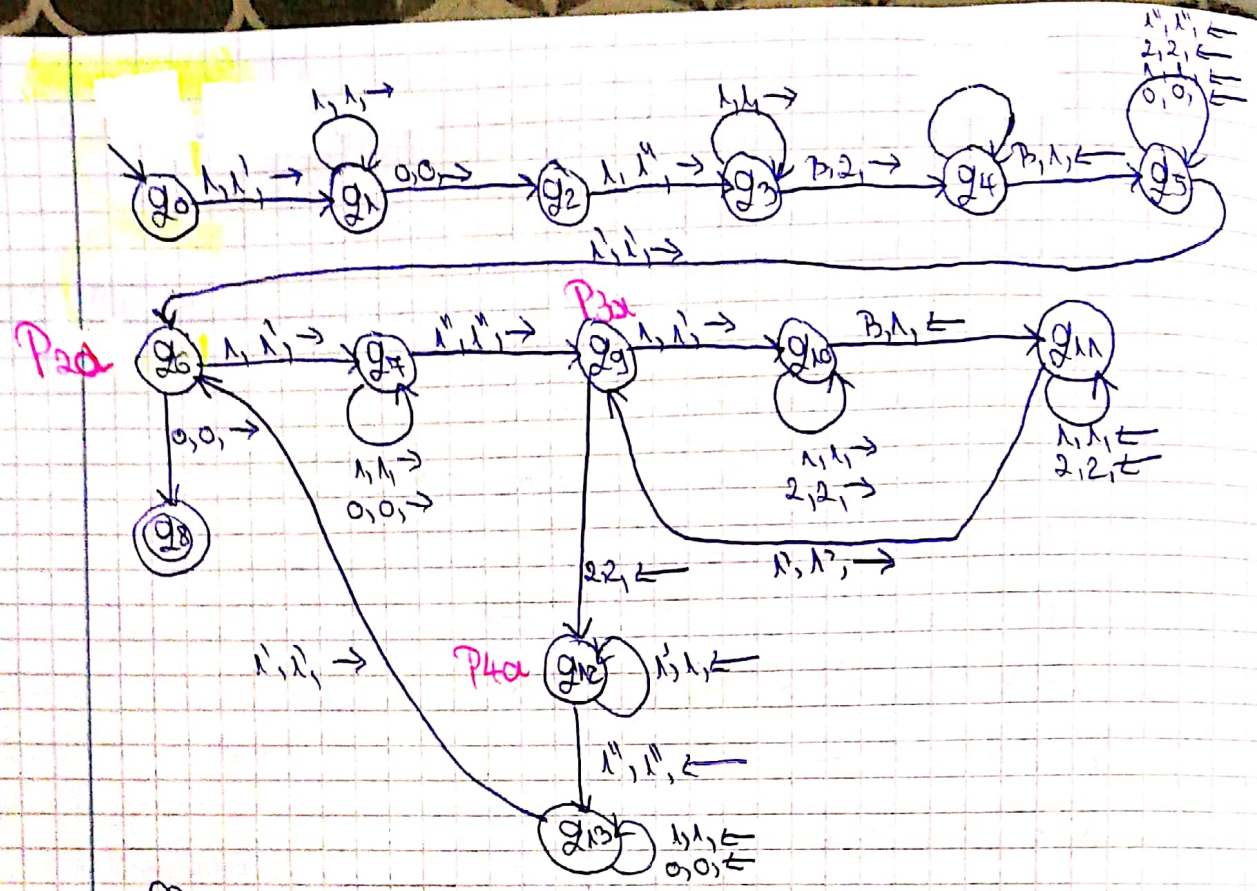
30.10.2019.

3

1) Se dau x și y în bx. Calculați produsul lor.

$x=3$, $y=2$ $\Rightarrow x*y=6$.

| | | |



Complexitate spațiu

$x + y + x * y$.

Complexitate timp:

$$\underbrace{x+y}_{P_1} + \underbrace{x}_{\text{nr. reversuri la P2a}} \cdot \Big[\underbrace{x}_{P2b} + \underbrace{y}_{\text{nr. reversuri la P3a}} \cdot \underbrace{2(x \cdot y)}_{d(P3)} + \underbrace{y}_{P4b} + \underbrace{x}_{P4d}\Big] + \underbrace{1}_{P5}.$$

$$\Rightarrow O((xy)^2).$$

② Se dau x și y în b1. Calculați câtul și restul împărțirii lui x la y

x=5 ...|B|B|1|1|1|1|1|1|0|1|1|1|B|B|...

y=2 ...|B|B|1|1|1|1|1|1|0|1|1|1|2|1|1|1|3|1|1|B|...

P1) a) citim un 1 din x, scriem 1', →

b) cât timp citim 1 din x, scriem 1, →

c) citim 0, scriem 0', schimbăm starea

d) citim un 1 din y, scriem 1'', →

e) cât timp citim 1 din y, scriem 1, →

f) citim B, scriem 2, →

g) citim B, scriem 1, ←
h) cât timp citim 1,2, nu modificăm, ←
i) citim 1', scriem 1', →, SARI LA P3)a)

P2) (mergem să-l căutăm pe y în X cu marcări alternative).
a) citim un 1 din y, scriem 1̀, ← SAU PAS EXCAPRE
b) cât timp citim 1̀ sau 1'' din y, nu modific, ←
c) 0,0, ←, schimbăm starea.
d) cât timp citim 1 din X, scriem 1, ←
e) citim 1̀ din X, scriem 1̀, →
f) citesc un 1 din X, scriu 1', → SAU SARI LA P4)a)
g) cât timp citesc 1 din X, scriu 1, →
h) 0,0, → (stare nouă)
i) cât timp citim 1'', 1' din y, nu modificăm, →
j) citim 1 din y, scriem 1̀, ←, SARI LA P2)b), SAU P3)b)

P3) a) 2,2, →
b) cât timp citim 1, (din cât) scriem 1, →
c) B, 1, ← (incrementez catul)
d) cât timp citim 1,2, nu modificăm, ←
e) cât timp citim 1̀ din y sau 1, ←
f) citim 1'', scriem 1'', →, SARI LA P2)a).

P4) a) 0,0, →
b) cât timp citim 1̀, 1', 1, 2, nu modificăm, →
c) B, B, ←
d) cât timp citim 1, 2, 1̀, nu modificăm, ←
e) 1'', 1'', → SAR LA P5)

P5) (copiem restul ca fiind partea de 1̀ din y).
a) citim 1̀ din y, scriem 1, →
b) cât timp citim 1,2,B, nu modificăm, →
c) citim B, scriem 1, ← (incrementăm restul)

Scanned by CamScanner

d) cât timp citim 1, 2, 3, nu modificăm, ←

e) citim i din y, scriem i, →, SAR LA P5) b), SAU P6)

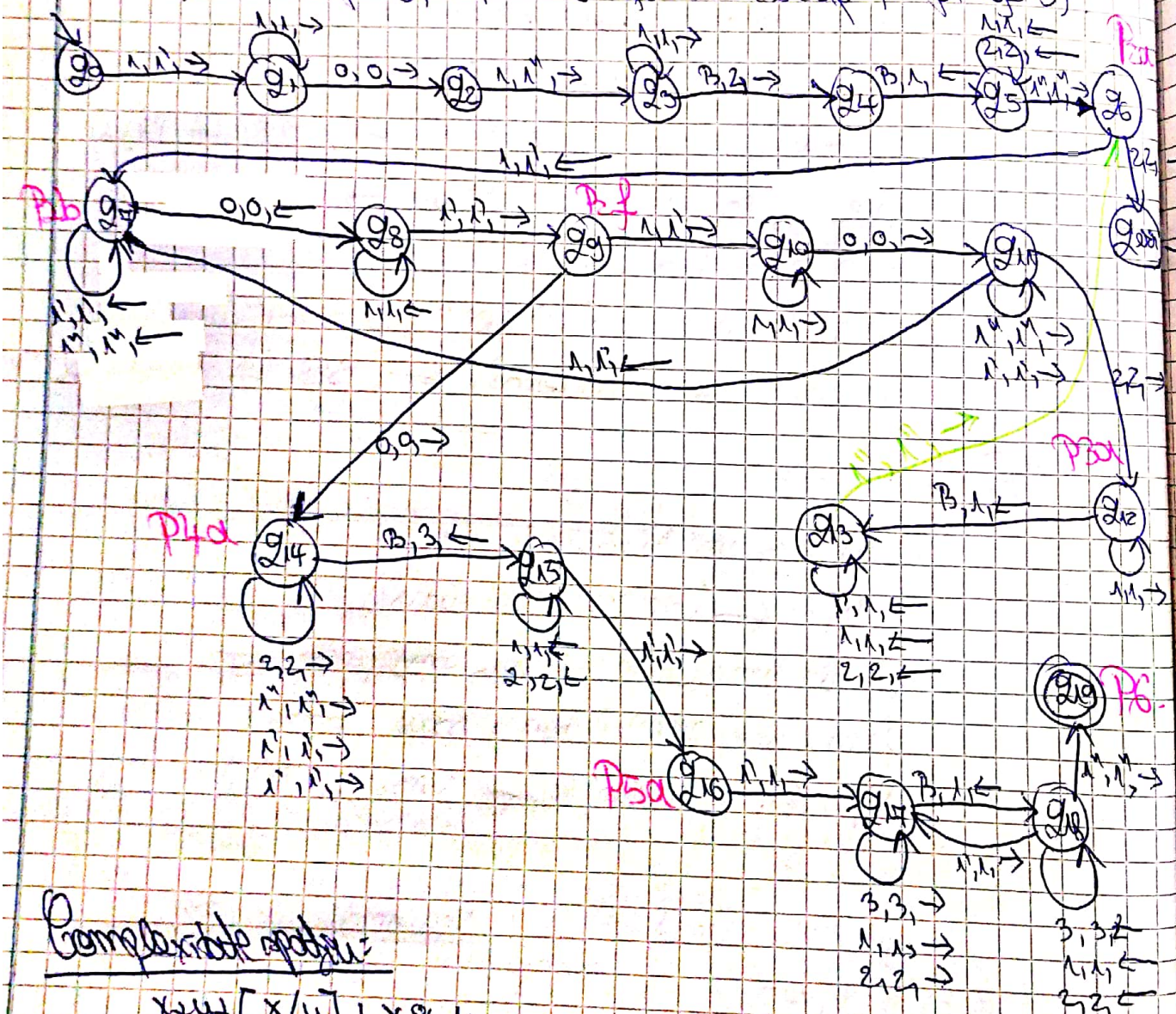
P6) citim 1'', 1'', → (stare finală)

PAS EROARE)

a) 2, 2, →

b) 1, 1, →

c) cât timp B, #, → (moșteni nu se oprește pt. y = 0)



Complexitate spațiu:

$$x + y + \underbrace{[x/y]}_{c} + \underbrace{x \% y}_{r}.$$

Complexitate timp:

$$\underbrace{x+y}_{P1} + \underbrace{c}_{\text{nr. secvențe la P2a}} \cdot \Big[\underbrace{1}_{P2a} + \underbrace{y}_{\text{nr. secvențe P2b}} \cdot \underbrace{2x}_{d(2b;2g)} + \underbrace{c}_{P3} \Big] + \underbrace{y+c}_{P4} + \underbrace{r}_{\text{nr. secvențe la P5b}} \underbrace{(y+c+r)}_{d(P5b;P5a)} + \overbrace{1}^{P6.}$$

$$\Longrightarrow O(xy \cdot c) = O(x^2).$$

Scanned by CamScanner

13.11.2019

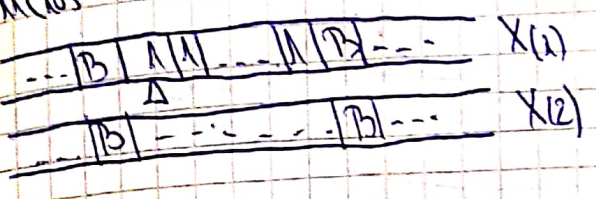
4

mMT

$\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma^m \longrightarrow 2^{Q \times \Gamma^m \times \{\leftarrow ; \bullet ; \rightarrow\}^m}$

① Se dă $x \in \mathbb{N}$ în b1. Transformați în baza 2. (2 metode)

$x_{(1)} = 11_{(10)} \Rightarrow 1011$



Rezolvare cu tranziții:

P1) $\begin{cases} B_1 : 1, 1, \rightarrow \\ B_2 : B, B, \bullet \end{cases}$

P2) (Numărăm 1-urile de pe B_1 la 2)

a) cât timp $\begin{cases} B_1 : 1, 1, \rightarrow \\ B_2 : B, B, \bullet \end{cases}$

b) $B_1 : 1, 1, \rightarrow$ (primul 1 din perechea) SAU SARI P3a)

c) cât timp $B_1 : 1, 1, \rightarrow$

d) $B_1 : 1, 1, \rightarrow$ (al doilea 1 din perechea) SARI P2a)
SAU SARI P3b)

P3) a) $\begin{cases} B_1 : B, B, \leftarrow \\ B_2 : B, 0, \leftarrow \end{cases}$ SARI LA P4a)

b) $\begin{cases} B_1 : B, B, \leftarrow \\ B_2 : B, 1, \leftarrow \end{cases}$ SARI LA P4a)

P4) a) cât timp $\begin{cases} B_1 : 1, 1, \leftarrow \\ B_2 : B, B, \bullet \end{cases}$

b) i) $B_1 : 1, 1, \leftarrow$ (schimb starea), SARI P4c)
SAU
ii) $B_1 : B, B, \rightarrow$, STARE FINALĂ

c) cât timp $B_1 : 1$ sau 1, nu modific, $\leftarrow$

d) $B_1 : B, B, \rightarrow$, SARI P2a)

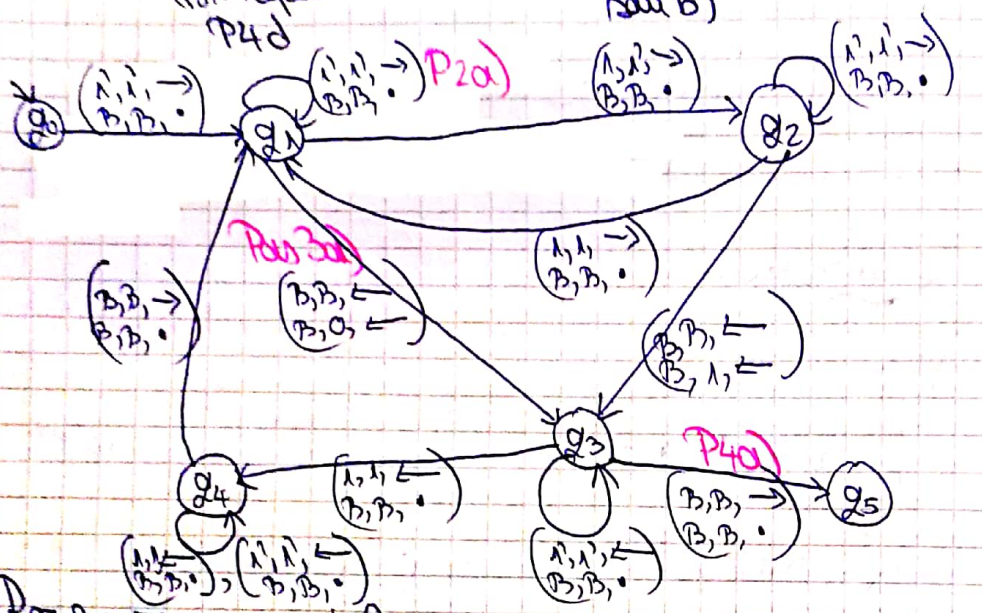
Scanned by CamScanner

Complexitatea spațiu:

$x + \log_2 x$

Complexitatea timp:

$\underbrace{1}_{P_1} + \underbrace{\log_2 x}_{\text{nr. rotunjiri } P4d} + \underbrace{x}_{P2a) \to P2d)} + \underbrace{1}_{P3a) \text{ sau } b)} + \underbrace{x}_{P4a) \to P4c)} \Rightarrow O(x \log_2 x)$



Rezolvare cu module:

$x = 11$

B_1: ---|B|1 1 1 1 --- 1 1|B|--- $x_{(1)}$

B_2: ---|B| - - - - |B|--- $x_{(2)}$

P1) $\begin{cases} B_1: 1, 1, \rightarrow \\ B_2: B, 0, \rightarrow \end{cases}$

P2) (pt. fiecare 1 din x îl adunăm modulo 2 la B_2).

a) i) $\begin{cases} B_1: B, B, \bullet \\ B_2: B, B, \bullet \end{cases}$ STARE FINALĂ

SAU

ii) $\begin{cases} B_1: 1, 1, \bullet \\ B_2: B, B, \leftarrow \end{cases}$ SARI LA P3a)

P3) (adunarea)

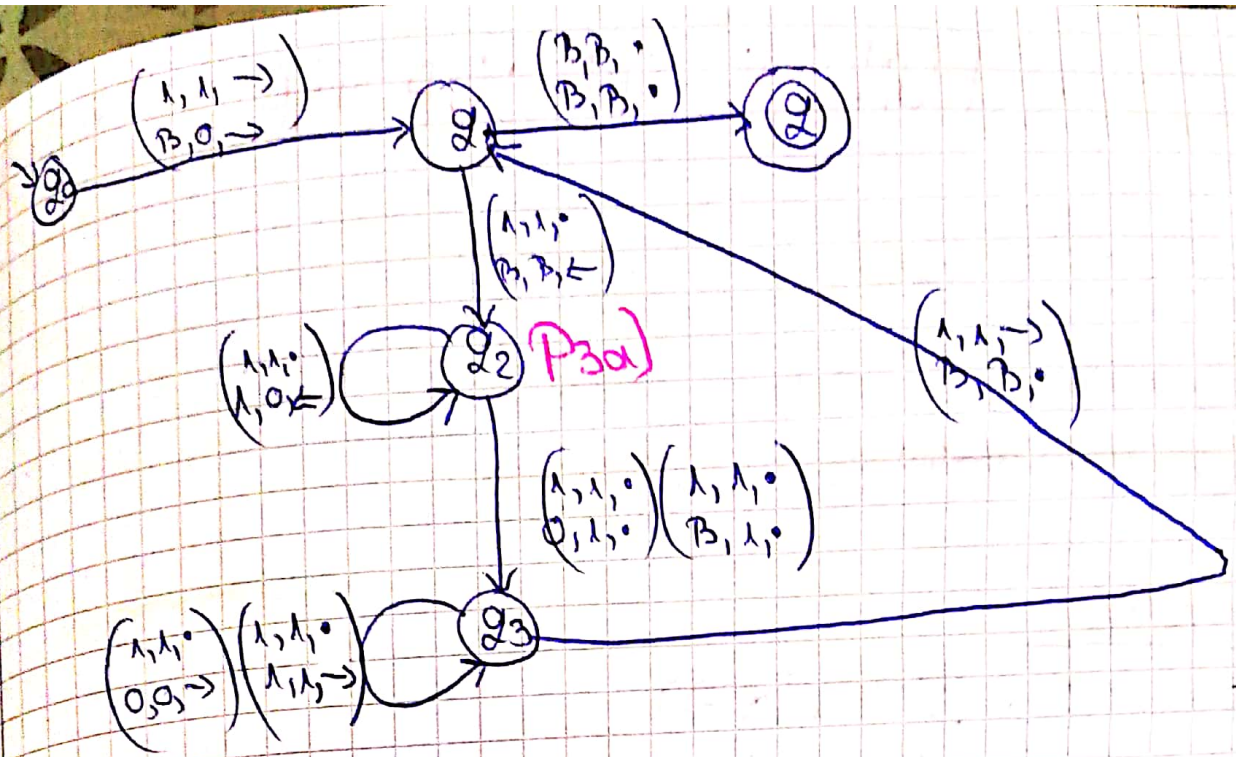
a) cât timp $\begin{cases} B_1: 1, 1, \bullet \\ B_2: 1, 0, \leftarrow \end{cases}$

b) B_2: 0 sau B, 1, • , SARI LA P3c)

c) cât timp B_2: 0 sau 1, nu modific, →

d) $\begin{cases} B_1: 1, 1, \rightarrow \\ B_2: B, B, \bullet \end{cases}$ SARI LA P2a)

Scanned by CamScanner



Complexitate spațiu:

$x + \log_2 x$

Complexitate timp:

$$\underbrace{1}_{P_1} + \underbrace{x}_{\text{nr. iterații la P2a)}} \cdot \underbrace{(2\log_2 x)}_{P_3} \Rightarrow O(x \log_2 x)$$

② Exm b1 - Calculați partea întreagă x din $\sqrt{x}$.
Manual

$1^2 = 1$

$2^2 = 1+3$

$3^2 = 1+3+5$

$4^2 = 1+3+5+7$

$k^2 = 1+3+\dots+(2k-1)$

Scanned by CamScanner

FUNCȚII RECURSIVE

27.11.2019.

Fcț. elem.:

- succesor: $succ(x) = x+1$
- constanta: $C_k^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = k$
- proiecție: $\Pi_k^{(m)}(x_1, \dots, x_k) = x_k$

Operații:

- compunere: $\rightarrow f(x) = h(g(x))$

  $\rightarrow f(x_1, \dots, x_m) = h(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m))$

- recurență: $\rightarrow \begin{cases} f(0) = k \in \mathbb{N} \\ f(t+1) = g(t, f(t)) \end{cases}$

  $\rightarrow \begin{cases} f(x_1, \dots, x_m, 0) = h(x_1, \dots, x_m) \\ f(x_1, \dots, x_m, t+1) = g(x_1, \dots, x_m, t, f(x_1, \dots, x_m, t)) \end{cases}$

- minimizarea nemărginită: $f(x_1, \dots, x_m) = \min_t P(x_1, \dots, x_m, t)$
- minimizarea mărginită: $f(x_1, \dots, x_m, y) = \min_{t \le y} P(x_1, \dots, x_m, t)$

① $f_+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; calculabilă

$f_+(x_1, 0) = x_1 + 0 = x_1 = \Pi_1^{(1)}(x_1)$

$f_+(x_1, t+1) = (x_1 + t) + 1 = succ(\Pi_3^{(3)}(x_1, t, f_+(x_1, t)))$

② $f_*(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$f_*(x_1, 0) = x_1 \cdot 0 = 0 = C_0^{(1)}(x_1)$

$f_*(x_1, t+1) = x_1 \cdot (t+1) = (x_1 \cdot t) + x_1 = f_+(\Pi_3^{(3)}(x_1, t, f_*(x_1, t))) =$

$= \Pi_1^{(3)}(x_1, t, f_*(x_1, t)))$.

③ $f_\wedge(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$

$f_\wedge(x_1, 0) = x_1^0 = 1 = C_1^{(1)}(x_1)$.

$f_\wedge(x_1, t+1) = x_1^{t+1} = x_1^t \cdot x_1 = f_*(\Pi_3^{(3)}(x_1, t, f_\wedge(x_1, t)), \Pi_1^{(3)}(x_1, t, f_\wedge(x_1, t)))$

Scanned by CamScanner

④ $f_!(x) = x!$

$$\begin{cases} f_!(0) = 1 \\ f_!(t+1) = t! \cdot (t+1) = f_* \left(\pi_2^{(2)}(t, f_1(t)), succ(\pi_1^{(2)}(t, f(t))) \right) \end{cases}$$

⑤ $Pred(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$

$Pred(0) = 0$

$Pred(t+1) = t = \pi_1^{(2)}(t, Pred(t))$

⑥ $f_{\dot{-}}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2, & x_1 \geq x_2 \\ 0, & x_1 < x_2 \end{cases}$

$f_{\dot{-}}(x_1, 0) = x_1 \dot{-} 0 = x_1 = \pi_1^{(1)}(x_1)$

$f_{\dot{-}}(x_1, t+1) = x_1 \dot{-} t+1 = (x_1 \dot{-} t) - 1 = Pred(\pi_3^{(3)}(x_1, t, f_{\dot{-}}(x_1, t)))$

⑦ $f_{|-|}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$

$f_{|-|}(x_1, x_2) = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1) = f_+(f_{\dot{-}}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}(\pi_2^{(2)}(x_1, x_2), \pi_1^{(2)}(x_1, x_2)))$

⑧ $f_{max}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & x_1 \geq x_2 \\ x_2, & x_1 < x_2 \end{cases}$

$f_{max}(x_1, x_2) = x_2 + (x_1 \dot{-} x_2) = f_+(\pi_2^{(2)}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}(x_1, x_2))$

⑨ $f_{min}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & x_1 \leq x_2 \\ x_2, & x_1 > x_2 \end{cases}$

$f_{min}(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_1 \dot{-} x_2) = f_{\dot{-}}(\pi_1^{(2)}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}(x_1, x_2))$.

Scanned by CamScanner

PREDICATE

(10) $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

$\alpha(0) = 1$

$\alpha(t+1) = 0 = C_0^{(2)}(t, \alpha(t))$

(11) $f_=(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2 \\ 0, & x_1 \neq x_2 \end{cases}$

$f_=(x_1, x_2) = \alpha(f_{|}(x_1, x_2))$.

(12) $f_\leq(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x_1 \leq x_2 \\ 0, & \text{dacă } x_1 > x_2 \end{cases}$

$f_\leq(x_1, x_2) = \alpha(f_\leq(x_1, x_2))$.

Afirmația 1:

Dacă P și Q sunt calculabile, atunci și urm. predicate sunt calculabile:

$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$.

$\neg P = \alpha(P)$

$P \wedge Q = P \cdot Q = \min(P, Q)$

$P \vee Q = \alpha(\alpha(P) * \alpha(Q))$

$= \max(P, Q)$

$= P + Q - P * Q$

$= \alpha(\alpha(P + Q))$

Afirmația 2:

Dacă g și h sunt funcții calculabile, iar P predicat calculabil, atunci f funcție calculabilă

$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n), & P(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ h(x_1, \dots, x_n), & P(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$

Scanned by CamScanner

$f = (g \text{ if } P \text{ else } h).$

$f = (g \cdot P + h \cdot \alpha(P))$

Afirmația 3:

Dacă f este calculabilă, atunci g și h sunt calculabile.

$$g(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \sum_{t=0}^{x_{m+1}} f(x_1, \dots, x_m, t)$$

$$h(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \prod_{t=1}^{x_{m+1}} f(x_1, \dots, x_m, t)$$

$$g(x_1, \dots, x_m, 0) = f(x_1, \dots, x_m, 0)$$

$$g(x_1, \dots, x_m, k+1) = \sum_{t=0}^{k+1} f(x_1, \dots, x_m, t) = g(x_1, \dots, x_m, k) + f(x_1, \dots, x_m)$$

Afirmația 4:

Dacă P este calculabil, atunci și urm. predicate sunt calculabile:

$$(\forall) t \le x_{m+1} \; P(x_1, \dots, x_m, t) \iff \left[\prod_{t=1}^{x_{m+1}} P(x_1, \dots, x_m, t)\right] = 1$$

$$(\exists) t \le x_{m+1} \; P(x_1, \dots, x_m, t) \iff \left[\sum_{t=1}^{x_{m+1}} P(x_1, \dots, x_m, t)\right] \ne 1.$$

(13.) $P_{divizibil}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x_1 / x_2 \\ 0, & \text{dacă } x_1 \nmid x_2. \end{cases}$

$P_{divizibil}(x_1, x_2) = (\exists) t \le x_2 \; [t \cdot x_1 = x_2]$

$P_{:}(x_1, x_2) = (\exists) t \le x_1 \; [t \cdot x_2 = x_1].$

(14.) $Prim(x) \iff (x > 1) \wedge (\forall) t \le x \; [t = 0 \vee t = 1 \vee \alpha(P_{:}(x, t))].$

(15.) $f_{/}(x_1, x_2) = [x_1 / x_2]$

$f_{/} = \min_{t \le x_1} x_2 (t+1) > x_1$

(16.) $f_{\%}(x_1, x_2) = x_1 \% x_2 = x_1 - x_2 \cdot f_{/}(x_1, x_2)$

$= \min_{t \le x_2} [x_2 \mid (x_1 - t)]$

Scanned by CamScanner

(17) p_m = al m-lea nr. prim

$p_0 = 0$

$p_{m+1} = \min_{t \in [p_m]!+1} [\text{prim}(t) \wedge t > p_m]$

(18) funcția pereche

$f = \langle x, y \rangle = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$

$l(z) = x = \min_{t \le z} [2^{t+1} \nmid (z+1)]$.

$r(z) = y = (z+1)_{l \le z}$ $[z = \langle x, y \rangle]$

(19) $[a_1, a_2, \dots, a_m] = \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i}$

$[a_1, \dots, a_m] = [a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0] \neq [0, \dots, 0, a_1, \dots, a_m]$.

$[\,] = 1$

$(x)_i = \min_{t \le x} [\alpha(p / p_i^{t+1}, x)]$.

(20) $L_i(x) = \min_{j \le x} [(x)_i \neq 0 \wedge (\forall)_{j \le i} (j \le i \vee (x)_j = 0)]$.

11. 12. 2019.

(1) x în bin memor. Calculați parte informează x din $\sqrt{x}$.

VAR. I

$x = 10$

$[\sqrt{x}] = 3$.

$x(1)$

$y \in \{1, 2, 3, \dots, [\sqrt{x}]\}$

P1) $\begin{cases} B_1 := 1, 1, \rightarrow \\ B_2 := B, 1, \rightarrow \end{cases}$

P2) comparăm y^2 cu x

a) $\begin{cases} B_1 := 1, 1, \cdot \\ B_2 := 1, 1, \leftarrow \end{cases}$

Scanned by CamScanner

b) cât timp B_2: 1', 1', ←

c) B_2: B, B, → SAU SARI P3a)

P3) parcurgem încă y unități din x.

a) cât timp { B_1: 1, 1, →
B_2: 1' sau 1, nu modific, →

b) – dacă (x<y²) { B_1: B, B, •
B_2: 1' sau 1, nu modific, → SAU SARI P4a)

SAU
– dacă (x≤y²) { B_1: B, B, •
B_2: B, B, • SAU SARI P5)

SAU
– dacă { B_1: 1, 1, •
B_2: B, B, ← SAU SARI P6)

P4) decrementăm y.

a) cât timp B_2: 1' sau 1, nu modific, →

b) B_2: B, B, ←

c) B_2: 1' sau 1, nu modific, ←

d) cât timp B_2: 1' sau 1, sărim 1, ←

e) B_2: B, B, → STARE FINALĂ

P5) verificăm dacă s-a terminat calculul lui y².

– dacă (x=y²) B_2: 1', 1', →
B_2: B, 1, ← SAU SARI P4d)

SAU
– dacă (x<y²) B_2: 1, 1, ← SARI LA P4d)

P6)

– dacă B_2: 1, 1, ←

cât timp B_2: 1, 1, ←

B_2: 1', 1', → SARI LA P2a)

SAU
– dacă (x>y²) B_2: 1', 1', →
B_2: B, 1, ← (y++) | cât timp B_2: 1', 1, ←
B_2: B, B → SARI LA P2a)

Scanned by CamScanner

Complexitate spațiu:

$x+\sqrt{x}$

Complexitate timp:

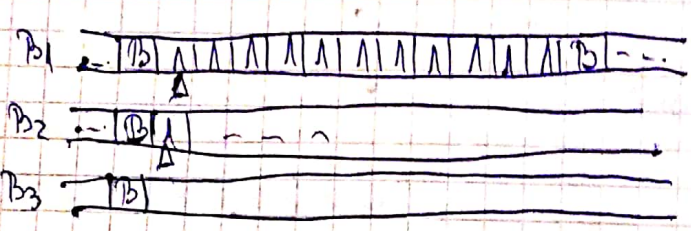
$$\underset{P_1}{1}+\underset{\text{nr. reprezintă la P2a)}}{\sqrt{x}}\,(\underset{P2b}{y}+\underset{P3a}{y}+\underset{P6}{y})+\underset{P4 \text{ sau } P5}{2y} = 1+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{x} = \cancel{O(x)}\ O(x\sqrt{x})$$

$y \simeq \sqrt{x}$

VAR II.

$x=10$

$[\sqrt{x}]=3$



x (1)

$y \in \{1;2;3;\dots;[\sqrt{x}]\}$

$\frac{x}{y}$.

P1)

$$\begin{cases} B_1: A, A, \rightarrow \\ B_2: B, A, \rightarrow \\ B_3: B, B, \bullet \end{cases}$$

P2) pe B3 calculăm $\frac{B_1}{B_2}$

a) $\begin{cases} B_1: A, A, \rightarrow \\ B_2: A, A, \rightarrow \end{cases}$

b) – dacă $\begin{cases} B_1: A, A, \bullet \\ B_2: B, B, \leftarrow \\ B_3: B, A, \rightarrow \end{cases}$ SARI P3a)

SAU

– dacă rest $\neq 0$ $\begin{cases} B_1: B, B, \bullet \\ B_2: A, A, \rightarrow \\ B_3: B, B, \bullet \end{cases}$ SARI P4a)

SAU

– dacă rest $=0$ $\begin{cases} B_1: B, B, \bullet \\ B_2: B, B, \leftarrow \\ B_3: B, B, \leftarrow \end{cases}$ SARI P4)

P3)

a) cât timp $\begin{cases} B_2: A, A, \leftarrow \\ B_3: B, B, \bullet \end{cases}$

b) $B_2: B, B, \rightarrow$ SARI P2a) (*)

Scanned by CamScanner

P4)

a) cât timp B_2: 1, 1, →

b) $\begin{cases} B_2: B, B, \leftarrow \\ B_3: B, B, \leftarrow \end{cases}$

c) comparăm B_2 cu B_3

cât timp $\begin{cases} B_2: 1, 1, \leftarrow \\ B_3: 1, 1, \leftarrow \end{cases}$

d) – dacă ($B_2 = B_3$) $\begin{cases} B_2: B, 1, \bullet \\ B_3: B, B, \bullet \end{cases}$ STARE FINALĂ

SAU

– dacă ($B_2 < B_3$) $\begin{cases} B_2: B, 1, \bullet \\ B_3: 1, 1, \bullet \end{cases}$ (y++) SARI P5)

SAU

– dacă ($B_2 > B_3$) nu există

P5)

a) $\begin{cases} B_1: B, B, \leftarrow \\ B_2: 1, 1, \bullet \\ B_3: 1, 1, \bullet \end{cases}$

b) cât timp B_1, B_2, B_3: 1, 1, ←

c) cât timp $\begin{cases} B_2: B, B, \bullet \\ B_3, B_1: 1, 1, \leftarrow \end{cases}$

d) cât timp $\begin{cases} B_1: 1, 1, \leftarrow \\ B_2, B_3: B, B, \bullet \end{cases}$

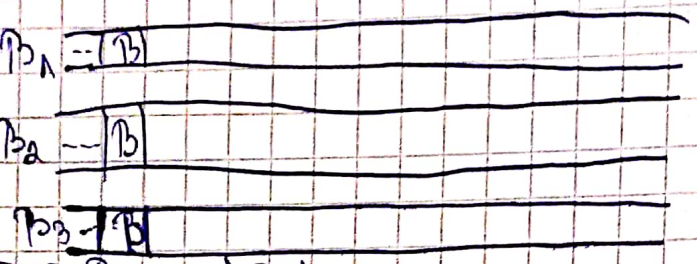
e) B_1, B_2, B_3: B, B, →

f) B_1: 1, 1, → SARI P2a) (**)

<u>Complexitate spațiu:</u> $x + 2\sqrt{x}$

<u>Complexitate timp:</u> $1 + \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{nr. rotirii la P5b) (**)}} \left[\underbrace{B_3}_{\text{nr. rotirii la P5b (*)}} \underbrace{(2 \cdot B_2)}_{\text{P2a) 2a + 3a}} + \underbrace{\overbrace{B_2}^{\sqrt{x}}}_{P4c} + \underbrace{x}_{P5} \right] = O(x\sqrt{x})$

VAR. III



$x_{(1)}$

$y \in \{1; 3; 5; 7; \dots; 2\lfloor\sqrt{x}\rfloor - 1\}$

P1) inițializăm B_2 cu $1 = y$

P2) a) "rotim" y unități din x (parcurgem simultan B_1 și B_2).

b) – dacă benzile se termină simultan (x = pătrat perfect), STARE FINALĂ

SAU

– dacă B_2 se termină înainte de B_1 ⇒ $\begin{cases} B_2 = B_2 + 2 \\ B_3 + 1 \end{cases}$, ne întoarcem la începutul lui B_2, sărim la P2a

SAU

– dacă B_1 se termină înainte de B_2 ; B_3 – STARE FINALĂ

Complexitate spațiu: $x + 3\sqrt{x}$

Complexitate timp: $\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{nr. reveniri la P2a}} (2 \cdot (2\sqrt{x} + 1)) \Rightarrow O(x)$.

Scanned by CamScanner