Búsqueda binaria

Miguel Ortiz

Programación competitiva para ICPC

Abril 2023 - Cochabamba, Bolivia

Problema de ejemplo

Dado un arreglo **ordenado** de enteros, indicar si contiene un elemento *val* o no.

Problema de ejemplo

Dado un arreglo **ordenado** de enteros, indicar si contiene un elemento *val* o no.

Algoritmo:

- Revisamos el elemento del medio
    - Si es *val*, terminamos
    - Si es mayor que *val*, buscamos en la mitad izquierda
    - Si es menor que *val*, buscamos en la mitad derecha

Problema de ejemplo

Dado un arreglo **ordenado** de enteros, indicar si contiene un elemento *val* o no.

Algoritmo:

- Revisamos el elemento del medio
  - Si es *val*, terminamos
  - Si es mayor que *val*, buscamos en la mitad izquierda
  - Si es menor que *val*, buscamos en la mitad derecha
- Hacemos lo mismo en las mitades más pequeñas hasta encontrar el número o hasta que no queden más elementos

Problema de ejemplo

Dado un arreglo **ordenado** de enteros, indicar si contiene un elemento *val* o no.

Algoritmo:

- Revisamos el elemento del medio
  - Si es *val*, terminamos
  - Si es mayor que *val*, buscamos en la mitad izquierda
  - Si es menor que *val*, buscamos en la mitad derecha
- Hacemos lo mismo en las mitades más pequeñas hasta encontrar el número o hasta que no queden más elementos
- Primero hay n candidatos, luego $\frac{n}{2}$, luego $\frac{n}{4}$, etc.
- $O(\log n)$

Problema de ejemplo

$val = 22$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
lo						m						hi

Problema de ejemplo

$val = 22$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo		m	m		hi

Problema de ejemplo

$val = 22$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo		m			hi

Problema de ejemplo

$val = 22$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo	hi	×	×	×	×
							m					

Problema de ejemplo

$val = 22$

1	4	5	8	11	19	21	**22**	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo	hi	×	×	×	×
							m					

Problema de ejemplo

$val = 23$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
lo						m						hi

Problema de ejemplo

$val = 23$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo		m			hi

Problema de ejemplo

$val = 23$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo	hi	×	×	×	×
							m					

Problema de ejemplo

$val = 23$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	×	lo	×	×	×	×
								hi				
								m				

Problema de ejemplo

$val = 23$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
							hi	lo				

Problema de ejemplo

```
... // leer n, val, arreglo a
int lo = 0, hi = n-1;
int res = -1;
while (lo <= hi) {
  int mid = (lo + hi) / 2;
  if (a[mid] == val) {
    res = mid;
    break;
  }
  else if (val < a[mid]) {
    hi = mid - 1;
  }
  else { // val > a[mid]
    lo = mid + 1;
  }
}
// val esta en la posicion res, -1 si no esta
```

Forma general

- Trabajar sobre un rango de enteros
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ cumple la propiedad} \\ 0 & \text{si } x \textbf{ no} \text{ cumple la propiedad} \end{cases}$
- $f(x)$ es monótona $\star$

Forma general

- Trabajar sobre un rango de enteros
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ cumple la propiedad} \\ 0 & \text{si } x \textbf{ no} \text{ cumple la propiedad} \end{cases}$
- $f(x)$ es monótona $\star$

$$val = 22 \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq val \\ 0 & \text{si } x < val \end{cases}$$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Forma general

- Trabajar sobre un rango de enteros
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ cumple la propiedad} \\ 0 & \text{si } x \textbf{ no} \text{ cumple la propiedad} \end{cases}$
- $f(x)$ es monótona $\star$

$$val = 22 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq val \\ 0 & \text{si } x < val \end{cases}$$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

- Podemos buscar el primer 1 o el último 0

Forma general

```
int lo = 0, hi = n-1;
int res = -1;
while (lo <= hi) {
  int mid = (lo + hi) / 2;
  if (f(mid) == 1) {
    res = mid; // mejor respuesta hasta ahora
    hi = mid - 1;
  }
  else { // f(mid) == 0
    lo = mid + 1;
  }
}
// Primer 1 esta en la posicion res
```

Forma general

$val = 25$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
lo						m						hi

Forma general

$val = 25$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo		m			hi
									res			

Forma general

$val = 25$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	lo	hi	×	×	×	×
							m					
									res			

Forma general

$val = 25$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	×	lo	×	×	×	×
								hi				
								m				
								res	~~res~~			

Forma general

$val = 25$

1	4	5	8	11	19	21	22	25	29	31	37	42
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
							hi	lo				
								res	~~res~~			

Problema de ejemplo

Tenemos n piezas rectangulares de tamaño $a \times b$. ¿Cuál es el tamaño más pequeño que puede tener el lado de un cuadrado que contenga a todas las piezas?

Las piezas no se pueden rotar ni superponer. El tamaño del cuadrado debe ser entero.

Problema de ejemplo

Tenemos n piezas rectangulares de tamaño $a \times b$. ¿Cuál es el tamaño más pequeño que puede tener el lado de un cuadrado que contenga a todas las piezas?

Las piezas no se pueden rotar ni superponer. El tamaño del cuadrado debe ser entero.

- Si las n piezas entran en un cuadrado de lado x, entrarán en uno de lado $x + 1$
- Si las n piezas no entran en un cuadrado de lado x, no entrarán en uno de lado $x - 1$

Problema de ejemplo

Tenemos n piezas rectangulares de tamaño $a \times b$. ¿Cuál es el tamaño más pequeño que puede tener el lado de un cuadrado que contenga a todas las piezas?

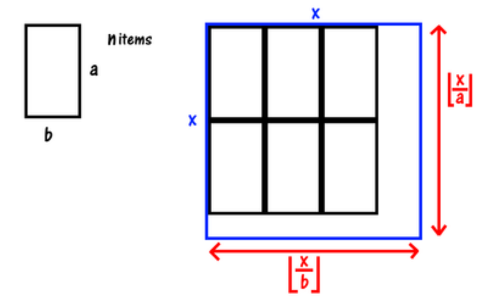
Las piezas no se pueden rotar ni superponer. El tamaño del cuadrado debe ser entero.

- Si las n piezas entran en un cuadrado de lado x, entrarán en uno de lado $x + 1$
- Si las n piezas no entran en un cuadrado de lado x, no entrarán en uno de lado $x - 1$
- Función monótona $0, 0, ..., 0, 0, 0, 1, 1, 1, ...$

Problema de ejemplo

Un cuadrado de $x \cdot x$ puede:

- acomodar $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor$ piezas de un lado
- acomodar $\lfloor \frac{x}{b} \rfloor$ piezas del otro lado



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lfloor \frac{x}{a} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{b} \rfloor \geq n \\ 0 & \text{si } \lfloor \frac{x}{a} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{b} \rfloor < n \end{cases}$$