

# Combinatoria

---

Miguel Ortiz

**Programación competitiva para ICPC**

Octubre 2023

# Introducción

---

- **Combinatoria** es el estudio de estructuras discretas contables
- En competencias, los problemas de combinatoria se reducen a:
  - "Contar [Objeto que cumple propiedad]"
  - "¿De cuántas formas se puede [Formar objeto que cumple propiedad]?"
  - etc.
- Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras A, B, C, ..., Z (26 letras)? Se permiten letras repetidas

- **Combinatoria** es el estudio de estructuras discretas contables
- En competencias, los problemas de combinatoria se reducen a:
  - "Contar [Objeto que cumple propiedad]"
  - "¿De cuántas formas se puede [Formar objeto que cumple propiedad]?"
  - etc.
- Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras A, B, C, ..., Z (26 letras)? Se permiten letras repetidas
- Usualmente, enumerar los objetos uno por uno es muy lento

# Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
    for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
        for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
            for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
                cnt++;
            }
        }
    }
}
```

# Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
    for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
        for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
            for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
                cnt++;
            }
        }
    }
}
```

- $\alpha$  = tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$

# Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
    for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
        for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
            for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
                cnt++;
            }
        }
    }
}
```

- $\alpha$  = tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$
- ¿Y si pidieran palabras de 10 letras?

# Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
    for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
        for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
            for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
                cnt++;
            }
        }
    }
}
```

- $\alpha$  = tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$
- ¿Y si pidieran palabras de 10 letras?
- ¿O de  $10^{18}$  letras módulo  $10^9 + 7$



- El código de la solución es usualmente corto (aplicar una fórmula)
- Encontrar la fórmula es la parte difícil

- El código de la solución es usualmente corto (aplicar una fórmula)
- Encontrar la fórmula es la parte difícil
- ¡Usen lápiz y papel!

# Colecciones

---

- Conjunto de elementos no repetidos
- El orden no importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre llaves
  - $\{M, A, T, E\}$
  - $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
  - $\{1, 3, 3\}$  **no** es un set

- Conjunto de elementos, pueden repetirse
- El orden no importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre llaves
  - $\{F, F, T\}$
  - $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
  - $\{1, 3, 3\}$

- Secuencia de elementos, puede haber repetidos
- El orden **si** importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre paréntesis
  - $(7, 7, 4, 9, 5, 5, 2, 6)$
  - $(A, M, O, R) \neq (R, O, M, A)$
  - $(\{5, 2\}, \{3, 7\}) = (\{2, 5\}, \{7, 3\})$

# Principio de multiplicación

---

# Principio de multiplicación

Si, al formar una lista de tamaño  $n$ , hay  $a_1$  posibilidades para elegir el primer elemento,  $a_2$  posibilidades para elegir el segundo elemento, ...,  $a_n$  posibilidades para elegir el elemento  $n$ . Entonces hay  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$  listas posibles.



# Principio de multiplicación

Si, al formar una lista de tamaño  $n$ , hay  $a_1$  posibilidades para elegir el primer elemento,  $a_2$  posibilidades para elegir el segundo elemento, ...,  $a_n$  posibilidades para elegir el elemento  $n$ . Entonces hay  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$  listas posibles.

Si  $n$  eventos ocurren al mismo tiempo, y el evento  $i$  puede ocurrir de  $a_i$  formas, entonces el número total de formas en que los eventos pueden ocurrir es  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ .

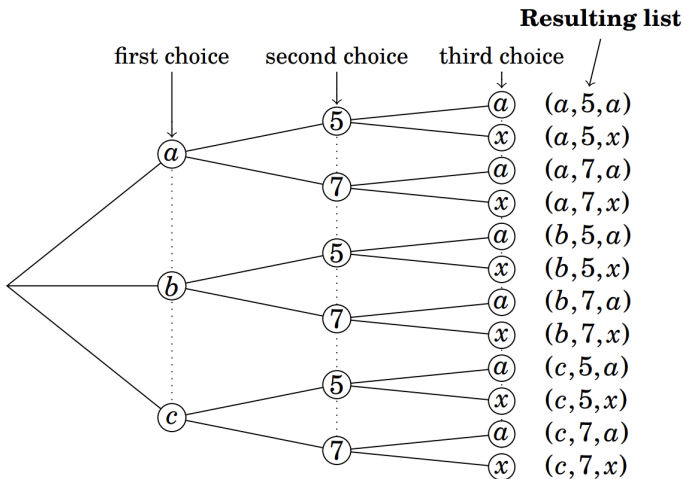
¿Cuántas listas podemos formar con 3 elementos, si el primer elemento pertenece al set  $\{a, b, c\}$ , el segundo a  $\{5, 7\}$  y el tercero a  $\{a, x\}$ ?

- $(a, 5, a)$  y  $(c, 7, x)$  son listas válidas

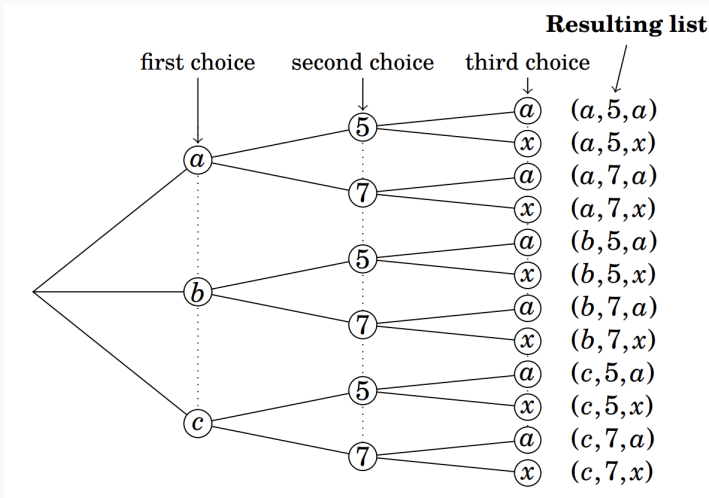
¿Cuántas listas podemos formar con 3 elementos, si el primer elemento pertenece al set  $\{a, b, c\}$ , el segundo a  $\{5, 7\}$  y el tercero a  $\{a, x\}$ ?

- $(a, 5, a)$  y  $(c, 7, x)$  son listas válidas
- Podemos visualizar las posibilidades como un árbol

# Principio de multiplicación



# Principio de multiplicación

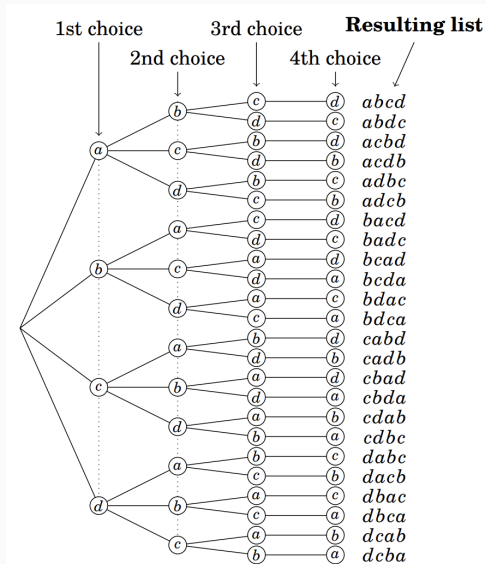


- Respuesta:  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  listas

¿Cuántas listas de tamaño 4 podemos formar con elementos del set  $\{a, b, c, d\}$  sin repetir letras?

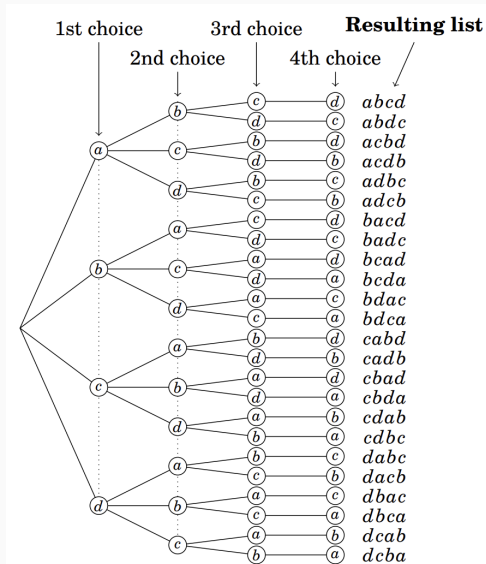
- $(a, b, c, d)$  y  $(d, c, b, a)$  son listas válidas
- $(a, a, b, c)$  y  $(a, b, c, c)$  no son listas válidas

# Principio de Multiplicación



- Primero tenemos 4 opciones, luego 3, luego 2, luego 1

# Principio de Multiplicación



- Primero tenemos 4 opciones, luego 3, luego 2, luego 1
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  listas



# Ejercicio

Utilizando letras del set  $\{T, H, E, O, R, Y\}$  y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra  $T$ ?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con  $T$ ?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

# Ejercicio

Utilizando letras del set  $\{T, H, E, O, R, Y\}$  y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra  $T$ ?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con  $T$ ?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

# Ejercicio

Utilizando letras del set  $\{T, H, E, O, R, Y\}$  y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra  $T$ ?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con  $T$ ?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

# Ejercicio

Utilizando letras del set  $\{T, H, E, O, R, Y\}$  y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra  $T$ ?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con  $T$ ?
  - $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

# Ejercicio

Utilizando letras del set  $\{T, H, E, O, R, Y\}$  y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra  $T$ ?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con  $T$ ?
  - $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?
  - $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$