

# Análisis de complejidad computacional — Complejidad de tiempo

---

Miguel Ortiz

**Programación competitiva para ICPC**

Octubre 2023

# Introducción

- El análisis de complejidad mide la cantidad de recursos que utiliza un algoritmo
- La eficiencia de algoritmos es *muy* importante en competencias de programación

# Complejidad de tiempo

- Para motivos prácticos, estima el tiempo que demora un algoritmo en función al tamaño de la entrada
- Regla general:  $10^8$  operaciones por segundo

# Notación Big O

---

Sea  $T(n)$  una función; dada otra función  $f(n)$ , se dice que  $T(n)$  es  $O(f(n))$  si existen constantes  $c > 0$  y  $n_0 \geq 0$ , tales que para todo  $n \geq n_0$  se tenga  $T(n) \leq c \cdot f(n)$

# Notación Big O

- $O(\dots) \rightarrow$  "O de ..."
- $\dots \rightarrow$  expresión matemática. Ej.:  $n, n^2, n + m, n2^n$

# Notación Big O

- $O(\dots) \rightarrow$  "O de ..."
- $\dots \rightarrow$  expresión matemática. Ej.:  $n, n^2, n + m, n2^n$
- Digamos  $O(n^2)$ . Reemplazamos  $n$  por su valor máximo en el problema
- $n \leq 10^5 \rightarrow n^2 = \boxed{10^{10}} \leftarrow$  cantidad aproximada de operaciones

# Notación Big O

- $O(\dots) \rightarrow$  "O de ..."
- $\dots \rightarrow$  expresión matemática. Ej.:  $n, n^2, n + m, n2^n$
- Digamos  $O(n^2)$ . Reemplazamos  $n$  por su valor máximo en el problema
- $n \leq 10^5 \rightarrow n^2 = \boxed{10^{10}}$   $\leftarrow$  cantidad aproximada de operaciones
- ¿Es eficiente?



# Notación Big O

- $X \leftarrow$  Cantidad aproximada de operaciones
- $X \leq 10^7 \rightarrow$  Probablemente se suficientemente rápido
- $X \approx 10^8 \rightarrow$  Zona de peligro
- $X \geq 10^9 \rightarrow$  Probablemente sea muy lento

## Notación Big O – Operaciones simples

```
int n;  
cin >> n;  
long long respuesta = (long long)n * (n-1) / 2;  
cout << respuesta << '\n';
```

- Cantidad constante de operaciones  $\rightarrow O(1)$
- Si  $n = 10^5$ , el código de arriba sigue siendo  $O(1)$

# Notación Big O – Ciclos

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Código se realiza  $n$  veces  $\rightarrow O(n)$

## Notación Big O – Ciclos

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    for (int j = 1; j <= n; ++j) {  
        // Código  $O(1)$   
    }  
}
```

- Código se realiza  $n \times n$  veces  $\rightarrow O(n^2)$

# Notación Big O – Ciclos

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    for (int j = 1; j <= n; ++j) {  
        // Código  $O(1)$   
    }  
}
```

- Código se realiza  $n \times n$  veces  $\rightarrow O(n^2)$
- Regla general: si hay  $k$  ciclos **anidados**, la complejidad es  $O(n^k)$

# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= 3*n; ++i) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $3n$  operaciones

# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= 3*n; ++i) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $3n$  operaciones
- $O(n)$

# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= n+5; ++i) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $n + 5$  operaciones



# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= n+5; ++i) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $n + 5$  operaciones
- $O(n)$

# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= n; i += 2) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $n/2$  operaciones

# Notación Big O – Orden de magnitud

```
for (int i = 1; i <= n; i += 2) {  
    // Código  $O(1)$   
}
```

- Realiza  $n/2$  operaciones
- $O(n)$

## Notación Big O – Fases

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    // Código O(1)  
}  
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    for (int j = 1; j <= n; ++j) {  
        // Código O(1)  
    }  
}  
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    // Código O(1)  
}
```

- $O(n + n^2 + n)$

## Notación Big O – Fases

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    // Código O(1)  
}  
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    for (int j = 1; j <= n; ++j) {  
        // Código O(1)  
    }  
}  
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    // Código O(1)  
}
```

- $O(n + n^2 + n)$
- $O(n^2)$

## Notación Big O – Más de una variable

```
for (int i = 1; i <= n; ++i) {  
    for (int j = 1; j <= m; ++j) {  
        // Código  $O(1)$   
    }  
}
```

- Realiza  $n \times m$  operaciones  $\rightarrow O(nm)$

Siempre calculen la complejidad de sus soluciones

# Ejercicios

---



```
int a = 1, b = 2;  
int c = a + b;
```

- Complejidad:

```
int a = 1, b = 2;  
int c = a + b;
```

- Complejidad:  $O(1)$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    res = res + i;  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    res = res + i;  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n)$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        res = res + i*j;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        res = res + i*j;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n^2)$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < 3*n; ++i) {  
    res = res + i%3;  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < 3*n; ++i) {  
    res = res + i%3;  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n)$



# Ejercicios

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        res = res - i*j;  
    }  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        for (int k = 0; k < n; ++k) {  
            res = res + i*(j - k);  
        }  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

# Ejercicios

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        res = res - i*j;  
    }  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        for (int k = 0; k < n; ++k) {  
            res = res + i*(j - k);  
        }  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n \times (n + n^2))$

# Ejercicios

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        res = res - i*j;  
    }  
    for (int j = 0; j < n; ++j) {  
        for (int k = 0; k < n; ++k) {  
            res = res + i*(j - k);  
        }  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n \times (n + n^2)) \rightarrow O(n^3)$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = i; j < n; ++j) {  
        res++;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = i; j < n; ++j) {  
        res++;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(\frac{n(n+1)}{2})$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = i; j < n; ++j) {  
        res++;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(\frac{n(n+1)}{2}) \rightarrow O(n^2)$

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < 8; ++j) {  
        res++;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n  
int res = 0;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    for (int j = 0; j < 8; ++j) {  
        res++;  
    }  
}  
cout << res << endl;
```

- Complejidad:  $O(n)$



```
vector<int> v;  
v.push_back(2023);
```

- Complejidad:

```
vector<int> v;  
v.push_back(2023);
```

- Complejidad:  $O(1)$

```
set<int> s;  
s.insert(2023);
```

- Complejidad:

```
set<int> s;  
s.insert(2023);
```

- Complejidad:  $O(\log_2 n) \rightarrow O(\log n)$

```
int n;  
cin >> n;  
set<int> s;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    s.insert((2*i + i/3) % n);  
}  
cout << s.size() << endl;
```

- Complejidad:

```
int n;  
cin >> n;  
set<int> s;  
for (int i = 0; i < n; ++i) {  
    s.insert((2*i + i/3) % n);  
}  
cout << s.size() << endl;
```

- Complejidad:  $O(n \log n)$