Teoría de números

Miguel Ortiz

Programación competitiva para ICPC

Octubre 2023

¿Cuál es la menor potencia de 2 que es divisible entre 3?

¿Cuál es la menor potencia de 2 que es divisible entre 3?

Pregunta trampa

Introducción

- Es un área de las matemáticas que estudia las propiedades de los números enteros
- Los números primos son muy importantes para su análisis

Introducción

- Es un área de las matemáticas que estudia las propiedades de los números enteros
- Los números primos son muy importantes para su análisis

- Se dice que un número es primo si es un número natural mayor a 1 y no es representable como el producto de dos naturales menores a él
- Solo tiene dos divisores: 1 y él mismo

Introducción

- Es un área de las matemáticas que estudia las propiedades de los números enteros
- Los números primos son muy importantes para su análisis

- Se dice que un número es primo si es un número natural mayor a 1 y no es representable como el producto de dos naturales menores a él
- Solo tiene dos divisores: 1 y él mismo
- Los números no primos se llaman *compuestos*

Encontrar divisores

- Se puede iterar por todos los números entre 1 y n y verificar si el residuo de la división es 0

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
  if (n % i == 0) {
    // i es divisor de n
  }
}
```

- $O(n)$

Encontrar divisores

- Si d divide a n, entonces $\frac{n}{d}$ también divide a n
- Si revisamos todos los valores d tal que $d \leq \frac{n}{d}$, solo necesitamos iterar hasta $\sqrt{n}$

```
for (int i = 1; i*i <= n; i++) {
  if (n % i == 0) {
    // i es divisor de n
    // n/i es divisor de n
  }
}
```

- $O(\sqrt{n})$

Encontrar divisores

- Si d divide a n, entonces $\frac{n}{d}$ también divide a n
- Si revisamos todos los valores d tal que $d \leq \frac{n}{d}$, solo necesitamos iterar hasta $\sqrt{n}$

```
for (int i = 1; i*i <= n; i++) {
  if (n % i == 0) {
    // i es divisor de n
    // n/i es divisor de n
  }
}
```

- $O(\sqrt{n})$
- Podemos usar esto para verificar si un número es primo

Criba de Eratóstenes

- Es posible encontrar todos los primos de 1 a n en $O(n\sqrt{n})$ con el anterior método
- La criba de Eratóstenes encuentra todos los primos de 1 a n en $O(n \log \log n)$

Criba de Eratóstenes

- Es posible encontrar todos los primos de 1 a n en $O(n\sqrt{n})$ con el anterior método
- La criba de Eratóstenes encuentra todos los primos de 1 a n en $O(n \log \log n)$

- El algoritmo construye un arreglo `criba` marcando todos los números compuestos
  - `criba[i]` es `true` si i es compuesto
  - `criba[i]` es `false` si i es primo

Criba de Eratóstenes

- Es posible encontrar todos los primos de 1 a n en $O(n\sqrt{n})$ con el anterior método
- La criba de Eratóstenes encuentra todos los primos de 1 a n en $O(n \log \log n)$

- El algoritmo construye un arreglo `criba` marcando todos los números compuestos
  - `criba[i]` es `true` si i es compuesto
  - `criba[i]` es `false` si i es primo
- Se revisan los números de 2 a n, si el número es primo, se marcan todos sus múltiplos como compuestos

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Criba de Eratóstenes

```
vector<bool> criba(n+1, false);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
    }
  }
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Encontrar factores primos

- Queremos encontrar los factores primos de un número x
- Guardamos los primos en un vector mientras realizamos la criba
- El exponente de p es igual a la cantidad de veces que p divide a x

```
map<int, int> factorizacion;
for (int p : primos) if (x % p == 0) {
  int e = 0;
  while (x % p == 0) {
    x /= p;
    e++;
  }
  factorizacion[p] = e;
}
if (x > 1) factorizacion[x] = 1;
```

Encontrar factores primos

- Queremos encontrar los factores primos de un número x
- Guardamos los primos en un vector mientras realizamos la criba
- El exponente de p es igual a la cantidad de veces que p divide a x

```
map<int, int> factorizacion;
for (int p : primos) if (x % p == 0) {
  int e = 0;
  while (x % p == 0) {
    x /= p;
    e++;
  }
  factorizacion[p] = e;
}
if (x > 1) factorizacion[x] = 1;
```

- Si generamos la criba hasta n, funciona para $x \leq n^2$ en $O(\pi(n))$

Encontrar factores primos

```
vector<bool> criba(n+1, false);
vector<int> primoMasGrande(n+1, -1);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
      primoMasGrande[j] = i;
    }
  }
}
```

Encontrar factores primos

```
vector<bool> criba(n+1, false);
vector<int> primoMasGrande(n+1, -1);
criba[0] = criba[1] = true; // 0 y 1 no son primos
for (int i = 2; i <= n; i++) {
  if (!criba[i]) {
    // i es primo
    for (int j = 2*i; j <= n; j += i) {
      criba[j] = true;
      primoMasGrande[j] = i;
    }
  }
}
```

- Ya no tenemos que buscar los primos en el vector `primos`
- Con una criba hasta n, acelera lo anterior a $O(\log n)$ para $x \leq n$

Teorema fundamental de la aritmética

Todo entero mayor a 1 puede ser representado como un **único** producto de números primos

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$$

Teorema fundamental de la aritmética

Todo entero mayor a 1 puede ser representado como un **único** producto de números primos

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$$

Por ejemplo:

- $999 = 2^3 \cdot 37$
- $1000 = 2^3 \cdot 5^3$
- $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

GCD y LCM

- Greatest Common Divisor (Máximo Común Divisor)
  - Dados dos números a y b, su GCD es el mayor número que divide a ambos
- Least Common Multiple (Mínimo Común Múltiplo)
  - Dados dos números a y b, su LCM es el menor número que es múltiplo de ambos

GCD y LCM

- Podemos calcular el GCD y LCM de dos números usando sus factorizaciones
- $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$
- $p^a / p^b = p^{a-b}$

GCD y LCM

- Podemos calcular el GCD y LCM de dos números usando sus factorizaciones
- $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$
- $p^a / p^b = p^{a-b}$
- Si d es un divisor de n, n debe tener todos los primos de d en su factorización con un exponente mayor o igual

GCD y LCM

- Podemos calcular el GCD y LCM de dos números usando sus factorizaciones
- $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$
- $p^a / p^b = p^{a-b}$
- Si d es un divisor de n, n debe tener todos los primos de d en su factorización con un exponente mayor o igual
- $\gcd(a, b)$ es el número cuya factorización tiene los exponentes mínimos entre a y b por cada primo
- Similarmente, $\operatorname{lcm}(a, b)$ tiene los exponentes máximos

GCD y LCM

- Podemos calcular el GCD y LCM de dos números usando sus factorizaciones
- $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$
- $p^a / p^b = p^{a-b}$
- Si d es un divisor de n, n debe tener todos los primos de d en su factorización con un exponente mayor o igual
- $\gcd(a, b)$ es el número cuya factorización tiene los exponentes mínimos entre a y b por cada primo
- Similarmente, $\operatorname{lcm}(a, b)$ tiene los exponentes máximos

- $\gcd(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^1) = 2^2 \cdot 3^2$

GCD y LCM

- Podemos calcular el GCD y LCM de dos números usando sus factorizaciones
- $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$
- $p^a / p^b = p^{a-b}$
- Si d es un divisor de n, n debe tener todos los primos de d en su factorización con un exponente mayor o igual
- $\gcd(a, b)$ es el número cuya factorización tiene los exponentes mínimos entre a y b por cada primo
- Similarmente, $\text{lcm}(a, b)$ tiene los exponentes máximos

- $\gcd(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^1) = 2^2 \cdot 3^2$
- $\text{lcm}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^1) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

GCD y LCM

- Este método es bueno para pensar en soluciones o demostrarlas, pero no es eficiente y es tedioso de implementar
- Se pueden usar las funciones ya presentes en los lenguajes para calcular el GCD y LCM

GCD y LCM

- Este método es bueno para pensar en soluciones o demostrarlas, pero no es eficiente y es tedioso de implementar
- Se pueden usar las funciones ya presentes en los lenguajes para calcular el GCD y LCM

```
__gcd(a, b)
```

GCD y LCM

- Este método es bueno para pensar en soluciones o demostrarlas, pero no es eficiente y es tedioso de implementar
- Se pueden usar las funciones ya presentes en los lenguajes para calcular el GCD y LCM

```
__gcd(a, b)
```

- Para calcular el LCM, podemos usar la fórmula $\operatorname{lcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\gcd(a,b)}$

Aritmética modular

Aritmética modular

- Recordemos que $\frac{a}{m} \rightarrow a = m \cdot c + r$, siendo c el cociente y r el residuo
- La aritmética modular trabaja solo con los residuos
- $a \mod m \rightarrow$ residuo de dividir a entre m

Aritmética modular

- Es útil visualizar los residuos como posiciones en un reloj de tamaño m
- Observemos lo que pasa aumentando valores de 1 en 1 con división entre 3
    - $0/3 = 0$ reciduo 0
    - $1/3 = 0$ reciduo 1
    - $2/3 = 0$ reciduo 2
    - $3/3 = 1$ reciduo 0
    - $4/3 = 1$ reciduo 1
    - $5/3 = 1$ reciduo 2
    - $6/3 = 2$ reciduo 0

Aritmética modular

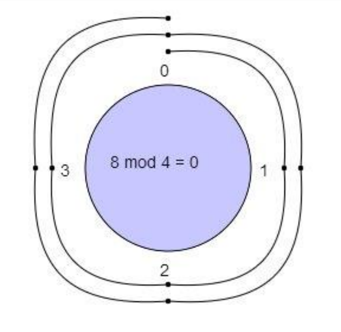
- Es útil visualizar los residuos como posiciones en un reloj de tamaño m
- Observemos lo que pasa aumentando valores de 1 en 1 con división entre 3
  - $0/3 = 0$ reciduo 0
  - $1/3 = 0$ reciduo 1
  - $2/3 = 0$ reciduo 2
  - $3/3 = 1$ reciduo 0
  - $4/3 = 1$ reciduo 1
  - $5/3 = 1$ reciduo 2
  - $6/3 = 2$ reciduo 0
- Los residuos aumentan de 1 en 1 hasta llegar al módulo menos 1, luego vuelven a 0 y se repiten

Aritmética modular

- Es útil visualizar los residuos como posiciones en un reloj de tamaño m
- Observemos lo que pasa aumentando valores de 1 en 1 con división entre 3
  - $0/3 = 0$ reciduo 0
  - $1/3 = 0$ reciduo 1
  - $2/3 = 0$ reciduo 2
  - $3/3 = 1$ reciduo 0
  - $4/3 = 1$ reciduo 1
  - $5/3 = 1$ reciduo 2
  - $6/3 = 2$ reciduo 0
- Los residuos aumentan de 1 en 1 hasta llegar al módulo menos 1, luego vuelven a 0 y se repiten
- Empezar en la posición 0 del reloj y avanzar x posiciones es equivalente a calcular $x \mod m$

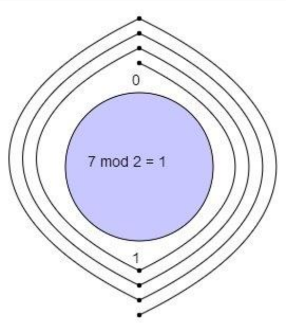
Aritmética modular

$8 \mod 4 = 0$



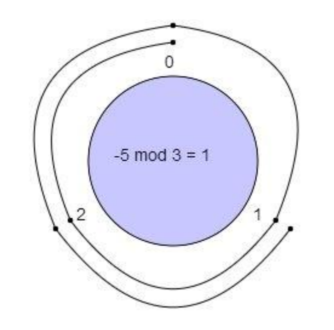
Aritmética modular

$7 \mod 2 = 1$



Aritmética modular

$-5 \mod 3 = 1$



Operaciones

- **Congruencia**: $a \equiv b \mod m \longrightarrow a \mod m = b \mod m$

Operaciones

- Veremos las siguientes operaciones como se harían en un lenguaje de programación

```
int r = a % m;
```

Operaciones

- Veremos las siguientes operaciones como se harían en un lenguaje de programación

```
int r = a % m;
```

- **Suma**: $(a + b)\%m = (a\%m + b\%m)\%m$, avanzar en el reloj

Operaciones

- Veremos las siguientes operaciones como se harían en un lenguaje de programación

```
int r = a % m;
```

- **Suma**: $(a+b)\%m = (a\%m + b\%m)\%m$, avanzar en el reloj
- **Resta**: $(a-b)\%m = (a\%m - b\%m + m)\%m$, cuidado con negativos

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:
    1. $((m \cdot c_a + r_a) \cdot (m \cdot c_b + r_b))\%m$

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:
  1. $((m \cdot c_a + r_a) \cdot (m \cdot c_b + r_b))\%m$
  2. $(m^2 \cdot c_a \cdot c_b + m \cdot c_a \cdot r_b + m \cdot c_b \cdot r_a + r_a \cdot r_b)\%m$

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:
    1. $((m \cdot c_a + r_a) \cdot (m \cdot c_b + r_b))\%m$
    2. $(m^2 \cdot c_a \cdot c_b + m \cdot c_a \cdot r_b + m \cdot c_b \cdot r_a + r_a \cdot r_b)\%m$
       Repartimos el módulo en la suma
    3. $((m^2 \cdot c_a \cdot c_b\%m) + (m \cdot c_a \cdot r_b\%m) + (m \cdot c_b \cdot r_a\%m) + (r_a \cdot r_b\%m))\%m$

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:
    1. $((m \cdot c_a + r_a) \cdot (m \cdot c_b + r_b))\%m$
    2. $(m^2 \cdot c_a \cdot c_b + m \cdot c_a \cdot r_b + m \cdot c_b \cdot r_a + r_a \cdot r_b)\%m$
       Repartimos el módulo en la suma
    3. $((m^2 \cdot c_a \cdot c_b\%m) + (m \cdot c_a \cdot r_b\%m) + (m \cdot c_b \cdot r_a\%m) + (r_a \cdot r_b\%m))\%m$
    4. $(0 + 0 + 0 + (r_a \cdot r_b\%m))\%m$

Operaciones

- **Multiplicación**: $(a \cdot b)\%m = (a\%m \cdot b\%m)\%m$
- ¿Por qué?
- Desarrollando:
    1. $((m \cdot c_a + r_a) \cdot (m \cdot c_b + r_b))\%m$
    2. $(m^2 \cdot c_a \cdot c_b + m \cdot c_a \cdot r_b + m \cdot c_b \cdot r_a + r_a \cdot r_b)\%m$
       Repartimos el módulo en la suma
    3. $((m^2 \cdot c_a \cdot c_b\%m) + (m \cdot c_a \cdot r_b\%m) + (m \cdot c_b \cdot r_a\%m) + (r_a \cdot r_b\%m))\%m$
    4. $(0 + 0 + 0 + (r_a \cdot r_b\%m))\%m$
    5. $r_x = x\%m \rightarrow (a\%m \cdot b\%m)\%m$

Operaciones

- **División**: $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{-1}\%m)\%m$
- No podemos repartir en la división
- Ej: $\frac{21}{7} \mod 5 \neq \frac{21 \mod 5}{7 \mod 5} = \frac{1}{2}$

Operaciones

- **División**: $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{-1}\%m)\%m$
- No podemos repartir en la división
- Ej: $\frac{21}{7} \mod 5 \neq \frac{21 \mod 5}{7 \mod 5} = \frac{1}{2}$

- $a^{-1} \mod m$ es el inverso modular de a módulo m
- ¿Cómo obtenemos $a^{-1} \mod m$?

Operaciones

- **División**: $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{-1}\%m)\%m$
- No podemos repartir en la división
- Ej: $\frac{21}{7} \mod 5 \neq \frac{21 \mod 5}{7 \mod 5} = \frac{1}{2}$

- $a^{-1} \mod m$ es el inverso modular de a módulo m
- ¿Cómo obtenemos $a^{-1} \mod m$?
- Pequeño teorema de Fermat: $a^{m-1} \equiv 1 \mod m$, si m es primo y a no es múltiplo de m

Operaciones

- **División**: $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{-1}\%m)\%m$
- No podemos repartir en la división
- Ej: $\frac{21}{7} \mod 5 \neq \frac{21 \mod 5}{7 \mod 5} = \frac{1}{2}$

- $a^{-1} \mod m$ es el inverso modular de a módulo m
- ¿Cómo obtenemos $a^{-1} \mod m$?
- Pequeño teorema de Fermat: $a^{m-1} \equiv 1 \mod m$, si m es primo y a no es múltiplo de m
- $a^{m-2} \equiv a^{-1} \mod m$

Operaciones

- **División**: $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{-1}\%m)\%m$
- No podemos repartir en la división
- Ej: $\frac{21}{7} \mod 5 \neq \frac{21 \mod 5}{7 \mod 5} = \frac{1}{2}$

- $a^{-1} \mod m$ es el inverso modular de a módulo m
- ¿Cómo obtenemos $a^{-1} \mod m$?
- Pequeño teorema de Fermat: $a^{m-1} \equiv 1 \mod m$, si m es primo y a no es múltiplo de m
- $a^{m-2} \equiv a^{-1} \mod m$
- $(a/b)\%m = (a\%m \cdot b^{m-2}\%m)\%m$

Operaciones

$$
\begin{aligned}
(a+b)\%m &= (a\%m + b\%m)\%m \\
(a-b)\%m &= (a\%m - b\%m + m)\%m \\
(a \cdot b)\%m &= (a\%m \cdot b\%m)\%m \\
(a/b)\%m &= (a\%m \cdot b^{m-2}\%m)\%m
\end{aligned}
$$

Potenciación binaria

- Para calcular $b^{m-2} \mod m$, necesitamos una forma eficiente de calcular potencias
- Multiplicar b m veces es $O(m)$, m suele ser un valor cercano a 10^9

Potenciación binaria

- Para calcular $b^{m-2} \mod m$, necesitamos una forma eficiente de calcular potencias
- Multiplicar b m veces es $O(m)$, m suele ser un valor cercano a 10^9
- La función `pow(b, e)` de C++ encuentra una aproximación, problemas de precisión

Potenciación binaria

- $b^e = b \cdot b \cdot b \cdots b \cdot b \cdot b$

Potenciación binaria

- $b^e = b \cdot b \cdot b \cdots b \cdot b \cdot b$
- Si e es par $\rightarrow b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$

Potenciación binaria

- $b^e = b \cdot b \cdot b \cdots b \cdot b \cdot b$
- Si e es par $\rightarrow b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$
- Si e es impar $\rightarrow b^e = b^{e-1} \cdot b$

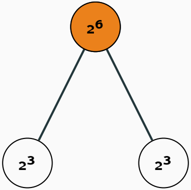
Potenciación binaria

- $b^e = b \cdot b \cdot b \cdots b \cdot b \cdot b$
- Si e es par $\rightarrow b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$
- Si e es impar $\rightarrow b^e = b^{e-1} \cdot b$
- Seguimos reduciendo e hasta llegar a $b^0 = 1$ o $b^1 = b$

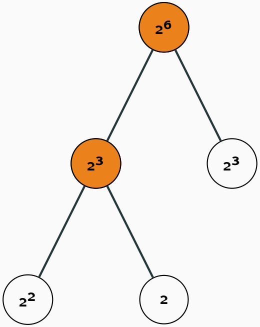
Potenciación binaria

2^6

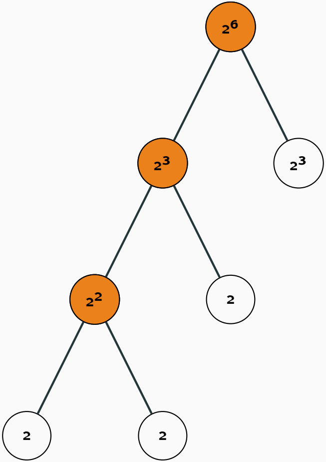
Potenciación binaria



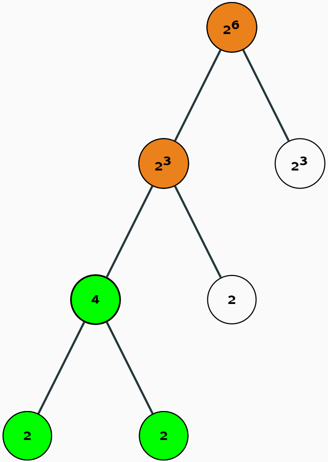
Potenciación binaria



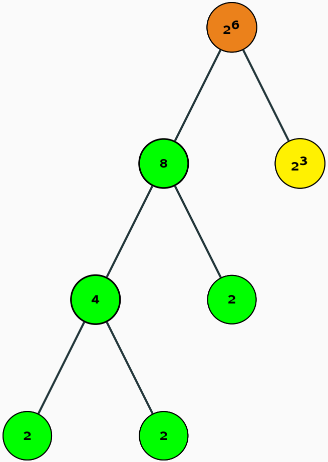
Potenciación binaria



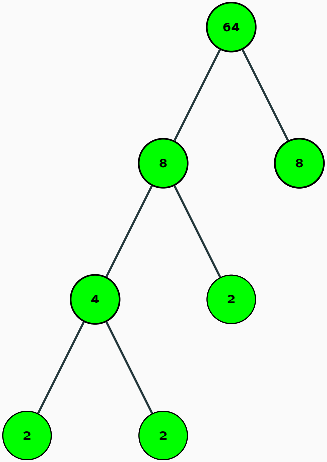
Potenciación binaria



Potenciación binaria



Potenciación binaria



Potenciación binaria

```
int binPow(int b, int e, int mod) {
  if (e == 0) return 1;
  if (e == 1) return b;
  int res;
  if (e % 2 == 0) {
    res = binPow(b, e / 2);
    res = res * res % mod;
  }
  else {
    res = binPow(b, e - 1) * b % mod;
  }
  return res;
}
```