Combinatoria

Miguel Ortiz

Programación competitiva para ICPC

Octubre 2023

Introducción

Introducción

- **Combinatoria** es el estudio de estructuras discretas contables
- En competencias, los problemas de combinatoria se reducen a:
  - "Contar [Objeto que cumple propiedad]"
  - "¿De cuántas formas se puede [Formar objeto que cumple propiedad]?"
  - etc.
- Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras A, B, C, ..., Z (26 letras)? Se permiten letras repetidas

Introducción

- **Combinatoria** es el estudio de estructuras discretas contables
- En competencias, los problemas de combinatoria se reducen a:
  - "Contar [Objeto que cumple propiedad]"
  - "¿De cuántas formas se puede [Formar objeto que cumple propiedad]?"
  - etc.
- Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras A, B, C, ..., Z (26 letras)? Se permiten letras repetidas
- Usualmente, enumerar los objetos uno por uno es muy lento

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
  for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
    for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
      for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
        cnt++;
      }
    }
  }
}
```

Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
  for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
    for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
      for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
        cnt++;
      }
    }
  }
}
```

- $\alpha =$ tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$

Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
  for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
    for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
      for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
        cnt++;
      }
    }
  }
}
```

- $\alpha =$ tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$
- ¿Y si pidieran palabras de 10 letras?

Introducción

```
int cnt = 0;
for (char i = 'A'; i <= 'Z'; i++) {
  for (char j = 'A'; j <= 'Z'; j++) {
    for (char k = 'A'; k <= 'Z'; k++) {
      for (char l = 'A'; l <= 'Z'; l++) {
        cnt++;
      }
    }
  }
}
```

- $\alpha =$ tamaño del alfabeto
- $O(\alpha^4)$
- ¿Y si pidieran palabras de 10 letras?
- ¿O de 10^{18} letras módulo $10^9 + 7$

Introducción

- El código de la solución es usualmente corto (aplicar una fórmula)
- Encontrar la fórmula es la parte difícil

Introducción

- El código de la solución es usualmente corto (aplicar una fórmula)
- Encontrar la fórmula es la parte difícil
- ¡Usen lápiz y papel!

Colecciones

Set

- Conjunto de elementos no repetidos
- El orden no importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre llaves
    - $\{M, A, T, E\}$
    - $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
    - $\{1, 3, 3\}$ **no** es un set

Multiset

- Conjunto de elementos, pueden repetirse
- El orden no importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre llaves
  - $\{F, F, T\}$
  - $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
  - $\{1, 3, 3\}$

Listas

- Secuencia de elementos, puede haber repetidos
- El orden **si** importa
- Se lo representa como sus elementos separados por comas y entre paréntesis
  - $(7, 7, 4, 9, 5, 5, 2, 6)$
  - $(A, M, O, R) \neq (R, O, M, A)$
  - $(\{5, 2\}, \{3, 7\}) = (\{2, 5\}, \{7, 3\})$

Principio de multiplicación

Principio de multiplicación

Si, al formar una lista de tamaño n, hay a_1 posibilidades para elegir el primer elemento, a_2 posibilidades para elegir el segundo elemento, ..., a_n posibilidades para elegir el elemento n. Entonces hay $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ listas posibles.

Principio de multiplicación

Si, al formar una lista de tamaño n, hay a_1 posibilidades para elegir el primer elemento, a_2 posibilidades para elegir el segundo elemento, ..., a_n posibilidades para elegir el elemento n. Entonces hay $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ listas posibles.

Si n eventos ocurren al mismo tiempo, y el evento i puede ocurrir de a_i formas, entonces el número total de formas en que los eventos pueden ocurrir es $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

Principio de multiplicación

¿Cuantas listas podemos formar con 3 elementos, si el primer elemento pertenece al set $\{a, b, c\}$, el segundo a $\{5, 7\}$ y el tercero a $\{a, x\}$?

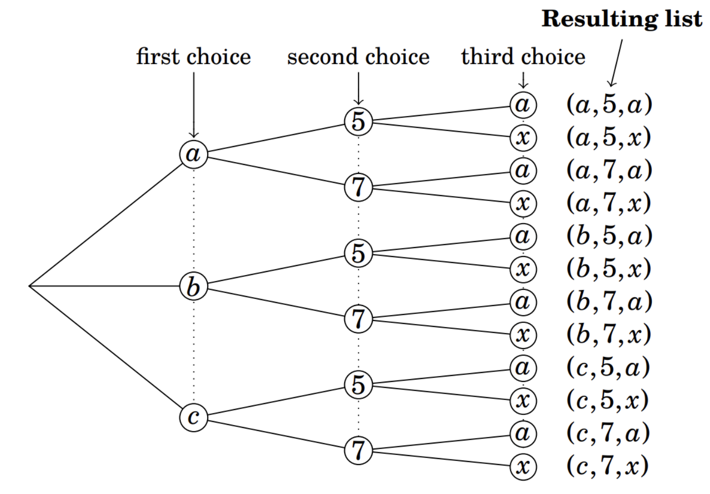
- $(a, 5, a)$ y $(c, 7, x)$ son listas válidas

Principio de multiplicación

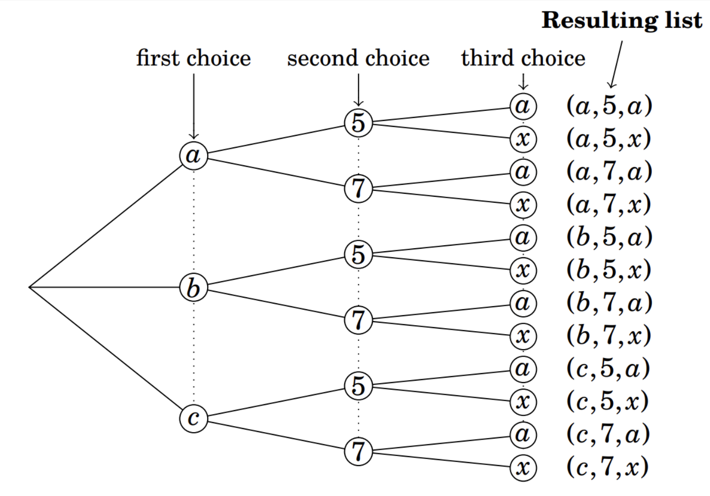
¿Cuantas listas podemos formar con 3 elementos, si el primer elemento pertenece al set $\{a, b, c\}$, el segundo a $\{5, 7\}$ y el tercero a $\{a, x\}$?

- $(a, 5, a)$ y $(c, 7, x)$ son listas válidas
- Podemos visualizar las posibilidades como un árbol

Principio de multiplicación



Principio de multiplicación



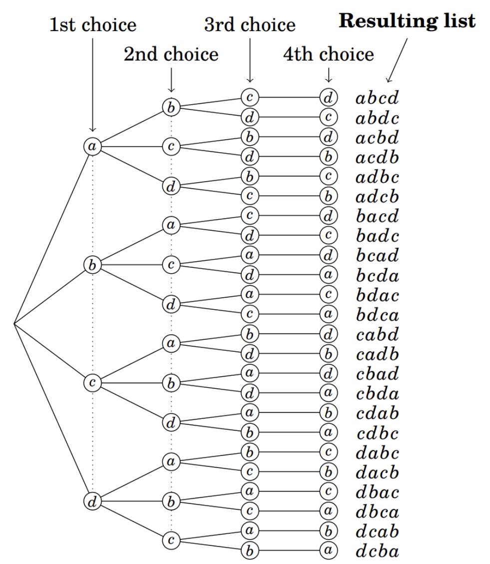
- Respuesta: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ listas

Principio de multiplicación

¿Cuántas listas de tamaño 4 podemos formar con elementos del set $\{a, b, c, d\}$ sin repetir letras?

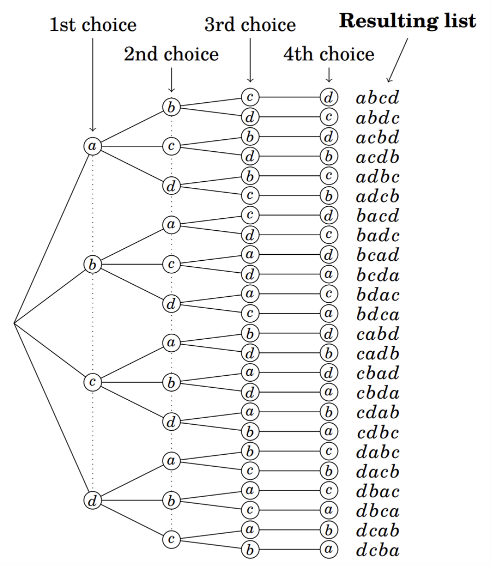
- (a, b, c, d) y (d, c, b, a) son listas válidas
- (a, a, b, c) y (a, b, c, c) no son listas válidas

Principio de Multiplicación



- Primero tenemos 4 opciones, luego 3, luego 2, luego 1

Principio de Multiplicación



- Primero tenemos 4 opciones, luego 3, luego 2, luego 1
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ listas

Ejercicio

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra T?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con T?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

Ejercicio

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra T?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con T?
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

Ejercicio

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra T?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con T?

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

Ejercicio

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra T?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con T?
  - $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?

Ejercicio

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas:

- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar?
  - $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que empiecen con la letra T?
  - $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar que **no** empiecen con T?
  - $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras podemos formar de modo que no existan dos letras juntas que sean iguales?
  - $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$

Ejercicio

Una pensión tiene el siguiente menú para el almuerzo:

- Sopa: cabellos de ángel, sopa de maní
- Segundo: falso conejo, milanesa, albóndigas

¿Cuál es la máxima cantidad de días seguidos que se puede comer en la pensión sin repetir un almuerzo?

Ejercicio

Una pensión tiene el siguiente menú para el almuerzo:

- Sopa: cabellos de ángel, sopa de maní
- Segundo: falso conejo, milanesa, albóndigas

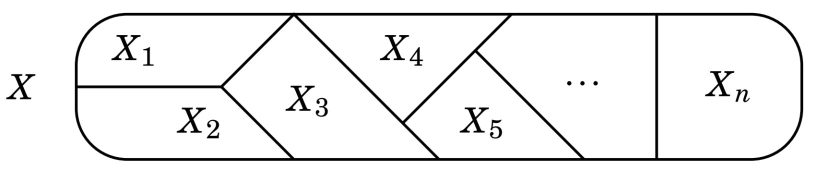
¿Cuál es la máxima cantidad de días seguidos que se puede comer en la pensión sin repetir un almuerzo?

- Cada día queremos una combinación distinta de (sopa, segundo)
- $2 \cdot 3 = 6$ combinaciones posibles, máxima cantidad de días

Principio de adición y sustracción

Principio de adición

Suponiendo que un set X puede ser descompuesto como $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$, donde $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$.



Principio de adición

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *exactamente* una E?

Principio de adición

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *exactamente* una E?

- Podemos dividir las palabras en 4 tipos (sets):
- $E\_\_\_ \mid \_E\_\_ \mid \_\_E\_ \mid \_\_\_E$
- Ningún set interseca a otro, y su unión es el set de todas las palabras

Principio de adición

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *exactamente* una E?

- Podemos dividir las palabras en 4 tipos (sets):
- $E\_\_\_ \mid \_E\_\_ \mid \_\_E\_ \mid \_\_\_E$
- Ningún set interseca a otro, y su unión es el set de todas las palabras
- $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 500$

Principio de adición

¿Cuántos números **pares** de 3 dígitos existen que contengan *exactamente* un 6 y no empiecen con 0?

Principio de adición

¿Cuántos números **pares** de 3 dígitos existen que contengan *exactamente* un 6 y no empiecen con 0?

- Podemos dividir las palabras en 3 tipos (sets):
- 6_ _ | _6_ | _ _6
- Ningún set interseca a otro, y su unión es el set de todos los números

Principio de adición

¿Cuántos números **pares** de 3 dígitos existen que contengan *exactamente* un 6 y no empiecen con 0?

- Podemos dividir las palabras en 3 tipos (sets):
- 6_ _ | _6_ | _ _6
- Ningún set interseca a otro, y su unión es el set de todos los números
- $|X_1| = 1 \cdot 9 \cdot 4 = 36$
- $|X_2| = 8 \cdot 1 \cdot 4 = 32$
- $|X_3| = 8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$

Principio de adición

¿Cuántos números **pares** de 3 dígitos existen que contengan *exactamente* un 6 y no empiecen con 0?

- Podemos dividir las palabras en 3 tipos (sets):
- 6_ _ | _6_ | _ _6
- Ningún set interseca a otro, y su unión es el set de todos los números
- $|X_1| = 1 \cdot 9 \cdot 4 = 36$
- $|X_2| = 8 \cdot 1 \cdot 4 = 32$
- $|X_3| = 8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$
- $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| = 140$

Principio de sustracción

Si un X es subset de un set finito U (universo), entonces $|\overline{X}| = |U| - |X|$.

Principio de sustracción

Si un X es subset de un set finito U (universo), entonces $|\overline{X}| = |U| - |X|$.

- U es el set que contiene todas las posibilidades
- X es el set que contiene las posibilidades que no queremos

Principio de sustracción

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *al menos* una E?

Principio de sustracción

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *al menos* una E?

- Podemos dividir las palabras en *muchos* tipos (sets)
- Fijando las posiciones de las Es y restringiendo las otras letras para que no sean E
- $E\_\_\_ \mid \_E\_\_ \mid \_\_E\_ \mid \_\_\_E \mid EE\_\_ \mid E\_E\_$ ...

Principio de sustracción

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *al menos* una E?

- Podemos dividir las palabras en *muchos* tipos (sets)
- Fijando las posiciones de las Es y restringiendo las otras letras para que no sean E
- $E\_\_\_$ | $\_E\_\_$ | $\_\_E\_$ | $\_\_\_E$ | $EE\_\_$ | $E\_E\_$ ...
- Muchas posibilidades...

Principio de sustracción

Utilizando letras del set $\{T, H, E, O, R, Y\}$ y permitiendo letras repetidas, ¿cuántas palabras de 4 letras podemos formar que contengan *al menos* una E?

- Podemos dividir las palabras en *muchos* tipos (sets)
- Fijando las posiciones de las Es y restringiendo las otras letras para que no sean E
- $E\_\,\_\,\_ \mid \_E\_\,\_ \mid \_\,\_E\_ \mid \_\,\_\,\_E \mid EE\_\,\_ \mid E\_E\_$ ...
- Muchas posibilidades...
- Es más fácil contar las palabras que *no* contienen ninguna E
- $|U| = 6^4, |X| = 5^4 \rightarrow |\overline{X}| = 6^4 - 5^4$
- Hay 671 palabras que contienen al menos una E

Ejercicio

Si una contraseña debe ser formada solamente por letras del alfabeto ingles (26 letras) y debe tener exactamente 5 letras

- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula?
- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula y al menos una letra debe ser minúscula?

Ejercicio

Si una contraseña debe ser formada solamente por letras del alfabeto ingles (26 letras) y debe tener exactamente 5 letras

- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula?
    - $(2 \cdot 26)^5 - 26^5 = 368322656$
- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula y al menos una letra debe ser minúscula?

Ejercicio

Si una contraseña debe ser formada solamente por letras del alfabeto ingles (26 letras) y debe tener exactamente 5 letras

- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula?
    - $(2 \cdot 26)^5 - 26^5 = 368322656$
- ¿Cuántas contraseñas existen si al menos una letra debe ser mayúscula y al menos una letra debe ser minúscula?
    - $(2 \cdot 26)^5 - 26^5 - 26^5 = 356441280$

Permutaciones y subsets

Permutaciones

- Una lista es una permutación de otras si tienen los mismos elementos pero en diferente orden
- Ejemplo: $(1, 2, 3)$ es una permutación de $(3, 2, 1)$

Permutaciones

- Una lista es una permutación de otras si tienen los mismos elementos pero en diferente orden
- Ejemplo: $(1, 2, 3)$ es una permutación de $(3, 2, 1)$
- Podemos calcular el número de permutaciones de una lista de tamaño n con el principio de multiplicación
- Hay n opciones para el primer elemento, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero, etc.

Permutaciones

- Una lista es una permutación de otras si tienen los mismos elementos pero en diferente orden
- Ejemplo: $(1, 2, 3)$ es una permutación de $(3, 2, 1)$
- Podemos calcular el número de permutaciones de una lista de tamaño n con el principio de multiplicación
- Hay n opciones para el primer elemento, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero, etc.
- $n!$ permutaciones

Subsets

- Un subset es un set que contiene cero o más elementos de otro set
- Ejemplo: $\{1, 2\}$ y $\{3, 1\}$ son subsets de $\{1, 2, 3\}$

Subsets

- Un subset es un set que contiene cero o más elementos de otro set
- Ejemplo: $\{1, 2\}$ y $\{3, 1\}$ son subsets de $\{1, 2, 3\}$
- Podemos calcular el número de subsets de un set de tamaño n con el principio de multiplicación
- Usualmente queremos calcular el número de subsets que tengan k elementos de un set de tamaño n

Subsets

- Un subset es un set que contiene cero o más elementos de otro set
- Ejemplo: $\{1,2\}$ y $\{3,1\}$ son subsets de $\{1,2,3\}$
- Podemos calcular el número de subsets de un set de tamaño n con el principio de multiplicación
- Usualmente queremos calcular el número de subsets que tengan k elementos de un set de tamaño n
- $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

Ejercicio

Teniendo 6 tipos de fruta y 4 toppings, ¿cuántas ensaladas de fruta distintas se pueden hacer mezclando 3 frutas distintas y 2 toppings distintos?

Ejercicio

Teniendo 6 tipos de fruta y 4 toppings, ¿cuántas ensaladas de fruta distintas se pueden hacer mezclando 3 frutas distintas y 2 toppings distintos?

- Como todo se mezcla, no importa el orden

Ejercicio

Teniendo 6 tipos de fruta y 4 toppings, ¿cuántas ensaladas de fruta distintas se pueden hacer mezclando 3 frutas distintas y 2 toppings distintos?

- Como todo se mezcla, no importa el orden
- $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 120$