

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2023 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称“竞赛章程和参赛规则”，可从 <http://www.mcm.edu.cn> 下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，在竞赛中必须合法合规地使用文献资料和软件工具，不能有任何侵犯知识产权的行为。否则我们将失去评奖资格，并可能受到严肃处理。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： B

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 202315009099

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 山东大学（威海）

参赛队员（打印并签名）：1. 李雨萌

2. 谷雨桐

3. 周佳一

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 王效强

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期： 2023 年 09 月 10 日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号：
(由赛区填写)

全国评阅编号：
(全国组委会填写)

2023 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号：
(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

多波束测线问题的模型设计与优化

摘要

本文在多波束测线测量海洋深度的实际应用中，我们采用了初等解析几何、优化规划算法来建立了一套关于优化多波束测线测量深度的模型——包括计算测线间隔来减少重合率过高或过低导致的数据冗余或测量精度过低的问题、计算测量船的路线在保证测量质量的同时达到最短路线等问题。在该模型基础上，我们通过基本几何关系计算出在理想斜面海底的情况下，海水深度、覆盖宽度、重合率等结果，再延伸至多方位测线夹角的情况，进而计算出相应的覆盖宽度。后面我们使用优化算法进行模型与训练，进而求得在海底深度地形已知的情况下的测线分布。在该模型的前提下，通过应用问题的计算与适配，我们对该模型进行了检验、误差分析与评价。针对问题一：针对问题二：针对问题三：针对问题四：

关键字： 初等解析几何 优化算法 多波束测线 测绘技术

一、问题重述与分析

多波束测线是目前广泛应用的水体深度测量技术，其精确性、便捷性、经济性的特点受到了广大海洋科学工作者的青睐。该测深系统工作原理为：测量船行驶过程中，向与航迹垂直的平面内发射多条超声波束，再由接收换能器采集海底返回的声波，通过间隔时间与声速，我们可以得到测量船与多条测线测量处之间的距离，再由距离分布计算出该测线下的海底深度数据。通过多次多位置测量海水深度，进而得到海底地形数据。

1.1 问题一

已知海底坡面夹角、测量船测线方向、换能器开角、海域中心点、测线距中心点处距离等参数，分别求得海水深度、覆盖宽度、与前一条测线重合率等数据。该模型满足初等解析几何方法，并可以通过三角函数变换、构建空间直角坐标系求解相应数据。

1.1.1 模型建立

1.2 问题三

问题三在已知海底地形的情况下，题目给定重叠率的约束条件，来设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线位置、测线长度与平均重叠区域的优化问题。因此，我们采用

1.3 问题四

基于问题三模型，问题四的海底地形更加复杂，大致为一“倾斜的非对称马鞍面”形状。根据该形状，我们采用分割法将该地形分为两个部分，并通过

二、模型假设

1. 由于该应用场景中测量区域较小，且地球为一不规则类球体，因此本文中抽象模型空间为标准空间直角坐标系，忽略表面的曲率。2. 假定海水介质均匀，海水声速恒定，忽略海洋、天气等因素产生的白噪声，假设声波动力系统理想。且假定相关测量仪器无误差。3. 假设海洋表面无潮汐、无波浪，不会影响船只的行驶与颠簸，保证测量船只不会摇晃或颠簸。4. 本文未考虑声波发射与回传的延迟、校验。

表 1 符号说明

符号	意义	单位
W	条带覆盖宽度	米/m
θ	换能器开角	度/ $^{\circ}$
D	测线中心点处水深	米/m
η	相邻条带面积重叠率	
d	相邻测线间距	米/m
α	坡度	度/ $^{\circ}$
β	测线方向夹角	度/ $^{\circ}$
σ	测量误差	米/m
ϕ	横摇、纵倾误差	米/m
v	海水声速	米每秒 m/s
m	测线间坡度上升高度	米/m
y	海拔底侧上升距离	米/m
x	海拔高侧上升距离	米/m

三、符号说明与单位制

该节表内符号在以下章节中的公式旁均有解释。

表 2 单位换算

单位换算	符号表示	适用范围
1 海里 = 1852 米	$1nmi = 1852m$	原数据横、纵坐标单位是海里，海水深度单位是米

此外，海水声速由于与温度、盐度有关，因此我们取声速为 1500 米/秒，一般情况下本文使用 v 作为海水声速。

四、模型建立与求解

模型建立与求解模型建立与求解模型建立与求解模型建立与求解模型建立与求解
模型建立与求解模型建立与求解模型建立与求解

4.1 问题一的模型与求解

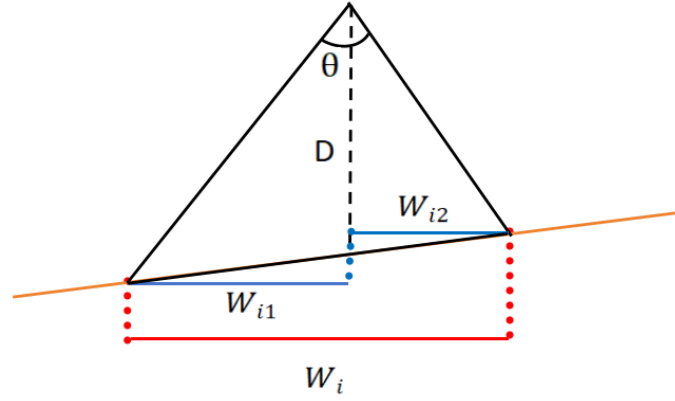


图 1

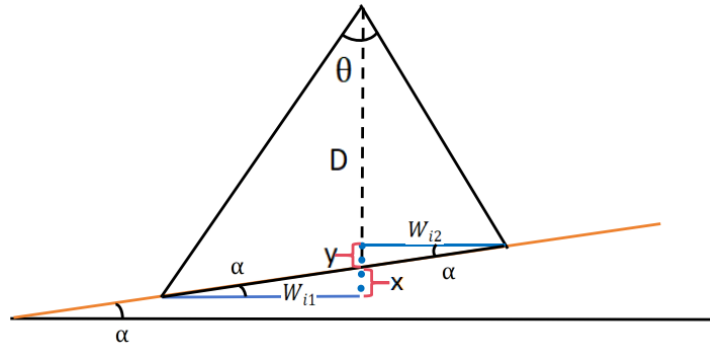


图 2

4.2 问题二

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{W_{i1}}{D+x}, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{W_{i1}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

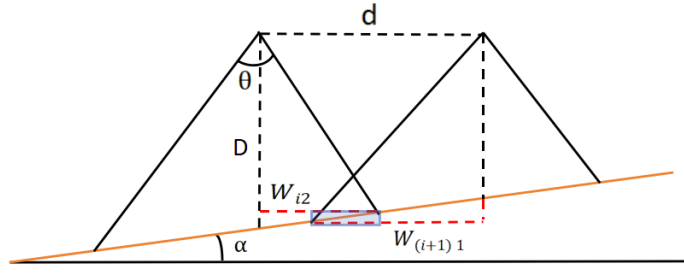


图 3

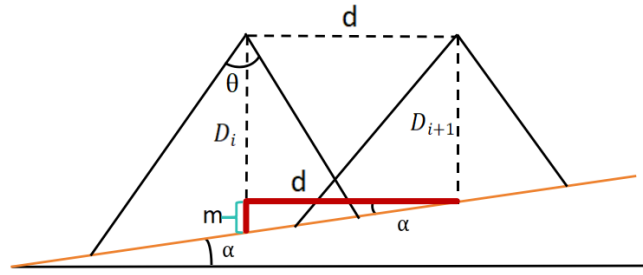


图 4

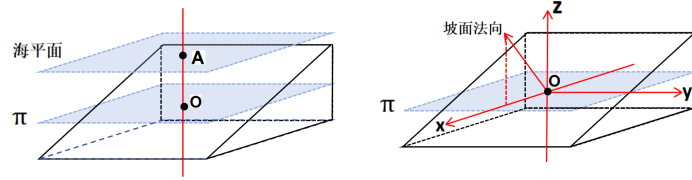


图 5

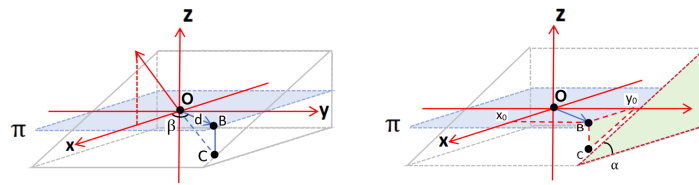


图 6

联立上述方程，得到

$$W_{i1} = \frac{D_i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\theta}{2}}, \text{ subject to } \begin{cases} \tan \frac{\theta}{2} > 0, \\ \tan \alpha > 0. \end{cases}, \quad (3)$$

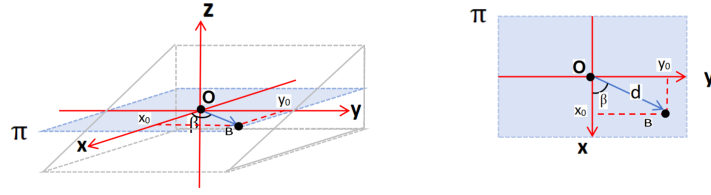


图 7

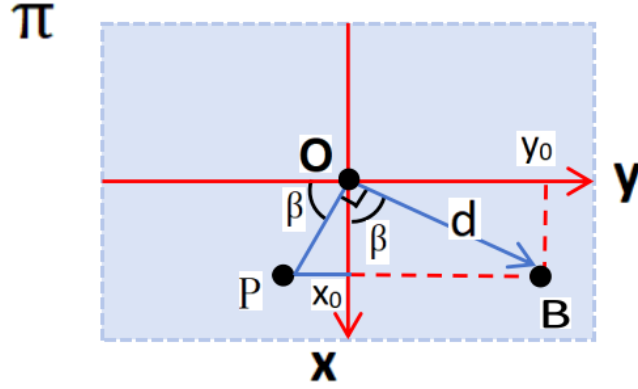


图 8

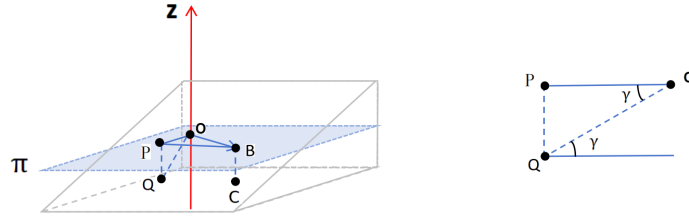


图 9

对于 W_{i2} :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{W_{i2}}{D - y}, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{W_{i2}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$W_{i2} = \frac{D \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2} \tan \alpha} \quad (6)$$

$$W_i = W_{i1} + W_{i2} \quad (7)$$

$$\eta = \frac{W_{i2} + W_{(i+1)1} - d}{W_{i+1}} \quad (8)$$

$$m = d \times \tan \alpha \quad (9)$$

$$D_i = D_i - m \quad (10)$$

$$D_{i+1} = D_i - d \tan \alpha \quad (11)$$

对于班相邻:

$$d_n = nd(n \leq 2) \quad (12)$$

$$D_i = D - nd \tan \alpha \quad (13)$$

4.3 问题二的模型与求解

$$\tan \alpha = \frac{BC}{By_0} = \frac{-Z_c}{x_0} \quad (14)$$

$$\cos \beta = \frac{Ox_0}{OB} = \frac{x_0}{d} \quad (15)$$

$$-z_c = d \tan \alpha \cos \beta \quad (16)$$

$$D_B = D_A + d \tan \alpha \cos \beta \quad (17)$$

$$\tan \angle OPB = \frac{OB}{OP} = \frac{d}{OP} = \tan \beta \quad (18)$$

$$\sin \angle OPB = \frac{x_0}{OP} = \sin \beta \quad (19)$$

$$\tan \gamma = \frac{PQ}{OP} = \frac{BC}{OP} \quad (20)$$

联立上述等式得到:

$$\tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i = W_1 + W_2 = D_i \tan \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{1 - \tan \gamma \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{1 + \tan \gamma \tan \frac{\theta}{2}} \right) \\ \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta, \\ D_i = D_A + d \tan \alpha \cos \beta \end{array} \right. \quad (22)$$

4.4 问题三

4.4.1 Metropolis 准则的适用

根据 Metropolis 准则, 粒子在

首先, 该问题的约束条件为: 1. 沿测线扫描形成的条带尽可能覆盖待测区域; 2. 相邻条带之间重合率在 10% 到 20% 之间; 3. 测线总长度尽可能短。因此, 我们设计了如下的设计方案:

五、模型的分析与检验

六、模型评价

6.1 模型优点

1. 本文基于初等解析几何与传统优化算法，模型经典、可靠，具有较强的理论依据。在该实际应用问题中，我们通过该算法得到的数值解符合实际情况，能够合理地描述与计算出地理数据。因此，该算法基本符合上述实际问题的使用场景。

2. 本文在前三个问题中采用了连续化处理，使模型精度大大提高，并且可以通过分析手段来处理数据。而第四问的基于离散化数据，本文采用基本优化算法，将大块面积切割成较小区域，迭代出最终结果，充分发挥了数据特征的优势，有效降低了数值计算的难度。

6.2 模型缺点与改进

1. 在实际生产研究中，难免遇到“非理想”情况，当测量区域较大时，我们需要考虑地面的弯曲，将投影面引入曲率的模型，需要根据场景建立三维极坐标。

2. 在本文设计模型中，可能会由于切分网格大小等设置而导致计算时间较长、计算可靠性降低等问题。在这里我们可以通过离散化相关经验公式与超参数来设置相关迭代训练次数、切分精细度等参数。

3. 在实际测绘中，我们需要考虑地形的弯曲、海水传播介质与白噪声、海洋平面的潮汐与波浪状况。因此建议在实际测量的过程中，多次测量取平均值，加强船只稳定性、提升测量仪器精度等。例如，在面对声波发射与回传的延迟、校验的问题下，可能需要测量船静止测量、或在测线方向错位摆放声波发射装置与接受装置。

6.2.1 定位时间延迟分析与改进

在实际测量过程中，由于声速传播具有一定延迟，若不进行时间校准，则可能产生海底地形错位、畸变的问题，即测量位置沿航迹方向发生延迟偏移。因此我们需要构建如下模型：等深线与剖面重合法计算模型。

通过使测量船在相同的测线上以相同的方法进行二次测量，并通过两次数据绘制相同比例的等深线图，使得得到两次测量的距离偏差，并通过如下公式进行误差的消除。

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n h_i^2}{2n}} \quad (23)$$

其中， σ 是其中的误差，由 SI 推导其单位为米（m）， h_i 为不同测线条幅重复测点水深测量值的插值。 n 为重复测点组数，两个重复测点为一组。

或使用下面公式进行误差消除或误差检验。该章节所述两个公式区别在于：前者可基于整个测量过程之后进行数据分析，而后者必须要测量时定点进行准确度的测算：

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - h)^2}{n - 1}} \quad (24)$$

通过误差计算，可得到测量数据是否可靠准确。该误差与测点的水深测量值的平均值反应了该测深系统、算法与测量仪器的准确度。

若传感器由于某些原因（如噪声等）未能按时 t_0 接受到数据，只在 t_i 、 t_{i+1} 时刻接收到数据，则本文定义如下公式：基于线性插值的时间配准公式

$$y_0 = \frac{t_0 - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_0}{t_{i+1} - t_i} y_i \quad (25)$$

其中， y_i 是该时刻采集到的声波传递时间的数据。

6.2.2 横摇与纵倾的波浪分析与改进

本节以横摇为例，介绍改进策略，纵倾的偏差分析原理近似。横摇偏差（ ϕ ）一般是由装置安装偏差、波浪潮汐导致的船体运动等引起。由于波浪次数多、随机性强，因此后者引起的该偏差在统计学意义上为一常量。若多波束测量系统中存在横摇偏差，则在假定海平面表面平坦下，平均的垂直航迹就会发生微小偏移。一般情况下，正向测量与反向测量后，两者倾斜地形会形成对称的假象。

为了获取海浪潮汐引起的横摇偏差，测量获得的“测量的假地形”倾斜角度需要与横摇偏角统一正负关系。由于真实地形的坡度为定值，则两方向的地形剖面倾角的算术平均数即为横摇偏差，可用下面的公式简单表示单位为度：

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (26)$$

6.2.3 潮位分析与改进

对于潮位不同产生的海拔水位的误差，我们在测量时得到自然月或自然日中取多次测量，最后取平均值即可。此外，也可通过潮水规律进行分析和计算。

6.3 模型推广

本文较为完整的分析了在多波束测量海底地形的应用场景下，各种不同规划方法下测量方式的最优解。较为完整的分析了多种因素对最终测量结果的影响，如地形坡度、测量路线、测线间距等。且通过严格的数学推导证明了其可行性与必要性。不仅提供了实际测绘工作中较为可行的方法，也提供了误差分析、测量算法评价的方式，为测绘提供了较强的借鉴意义。

七、参考文献与引用

参考文献

- [1] 中国地址调查局地址调查技术标准 DD2012-01 北京[M]. 中国地址调查局, 2012.
- [2] 基于多波束声纳海底测量数据构建三维地形模型的方法 黑龙江[P]. 哈尔滨工程大学, 王宏健 2011.
- [2] 基于多波束声纳海底测量数据构建三维地形模型的方法 黑龙江[P]. 哈尔滨工程大学, 王宏健 2011.
- [1] 百度百科: 角平分线定理 <https://baike.baidu.com/item/%E8%A7%92%E5%B9%B3%E5%88%86%E7%BA%BF/>

附录 A 核心代码

```
#第一问
import math

def calculate_coverage_width(D, theta, alpha):
    theta = math.radians(theta)
    alpha = math.radians(alpha)
    W1 = abs((D*math.tan(theta))/(1-math.tan(theta)*math.tan(alpha)))
    W2 = abs((D * math.tan(theta)) / (1 + math.tan(theta) * math.tan(alpha)))
    print(W1)
    print(W2)
    return W1+W2

def calculate_coverage_width2(D, theta, alpha):
    theta=math.radians(theta)
    alpha=math.radians(alpha)
    W2 = abs((D * math.tan(theta)) / (1 + math.tan(theta) * math.tan(alpha)))
    return W2

def calculate_overlap_rate(W0,W1, distance,right):
    eta = (W0+right-distance)/W1
    return eta

def calculate_depth(h,alpha):
    alpha=math.radians(alpha)
    a=70-h*math.tan(alpha)
    return a

def main():
    theta = 120/2
    alpha = 1.5
    distance=200#测线间距步长
    h=-800#距中心的距离我们要改这里
    W0 = 200#之前的右半个宽度，我们要改这里
    a = calculate_depth(h, alpha)
    W1 = calculate_coverage_width(a, theta, alpha)
    d = W0 + W1 - distance # 重叠部分面积
    right=calculate_coverage_width2(a, theta, alpha)
    eta = calculate_overlap_rate(W0,W1, distance,right)

    print(f"覆盖宽度 W: {W1:.2f} 米")
    print(f"深度 height: {a:.2f} 米")
    print(f"重叠率 eta: {eta * 100:.2f}%")

if __name__ == "__main__":
    main()
```

```

#第二问
import math

beam_angle_deg = 60
slope_deg = 1.5
center_depth = 120 )
beta_deg = 315
distance_to_center =2.1*1852

# 将角度转换为弧度
beam_angle_rad = math.radians(beam_angle_deg)
slope_rad = math.radians(slope_deg)
beta_rad = math.radians(beta_deg)

deltaz=distance_to_center*math.cos(beta_rad)*math.tan(slope_rad)
depth=center_depth+deltaz
print(depth)
tanGama=math.sin(beta_rad)*math.tan(slope_rad)
print(tanGama)

# 计算波束覆盖宽度的数学模型
def calculate_beam_width(beam_angle_rad, slope_rad, beta_rad, depth):
    # 计算水深对应的波束覆盖宽度
    W1 = abs(
        (depth * math.tan(beam_angle_rad)) / (1 - math.tan(beam_angle_rad) *tanGama))
    W2 = abs(
        (depth * math.tan(beam_angle_rad)) / (1 + math.tan(beam_angle_rad) *tanGama))
    beam_width = W1+W2
    print(W1)
    print(W2)
    return beam_width

a=calculate_beam_width(beam_angle_rad, slope_rad,beta_rad, depth)
coverage_width = calculate_beam_width(beam_angle_rad, slope_rad, beta_rad,depth)
overlap_percentage = 15
d = coverage_width * (100 / overlap_percentage - 1)

print(f"多波束测深的覆盖宽度: {a:.2f} 米")

```

附录 B 问题结果