



Mesterséges intelligencia előadássorozat

Az előadás diái az AIMA könyvre épülve (<http://aima.cs.berkeley.edu>) készültek a University of California, Berkeley mesterséges intelligencia kurzusának anyagainak felhasználásával (<http://ai.berkeley.edu>).

These slides are based on the AIMA book (<http://aima.cs.berkeley.edu>) and were adapted from the AI course material of University of California, Berkeley (<http://ai.berkeley.edu>).



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Mesterséges Intelligencia és Rendszertervezés Tanszék



Bizonytalanság, valószínűség

Előadó: Dr. Hullám Gábor
Előadás anyaga: Dr. Antal Péter



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

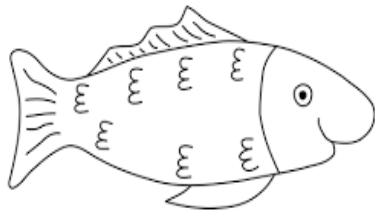
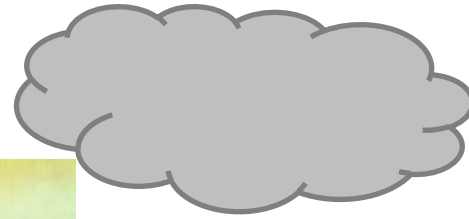


Bizonytalan tudás

Lehetséges okok

- „Lazaság/lustaság” - a részletes kapcsolatok megfogalmazása túl nehéz, a használatuk szintén nehézkes (véges erőforrások)
- **Elméleti ismeret hiánya** - adott problématerületnek az elméleti feltárása még nem zárult le, vagy lezárni soha nem lehet
- **Gyakorlati ismeret hiánya** - nem minden, a szabályokban hivatkozott feltétel ismert a szabályok alkalmazásakor

Bizonytalanság



Észlelés, cselekvés, döntéshozatal, és megtörténttől eltérőek elképzelése

Kapás?
Káprázat?



Horogra akad,
ha bevágunk?

Bevágni?
Várni?
Kihúzni?

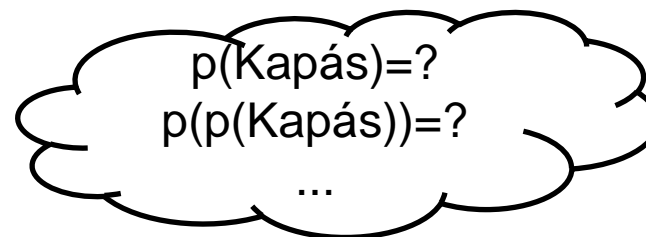
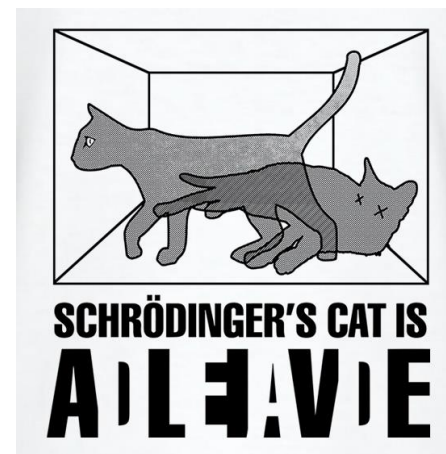
....

Horogra akadt volna,
ha később vágok be?

...

A bizonytalanság forrásai

- A bizonytalanság forrásai
 - természet/valóság
 - megfigyelés
 - beavatkozás
 - ismerethiány
 - elhanyagolás
 - bizonytalanság bizonytalansága



Elméleti keretek a bizonytalanság kezelésére

Valószínűségszámítás

"Mi lehet?"

Kapás?



Okozatiság

"Mi történne?"

Horogra akad,
ha bevágunk?

Most éri meg
bevágni?
várni?
kihúzni?

....

Horogra akadt volna,
ha később vágok be?

...

Döntéselmélet

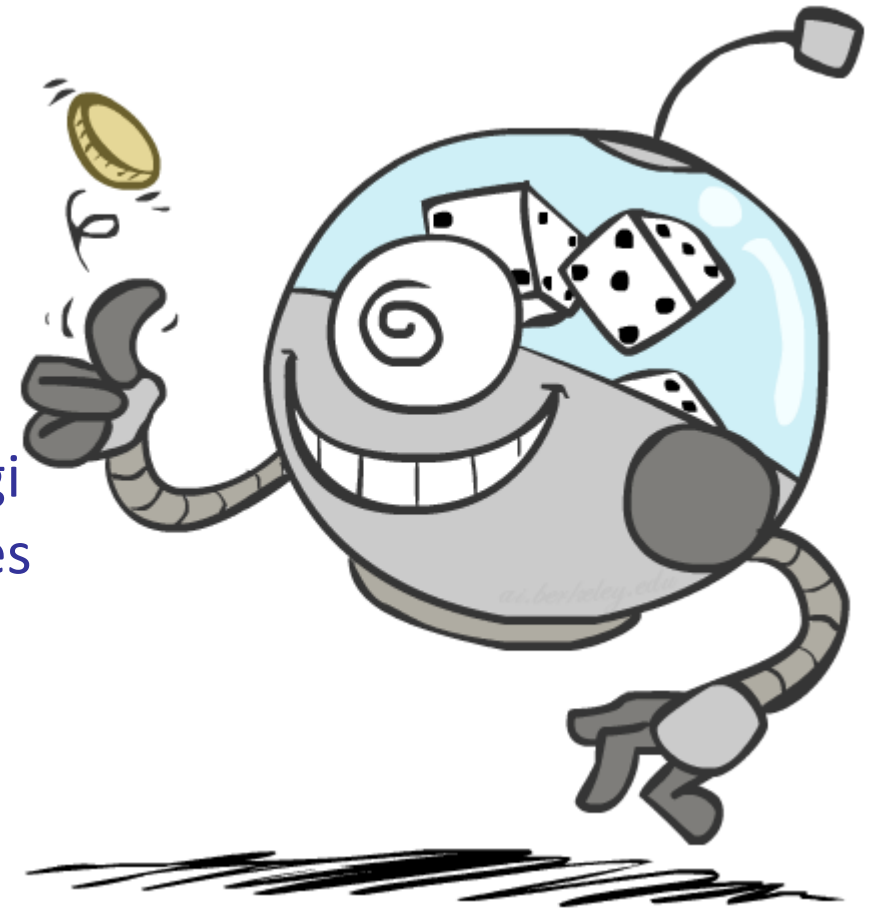
"Megéri?"

Intelligens érvelés

"Mi lett volna ha?"

Mai téma: valószínűesszámítás

- Valószínűség
 - Valószínűségi változók
 - Együttes eloszlás
 - Marginális/(perem-) eloszlások
 - Feltételes eloszlások, láncszabály
 - Bayes tétele
 - Függetlenség
 - Feltételes függetlenség
 - Függetlenségi modell
- Valószínűségi modell
- Valószínűségi következtetés
- Valószínűségi modellezés



Cél: valószínűségi következtetés megfigyelésekkel

■ Általános keret:

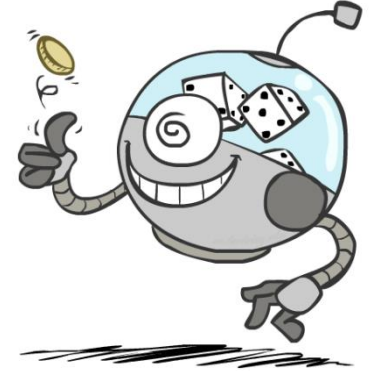
- **Megfigyelt változók (evidenciák):** Az ágens rendelkezik bizonyos ismeretekkel a világ állapotáról (e.g., érzékelők, szimptómák)
- **Ismeretlen változók:** Az ágensnek következtetnie kell a többi állapotleíróval kapcsolatban (e.g., hol van egy objektum, jelen van-e egy betegség)
- **Modell:** Az ágens rendelkezik bizonyos ismeretekkel, arról, hogy mi a kapcsolata megfigyelt és ismeretlen változóknak

- A valószínűségszámítás egy **koherens formalizmus** bizonytalan ismeretek és tudás együttes felhasználására.



Valószínűségi változó

- A valószínűségi változó a világ egy olyan aspektusát írja le, amellyel kapcsolatban bizonytalanok vagyunk
 - E = Esik az eső: igen/nem?
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - V = Mennyi ideig tart ma a beutazás a munkahelyre?
- A kényszerkielégítésben használt változókhoz hasonlóan az egyes valószínűségi változókhoz is tartozik a **megengedett értékeknek** egy-egy tartománya (domain).
 - E: {igaz, hamis}
 - H: {meleg, hideg}
 - V: $[0, \infty)$
- Valószínűségi változó értéke: **hozzárendelés** (assignment), **kimenetel** (outcome)
- (Formálisan, egy valószínűségi változó egy függvény, amelynek értékei a világ adott aspektusát reprezentálják.)



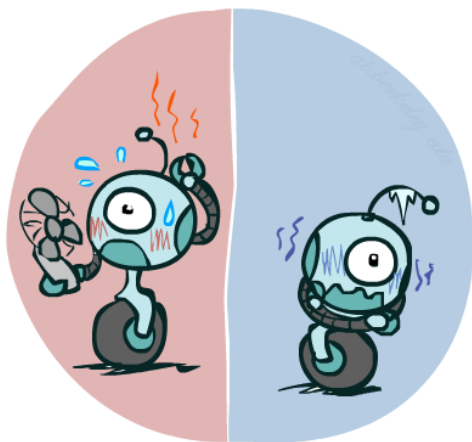
Események – véletlen kísérlet

- **Elemi esemény:** minden lehetséges kimenetel (e_1, e_2, \dots, e_n) , amiről egy kísérlet elvégzése után eldönthető, hogy bekövetkezett vagy sem
 - $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \emptyset$
- **Eseménytér:** egy kísérlet összes kimenetele, az összes elemi esemény halmaza (Ω) .
 - $e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_n = \Omega$
- **Véletlen esemény:** az eseménytér egy részhalmaza
- **Biztos esemény:** a kísérlet során biztosan (minden kimenetelnél) bekövetkezik.
- **Ellentett esemény:** akkor és csak akkor következik be, ha az eredeti esemény nem következik be

Valószínűség

- Rendeljük egy "valószínűséget" ($[0,1]$ között valós számot) minden egyes értékhez

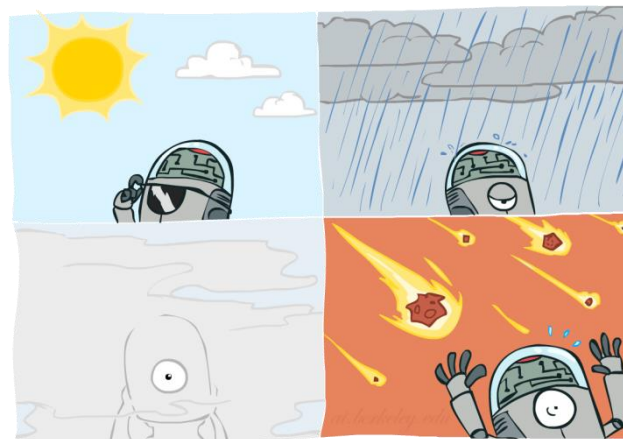
- Hőmérséklet:



$P(H)$

H	P
meleg	0.5
hideg	0.5

- Időjárás:



$P(I)$

I	P
napsütés	0.6
eső	0.1
köd	0.3
meteor	0.0

Bizonytalanság és valószínűség

- A valószínűség értelmezései

- fizikai

- mechanizmusok, oksági kapcsolatok eredménye

- pl. kvantummechanikában egyedi atomok bomlási valószínűsége

- frekventista

- „Kísérlet” során megfigyelt relatív frekvencia alapú

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}_N(A) = p(A)$$

- szubjektív

Valószínűségi eloszlás

- Egy (diszkrét) **valószínűségi eloszlás** egy TÁBLÁZAT valószínűségi értékekkel egy (diszkrét) valószínűségi változó lehetséges értékei felett.

$P(H)$	
H	P
meleg	0.5
hideg	0.5

$P(I)$	
I	P
napsütés	0.6
eső	0.1
köd	0.3
meteor	0.0

Jelölések rövidítése:

$$P(meleg) = P(H=meleg)$$

$$P(hideg) = P(H=hideg)$$

$$P(eső) = P(I=eső)$$

...

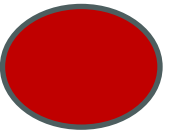
Nem okoz zavart, ha a v.v. értékei egyediek.

- Egy (kis betűvel jelzett) érték valószínűsége egy szám

$$P(I=eső) = 0.1$$

- Teljesülnie kell, hogy $\forall x \ P(X = x) \geq 0$ és $\sum_x P(X = x) = 1$

Együttes eloszlások



- Az **együttes eloszlás** több véletlen változó esetén határoz meg egy valós számot minden teljes értékhozzárendeléshez (kimenetelhez):

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Ennek teljesíteni kell a következőket:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

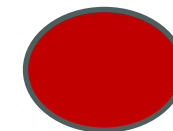
$P(H, I)$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

- Mekkora egy eloszlás mérete n darab, d különböző értékkel rendelkező változó esetén?

- Igen kis méretű eloszlásoktól eltekintve a teljes táblázat használata nem praktikus!

Események és valószínűségeik



- Egy **(összetett) esemény** értékegyüttesek (elemi események) halmaza
- Egy esemény valószínűsége a beletartozó értékegyüttesek valószínűségeinek az összege:

$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(x_1 \dots x_n)$$

- **Minden esemény valószínűsége definiált!**

- Meleg ÉS napos valószínűsége
- Meleg valószínűsége
- Meleg VAGY napos valószínűsége

$P(H,I)$

H	I	P
meleg	napsütés	<u>0.4</u>
meleg	eső	<u>0.1</u>
hideg	napsütés	<u>0.2</u>
hideg	eső	0.3

- Gyakran használt összetett események a részleges hozzárendelések, mint például a H=meleg.

Valóság és valószínűségi modellje



■ Valószínűségi változók

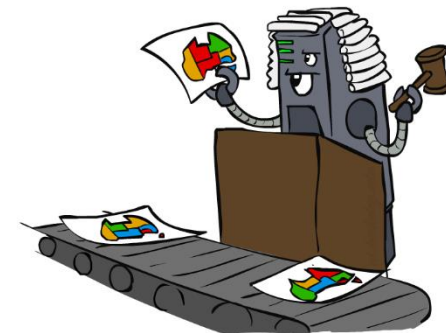
- H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
- I = Időjárás: napsütés/eső?
- Ú = Úszó: áll/mozog
- Cs = Csali a helyén/leesett
- K = Kapás: van/nincs

■ Együttes eloszlás

H	I	Ú	Cs	K	P
m	n	á	h	v	0.0001
m	n	á	h	n	0.001
...					

Valószínűségi modellek

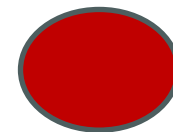
- Egy valószínűségi modell valószínűségi változók egy halmaza és azok együttes eloszlása.
- **KORÁBBAN:** Kényszerkielégítési problémáknál
 - Változók hozzájuk rendelhető értékekkel
 - Kényszerek: értékek együttes hozzárendelése lehetséges-e
 - Megfigyelés: egy teljes értékhozzárendelés lehetőségességét csak kevés változóhoz tartozó értékegyüttesek határozzák megA kényszerek egy kényszerhálóban reprezentálhatóak!



Logikai kényszerek H,I felett

H	I	KB
meleg	napsütés	igaz
meleg	eső	hamis
hideg	napsütés	hamis
hideg	eső	igaz

Valószínűségi modellek



- Egy valószínűségi modell valószínűségi változók egy halmaza és azok együttes eloszlása.



- Valószínűségi modellek:

- Valószínűségi változók értékekkel (kimenetekkel)
- Együttes eloszlások: értékhozzárendelések (kimenetek) valószínűsége
- Remény: egy teljes értékhozzárendelés lehetőségességét csak kis számú változó értékhozzárendelésének együttese befolyásolja

"Valószínűségi háló"

Eloszlás H,I felett

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

A valószínűesszámítás, mint racionális keret

- Szükszerű-e a valószínűesszámítás koherenciája?

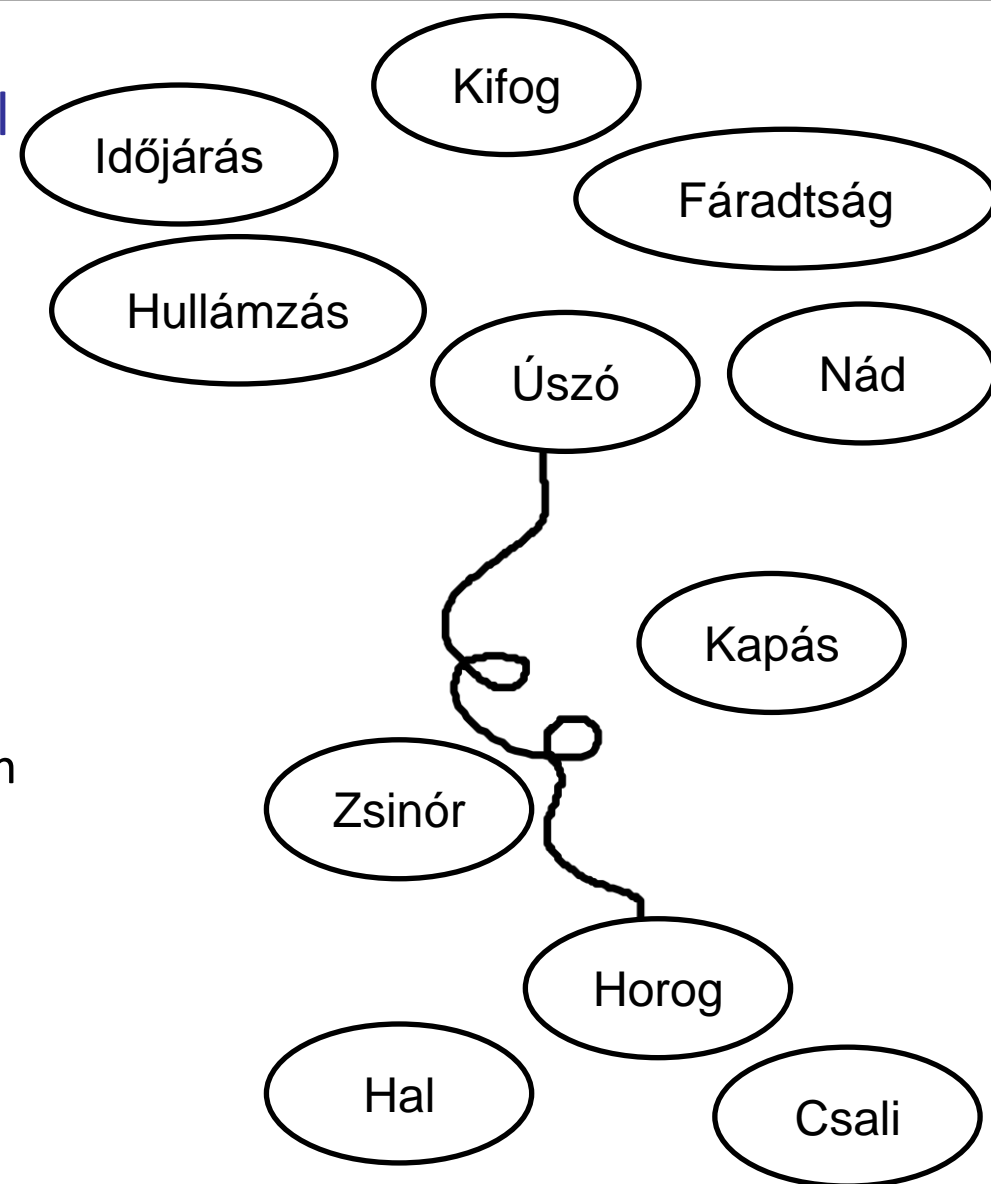
- Additivitás?

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3
meleg	*	0.6?
hideg	*	0.4?
..		

- Igen, amúgy rossz döntés születet

Valószínűségi következtetés megfigyelésekkel

- A valószínűségi következtetés egy valószínűségi modellből származtat eloszlásokat/valószínűségeket:
 - változók elhagyásával ("marginalizálással"): $P(\text{Kapás})$
 - változók feltételekbe emelésével: $P(\text{Úszó}=\text{mozog} \mid \text{Kapás}=\text{van})$
 - feltételek bayesi inverziójával: $P(\text{Kapás}=\text{van} \mid \text{Úszó}=\text{mozog})$
- Központi fogalom a **feltételes valószínűség**
 - $P(\text{Kapás}=\text{van} \mid \text{Úszó}=\text{mozog})$
 - amely az ágens vélekedésének a mértékét fejezi ki a feltételben adott evidencia esetén: kapás van, ha az úszó mozog.
- A vélekedések "frissülnek" az evidenciák bővülésével:
 - $P(\text{Kapás}=\text{van} \mid \text{Úszó}=\text{mozog}, \text{Csali}=\text{van})$



Marginális eloszlások

- Egy együttes eloszlásból változók feletti összegzéssel marginális eloszlásokat származtathatunk (kiátlagolás/kiösszegzés/vetítés/marginalizálás)

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$P(H,I)$

	I=napsütés	I=eső
H=meleg	0.4	0.1
H=hideg	0.2	0.3

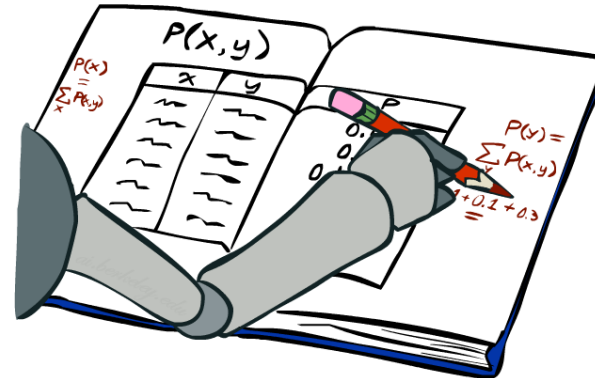
$P(H)$

H	P
meleg	0.5
hideg	0.5

→
I kiösszegzése

$P(I)$ ↓ H kiösszegzése

I	P
napsütés	0.6
eső	0.4



Következtetés vetítéssel

- Emlékeztető: Egy együttes eloszlásból bármely esemény valószínűsége kiszámítható:

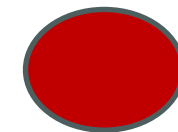
$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(x_1 \dots x_n)$$

- Meleg ÉS napos valószínűsége
- Meleg valószínűsége
- Meleg VAGY napos valószínűsége

$P(H,I)$

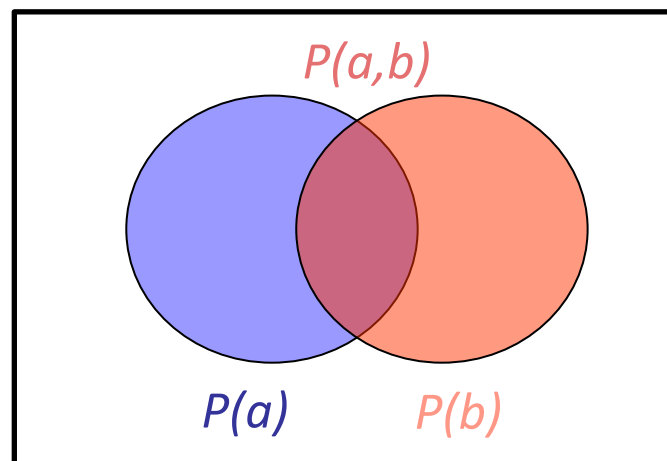
H	I	P
meleg	napsütés	<u>0.4</u>
meleg	eső	<u>0.1</u>
hideg	napsütés	<u>0.2</u>
hideg	eső	0.3

Feltételes valószínűségek



- Pozitív marginális valószínűség esetén definiálható a feltételes valószínűség
- $P(A,B)$ együttes eloszlás esetén a $B=b$ feltétel mellett az $A=a$ feltételes valószínűsége:

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$



$P(H,I)$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

$$P(I = n|H = h) = \frac{P(I = n, H = h)}{P(H = h)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$\begin{aligned} &= P(I = n, H = h) + P(I = e, H = h) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

Feltételes eloszlások

- A feltételes eloszlások egy adott feltétel esetén fennálló valószínűségi eloszlások adott változók felett (az adott feltétel más változók valamely rögzített értéke).

Feltételes eloszlások

$P(I/H)$	$P(I/H=meleg)$	
	I	P
	naps.	0.8
	eső	0.2
	$P(I/H=hideg)$	
	I	P
	naps.	0.4
	eső	0.6

$P(I/H=hideg)$

Együttes eloszlás

$P(H,I)$		
H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

Valószínűségi normalizálás

- Valószínűségi normalizálás: 1-re összegzés helyreállítása

- Eljárás:

- 1. lépés: Számítsuk ki a bejegyzések Z összegét
- 2. lépés: Osszuk el a bejegyzéseket Z-vel

- Példa

I	P
naps.	0.2
eső	0.3

Normalize
→
 $Z = 0.5$

I	P
naps.	0.4
eső	0.6

A normalizálós trükk

- Egy feltételes eloszlás származtatása normalizálással:
 - Válasszuk ki a feltételnek megfelelő együttes eloszlásbeli valószínűségeket
 - Normalizáljuk őket

$P(H,I)$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

→
Kiválaszt

$P(H, I=eső)$

H	I	P
meleg	eső	0.1
hideg	eső	0.3

→
Normalizál

$P(H/I=eső)$

H	P
meleg	0.25
hideg	0.75

- Nem szükségesek együttes eloszlásbeli valószínűségek a feltétel valószínűségének kiszámításához (lehetnek nem 1-re normáltak)!

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_2)} = \frac{P(x_1, x_2)}{\sum_{x_1} P(x_1, x_2)}$$

Következtetés felsorolással

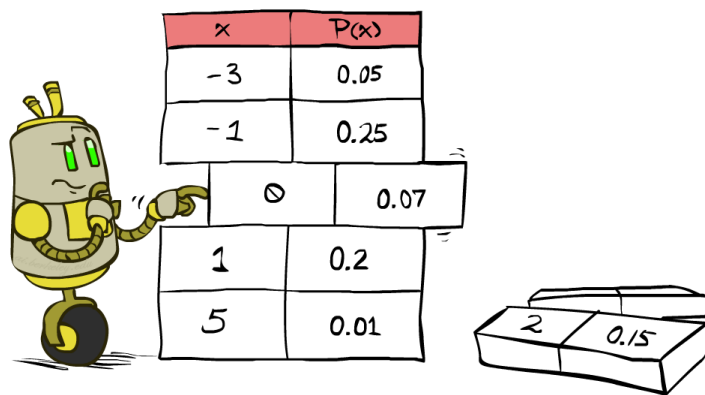
■ Általános eset:

- Evidencia változók (E): $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
 - Kérdéses* változók: Q
 - Minden egyéb változó: $H_1 \dots H_r$
- $$\left. \begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots X_n \\ \text{Minden változó (V,U)} \end{array}$$

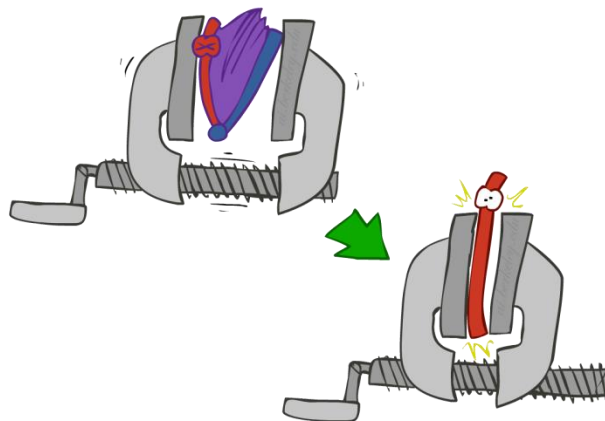
* Több lekérdezett változó esetén ugyanez elvégezhető

■ 1. lépés:

Kiválasztás az evidenciák szerint



■ 2. lépés: H kiösszegzése a Q és E együttes eloszlásához



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} P(Q, \underbrace{h_1 \dots h_r}_{X_1, X_2, \dots X_n}, e_1 \dots e_k)$$

■ Amit szeretnénk:

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

■ 3. lépés: Normalizálás

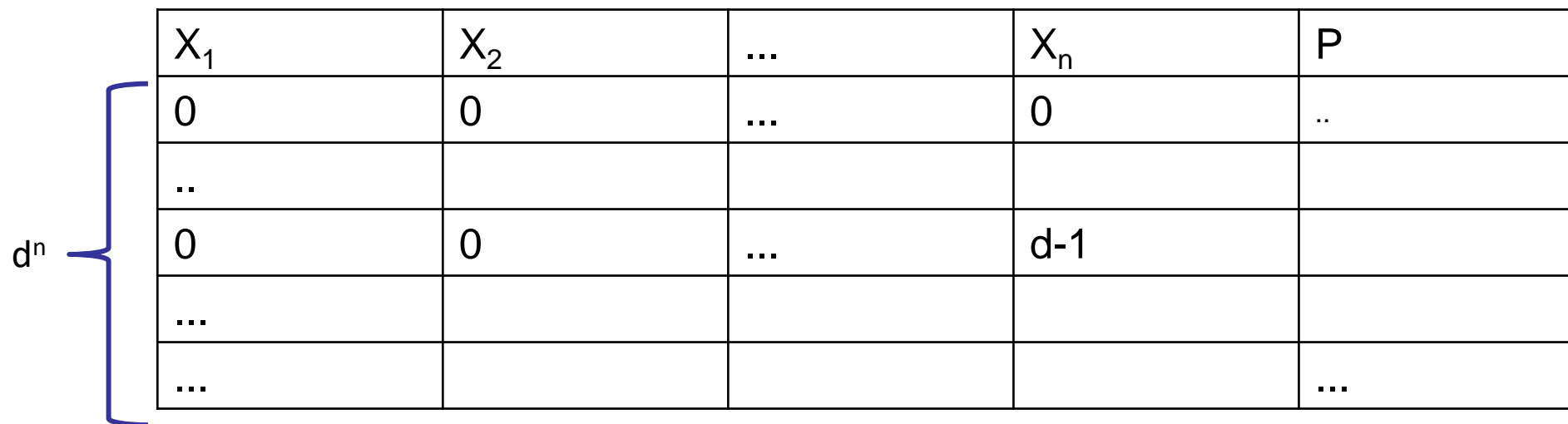
$$\times \frac{1}{Z}$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \dots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \dots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \dots e_k)$$

Következtetés felsorolással

- Baj: exponenciális tár és idő igény!
- n változó és d értékkészlet esetén:
 - Idő komplexitás: $O(d^n)$
 - Tár komplexitás: $O(d^n)$

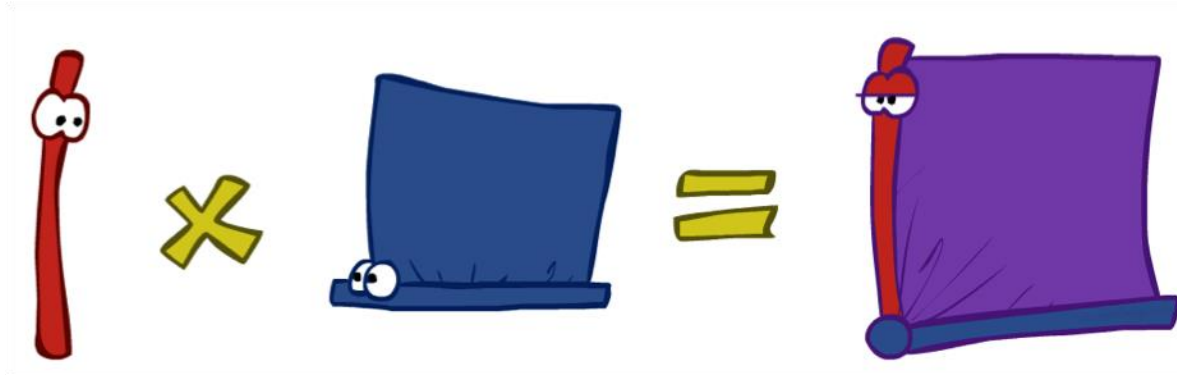


X_1	X_2	...	X_n	P
0	0	...	0	..
..				
0	0	...	$d-1$	
...				
...				...

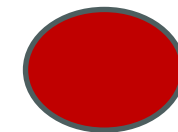
Szorzat szabály

- Feltételes eloszlások segítségével egy együttes eloszlás szorzattá alakítható:

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$



Láncszabály



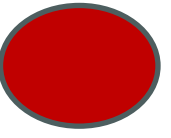
- Általában n változó esetén is, a változók bármely sorrendje mentén egy együttes eloszlás szorzattá alakítható (faktorizálható)

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$

- Eloszlások táblázatos reprezentációja esetén a tárigény (paraméterszám) azonos!
- **Konstrukció esetén oksági/temporális sorrend preferált, diagnosztika esetén fordított.**
- Bármely sorrendhez tartozó faktorizálásról át lehet térni egy másik sorrend melletti faktorizálásra:
 - Adott sorrend melletti faktorizálás egy teljes együttes eloszlást definiál
 - Az együttes eloszlásból tetszőleges feltételes eloszlás származtatható

Bayes tétele



- Kétféle faktorizálása egy kétváltozós együttes eloszlásnak:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- Osztással adódik:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}$$

- **A mesterséges intelligencia alapegyenlete**

- Bizonytalan tudáselemek **kombinálása**
- **Tanulás** megfigyelésekből
- **Okokra következtetés**
- + **elemi művelet** beavatkozásokat is ("oksági") megengedő és megtörténtektől eltérő ("kontrafaktuális") scenáriókban való következtetésben



Thomas Bayes: 1701 – 1761

Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

$$\underbrace{P(\text{Hipotézis} = h | \text{Evidencia} = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h) P(\text{Hipotézis} = h)}{P(\text{Evidencia} = e)}$$
$$\propto \underbrace{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(\text{Hipotézis} = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

$$P(\text{váza} | \text{látvány}) \propto P(\text{látvány} | \text{váza}) P(\text{váza})$$



az aktualizált
percepcióhoz tartozó a
posteriori vélekedés

$$P(\text{váza} | \text{látvány}) = \sim 0.5$$

\propto



kompatibilitás mértéke az
érezelt látványnak

$$P(\text{látvány} | \text{váza}) = c$$

$$P(\text{látvány} | \text{arc}) = c$$

$$P(\text{látvány} | \text{bármilyen más}) = c' \ll c$$

\times



a *priori* elvárás képen
látható objektumokról

$P(H)$ egyenletes eloszlás

Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

$$\underbrace{P(\text{Hipotézis} = h | \text{Evidencia} = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h) P(\text{Hipotézis} = h)}{P(\text{Evidencia} = e)}$$
$$\propto \underbrace{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(\text{Hipotézis} = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$



$$P(\text{kapás} | \text{megfigyelések}) \propto P(\text{megfigyelések} | \text{kapás}) P(\text{kapás})$$

Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

$$\underbrace{P(\text{Hipotézis} = h | \text{Evidencia} = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h) P(\text{Hipotézis} = h)}{P(\text{Evidencia} = e)}$$
$$\propto \underbrace{P(\text{Evidencia} = e | \text{Hipotézis} = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(\text{Hipotézis} = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

Vélekedés frissítése (Bayes tétele 1x)

$$P(h|e) = \frac{P(e|h)P(h)}{P(e)} \propto P(e|h)P(h)$$

Tények kombinálása (Bayes tétele 2x)

$$P(h|e, e') = \frac{P(e'|e, h)P(e|h)P(h)}{P(e'|e)P(e)}$$
$$= \frac{P(e'|e, h)}{P(e'|e)} \underbrace{\frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}}_{P(h|e)}$$
$$\propto P(e'|e, h) \underbrace{\frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}}_{\text{Bayesi frissítés } e\text{-vel}}$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{majd Bayesi frissítés } e'\text{-vel}}$$

[1713] Ars Conjectandi (The Art of Conjecture), Jacob Bernoulli

[1718] The Doctrine of Chances, Abraham de Moivre

[1764, posthm] Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of chances", Thomas Bayes

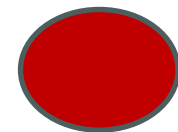
[1812] Théorie analytique des probabilités, Pierre-Simon Laplace

Bayesi frissítés és kombinálás: példa



- Valószínűségi változók
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - I = Időjárás: napsütés/eső?
 - $Ú$ = Úszó: áll/mozog
 - Cs = Csali a helyén/leesett
 - K = Kapás: van/nincs
- Együttes eloszlás: $P(H, I, Ú, Cs, K)$
- Frissítés és kombinálás
 - $P(Kapás)$
 - $P(Kapás=van \mid Csali=van)$
 - $P(Kapás=van \mid Csali=van, Úszó=mozog)$

Bayesi tanulás és predikció



Bayesi tanulás (~Bayes tétele)

$$P(\text{Modell}|\text{adat}) = \frac{P(\text{adat}|\text{Modell})P(\text{Modell})}{P(\text{adat})} \propto P(\text{adat}|\text{Modell})P(\text{Modell})$$

$$\underbrace{P(\text{Modell} = m | \text{Megfigyelés} = \text{adat})}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat} | \text{Modell} = m)P(\text{Modell} = m)}{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat})}$$
$$\propto \underbrace{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat} | \text{Modell} = m)}_{\text{megfigyelt adat valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(\text{Modell} = m)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

Bayesi predikció

$$P(e'|e) = \sum_m P(e', m|e)$$
$$= \sum_m P(e'|m, e) \underbrace{P(m|e)}_{\text{poszterior}}$$

További e' megfigyelések predikciójában az ÖSSZES modell predikciója felett átlagolunk a modellek **Bayes tétele szerinti poszteriorjával**.

Bayesi tanulás és predikció: példa

- Valószínűségi változók

- H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
- I = Időjárás: napsütés/eső?
- Ú = Úszó: áll/mozog
- Cs = Csali a helyén/leesett
- K = Kapás: van/nincs

- Együttes eloszlás: $P(H, I, Ú, Cs, K)$

- Bayesi tanulás: Csali? Csali, ha az úszó áll?

$$P(Csali = leesett | Úszó = áll) \propto P(Úszó = áll | Csali = leesett) P(Csali = leesett)$$

- Bayesi predikció: Kapás, ha a csali már leeshetett?

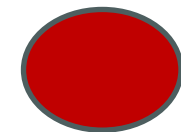
$$P(K = van | Ú = áll) = \sum_{Cs} P(K = van | Cs, Ú = áll) P(Cs | Ú = áll)$$

$$= P(K = van | Cs = van, Ú = áll) P(Cs = van | Ú = áll)$$

$$+ P(K = van | Cs = leesett, Ú = áll) P(Cs = leesett | Ú = áll)$$



Okokra következtetés Bayes tételével



- Diagnosztikai következtetés: oksági iránnyal ellentétes irányú

$$P(Ok|Okozat) = \frac{P(Okozat|Ok)P(Ok)}{P(Okozat)} \propto P(Okozat|Ok)P(Ok)$$

- Példa:

- M: meningitis (agyhártyagyulladás), S: merev nyak

$$\left. \begin{aligned} P(+m) &= 0.0001 \\ P(+s|+m) &= 0.8 \\ P(+s|-m) &= 0.01 \end{aligned} \right\} \text{Ismertek "oksági irányban"}$$

$$P(+m|+s) = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s|+m)P(+m) + P(+s|-m)P(-m)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.8 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.999}$$

- Az agyhártyagyulladás poszteriorja is kicsi: 0.007944389
- A merev nyak ennek ellenére nagy diagnosztikai értékkel bír! (vö. $P(+m|+s)$ versus $P(+m|-s)$)

Összefoglalás

- Marginális/(perem-) eloszlások
- Feltételes eloszlások, láncszabály
- Bayes tétele
 - A mesterséges intelligencia alapegyenlete
 - Bizonytalan tudáselemek **kombinálása**
 - **Tanulás** megfigyelésekből
 - **Okokra következtetés**
 - + elemi művelet oksági és kontrafaktuális következtetésekben