



Mesterséges intelligencia előadássorozat

Az előadás diái az AIMA könyvre épülve (<http://aima.cs.berkeley.edu>) készültek a University of California, Berkeley mesterséges intelligencia kurzusának anyagainak felhasználásával (<http://ai.berkeley.edu>).

These slides are based on the AIMA book (<http://aima.cs.berkeley.edu>) and were adapted from the AI course material of University of California, Berkeley (<http://ai.berkeley.edu>).



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Mesterséges Intelligencia és Rendszertervezés Tanszék



Bizonytalanság, valószínűség

Előadó: Dr. Hullám Gábor

Előadás anyaga: Dr. Antal Péter

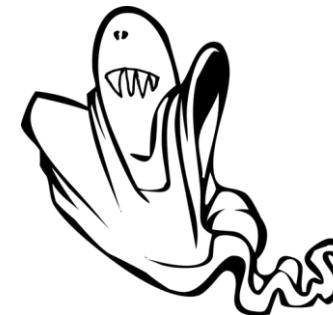
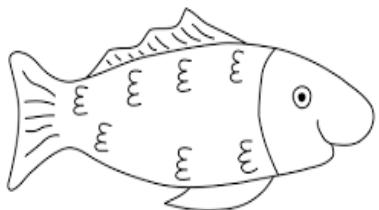
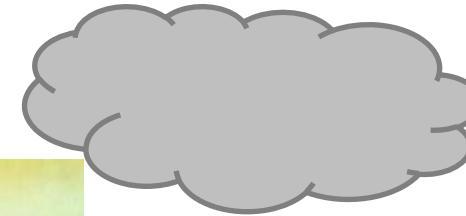


Bizonytalan tudás

Lehetséges okok

- „Lazaság/lustaság” - a részletes kapcsolatok megfogalmazása túl nehéz, a használatuk szintén nehézkes (véges erőforrások)
- **Elméleti ismeret hiánya** - adott problématerületnek az elméleti feltárása még nem zárult le, vagy lezárni soha nem lehet
- **Gyakorlati ismeret hiánya** - nem minden, a szabályokban hivatkozott feltétel ismert a szabályok alkalmazásakor

Bizonytalanság



Észlelés, cselekvés, döntéshozatal, és megtörténettől eltérőek elképzelése

Kapás?
Káprázat?



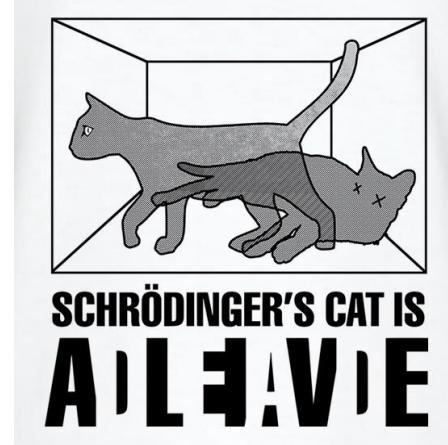
Horogra akad,
ha bevágunk?

Bevágni?
Várni?
Kihúzni?
....

Horogra akadt volna,
ha később vágok be?
...

A bizonytalanság forrásai

- A bizonytalanság forrásai
 - természet/valóság
 - megfigyelés
 - beavatkozás
 - ismerethiány
 - elhanyagolás
 - bizonytalanság bizonytalansága



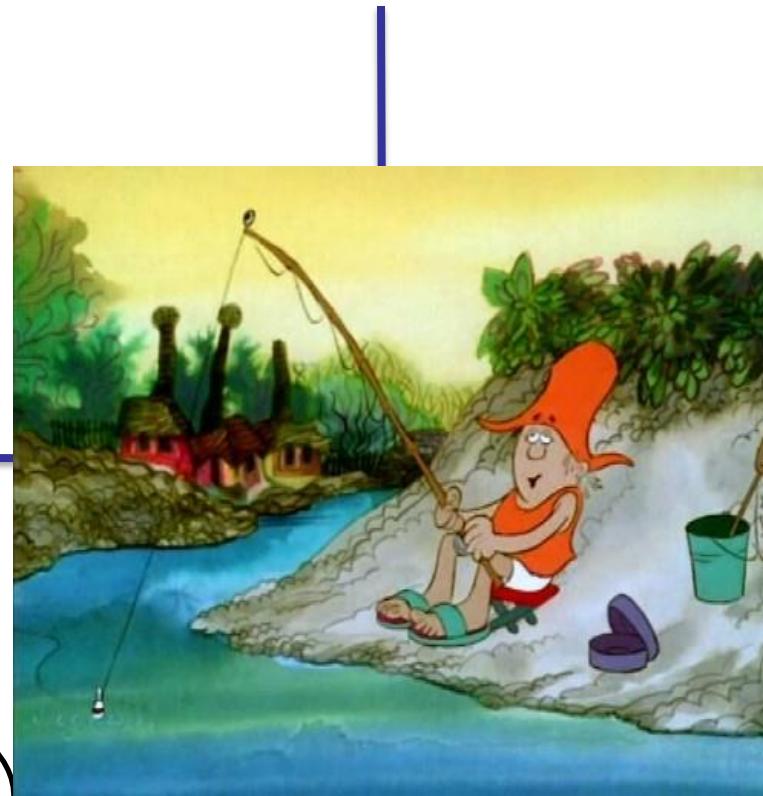
$p(\text{Kapás})=?$
 $p(p(\text{Kapás}))=?$
...

Elméleti keretek a bizonytalanság kezelésére

Valószínűségszámítás

"Mi lehet?"

Kapás?



Most éri meg
bevágni?
várni?
kihúzni?
....

Döntéselmélet

"Megéri?"

7

Intelligens érvelés
"Mi lett volna ha?"

Horogra akad,
ha bevágunk?

Horogra akadt volna,
ha később vágok be?
...

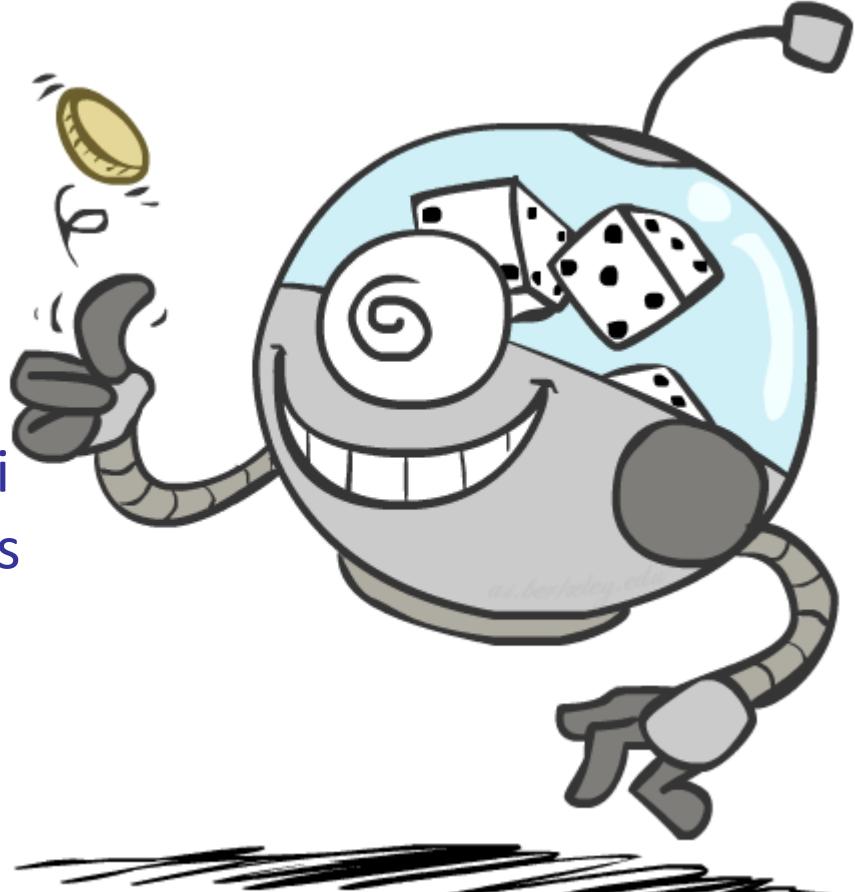
Mai téma: valószínűségszámítás

- Valószínűség
- Valószínűségi változók
- Együttes eloszlás
- Marginális/(perem-) eloszlások
- Feltételes eloszlások, láncszabály
- Bayes tétele
- Függetlenség
- Feltételes függetlenség
- Függetlenségi modell

} Valószínűségi modell

} Valószínűségi következtetés

} Valószínűségi modellezés



Cél: valószínűségi következtetés megfigyelésekkel

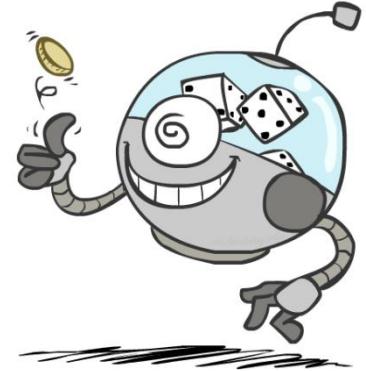
- Általános keret:

- **Megfigyelt változók (evidenciák):** Az ágens rendelkezik bizonyos ismeretekkel a világ állapotáról (e.g., érzékelők, szimptómák)
- **Ismeretlen változók:** Az ágensnek következtetnie kell a többi állapotleíróval kapcsolatban (e.g., hol van egy objektum, jelen van-e egy betegség)
- **Modell:** Az ágens rendelkezik bizonyos ismeretekkel, arról, hogy mi a kapcsolata megfigyelt és ismeretlen változóknak



Valószínűségi változó

- A valószínűségi változó a világ egy olyan aspektusát írja le, amellyel kapcsolatban bizonytalanok vagyunk
 - E = Esik az eső: igen/nem?
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - V = Mennyi ideig tart ma a beutazás a munkahelyre?
- A kényszerkielégítésben használt változókhöz hasonlóan az egyes valószínűségi változókhöz is tartozik a **megengedett értékeknek** egy-egy tartománya (domain).
 - E: {igaz, hamis}
 - H: {meleg, hideg}
 - V: $[0, \infty)$
- Valószínűségi változó értéke: **hozzárendelés** (assignment), **kimenetel** (outcome)
- (Formálisan, egy valószínűségi változó egy függvény, amelynek értékei a világ adott aspektusát reprezentálják.)

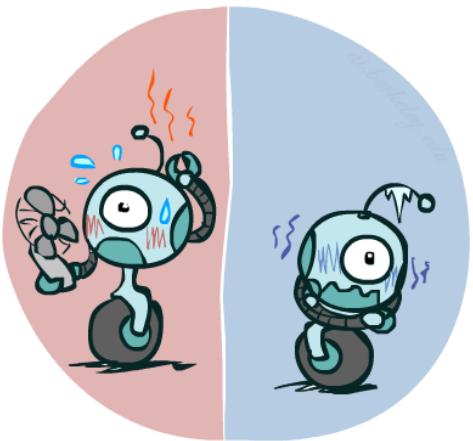


Események – véletlen kísérlet

- **Elemi esemény:** minden lehetséges kimenetel (e_1, e_2, \dots, e_n), amiről egy kísérlet elvégzése után eldönthető, hogy bekövetkezett vagy sem
 - $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \emptyset$
- **Eseménytér:** egy kísérlet összes kimenetele, az összes elemi esemény halmaza (Ω).
 - $e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_n = \Omega$
- **Véletlen esemény:** az eseménytér egy részhalmaza
- **Biztos esemény:** a kísérlet során biztosan (minden kimenetelnél) bekövetkezik.
- **Ellentett esemény:** akkor és csak akkor következik be, ha az eredeti esemény nem következik be

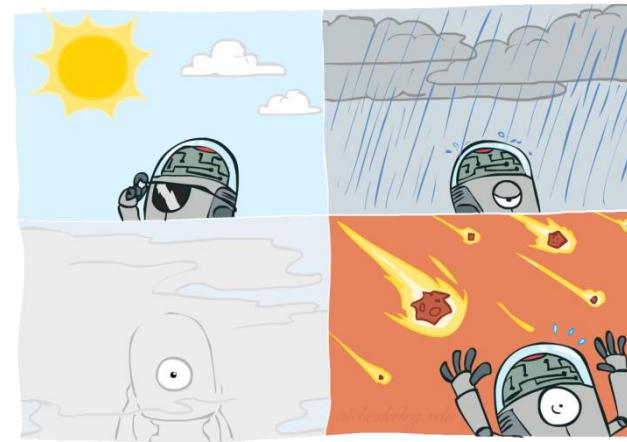
Valószínűség

- Rendeljünk egy "valószínűséget" ($[0,1]$ között valós számot) minden egyes értékhez
 - Hőmérséklet:
 - Időjárás:



$P(H)$

H	P
meleg	0.5
hideg	0.5



$P(I)$

I	P
napsütés	0.6
eső	0.1
kod	0.3
meteor	0.0

Bizonytalanság és valószínűség

- A valószínűség értelmezései

- fizikai

- mechanizmusok, oksági kapcsolatok eredménye

- pl. kvantummechanikában egyedi atomok bomlási valószínűsége

- frekventista

- „Kísérlet” során megfigyelt relatív frekvencia alapú

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}_N(A) = p(A)$$

- szubjektív

Valószínűségi eloszlás

- Egy (diszkrét) **valószínűségi eloszlás** egy TÁBLÁZAT valószínűségi értékekkel egy (diszkrét) valószínűségi változó lehetséges értékei felett.

H	P
meleg	0.5
hideg	0.5

I	P
napsütés	0.6
eső	0.1
köd	0.3
meteor	0.0

- Egy (kis betűvel jelzett) érték valószínűsége egy szám

$$P(I=eső) = 0.1$$

- Teljesülnie kell, hogy $\forall x \ P(X = x) \geq 0$ és $\sum_x P(X = x) = 1$

Jelölések rövidítése:

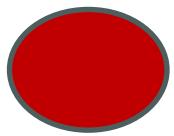
$$P(meleg) = P(H=meleg)$$

$$P(hideg) = P(H=hideg)$$

$$P(eső) = P(I=eső)$$

...

Nem okoz zavart, ha a v.v.
értékei egyediek.



Együttes eloszlások

- Az **együttes eloszlás** több véletlen változó esetén határoz meg egy valós számot minden teljes értékhozzárendeléshez (kimenetelhez):

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(H,I)$$

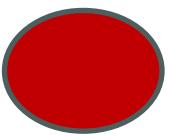
- Ennek teljesíteni kell a következőket:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

- Mekkora egy eloszlás mérete n darab, d különböző értékkel rendelkező változó esetén?
 - Igen kis méretű eloszlásuktól eltekintve a teljes táblázat használata nem praktikus!



Események és valószínűségeik

- Egy **(összetett) esemény** értékegyüttesek (elemi események) halmaza
- Egy esemény valószínűsége a beletartozó értékegyüttesek valószínűségeinek az összege:

$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(x_1 \dots x_n)$$

- **Minden esemény valószínűsége definiált!**

- Meleg ÉS napos valószínűsége
- Meleg valószínűsége
- Meleg VAGY napos valószínűsége

$P(H,I)$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

- Gyakran használt összetett események a részleges hozzárendelések, mint például a H=meleg.

Valóság és valószínűségi modellje

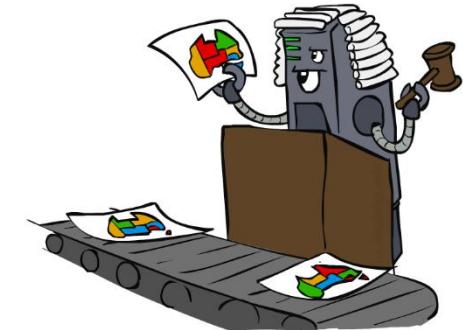


- Valószínűségi változók
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - I = Időjárás: napsütés/eső?
 - Ú = Úszó: áll/mozog
 - Cs = Csali a helyén/leesett
 - K = Kapás: van/nincs
- Együttes eloszlás

H	I	Ú	Cs	K	P
m	n	á	h	v	0.0001
m	n	á	h	n	0.001
...					

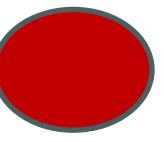
Valószínűségi modellek

- Egy valószínűségi modell valószínűségi változók egy halmaza és azok együttes eloszlása.
- **KORÁBBAN:** Kényszerkielégítési problémáknál
 - Változók hozzájuk rendelhető értékekkel
 - Kényszerek: értékek együttes hozzárendelése lehetséges-e
 - Megfigyelés: egy teljes értékhozzárendelés lehetségeségét csak kevés változóhoz tartozó értékegyüttesek határozzák megA kényszerek egy kényszerhálóban reprezentálhatóak!



Logikai kényszerek H,I felett

H	I	KB
meleg	napsütés	igaz
meleg	eső	hamis
hideg	napsütés	hamis
hideg	eső	igaz



Valószínűségi modellek

- Egy valószínűségi modell valószínűségi változók egy halmaza és azok együttes eloszlása.



- Valószínűségi modellek:

- Valószínűségi változók értékekkel (kimenetelekkel)
- Együttes eloszlások: értékhuzzárendelések (kimenetelek) valószínűsége
- Remény: egy teljes értékhuzzárendelés lehetségességét csak kis számú változó értékhuzzárendelésének együttesei befolyásolják

"Valószínűségi háló"

Eloszlás H,I felett

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

A valószínűségszámítás, mint racionális keret

- Szükségszerű-e a valószínűségszámítás koherenciája?

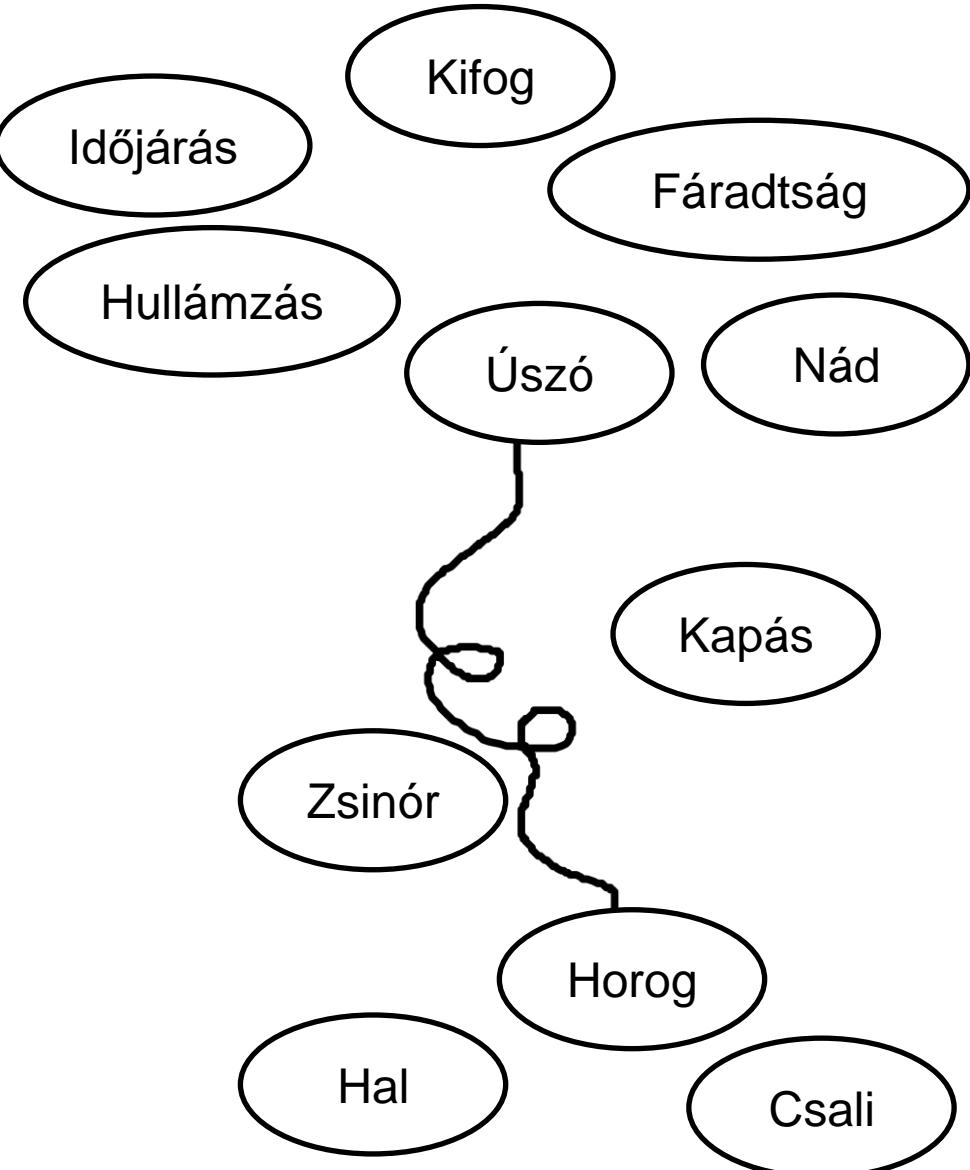
- Additivitás?

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3
meleg	*	0.6?
hideg	*	0.4?
..		

- Igen, amúgy rossz döntés születhet

Valószínűségi következtetés megfigyelésekkel

- A valószínűségi következtés egy valószínűségi modellből származtat eloszlásokat/valószínűségeket:
 - változók elhagyásával ("marginalizálással"): $P(\text{Kapás})$
 - változók feltételekbe emelésével: $P(\text{Úszó=mozog} \mid \text{Kapás=van})$
 - feltételek bayesi inverziójával: $P(\text{Kapás=van} \mid \text{Úszó=mozog})$
- Központi fogalom a **feltételes valószínűség**
 - $P(\text{Kapás=van} \mid \text{Úszó=mozog})$
 - amely az ágens vélekedésének a mértékét fejezi ki a feltételben adott evidencia esetén: kapás van, ha az úszó mozog.
- A vélekedések "frissülnek" az evidenciák bővülésével:
 - $P(\text{Kapás=van} \mid \text{Úszó=mozog}, \text{Csali=van})$



Marginális eloszlások

- Egy együttes eloszlásból változók feletti összegéssel marginális eloszlásokat származtathatunk (kiátlagolás/kiösszegzés/vetítés/marginalizálás)

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

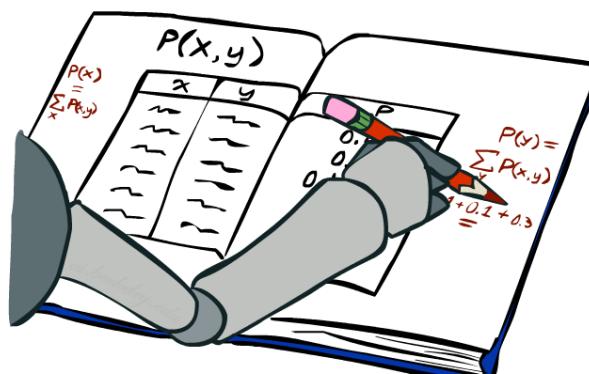
$P(H,I)$

	I=napsütés	I=eső
H=meleg	0.4	0.1
H=hideg	0.2	0.3

$P(H)$

H	P
meleg	0.5
hideg	0.5

I kiösszegzése



$\downarrow H$ kiösszegzése

I	P
napsütés	0.6
eső	0.4

Következtetés vetítéssel

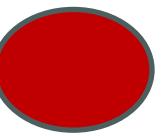
- Emlékeztető: Egy együttes eloszlásból bármely esemény valószínűsége kiszámítható:

$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(x_1 \dots x_n)$$

$$P(H,I)$$

- Meleg ÉS napos valószínűsége
- Meleg valószínűsége
- Meleg VAGY napos valószínűsége

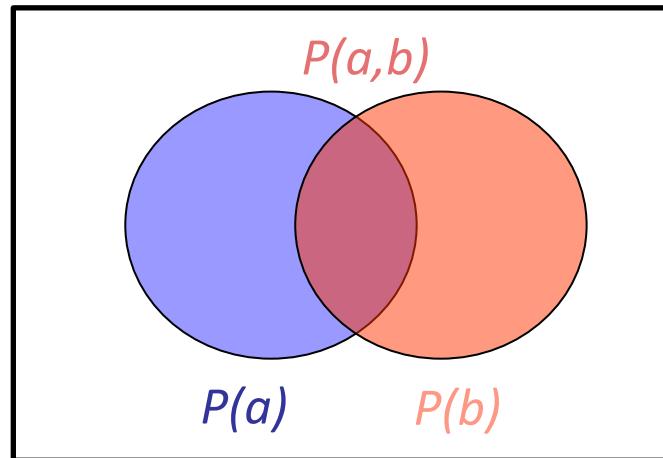
H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3



Feltételes valószínűségek

- Pozitív marginális valószínűség esetén definiálható a feltételes valószínűség
- $P(A|B)$ együttes eloszlás esetén a $B=b$ feltétel mellett az $A=a$ feltételes valószínűsége:

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$



$P(H,I)$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

$$P(I = n|H = h) = \frac{P(I = n, H = h)}{P(H = h)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$\begin{aligned} &= P(I = n, H = h) + P(I = e, H = h) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

Feltételes eloszlások

- A feltételes eloszlások egy adott feltétel esetén fennálló valószínűségi eloszlások adott változók felett (az adott feltétel más változók valamely rögzített értéke).

Feltételes eloszlások

$$P(I/H)$$

$P(I/H=meleg)$	
I	P
naps.	0.8
eső	0.2

$P(I/H=hideg)$	
I	P
naps.	0.4
eső	0.6

$P(I/H=hideg)$

Együttes eloszlás

$$P(H,I)$$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

Valószínűségi normalizálás

- Valószínűségi normalizálás: 1-re összegzés helyreállítása

- Eljárás:

- 1. lépés: Számítsuk ki a bejegyzések Z összegét
 - 2. lépés: Osszuk el a bejegyzéseket Z-vel

- Példa

Normalize \rightarrow $Z = 0.5$

I	P
naps.	0.2
eső	0.3

Normalize \rightarrow $Z = 0.5$

I	P
naps.	0.4
eső	0.6

A normalizálós trükk

- Egy feltételes eloszlás származtatása normalizálással:
 - Válasszuk ki a feltételnek megfelelő együttes eloszlásbeli valószínűségeket
 - Normalizáljuk őket

$$P(H,I)$$

H	I	P
meleg	napsütés	0.4
meleg	eső	0.1
hideg	napsütés	0.2
hideg	eső	0.3

$$P(H,I=eső)$$

Kiválaszt

H	I	P
meleg	eső	0.1
hideg	eső	0.3

$$P(H/I=eső)$$

Normalizál

H	P
meleg	0.25
hideg	0.75

- Nem szükségesek együttes eloszlásbeli valószínűségek a feltétel valószínűségének kiszámításához (lehetnek nem 1-re normáltak)!

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_2)} = \frac{P(x_1, x_2)}{\sum_{x_1} P(x_1, x_2)}$$

Következtetés felsorolással

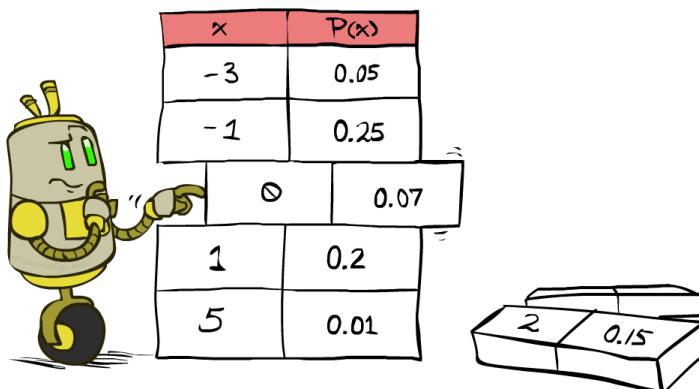
- Általános eset:

- Evidencia változók (E): $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
- Kérdéses* változók: Q
- Minden egyéb változó: $H_1 \dots H_r$

* Több lekérdezett változó esetén ugyanez elvégezhető

- 1. lépés:

Kiválasztás az evidenciák szerint

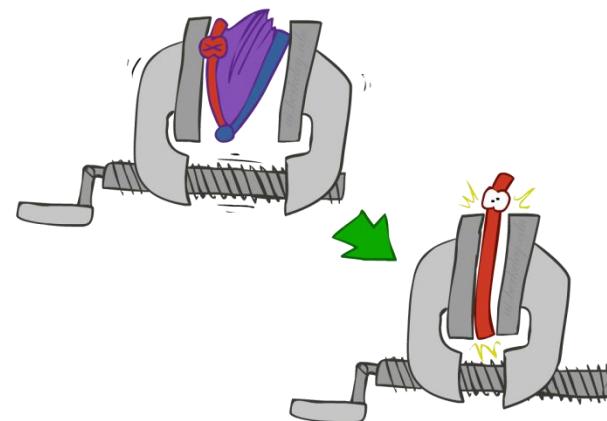


X_1, X_2, \dots, X_n
Minden változó (V,U)

- Amit szeretnénk:

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

- 2. lépés: H kiösszegzése a Q és E együttes eloszlásához



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots, X_n}$$

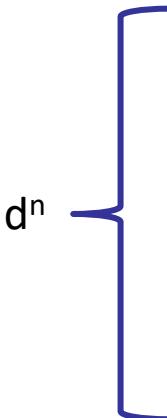
$$\times \frac{1}{Z}$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \dots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \dots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \dots e_k)$$

Következtetés felsorolással

- Baj: exponenciális tár és idő igény!
- n változó és d értékkészlet esetén:
 - Idői komplexitás: $O(d^n)$
 - Tár komplexitás: $O(d^n)$

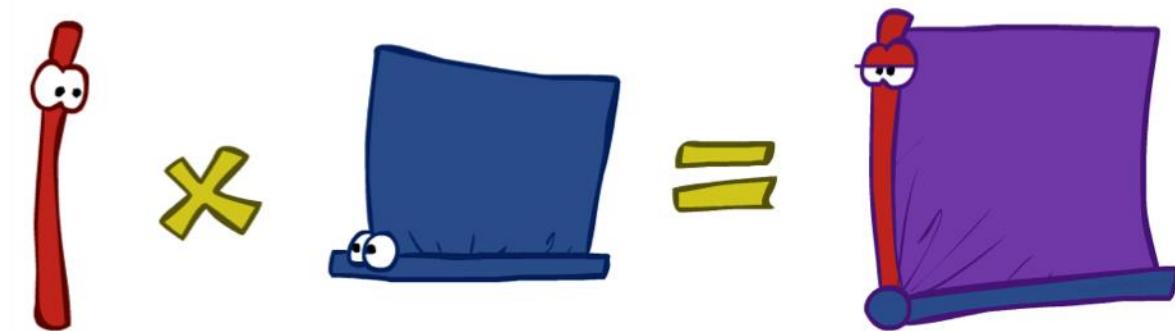


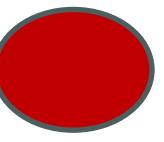
X_1	X_2	...	X_n	P
0	0	...	0	..
..				
0	0	...	$d-1$	
..				
...				...

Szorzat szabály

- Feltételes eloszlások segítségével egy együttes eloszlás szorzattá alakítható:

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$





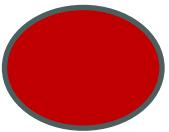
Láncszabály

- Általában n változó esetén is, a változók bármely sorrendje mentén egy együttes eloszlás szorzattá alakítható (faktorizálható)

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$

- Eloszlások táblázatos reprezentációja esetén a tárigény (paraméterszám) azonos!
- **Konstrukció esetén oksági/temporális sorrend preferált, diagnosztika esetén fordított.**
- Bármely sorrendhez tartozó faktorizálásról át lehet tértani egy másik sorrend melletti faktorizálásra:
 - Adott sorrend melletti faktorizálás egy teljes együttes eloszlást definiál
 - Az együttes eloszlásból tetszőleges feltételes eloszlás származtatható



Bayes tétele

- Kétféle faktorizálása egy kétváltozós együttes eloszlásnak:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- Osztással adódik:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- A mesterséges intelligencia alapegyenlete

- Bizonytalan tudáselemek **kombinálása**
- **Tanulás** megfigyelésekből
- **Okokra következtetés**
- + **elemi művelet** beavatkozásokat is ("oksági") megengedő és megtörténtektől eltérő ("kontrafaktuális") szcenáriókban való következtetésben



Thomas Bayes: 1701 – 1761

Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

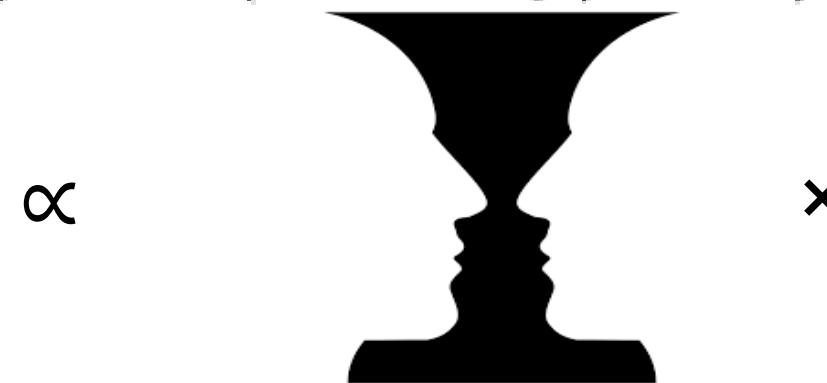
$$\underbrace{P(Hipotézis = h|Evidencia = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(Evidencia = e|Hipotézis = h)P(Hipotézis = h)}{P(Evidencia = e)} \\ \propto \underbrace{P(Evidencia = e|Hipotézis = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(Hipotézis = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

$$P(\text{váza}|látvány) \propto P(látvány|váza)P(váza)$$



az aktualizált
percepcióhoz tartozó a
posteriori vélekedés

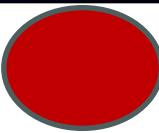
$$P(\text{váza}|látvány) = \sim 0.5$$



kompatibilitilitás mértéke az
érzékelt látványnak
 $P(\text{látvány|váza}) = c$
 $P(\text{látvány|arc}) = c$
 $P(\text{látvány|bármi más}) = c' << c$



a *priori* elvárás képen
látható objektumokról
 $P(H)$ egyenletes eloszlás



Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

$$\underbrace{P(Hipotézis = h|Evidencia = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(Evidencia = e|Hipotézis = h)P(Hipotézis = h)}{P(Evidencia = e)} \\ \propto \underbrace{P(Evidencia = e|Hipotézis = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(Hipotézis = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$



$$P(\text{kapás}|\text{megfigyelések}) \propto P(\text{megfigyelések}|\text{kapás})P(\text{kapás})$$

Bayes: vélekedések frissítése, tények kombinálása

$$\underbrace{P(Hipotézis = h | Evidencia = e)}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(Evidencia = e | Hipotézis = h) P(Hipotézis = h)}{P(Evidencia = e)}$$
$$\propto \underbrace{P(Evidencia = e | Hipotézis = h)}_{\text{evidencia valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(Hipotézis = h)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

Vélekedés frissítése (Bayes tétele 1x)

$$P(h|e) = \frac{P(e|h)P(h)}{P(e)} \propto P(e|h)P(h)$$

Tények kombinálása (Bayes tétele 2x)

$$P(h|e, e') = \frac{P(e'|e, h)P(e|h)P(h)}{P(e'|e)P(e)}$$
$$= \frac{P(e'|e, h)}{P(e'|e)} \underbrace{\frac{P(e|h)P(h)}{P(e)}}_{P(h|e)}$$

$$\propto P(e'|e, h) \underbrace{\frac{P(e|h)p(h)}{\text{Bayesi frissítés } e\text{-vel}}}_{\text{majd Bayesi frissítés } e'\text{-vel}}$$

[1713] Ars Conjectandi (The Art of Conjecture), Jacob Bernoulli

[1718] The Doctrine of Chances, Abraham de Moivre

[1764, posthm] Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of chances", Thomas Bayes

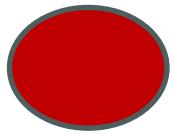
[1812] Théorie analytique des probabilités, Pierre-Simon Laplace

Bayesi frissítés és kombinálás: példa



- Valószínűségi változók
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - I = Időjárás: napsütés/eső?
 - U = Úszó: áll/mozog
 - Cs = Csali a helyén/leesett
 - K = Kapás: van/nincs
- Együttes eloszlás: $P(H,I,U,Cs,K)$
- Frissítés és kombinálás
 - $P(Kapás)$
 - $P(Kapás=van | Csali=van)$
 - $P(Kapás=van | Csali=van, Úszó=mozog)$

Bayesi tanulás és predikció



Bayesi tanulás (~Bayes tétele)

$$P(\text{Modell}|\text{adat}) = \frac{P(\text{adat}|\text{Modell})P(\text{Modell})}{P(\text{adat})} \propto P(\text{adat}|\text{Modell})P(\text{Modell})$$

$$\underbrace{P(\text{Modell} = m | \text{Megfigyelés} = \text{adat})}_{\text{a posteriori vélekedés}} = \frac{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat} | \text{Modell} = m)P(\text{Modell} = m)}{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat})}$$
$$\propto \underbrace{P(\text{Megfigyelés} = \text{adat} | \text{Modell} = m)}_{\text{megfigyelt adat valószínűsége (likelihood)}} \underbrace{P(\text{Modell} = m)}_{\text{a priori vélekedés}}$$

Bayesi predikció

$$\begin{aligned} P(e' | e) &= \sum_m P(e', m | e) \\ &= \sum_m P(e' | m, e) \underbrace{P(m | e)}_{\text{poszterior}} \end{aligned}$$

További e' megfigyelések predikciójában az ÖSSZES modell predikciója felett átlagolunk a modellek **Bayes tétele szerinti poszteriorjával**.

Bayesi tanulás és predikció: példa

- Valószínűségi változók
 - H = Hőmérséklet: meleg/hideg?
 - I = Időjárás: napsütés/eső?
 - Ú = Úszó: áll/mozog
 - Cs = Csali a helyén/leesett
 - K = Kapás: van/nincs
- Együttes eloszlás: $P(H, I, \bar{U}, Cs, K)$
- Bayesi tanulás: Csali? Csali, ha az úszó áll?

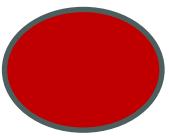
$$P(Csali = leesett | \bar{U} = \text{áll}) \propto P(\bar{U} = \text{áll} | Csali = leesett) P(Csali = leesett)$$

- Bayesi predikció: Kapás, ha a csali már leeshetett?

$$\begin{aligned} P(K = \text{van} | \bar{U} = \text{áll}) &= \sum_{Cs} P(K = \text{van} | Cs, \bar{U} = \text{áll}) P(Cs | \bar{U} = \text{áll}) \\ &= P(K = \text{van} | Cs = \text{van}, \bar{U} = \text{áll}) P(Cs = \text{van} | \bar{U} = \text{áll}) \\ &\quad + P(K = \text{van} | Cs = \text{leesett}, \bar{U} = \text{áll}) P(Cs = \text{leesett} | \bar{U} = \text{áll}) \end{aligned}$$



Okokra következtetés Bayes tételeivel



- Diagnosztikai következtetés: oksági iránnyal ellentétes irányú

$$P(Ok|Okozat) = \frac{P(Okozat|Ok)P(Ok)}{P(Okozat)} \propto P(Okozat|Ok)P(Ok)$$

- Példa:

- M: meningitis (agyhártyagyulladás), S: merev nyak

$$\left. \begin{array}{l} P(+m) = 0.0001 \\ P(+s|m) = 0.8 \\ P(+s|-m) = 0.01 \end{array} \right\} \text{Ismertek "oksági irányban"}$$

$$P(+m|s) = \frac{P(+s|m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{P(+s|m)P(+m)}{P(+s|m)P(+m) + P(+s|-m)P(-m)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.8 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.999}$$

- Az agyhártyagyulladás poszteriorja is kicsi: 0.007944389
 - A merev nyak ennek ellenére nagy diagnosztikai értékkel bír! (vö. $P(+m|+s)$ versus $P(+m|-s)$)

Összefoglalás

- Marginális/(perem-) eloszlások
- Feltételes eloszlások, láncszabály
- Bayes tétele
 - A mesterséges intelligencia alapegyenlete
 - Bizonytalan tudáselemek **kombinálása**
 - **Tanulás** megfigyelésekből
 - **Okokra következtetés**
 - + **elemi művelet oksági és kontrafaktuális következtetésekben**