Exercise2

202005100214

October 20, 2022

Exercise 2.1. 一个半径为 R 的电介质球，极化强度为 $\boldsymbol{P}=K\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$，电容率为 ε
(1) 计算束缚电荷体密度和面密度
(2) 计算自由电荷体密度
(3) 计算球外和球内电势
(4) 求该电介质求的静电场的总能量

Solution. (1) 极化强度满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_P$，所以

$$\rho_P=\nabla\cdot K\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}=-K\frac{\delta^\mu{}_\mu r^2-2r^\mu r_\mu}{r^4}=-K\frac{1}{r^2}$$

球面上取一易拉罐，满足 $\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=-\sigma_P$，但 $\boldsymbol{P}_2=0$，所以 $\sigma_p=P_1=K\frac{1}{R}$

(2) 考虑 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0+K\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$ 以及 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{D}=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$，由麦克斯韦方程组 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 可得

$$\rho=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

(3) 总的电荷量为

$$Q=\int_{\mathcal{V}}\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{4\pi\varepsilon KR}{\varepsilon-\varepsilon_0}$$

根据高斯定理，球面外的电场满足 $E_o(r)4\pi r^2=\frac{4\pi\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}$，解得 $E_o(r)=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$，从而

$$u_o(r)=-\int_\infty^r\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}$$

上问已经求得了球内电场 $E_i(r)=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\frac{1}{r}$，因此球内电势为

$$\begin{aligned}u_i(r)&=-\int_\infty^r E\,\mathrm{d}t\\&=\int_r^R E_i(t)\,\mathrm{d}t+\int_R^\infty E_o(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right]\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\rho(r)u_i(r)\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\varepsilon K^2}{2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}\left[\iiint_{\mathcal{V}}\ln\frac{R}{r}\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi+\iiint_{\mathcal{V}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right]\\&=2\pi\varepsilon R\frac{K^2}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\end{aligned}$$

□

Exercise 2.2. 均匀外置电场放入半径为 R_0 的导体球，用分离变量法求解下述情况
(1) 导体球接有电池，与地面保持电势差 $\varPhi_0$
(2) 导体球带有电荷 Q

Solution. (1) 使用球坐标系，令球心为原点，r 表示坐标 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$ 的分量，球坐标系下的梯度算符为 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，外置电场强度为 E_0，球面内定义电势场 u_1，球面外定义电势场 u_2。两个标量场分别满足

$$\begin{cases}\nabla^2 u_2(\boldsymbol{r})=0\\ u_2|_{r=R_0}=\varPhi_0\\ \lim\limits_{r\to\infty}u_2=u_0-E_0r\cos\phi\end{cases},\quad \begin{cases}\nabla^2 u_1(\boldsymbol{r})=0\\ u_1|_{r=R_0}=\varPhi_0\\ u_1(0)<\infty\end{cases}$$

根据方位角无关的通解公式 $u_1=\sum\limits_{n=0}\left(a_nr^n+\dfrac{b_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\phi)$，$u_2=\sum\limits_{n=0}\left(c_nr^n+\dfrac{d_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\phi)$，列出必要条件：$a_0=u_0$，$a_1=-E_0$，$a_n=0\,(n\geq 2)$，$d_n=0$；

$$u_0+\frac{b_0}{R_0}-E_0R_0\cos\phi+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\phi+\sum_{n=2}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\phi)=c_0+c_1R_0\cos\phi+\sum_{n=2}c_nR_0^n\mathrm{P}_n(\cos\phi)$$

$$u_0+\frac{b_0}{R_0}-E_0R_0\cos\phi+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\phi+\sum_{n=2}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\phi)=\varPhi_0$$

当 $b_n=c_n=0\ (n\geq 2)$ 时依然满足方程，从而有

$$u_0+\frac{b_0}{R_0}-E_0R_0\cos\phi+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\phi=\varPhi_0$$

为了使上式左边与 ϕ 无关，可以让 $-E_0R_0\cos\phi+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\phi=0$，得出如下方程组，其可以解出一个特解。

$$\begin{cases}E_0R_0\cos\phi=\dfrac{b_1}{R_0^2}\cos\phi\\ u_0+\dfrac{b_0}{R_0}=\varPhi_0\\ c_0=u_0+\dfrac{b_0}{R_0}\\ c_1=-E_0R_0\cos\phi+\dfrac{b_1}{R_0^2}\cos\phi\end{cases}$$

$$u_2(\boldsymbol{r})=u_0-E_0r\cos\phi+\frac{R_0(\varPhi_0-u_0)}{r}+\frac{E_0R_0^3}{r^2}\cos\phi$$

(2) 根据高斯定理得

$$\oint_{\mathcal{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

球面上得单位法向量 $\boldsymbol{e}_n$ 与球坐标的基失 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 是一致的，所以

$$\oint_{\mathcal{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=-\oint_{\mathcal{S}}\nabla u\cdot\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}a=-\oint_{\mathcal{S}}\frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}a$$

在球面上积分，得出边界条件之一 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_0}=-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_0^2}$. 两个标量场分别满足

$$\begin{cases}\nabla^2 u_2(\boldsymbol{r})=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_0}=-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_0^2}\\ \lim\limits_{r\to\infty}u_2=u_0-E_0r\cos\phi\end{cases},\quad \begin{cases}\nabla^2 u_1(\boldsymbol{r})=0\\ u_1|_{r=R_0}=u_2|_{r=R_0}=\mathrm{Const}\\ u_1(0)<\infty\end{cases}$$

同样的方法解出 $b_0=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$，$b_1=\dfrac{E_0R_0^3}{2}$

$$u_2(\boldsymbol{r})=u_0-E_0r\cos\phi+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{E_0R_0^3}{2r^2}\cos\phi$$

□

Exercise 2.3. 均匀介质球的中心置一电荷 Q_f，球的电容率为 ε，球外为真空，用分离变量法球空间电势。

Solution. 定义球面内势场 u_1，球面外势场 u_2。其 u_1 只在球面内有定义，u_2 只在球面外有定义，两者不能直接叠加，最终势场的分布会类似于一个分段连续函数。根据电介质分界面的边界条件列出方程组

$$\begin{cases}\nabla^2 u_2 = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} u_2 = 0\end{cases}, \quad \begin{cases}\nabla^2 u_1 = -\dfrac{Q_f\delta(r)}{\varepsilon} \\ u_2|_{R_0} = u_1|_{R_0} \\ \varepsilon_0 \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{R_0} = \varepsilon \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{R_0}\end{cases}$$

由于 $u_2(\boldsymbol{r})$ 只与长度 r 有关，其通解为 $u_2 = a + \dfrac{b}{r}$，根据条件还有 $a = 0$。可见在球面上 $u_2 = \dfrac{b}{R_0}$ 是一个常数。由此可以通过

$$\begin{cases}\nabla^2 u_1 = -\dfrac{Q_f\delta(r)}{\varepsilon} \\ u_1|_{R_0} = \text{Const}\end{cases}$$

确定 u_1 的一族解 $u_1 = \dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon r} + c$。通过 $\varepsilon_0 \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{R_0} = \varepsilon \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{R_0}$ 求得 $b = \dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}$，通过 $u_2|_{R_0} = u_1|_{R_0}$ 求出 $c = \dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0} - \dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}$。最终得到

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0} - \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0} \\ u_2 &= \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

□

Exercise 2.6. 均匀外电场 E_0 置入一均匀带自由电荷密度 ρ_f 的绝缘介质球，电容率为 ε，求空间各点电势。

外电场不会影响自由电荷分布吗?

Exercise 2.9. 接地空心导体球内外半径分别为 R_1，R_2，在离球心为 a 处置一电荷 Q，用镜像法求电势，导体球上感应电荷有多少，分布在内表面还是外表面。

Solution. 物理常识说感应电荷集中于内表面，因此在等效时也应该以内表面为准。由相似关系得 $R_1^2 = ab$，在 R_1 面上还应满足 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$，得 $q = \dfrac{r_1}{r_0} = \dfrac{R_1}{a}$，所以

$$u(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} - \frac{QR_1}{a4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

同时用余弦定理计算 $r_0 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}$，$r_1 = \sqrt{r^2 + \dfrac{R_1^4}{a^2} - 2r\dfrac{R_1^2}{a}\cos\theta}$，故

$$u(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{QR_1}{a4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + \dfrac{R_1^4}{a^2} - 2r\dfrac{R_1^2}{a}\cos\theta}}$$

□

Exercise 2.11. 接地导体平面有一半径为 a 的半凸部，半球球心在导体平面上，点电荷 Q 位于系统的对称轴上，与平面相距为 b，求空间电势。

Solution. 为使半球面上电势为 0，可以等效为球面内有一未知电荷 q。q 在对称轴上，设其位置半径为 d，应当满足 $bd = a^2$，即 $d = \dfrac{a^2}{b}$，其与电荷 Q 的势能叠加为 0，即 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_a} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_b} = 0 \Rightarrow q = -\dfrac{r_a}{r_b}Q \Rightarrow$

$q=-\dfrac{a}{b}Q$. 此时平面的电势还不是 0，由于上述的电荷结构对球面的电势没有影响，所以考虑在平面下方对称地放置两个电荷，位置分别为 $-\dfrac{a^2}{b}$，$-b$，电荷量分别为 $\dfrac{a}{b}Q$，$-Q$。最终空间中某处的电势可以表示为

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+b)^2}}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+(y-\frac{a^2}{b})^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+\frac{a^2}{b})^2}}\right)$$

□