Homework4

2020051001214

November 20, 2022

Exercise 3.3. 无穷长线电流 I 沿 z 轴流动，$z<0$ 的区域磁导率为 μ，$z>0$ 的空间磁导率为 μ_0，求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，求磁化电流分布。

Solution. 设 $z>0$ 区域的失势为 $\boldsymbol{A}_1$，$z<0$ 为 $\boldsymbol{A}_2$，在挖去线电流的空间中有方程组

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0\\ \nabla^2\boldsymbol{A}_2=0\\ \hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)|_{z=0}=0\\ \hat{\boldsymbol{e}}_n\times(\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_2-\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_2)|_{z=0}=\boldsymbol{a}_M\end{cases}$$

在柱坐标下考察方程 $\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0$，由于对称性 $\boldsymbol{A}_1$ 只与 R 有关，即 $\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R\dfrac{\partial A_1^i}{\partial R}\right)=0$，简写为 $R^2(A_1^i)''+R(A_1^i)'=0$，此为欧拉方程，(令 $R=e^t$) 解得 $A_1^i=a_1^i\ln R+b_1^i$，所以 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{a}_1\ln R+\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{a}_2\ln R+\boldsymbol{b}_2$。

$$\boldsymbol{B}_1=\nabla\times(\ln R\boldsymbol{a}_1)=\frac{1}{R}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_R & R\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & \hat{\boldsymbol{e}}_z\\ \partial_R & \partial_\phi & \partial_z\\ a_1^R\ln R & Ra_1^\phi\ln R & a_1^z\ln R\end{vmatrix}=\frac{-a_1^z}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi+a_1^\phi\left(\frac{\ln R}{R}+\frac{1}{R}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

根据常识可知这种情况下 $\boldsymbol{B}_1$ 没有 z 方向分量，所以 $a_1^\phi=0$，此时可以满足约束条件 $\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$。另一方面，用 $\boldsymbol{B}$ 沿与 z 垂直，圆心在 z 上且半径为 R 的取线上积分，得 $\oint_{r=R}\dfrac{-a_1^z}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$，解出 $a_1^z=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}$，最终得到 $\boldsymbol{B}_1=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，$\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$.

介质分界面处满足 $\hat{\boldsymbol{e}}_n\times(\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_2-\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{a}_M=0$

磁化电流密度满足 $\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}$，而 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$，所以 $\boldsymbol{J}_1=0$

$$\boldsymbol{J}_2=\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)\nabla\times\boldsymbol{B}_2=\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu_0}\right)\frac{\mu I}{2\pi R^3}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

□

Exercise 3.4. $x<0$ 处磁导率为 μ，$x>0$ 处为 μ_0，电流和上问一样，求磁感应强度和磁化电流强度。

Solution.

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0\\ \nabla^2\boldsymbol{A}_2=0\\ \hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)|_{\phi=0,\,\pi}=0\\ \hat{\boldsymbol{e}}_n\times(\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_2-\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_1)|_{\phi=0,\,\pi}=\boldsymbol{a}_M\end{cases}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 z 无关，所以不妨直接让 $\boldsymbol{r}$ 在 $x-y$ 平面上。在已知空间电流分布时可用 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{V}}\dfrac{\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\tau'}{\imath}$ 求解。此题中 $\boldsymbol{J}$ 仅在 z 轴上有效，因此

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{P}}\int_{\mathcal{S}}\frac{\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{\imath}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}\hat{\boldsymbol{e}}_z\Rightarrow\boldsymbol{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{1}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

由 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 求出 $\boldsymbol{B}_1=\dfrac{\mu I}{4\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，$\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$。此结果满足约束条件 $\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)|_{\phi=0,\,\pi}=0$，并且可求出介质分界面处 $\boldsymbol{a}_M=0$。

同上一问一样有 $\boldsymbol{J}_1=\left(\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\mu_0}\right)\dfrac{\mu I}{2\pi R^3}\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\boldsymbol{J}_2=0$.

□

Exercise 3.7. 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\boldsymbol{J}$，解失势的微分方程，设导体磁导率为 μ，导体外磁导率为 μ_0。

Solution. 设导体内失势为 $\boldsymbol{A}_1$，导体外为 $\boldsymbol{A}_2$，满足方程

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_1=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\boldsymbol{A}_2=0\end{cases}$$

矢量场 $\boldsymbol{J}$ 在圆柱内任何点处的矢量都只有 z 分量，因此上述方程组归结为一下两种方程 $\nabla^2 A=-\mu J$, $\nabla^2 A=0$。首先求解第二个，$\boldsymbol{A}$ 与 z,ϕ 无关，所以其分量也只与 R 有关。从而有

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial A}{\partial R}\right)=0$$

也即 $R^2A''_{RR}+RA'_R=0$，令 $R=e^t$，则 $t=\ln R$，因此方程化为 $\tilde{A}''_{tt}=0$，解得 $\tilde{A}=at+b\Leftrightarrow A=a\ln R+b$。对于方程

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial A}{\partial R}\right)=-\mu J$$

按照同样方法化为 $\tilde{A}''_{tt}=-\mu Je^{2t}$，通解已经求出，特解为 ce^{2t}，将 $\tilde{A}=at+b+ce^{2t}$ 带回方程，求出 $c=-\dfrac{\mu J}{4}$，所以 $A=a\ln R+b-\dfrac{\mu J}{4}R^2$

□

Exercise 3.9. 将一磁导率 μ，半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 内，求总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和诱导磁矩 $\boldsymbol{m}$。

Solution. 以 z 方向为极轴，建立球坐标系。假设 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向为 z 方向。设球体内的标势为 u_1，球体外为 u_2，满足

$$\begin{cases}\nabla^2u_1=0\\ \nabla^2u_2=0\\ u_1|_{R_0}=u_2|_{R_0}\\ \mu\dfrac{\partial u_2}{\partial R}-\mu_0\dfrac{\partial u_1}{\partial R}=0\\ \lim\limits_{R\to0}u_1<\infty\end{cases}$$

在均匀磁场强度中，任选一点为原点，假设此处磁标势为 u_0，则有 $\lim\limits_{R\to\infty}u_2-u_0=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}_0$，得到 $\lim\limits_{R\to\infty}u_2=u_0-RH_0\cos\theta$，此为另一约束条件。

在轴对称的情况下可以套用通解公式，得出

$$u_1=\sum_{n=0}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$
$$u_2=\sum_{n=0}\left(c_nR^n+\frac{d_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

带入最后两个约束条件，有

$$\begin{cases}u_1=a_0+a_1RP_1(\cos\theta)+\sum\limits_{n=2}a_nR^nP_n(\cos\theta)\\ u_2=u_0+\dfrac{d_0}{R}+(-H_0R+\dfrac{d_1}{R^2})P_1(\cos\theta)+\sum\limits_{n=2}\dfrac{d_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\end{cases}$$

考虑正交性，有 $a_n = d_n = 0\ (n \geq 2)$，再带入剩下的约束条件，可的方程组

$$\begin{cases} a_0 = u_0 + \dfrac{d_0}{R_0} \\ a_1 R_0 = -H_0 R_0 + \dfrac{d_1}{R_0^2} \\ a_1 \mu_0 = -\mu H_0 - \dfrac{2\mu d_1}{R_0^3} \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_0 = u_0 \\ a_1 = \dfrac{3\mu H_0}{2\mu + \mu_0} \\ d_0 = 0 \\ d_1 = \dfrac{3\mu H_0 R_0^3}{2\mu + \mu_0} + H_0 R_0^3 \end{cases}$$

因此有

$$u_1 = u_0 + \frac{3\mu H_0}{2\mu + \mu_0} R\cos\theta$$
$$u_2 = u_0 - H_0 R\cos\theta + (\frac{3\mu H_0 R_0^3}{2\mu + \mu_0} + H_0 R_0^3)\frac{1}{R^2}\cos\theta$$

由 $\boldsymbol{B} = -\dfrac{1}{\mu}\nabla u$，(这里 $\nabla = \hat{\boldsymbol{e}}_r \dfrac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \dfrac{1}{R\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$) 求出

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{3H_0}{2\mu + \mu_0}(\sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_r)$$
$$\boldsymbol{B}_2 = \left[-H_0\cos\theta + (\frac{3\mu H_0 R_0^3}{2\mu + \mu_0} + H_0 R_0^3)\cos\theta \frac{-2}{R^3}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_r + \left[H_0 R\sin\theta - (\frac{3\mu H_0 R_0^3}{2\mu + \mu_0} + H_0 R_0^3)\frac{1}{R^2}\sin\theta\right]\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

磁偶极矩形成的磁场形如 $\boldsymbol{B}_m = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}$,,,,(?)

□

Exercise 3.10. 内外半径为 R_1，R_2 的空心球，位于均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 内，球的磁导率为 μ，求空腔内的场 $\boldsymbol{B}$，讨论 $\mu \gg \mu_0$ 的屏蔽效果。

Solution. 设标势由内到外分别为 u_1，u_2，u_3，满足如下方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0 \\ \nabla^2 u_2 = 0 \\ \nabla^2 u_3 = 0 \\ u_1|_{R_1} = u_2|R_1 \\ u_2|_{R_2} = u_3|_{R_2} \\ \mu_0 \dfrac{\partial u_1}{\partial R}\Big|_{R_1} = \mu \dfrac{\partial u_2}{\partial R}\Big|_{R_1} \\ \mu \dfrac{\partial u_2}{\partial R}\Big|_{R_2} = \mu_0 \dfrac{\partial u_3}{\partial R}\Big|_{R_2} \\ u_1(0) < \infty \\ \lim\limits_{R\to\infty} u_3 = u_0 - RH_0\cos\theta \end{cases}$$

得通解

$$u_1 = a_0 + a_1 R\cos\theta + \sum_{n=2} a_n R^n P_n(\cos\theta)$$
$$u_2 = b_0 + \frac{c_0}{R} + (b_1 R + \frac{c_1}{R^2})P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}(b_n R^n + \frac{c_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$
$$u_3 = d_0 + \frac{e_0}{R} + (d_1 R + \frac{e_1}{R^2})P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}(d_n R^n + \frac{e_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

带入约束条件后可得

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ c_0 = 0 \\ a_1 R_1 = b_1 R_1 + \dfrac{c_1}{R_1^2} \\ c_n = 0 \\ b_n = a_n \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -u_0 \\ c_0 = e_0 \\ b_1 R_2 + \dfrac{c_1}{R_2^2} = -H_0 R_2 + \dfrac{e_1}{R_2^2} \\ d_n = 0 \\ b_n = e_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = e_0 = 0 \\ \mu_0 a_1 = \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_1^3}) \\ \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_2^3}) = \mu_0(-H_0 - \dfrac{2e_1}{R_2^3}) \end{cases}$$

化为线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & -\mu & \dfrac{2\mu}{R_1^3} & 0 \\ 0 & \mu & -\dfrac{2\mu}{R_2^3} & \dfrac{2\mu_0}{R_2^3} \\ R_1 & -R_1 & -\dfrac{1}{R_1^2} & 0 \\ 0 & R_2 & \dfrac{1}{R_2^2} & \dfrac{1}{R_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 H_0 \\ 0 \\ R_2 H_0 \end{bmatrix} = 0$$

由克拉默法则 $x_i = \dfrac{\det \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}$ 可以求出相应的解。这里只考察空腔内的场。$\boldsymbol{B}_1 = -\mu_0 \nabla u_1 = -\mu_0 a_1(\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r - \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)$，所以只需要考察 a_1 的情况。将 $\boldsymbol{A}$，$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{b})$ 沿第二列展开，即 $\boldsymbol{A} = -\mu A_{21} + \mu A_{22} - R_1 A_{23} + R_2 A_{44}$，可以验证代数余子式 A_{21}，A_{22}，A_{23}，A_{24} 均是 μ 的一次式，故 $\det \boldsymbol{A}$ 是 μ 的二次多项式 $\mathcal{P}_2(\mu)$，同理 $\det \tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\mathcal{P}}_2(\mu)$，从而有

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\mathcal{P}_2(\mu)}{\tilde{\mathcal{P}}_2(\mu)} = \mathrm{Const}$$

所以说 $\mu \gg \mu_0$ 时空腔中的 $\boldsymbol{B}$ 恒为常数。

$\square$