CIRCUITOS LOGICOS DIGITALES

UPC

UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

Laureate International Universities®

ALGEBRA DE BOOLE: LEYES Y PROPIEDADES

CICLO ACADÉMICO: 2024-I

LOGRO

Al finalizar la unidad el estudiante determinará y simplificará una función lógica empleando las propiedades y los teoremas del álgebra de Boole.

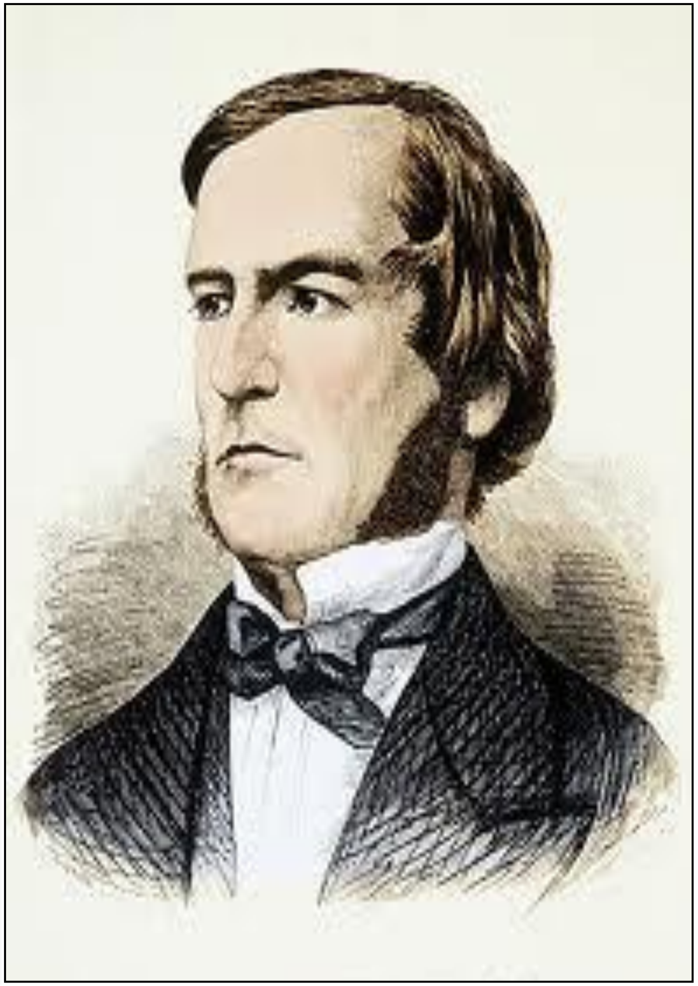
ALGEBRA DE BOOLE

HECHOS RELEVANTES:

George Boole (1815 – 1864)

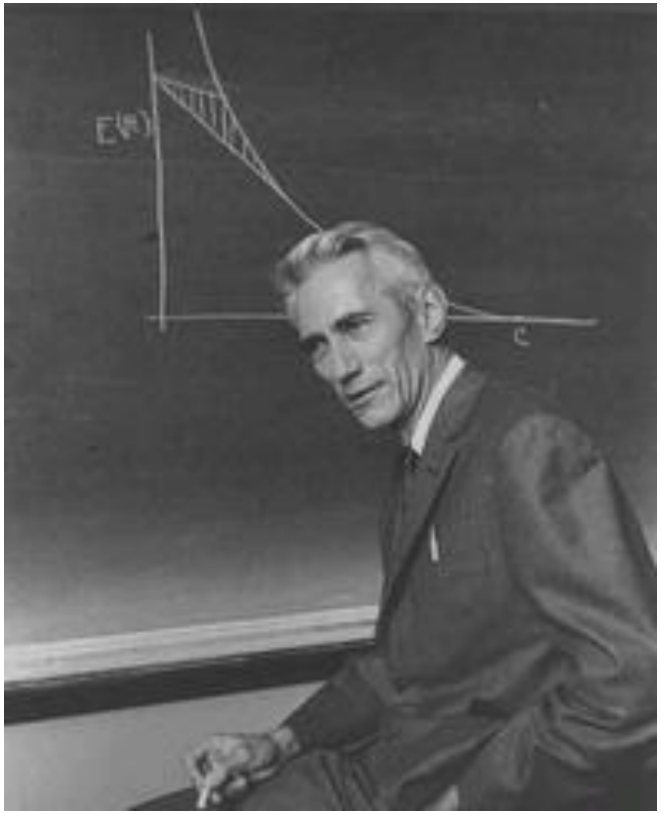
Fue un filósofo-matemático Inglés quien 1854 realizó una obra titulada **Análisis Matemático de la Lógica** donde se desarrolló un sistema de reglas que hizo posible expresar, manipular y simplificar problemas lógicos y filosóficos mediante procedimientos matemáticos cuyos argumentos admiten 2 estados: verdadero (V) o falso (F).

George Boole es considerado como el padre de los operadores lógicos simbólicos ya que gracias a su desarrollo hoy en día es posible realizar operaciones lógicas de manera simbólica.



ALGEBRA DE BOOLE

HECHOS RELEVANTES:



Claude Shannon (1916 – 2001) fue un Ingeniero electricista y matemático quien en su su tesis doctoral titulada **Uso del álgebra de Boole en el análisis y síntesis de los circuitos de conmutación** realizado en el MIT en 1940 demostró cómo el álgebra booleana se podía emplear en el análisis y la síntesis de los circuitos de conmutación y digitales.

ALGEBRA DE BOOLE

DEFINICIÓN:

Es un sistema algebraico que se encuentra definido en un conjunto **B** que posee 2 elementos **B** = {0,1} y también (se encuentra definido) en las operaciones que se dan entre estos como la **suma** (+), el **producto** (.) y el **complemento** (').

OPERACIONES DEL ALGEBRA DE BOOLE

OPERACIONES BÁSICAS:

Suma (+):

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 1

Producto (.):

0 . 0 = 0
0 . 1 = 0
1 . 0 = 0
1 . 1 = 1

Complemento ('):

Si x=0 entonces x'=1

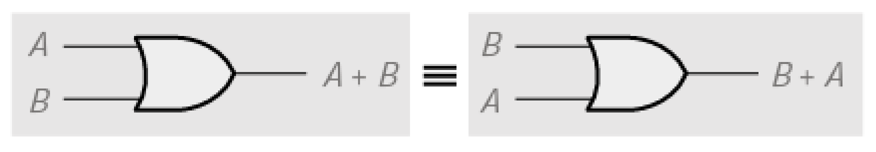
Si x=1 entonces x'=0

LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE

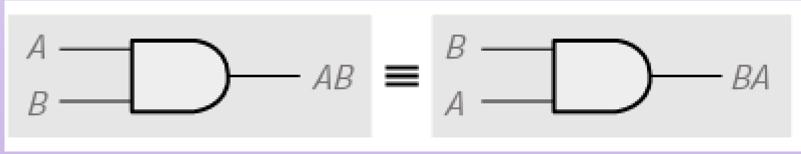
LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE:

Ley Conmutativa:

- En la suma: A+B = B+A



- En el producto: A.B = B.A

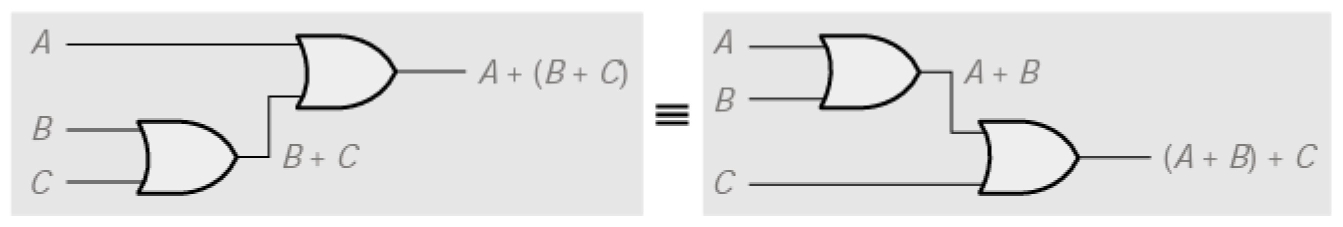


LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE

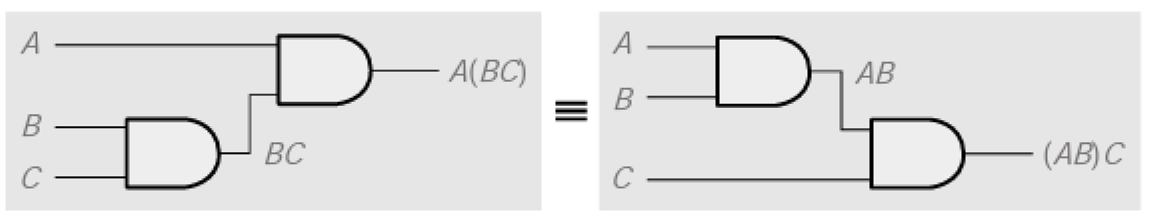
LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE:

Ley Asociativa:

- En la suma: $A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$



- En el producto: $A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$



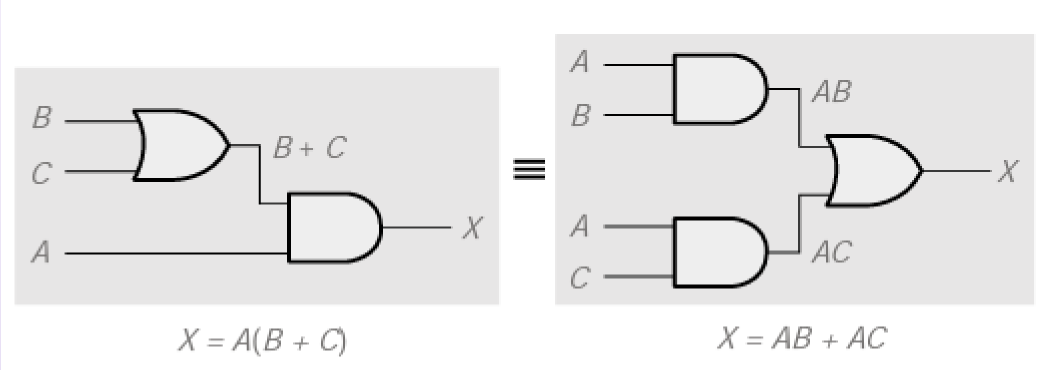
LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE

LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE:

Ley Distributiva:

- En la suma sobre un producto:

$$A.(B+C) = (A.B) + (A.C)$$



LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE

LEYES DEL ALGEBRA DE BOOLE:

Ley Distributiva:

- En el producto sobre la suma:

  $A + (B.C) = (A+B).(A+C)$

Propiedad del Elemento Neutro:

- En la suma: $A + 0 = A$
- En el producto: $A . 1 = A$

Propiedad del Complemento:

- En la suma: $A + A' = 1$
- En el producto: $A . A' = 0$

REGLAS DEL ALGEBRA DE BOOLE

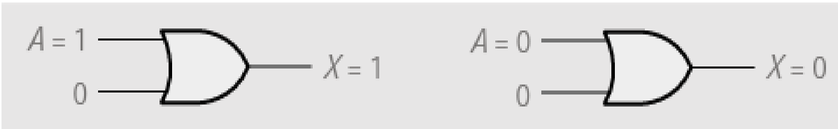
REGLAS BÁSICAS DEL ALGEBRA DE BOOLE:

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$
5. $A + A = A$
6. $A + \overline{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

<u>IMPORTANTE</u>: A, B y C pueden representar 1 sola variable o también la combinación de muchas variables. Las primeras 9 reglas, se entienden desde la aplicación de las puertas lógicas y las reglas restantes se obtienen a partir de las primeras 9 reglas básicas junto con las leyes mencionadas anteriormente.

COMPROBACIÓN DE REGLAS BÁSICAS

Regla 1: A + 0 = A

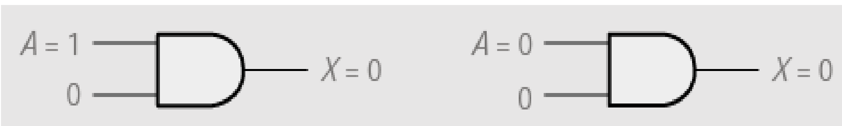


$X = A + 0 = A$

Regla 2: A + 1 = 1

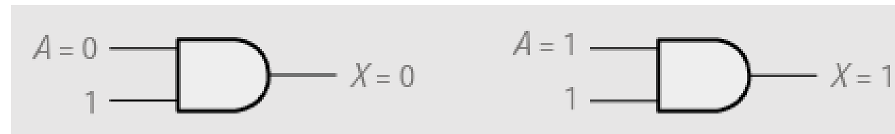
$X = A + 1 = 1$

Regla 3: A.0 = 0



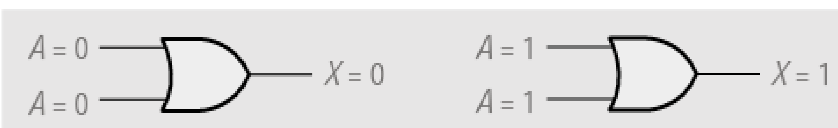
$X = A \bullet 0 = 0$

Regla 4: A.1 = A



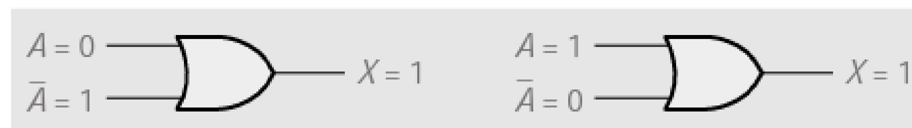
$X = A \bullet 1 = A$

Regla 5: A + A = A



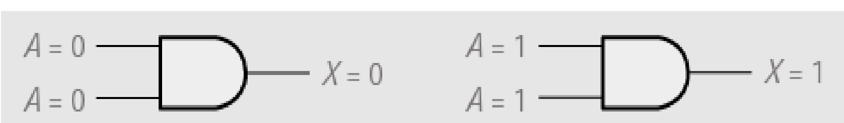
$X = A + A = A$

Regla 6: A + A' = 1



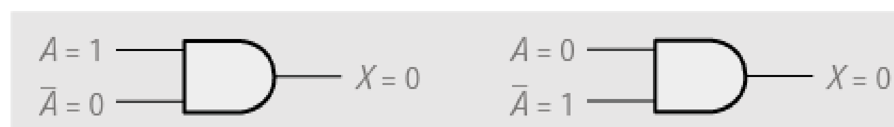
$X = A + \bar{A} = 1$

Regla 7: A . A = A



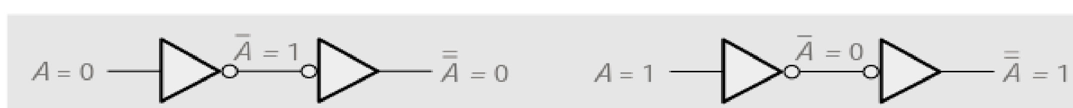
$X = A \bullet A = A$

Regla 8: A . A' = 0



$X = A \bullet \bar{A} = 0$

Regla 9: (A')' = A



$\bar{\bar{A}} = A$

COMPROBACIÓN DE REGLAS BÁSICAS

Regla 10: $A + AB = A$ Esta regla se puede demostrar aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

$$A + AB = A \cdot 1 + AB = A(1 + B) \qquad \text{Factorización (ley distributiva)}$$
$$= A \cdot 1 \qquad \text{Regla 2: } (1 + B) = 1$$
$$= A \qquad \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A$$

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

COMPROBACIÓN DE REGLAS BÁSICAS

Regla 11: $A + \overline{A}B = A + B$ Esta regla se puede demostrar de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
A + \overline{A}B &= (A + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 10: } A = A + AB \\
&= (AA + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 7: } A = AA \\
&= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B && \text{Regla 8: sumar } A\overline{A} = 0 \\
&= (A + \overline{A})(A + B) && \text{Factorización} \\
&= 1 \cdot (A + B) && \text{Regla 6: } A + \overline{A} = 1 \\
&= A + B && \text{Regla 4: eliminar el 1}
\end{aligned}
$$

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

COMPROBACIÓN DE REGLAS BÁSICAS

Regla 12: $(A + B)(A + C) = A + BC$ Esta regla se puede demostrar de la siguiente forma:

$(A+B)(A+C)$	$= AA + AC + AB + BC$	Ley distributiva
	$= A + AC + AB + BC$	Regla 7: $AA = A$
	$= A(1+C) + AB + BC$	Factorización (ley distributiva)
	$= A \cdot 1 + AB + BC$	Regla 2: $1 + C = 1$
	$= A(1+B) + BC$	Factorización (ley distributiva)
	$= A \cdot 1 + BC$	Regla 2: $1 + B = 1$
	$= A + BC$	Regla 4: $A \cdot 1 = A$

A	B	C	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$	BC	$A + BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

TEOREMAS DE DeMORGAN

ALCANCE DE TEOREMAS DE DeMORGAN:

- DeMorgan propuso dos teoremas que constituyen una parte importante del álgebra de Boole.
- Fundamentalmente, los teoremas de DeMorgan proporcionan una verificación matemática de la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y las puertas NOR y negativa-AND.
- En lo sucesivo aprenderemos:
  - Los postulados de los teoremas de DeMorgan.
  - Relacionar los teoremas de DeMorgan con la equivalencia entre puertas NAND y negativa-OR, y puertas NOR y negativa-AND.
  - Aplicar los teoremas de DeMorgan para simplificar las expresiones booleanas.

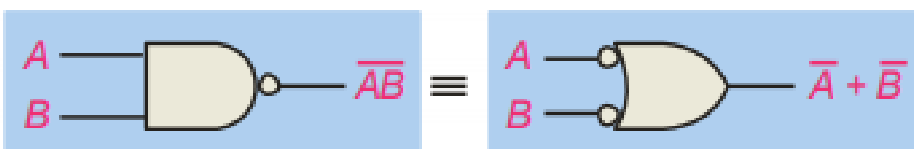
TEOREMAS DE DeMORGAN

TEOREMAS DE DeMORGAN:

- 1er Teorema de DeMorgan.
  - **Enunciado**: “El complemento de un producto de variables es igual a la suma de las variables complementadas”.

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

- Aplicando el primer teorema de DeMorgan a las puertas:



NAND   Negativo-OR

Inputs		Output	
A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

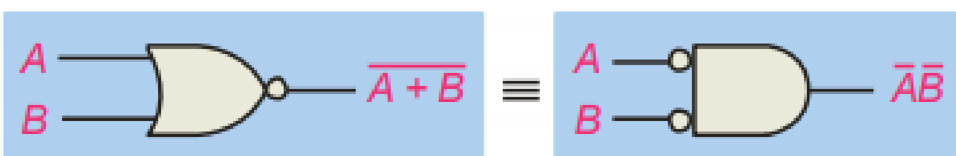
TEOREMAS DE DeMORGAN

TEOREMAS DE DeMORGAN:

- 2do Teorema de DeMorgan.
  - **Enunciado:** “El complemento de una suma de variables es igual al producto de las variables complementadas”.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- Aplicando el segundo teorema de DeMorgan a las puertas:



NOR   Negativo-AND

Inputs		Output	
A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A}\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

TEOREMAS DE DeMORGAN

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE DeMORGAN:

- Como se ha comentado, los teoremas de DeMorgan se aplican también a expresiones en las que existen más de dos variables. A continuación veremos la aplicación de los teoremas de DeMorgan a expresiones de 3 y 4 variables.
- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X+Y+Z}$.

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{WXYZ}$ y $\overline{W+X+Y+Z}$.

$$\overline{WXYZ} = \overline{W} + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{W+X+Y+Z} = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

- Si analizamos los postulados de DeMorgan, cada variable podría en realidad representar una combinación de otras variables. A continuación un ejemplo:

TEOREMAS DE DeMORGAN

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE DeMORGAN:

- X puede ser igual al término $AB+C$, e Y puede ser igual a $A+BC$. Así, si aplicamos el primer teorema de DeMorgan para dos variables $\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$, a la expresión $(AB+C)(A+BC)$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{(AB+C)(A+BC)} = (\overline{AB+C}) + (\overline{A+BC})$$

- En el resultado anterior se ve que hay dos términos, $\overline{AB+C}$ y $\overline{A+BC}$, a los que podemos aplicar otra vez DeMorgan $\overline{X+Y} = \bar{X}\bar{Y}$ obteniendo:

$$(\overline{AB+C}) + (\overline{A+BC}) = (\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC})$$

- De esta manera obtenemos otros dos términos en la expresión a los que nuevamente podemos aplicar DeMorgan. Estos términos son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Una última aplicación del teorema nos da como resultado:

$$(\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC}) = (\overline{A}+\overline{B})\overline{C} + \overline{A}(\overline{B}+\overline{C})$$

- **Los teoremas de DeMorgan ya no pueden seguir aplicándose a esta expresión, aunque este** resultado puede ser simplificado aún más mediante el uso de reglas y leyes de Boole.

TEOREMAS DE DeMORGAN

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE DeMORGAN:

- A continuación se analiza un procedimiento que ilustra la aplicación de los teoremas de DeMorgan y del álgebra de Boole utilizando como ejemplo la siguiente expresión:

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})}$$

- Paso 1. Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teoremas de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable. De este modo, nos queda:

$$\overline{A+B\overline{C}}=X \quad y \quad D(\overline{E+\overline{F}})=Y$$

- Paso 2. Dado que $\overline{X+Y}=\overline{X}\,\overline{Y}$

$$\overline{(\overline{A+B\overline{C}})+(\overline{D(E+\overline{F})})}=(\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

TEOREMAS DE DeMORGAN

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE DeMORGAN:

- **Paso 3**. Utilizamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para eliminar la barra doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan):

$$\overline{\overline{(A+B\overline{C})}}\,\overline{D\overline{(E+\overline{F})}} = (A+B\overline{C})\,\overline{D\overline{(E+\overline{F})}}$$

- **Paso 4**. Aplicando el primer teorema de DeMorgan al segundo término:

$$(A+B\overline{C})\,\overline{D\overline{\overline{(E+\overline{F})}}} = (A+B\overline{C})(\overline{D}+\overline{\overline{(E+\overline{F})}})$$

- **Paso 5**. Empleamos la regla 9 nuevamente para cancelar las barras dobles sobre la parte $E+\overline{F}$ del término.

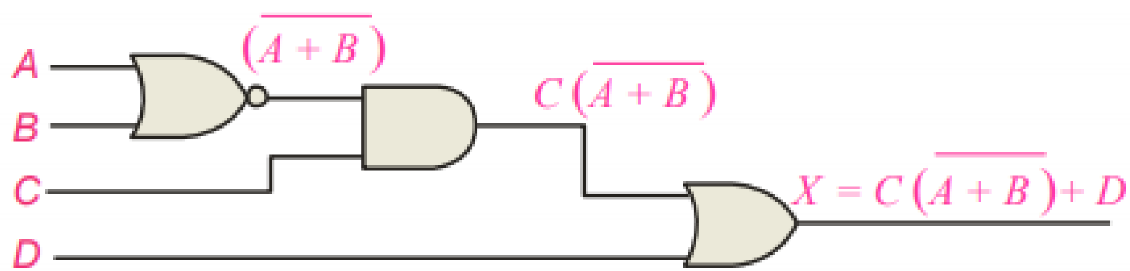
$$(A+B\overline{C})(D+\overline{\overline{(E+\overline{F})}}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

EXPRESIÓN BOOLEANA DE UN CIRCUITO LÓGICO

- El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el **funcionamiento de un circuito lógico el cual está conformado por una combinación de** puertas lógicas, siendo la salida una combinación de los valores de entrada.

- Los Circuitos Lógicos Combinacionales se pueden analizar escribiendo la expresión para cada puerta lógica y combinando estas expresiones de acuerdo a las reglas del álgebra de Boole. A continuación un ejemplo:



Aplicando el teorema de DeMorgan y la ley de distribución:

$$\boxed{X = C\,(\overline{A}\;\overline{B}) + D = \overline{A}\,\overline{B}\,C + D}$$

ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

TABLA DE VERDAD PARA UN CIRCUITO LÓGICO:

- Una vez determinada la expresión booleana de un circuito lógico, puede elaborarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los posibles valores de las variables de entrada.

- Para la expresión booleana obtenida en el ejemplo de la diapositiva anterior, se tiene la siguiente tabla de verdad:

	Entradas				Salidas
	A	B	C	D	$\overline{A}\,\overline{B}\,C + D$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

SIMPLIFICACIÓN LÓGICA MEDIANTE EL ALGEBRA DE BOOLE

ALCANCE:

- En múltiples ocasiones a la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente que permita conseguir una implementación eficiente.
- Aquí trataremos el método que utiliza las reglas, leyes y teoremas del álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión.
- Una expresión booleana simplificada debería emplear el menor número posible de puertas en la implementación de un circuito lógico.
- Mediante algunos ejemplos veremos esto en detalle.

SIMPLIFICACIÓN LÓGICA MEDIANTE EL ALGEBRA DE BOOLE

EJEMPLOS:

- **Ejemplo 1.** Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole.

$$AB + A(B + C) + B(B + C) \qquad Rpta: \ B+AC$$

- **Ejercicio 2.** Simplificar la siguiente expresión:

$$(A\overline{B}(C + BD) + \overline{A}\,\overline{B})C \qquad Rpta: \overline{B}C$$

- **Ejercicio 3.** Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \qquad Rpta: \ BC + A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$$

- **Ejercicio 4.** Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{AB + AC} + \overline{A}\,\overline{B}C \qquad Rpta: \ \overline{A} + \overline{B}\,\overline{C}$$

SIMPLIFICACIÓN LÓGICA MEDIANTE EL ALGEBRA DE BOOLE

EJEMPLO 1:

Solución

El método que se sigue no es necesariamente el único método posible.

Paso 1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término del siguiente modo:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Paso 2. Aplicar la regla 7 ($BB = B$) al cuarto término.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Paso 3. Aplicar la regla 5 ($AB + AB = AB$) a los dos primeros términos.

$$AB + AC + B + BC$$

Paso 4. Aplicar la regla 10 ($B + BC = B$) a los dos últimos términos.

$$AB + AC + B$$

Paso 5. Aplicar la regla 10 ($AB + B = B$) al primero y tercer término.

$$Rpta: \boxed{B + AC}$$

SIMPLIFICACIÓN LÓGICA MEDIANTE EL ALGEBRA DE BOOLE

EJEMPLO 2:

Solución

Paso 1. Aplicar la ley distributiva a los términos entre corchetes.

$$(A\overline{B}C + A\overline{B}BD + \overline{A}\overline{B})C$$

Paso 2. Aplicar la regla 8 ($\overline{B}B = 0$) al segundo término entre paréntesis.

$$(A\overline{B}C + A \cdot 0 \cdot D + \overline{A}\overline{B})C$$

Paso 3. Aplicar la regla 3 ($A \cdot 0 \cdot D = 0$) al segundo término contenido dentro de los paréntesis.

$$(A\overline{B}C + 0 + \overline{A}\overline{B})C$$

Paso 4. Aplicar la regla 1 (quitar el 0) dentro del paréntesis

$$(A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B})C$$

SIMPLIFICACIÓN LÓGICA MEDIANTE EL ALGEBRA DE BOOLE

EJEMPLO 2 (CONTINUACIÓN):

Paso 5. Aplicar la ley distributiva.

$$A\overline{B}CC + \overline{A}\overline{B}C$$

Paso 6. Aplicar la regla 7 ($CC = C$) al primer término.

$$A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C$$

Paso 7. Sacar $\overline{B}C$ factor común.

$$\overline{B}C(A + \overline{A})$$

Paso 8. Aplicar la regla 6 ($A + \overline{A} = 1$).

$$\overline{B}C \cdot 1$$

Paso 9. Aplicar la regla 4 (quitar el 1).

$$Rpta: \boxed{\overline{B}C}$$

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

SUMA DE PRODUCTOS - SOP:

- Todas las expresiones Booleanas pueden ser escritas en la forma suma de productos (**SOP**, *Sum Of Products*) o en la forma producto de sumas (**POS**, *Product of Sums*).
- Estas formas pueden simplificar la implementación de expresiones lógicas y hacer el trabajo mucho más sistemático y sencillo.
- Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina *suma de productos* (SOP, *Sum Of Products*). A continuación algunos ejemplos:

$$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,B \qquad A\,B\,\bar{C} + \bar{C}\,\bar{D} \qquad C\,D + \bar{E}$$

- En una expresión con formato de suma de productos, *una barra no puede extenderse sobre más de una variable*. Sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima. *Es decir, si* $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *pero no* $\overline{ABC}$

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

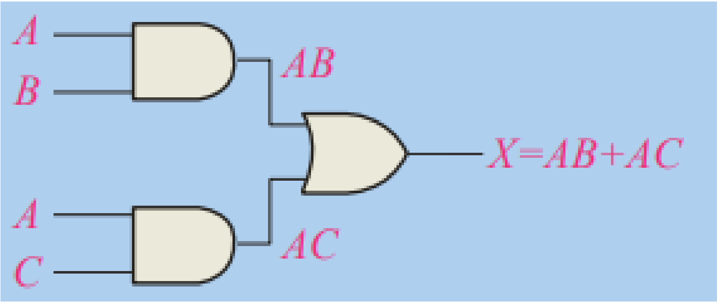
DOMINIO DE UNA EXPRESIÓN BOOLEANA:

El dominio de una expresión booleana es el conjunto de variables contenidas en la expresión ya sea en su forma complementada o no.

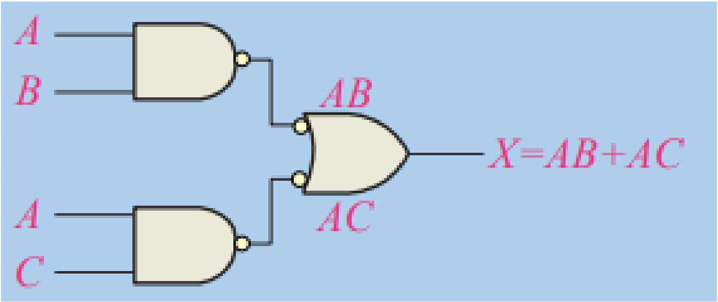
$$\overline{A}B + A\overline{B}C \longrightarrow \textbf{DOMINIO: } A,\ B,\ C$$

$$AB\overline{C} + C\overline{D}E + \overline{B}C\overline{D} \longrightarrow \textbf{DOMINIO: } A,\ B,\ C,\ D,\ E$$

- La suma de productos puede ser implementada mediante una combinación de puertas AND/OR o puertas NAND/NEGATIVA-OR



AND/OR



NAND/NEGATIVO-OR

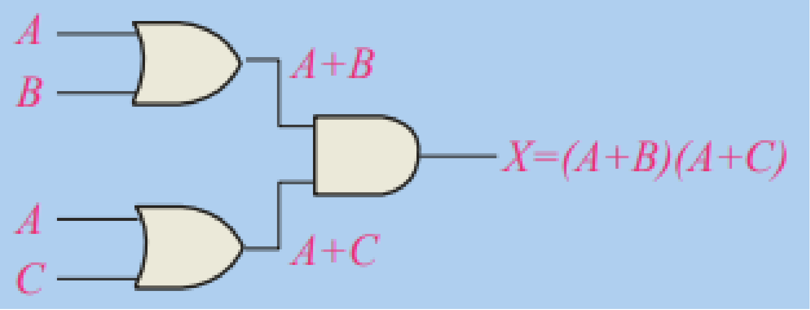
FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

PRODUCTO DE SUMAS – POS

- Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante se denomina *producto de sumas* (POS, *Product Of Sums*). A continuación algunos ejemplos: $(\overline{A}+B)(A+\overline{B}+C)$ $\quad (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(C+\overline{D}+E)(\overline{B}+C+D)$

- En una expresión con formato de Producto de Sumas , *una barra no puede extenderse sobre más de una variable*. Sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima. *Es decir, si* $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ *pero no* $\overline{A+B+C}$

- El producto de sumas puede ser implementado mediante una combinación de puertas OR/AND como ilustra la figura.



OR/AND

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

FORMA SOP ESTÁNDAR:

- En la forma SOP estándar, todas las variables del dominio deben aparecer en cada término. Esta forma es útil para la construcción de tablas de verdad.

- Puedes extender un término no-estándar a su forma estándar al multiplicar el término por un término compuesto por la suma de la variable que falta y su complemento. Es decir, aplicando la regla 6 $A + \overline{A} = 1$.

Convertir $X = \overline{A}\,\overline{B} + A\,B\,C$ a su forma estándar.

El primer término no incluye la variable C. Por lo tanto, multiplicarlo por $(C + \overline{C})$, que es $= 1$:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}(C + \overline{C}) + A\,B\,C$$

$$\boxed{= \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,C}$$

- Ejercicio: Convertir la siguiente expresión booleana al formato SOP estándar:

$$A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B} + AB\overline{C}D$$

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

FORMA POS ESTÁNDAR:

- En la forma POS estándar, todas las variables en el dominio deben aparecer en cada término suma de la expresión.
- Puedes extender una forma de expresión POS no-estándar a su forma estándar al añadir el producto de la variable que falta y su complemento y aplicando la regla 12, que declara que: $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Convertir $X = (\overline{A} + \overline{B})(A + B + C)$ a su forma estándar.

El primer término suma no incluye la variable C. Por lo tanto, añadir $C\overline{C}$ y expandir el resultado aplicando la regla 12.

$$X = (\boxed{\overline{A} + \overline{B}} + C\boxed{\overline{C}})(A + B + C)$$
$$= \boxed{(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})}(A + B + C)$$

- Ejercicio: Convertir la siguiente expresión booleana al formato POS estándar:

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

CONVERSION DE UN SOP ESTANDAR A UN POS ESTANDAR:

- Para pasar de la suma de productos estándar al producto de sumas estándar hay que realizar los siguientes pasos:

1. Evaluar cada término producto de la expresión suma de productos. Es decir, determinar los números binarios que representan estos términos.
2. Determinar todos los números binarios no incluidos al realizar la evaluación del paso 1.
3. Escribir los términos suma equivalente para cada valor binario del paso 2 y expresarlos en forma de producto de sumas.

- VER EJEMPLO.
  - Convertir la siguiente suma de productos estándar en su expresión equivalente como producto de sumas:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

FORMAS ESTANDARES DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

EJEMPLO CONVERSION DE UN SOP ESTANDAR A UN POS ESTANDAR:

- **Paso 1.** El resultado de la evaluación es el siguiente:

$$000 + 010 + 011 + 101 + 111$$

- **Paso 2.** Dado que son 3 las variables del dominio, existe un total de 2^3 posibles combinaciones. La expresión suma contiene cinco de estas combinaciones, luego la expresión producto de sumas debe contener las otras tres que son: 001, 100 y 110.

- **Paso 3.** Recordar que estos valores binarios (paso 2) son los valores que hacen que cada operación suma sea igual a cero. El resultado es,

$$(A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

- Utilizando un procedimiento similar, se puede pasar de POS a SOP estándar.

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

CONVERSIÓN DE UN SOP A TABLA DE VERDAD:

- Todas las expresiones booleanas pueden convertirse fácilmente en tablas de verdad utilizando los valores binarios de cada término de la expresión.
- Además, las expresiones SOP y POS pueden determinarse muy fácilmente desde las tablas de verdad.

- El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posible combinaciones de los valores de entrada.
- El segundo paso consiste en pasar la suma de productos a su forma estándar, en caso no se encuentre expresado de esa manera.
- Finalmente, se escribe un 1 en la columna de salida de cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 1, y un 0 en los términos restantes que no aparecen en la expresión.
- VER EJEMPLO.
  - Desarrollar una tabla de verdad para la expresión: $\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + ABC$

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

CONVERSIÓN DE UN SOP A TABLA DE VERDAD:

	Entradas			Salida	
	A	B	C	X	Término producto
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	ABC

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

CONVERSIÓN DE UN POS A TABLA DE VERDAD:

- El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posible combinaciones de los valores de entrada.
- El segundo paso consiste en pasar el producto de sumas a su forma estándar, en caso no se encuentre expresado de esa manera.
- Finalmente, se escribe un 0 en la columna de salida de cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 0, y un 1 en los términos restantes que no aparecen en la expresión.
- Ejercicio.
  - Desarrollar una tabla de verdad para la expresión:

$$(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

CONVERSIÓN DE UN POS A TABLA DE VERDAD:

	Entradas			Salida	
	A	B	C	X	Término suma
0	0	0	0	0	$(A + B + C)$
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	0	$(A + \overline{B} + C)$
3	0	1	1	0	$(A + \overline{B} + \overline{C})$
4	1	0	0	1	
5	1	0	1	0	$(\overline{A} + B + \overline{C})$
6	1	1	0	0	$(\overline{A} + \overline{B} + C)$
7	1	1	1	1	

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

CONVERSIÓN DE UN SOP – POS A PARTIR DE UNA TABLA DE VERDAD:

- Para obtener la expresión algebraica de una suma de productos representada por una tabla de verdad se deben enumerar todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 1.
- Luego, cada valor binario se convierte en el correspondiente término producto, reemplazando cada 1 por la variable y cada 0 por la variable complementada. Ejemplo: El valor binario 1010 $\rightarrow A\overline{B}C\overline{D}$

- Para obtener la expresión algebraica de un producto de sumas representado por una tabla de verdad se deben enumerar todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 0.
- Luego, cada valor binario se convierte en el correspondiente término suma, reemplazando cada 0 por la variable y cada 1 por la variable complementada. Ejemplo: El valor binario 1010 $\rightarrow \overline{A}+B+\overline{C}+D$

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

EJERCICIOS PARA CONVERSIÓN DE UN SOP - POS A PARTIR DE UNA TABLA DE VERDAD:

- Ejercicio: A partir de la tabla de verdad de la derecha, determine la expresión suma de productos y la expresión producto de sumas estándar equivalente.

	Entradas			Salida
	A	*B*	*C*	*X*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

EJERCICIOS PARA CONVERSIÓN DE UN SOP/POS A PARTIR DE UNA TABLA DE VERDAD:

En la columna de salida hay cuatro 1s y los correspondientes valores binarios son 011, 100, 110 y 111. Convertir estos valores binarios a términos producto como sigue:

<u>REGLA</u>:
SOP busca prevalencia de 1s en la salida.

$$011 \rightarrow \overline{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\overline{B}\overline{C}$$
$$110 \rightarrow AB\overline{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

La expresión suma de productos estándar resultante para la salida X es:

$$\boxed{X = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$$

Para el producto de sumas, la salida es 0 para los valores binarios 000, 001, 010 y 101. Estos valores binarios se convierten en términos suma como sigue:

<u>REGLA</u>:
POS busca prevalencia de 0s en la salida.

$$000 \rightarrow A + B + C$$
$$001 \rightarrow A + B + \overline{C}$$
$$010 \rightarrow A + \overline{B} + C$$
$$101 \rightarrow \overline{A} + B + \overline{C}$$

La expresión producto de sumas estándar resultantes para la salida X es:

$$\boxed{X = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(A + B + \overline{C})}$$

REPRESENTACIONES CANÓNICAS SOP Y POS

MINTERMS(1) Y MAXTERMS(0) :

- Otra forma de representar las sumas de productos y productos de sumas estándar son Mediante sus formas canónicas.

- Minterms 1: Son los términos producto de cada fila de la tabla de verdad que hacen que tal término producto valga 1. Es una expresión booleana que representa un producto lógico.
- Expresión para representar en SOP estándar mediante **minterms.**

$$F(\text{lista de variables}) = \sum(\text{lista de índices de minterms } 1)$$

- Maxterms 0: Son los términos suma de cada fila de la tabla de verdad que hacen que tal término suma valga 0. Es una expresión booleana que representa una suma lógica.
- Expresión para representar en POS estándar mediante **maxterms.**

$$F(\text{lista de variables}) = \prod(\text{lista de índices de maxterms } 0)$$

REPRESENTACIONES CANÓNICAS SOP Y POS

TABLA REPRESENTATIVA DE MINTERMS(1) Y MAXTERMS(0) DE 3 VARIABLES:

	Entradas			Salida			
	A	B	C	MINTERMS	NOTACIÓN	MAXTERMS	NOTACIÓN
0	0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0	$X+Y+Z$	M_0
1	0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1
2	0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	$X+\overline{Y}+Z$	M_2
3	0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3
4	1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4	$\overline{X}+Y+Z$	M_4
5	1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5
6	1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6
7	1	1	1	XYZ	m_7	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7

F(minterms) =F(x,y,z)=m0+m1+…+m7
F(maxterms)=F(x,y,z)=M0 . M1 . … M7

REPRESENTACIONES CANÓNICAS SOP Y POS

EJEMPLO REPRESENTACIÓN DE MINTERMS(1) Y MAXTERMS(0) :

- Expresе la función booleana $F = X+YZ$ como suma de *minterms 1*.

$$F = X + YZ$$

$$F = X(Y+\overline{Y})(Z+\overline{Z}) + (X+\overline{X})YZ$$

$$F = XYZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XYZ + \overline{X}YZ$$

Eliminando los duplicados, de acuerdo con la regla 5, y reordenando los *minterms* en orden ascendente, obtenemos finalmente,

$$F = \overline{X}YZ + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$

$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= \sum(3,4,5,6,7)$$