CIRCUITOS LOGICOS DIGITALES

UPC

UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

Laureate International Universities®

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

CICLO ACADÉMICO: 2024-I

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

ALCANCES:

Existen 2 tipos de simplificación:

- **Simplificación por inspección**.
  Usando los axiomas, teoremas y leyes del Algebra de Boole.

- **Simplificación por métodos gráficos y algorítmicos.**
  Mapas de Karnaugh
  Método de Quine-McCluskey

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

HECHOS RELEVANTES:

Maurice Karnaug fue un Doctor en Física de la Universidad de Yale que desde 1952 a 1966 trabajó en los Laboratorios Bell, lugar en dónde desarrolló un método un simplificación de circuitos lógicos combinacionales que lleva su nombre (K-MAP) y que fue publicado en su obra **The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits (1954).** Posteriormente, desde 1966 a 1989 trabajó en IBM.

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

MAPA DE KARNAUGH - ALCANCES:

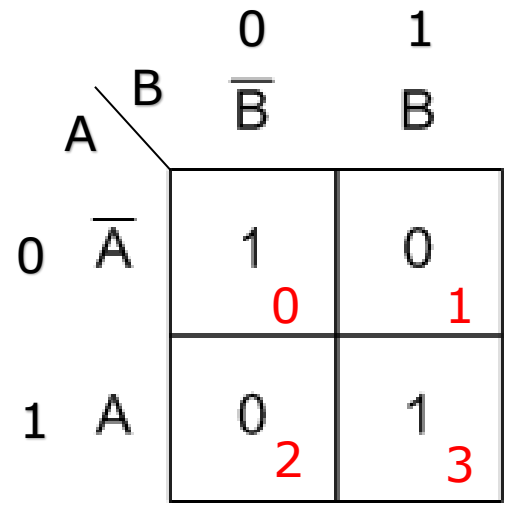
Es una herramienta gráfica que mediante un proceso simple y ordenado simplifica una función lógica para convertirlo en un circuito lógico simplificado. Para esto, la herramienta utiliza la información que aparece en la tabla de verdad de la función lógica.

La utilidad práctica de los mapas de Karnaugh (K-MAP) está limitada a 3, 4 o hasta 5 variables.

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

FORMATO DE MAPA DE KARNAUGH PARA 2 VARIABLES:

	A	B	F
0	0	0	**1**
1	0	1	**0**
2	1	0	**0**
3	1	1	**1**



MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

FORMATO DE MAPA DE KARNAUGH PARA 3 VARIABLES:

	A	B	C	F
0	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
2	0	1	0	**0**
3	0	1	1	**1**
4	1	0	0	**0**
5	1	0	1	**0**
6	1	1	0	**0**
7	1	1	1	**1**

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$ 0	1 (0)	1 (1)	1 (3)	0 (2)
A 1	0 (4)	0 (5)	1 (7)	0 (6)

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

FORMATO DE MAPA DE KARNAUGH PARA 4 VARIABLES:

	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**0**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**0**
11	1	0	1	1	**0**
12	1	1	0	0	**0**
13	1	1	0	1	**1**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**1**

AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$ 00	$\bar{C}D$ 01	CD 11	$C\bar{D}$ 10
$\bar{A}\bar{B}$ 00	1 (0)	1 (1)	1 (3)	0 (2)
$\bar{A}B$ 01	0 (4)	1 (5)	0 (7)	0 (6)
AB 11	0 (12)	1 (13)	1 (15)	1 (14)
$A\bar{B}$ 10	0 (8)	0 (9)	0 (11)	0 (10)

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

FORMATO DE MAPA DE KARNAUGH PARA 5 VARIABLES:

	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	1
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	0
16	1	0	0	0	0	1
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	1
20	1	0	1	0	0	1
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	1
24	1	1	0	0	0	1
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	1
28	1	1	1	0	0	1
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	0
31	1	1	1	1	1	0

BC \ DE	$\bar{D}\bar{E}$ 00	$\bar{D}E$ 01	DE 11	$D\bar{E}$ 10	$\bar{D}\bar{E}$ 00	$\bar{D}E$ 01	DE 11	$D\bar{E}$ 10
$\bar{B}\bar{C}$ 00	0	1	3	2	16	17	19	18
$\bar{B}C$ 01	4	5	7	6	20	21	23	22
BC 11	12	13	15	14	28	29	31	30
$B\bar{C}$ 10	8	9	11	10	24	25	27	26

$\bar{A}$ A

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

PROCESO DE SIMPLIFICACIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH

Después de acomodar los valores de la tabla de verdad en el mapa de Karnaugh, el cual está expresado como SOP estándar; la expresión mínima se obtiene agrupando los 1s para obtener la expresión mínima de una SOP a partir del mapa.

Debemos agrupar los 1s en el K-MAP de acuerdo con algunas reglas que nos permitan maximizar el tamaño de los grupos (cantidad de 1s) con la finalidad de minimizar el número de grupos.

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

PROCESO DE SIMPLIFICACIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH

1. Realizar las agrupaciones de 1s, con sus adyacentes, buscando la mayor cantidad de 1s posibles; **siempre en cantidades múltiplos de la potencia de 2**.

2. No dejar ningún 1 sin agrupar. Puede ocurrir que un 1 pertenezca a más de una agrupación sin embargo no se deberá agrupar 1s que se encuentren **totalmente** contenidas en otras.

3. La agrupación de 1s representa **un producto de variables**. **Cuanto más 1s se agrupen, más simplificada será la expresión que resulte de esa agrupación.**

4. En las agrupaciones se pueden presentar los siguientes casos:

a. Si la variable agrupada **no esta negada y no cambia** -> **Se afirma la variable no negada en la expresión simplificada**.

b. Si la variable agrupada **esta negada y no cambia** -> **Se afirma la variable negada en la expresión simplificada**.

c) Si la variable agrupada **cambia de no negada a negada** (o viceversa) -> **Se elimina la variable de la expresión simplificada**.

5. La expresión o función simplificada será la suma lógica de todos los productos que hayan salido de las agrupaciones simplificadas (expresión como SOP).

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 3 VARIABLES

	A	B	C	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

1era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$\bar{A}\bar{B}C$

$\bar{A}\bar{B}$

2da agrupación:

$\bar{A}\bar{B}C$

$\bar{A}BC$

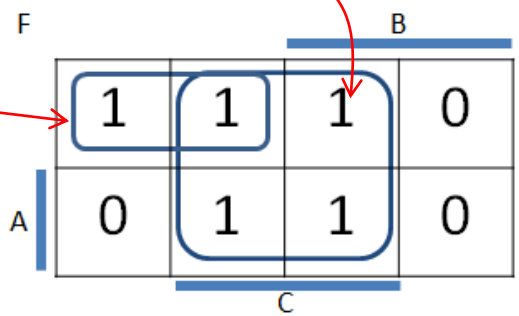
$A\bar{B}C$

ABC

C

		$\bar{B}\,\bar{C}$ 00	$\bar{B}\,C$ 01	$B\,C$ 11	$B\,\bar{C}$ 10
$\bar{A}$	0	0: 1	1: 1	3: 1	2: 0
A	1	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0

$$F = C + \bar{A}\bar{B}$$



CONSIDERACIONES:

- Agrupación de 1 celda de 1s involucra a 3 variables
- Agrupación de 2 celdas adyacentes de 1s involucra a 2 variables
- Agrupación de 4 celdas adyacentes de 1s involucra a 1 variable
- Agrupación de 8 celdas adyacentes de 1s constituye un función de valor lógico ‘1’

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 3 VARIABLES

1era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
$\bar{A}B\bar{C}$

$\bar{A}\ \ \bar{C}$

2da agrupación:

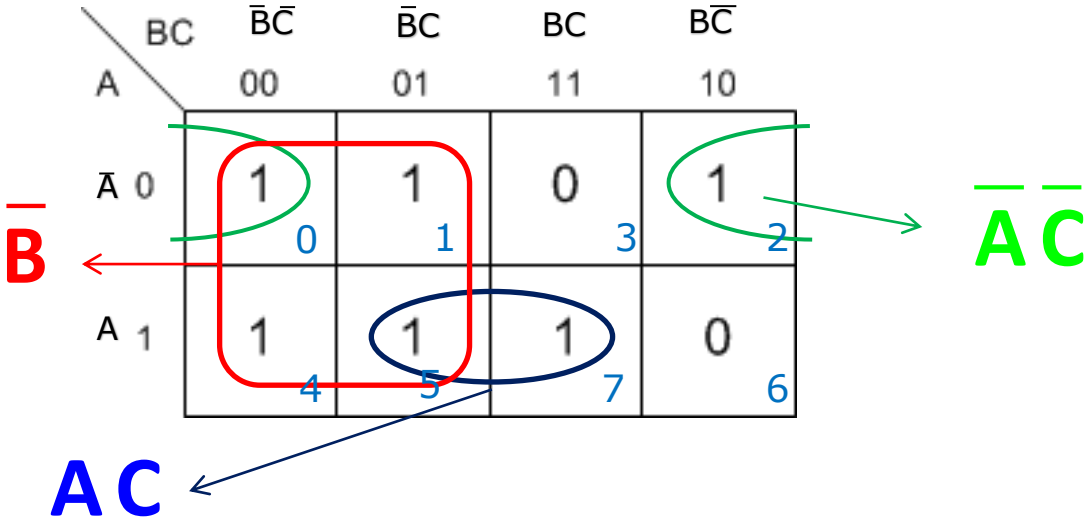
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
$\bar{A}\bar{B}C$
$A\bar{B}\bar{C}$
$A\bar{B}C$

$\bar{B}$

3era agrupación:

$A\bar{B}C$
ABC

$A\ \ C$

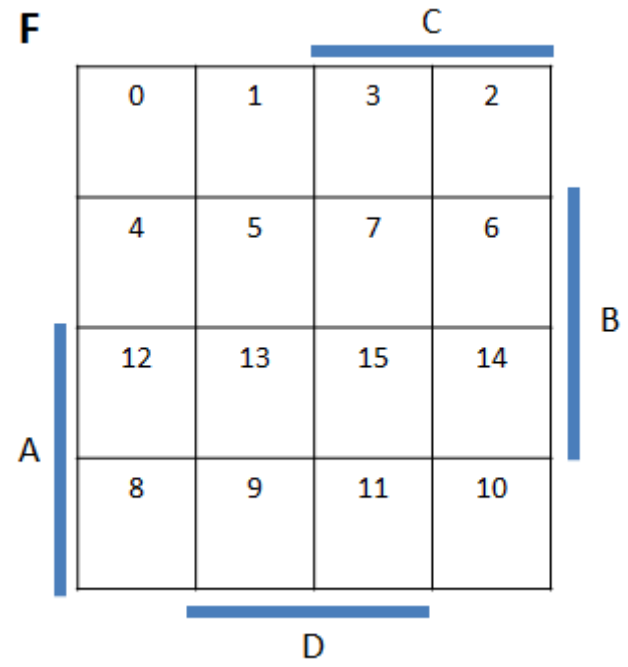


$$X = \bar{B} + \bar{A}\bar{C} + AC$$

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 4 VARIABLES

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00				
$\overline{A}B$ 01				
AB 11				
$A\overline{B}$ 10				



CONSIDERACIONES:

- Agrupación de 1 celda de 1s involucra a 4 variables
- Agrupación de 2 celdas adyacentes de 1s involucra a 3 variables
- Agrupación de 4 celdas adyacentes de 1s involucra a 2 variables
- Agrupación de 8 celdas adyacentes de 1s involucra a 1 variable
- Agrupación de 16 celdas adyacentes de 1s constituye una función de valor lógico ‘1’

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 4 VARIABLES

1era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}CD$
$\bar{A}BCD$

$\bar{A}\ \ CD$

2da agrupación:

$\bar{A}B\bar{C}D$
$\bar{A}BCD$
$AB\bar{C}D$
$ABCD$

$B\ \ D$

3era agrupación:

$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	1	0	0	0

$\bar{A}CD$

BD

$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$$X = BD + \bar{A}CD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 2 VARIABLES

1. Simplificar la siguiente función:

$$F = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

CONSIDERACIONES:

- Verificar que la función se encuentre en SOP estándar.
- Generar la tabla de verdad la función o también ubicar los 1s directamente en el K-MAP.
- Generar el K-MAP a partir de la tabla de verdad o mediante simple inspección.

1era agrupación:

$\bar{B}A$

BA

A

2da agrupación:

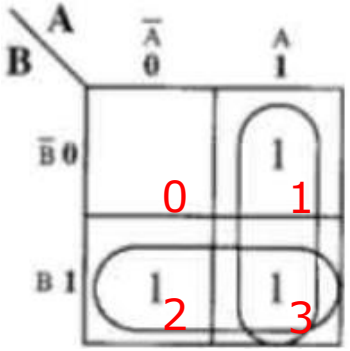
$B\bar{A}$

BA

B

Rpta.: F=A+B

	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1



MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 4 VARIABLES

2. Simplificar la siguiente función:

$$X = \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D + \bar{A}\,B\,C\,D + A\,\bar{B}\,C\,D + A\,B\,C\,D + A\,B\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$$

1era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}CD$
$\bar{A}BCD$
$ABCD$
$A\bar{B}CD$

CD

2da agrupación:

$\bar{A}BCD$
$\bar{A}BC\bar{D}$

$\bar{A}BC$

3era agrupación:

$AB\bar{C}D$
$ABCD$

$AB\ D$

AB \ CD	00 ($\bar{C}\,\bar{D}$)	01 ($\bar{C}\,D$)	11 ($C\,D$)	10 ($C\,\bar{D}$)
$\bar{A}\,\bar{B}$ 00	0	1	1 3	2
$\bar{A}\,B$ 01	4	5	1 7	1 6
$A\,B$ 11	12	1 13	1 15	14
$A\,\bar{B}$ 10	8	9	1 11	10

Rpta.: $X = ABD + \bar{A}BC + CD$

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 4 VARIABLES

3. Simplificar la siguiente función:

$$Z = \overline{B}\,\overline{C}\,D + B\,\overline{C}\,D + \overline{C}\,\overline{D} + B\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$$

$$A + \bar{A} = 1$$
$$B + \bar{B} = 1$$
$$AB + \overline{AB} = 1$$
$$D + \bar{D} = 1$$

1era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
$\bar{A}\bar{B}CD$
$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$

$\bar{A}\bar{B}$

2da agrupación:

$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$
$AB\bar{C}\bar{D}$
$\bar{A}BC\bar{D}$
$ABC\bar{D}$

$B\ \bar{D}$

3era agrupación:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$
$\bar{A}B\bar{C}D$
$AB\bar{C}\bar{D}$
$AB\bar{C}D$
$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
$A\bar{B}\bar{C}D$

$\bar{C}$

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	$C\,D$ 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	1 0	1 1	1 3	1 2
$\overline{A}\,B$ 01	1 4	1 5	7	1 6
$A\,B$ 11	1 12	1 13	15	1 14
$A\,\overline{B}$ 10	1 8	1 9	11	10

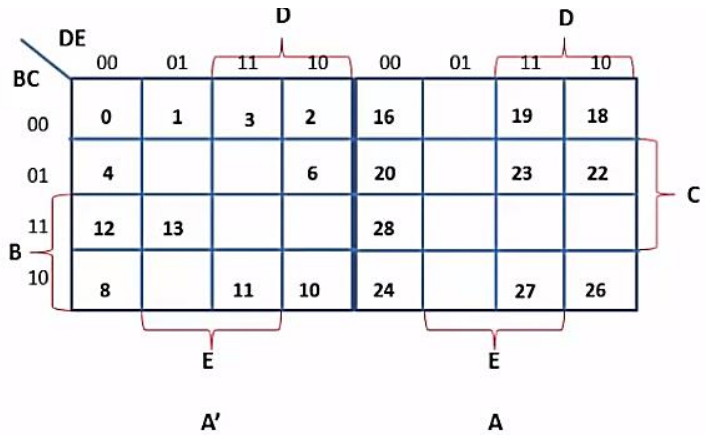
Rpta.: $Z = \bar{C} + \bar{A}\bar{B} + B\bar{D}$

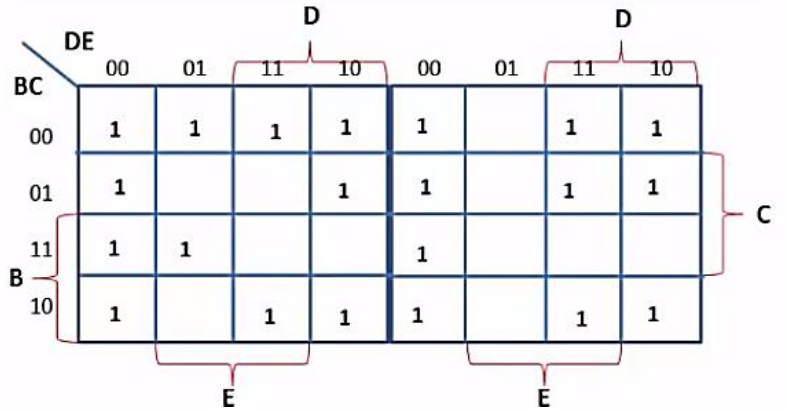
MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 5 VARIABLES

4. Simplificar la siguiente función expresado en su Forma canónica con SOP:

$F = \sum(0,1,2,3,4,6,8,10,11,12,13,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28)$ Solo los "1"





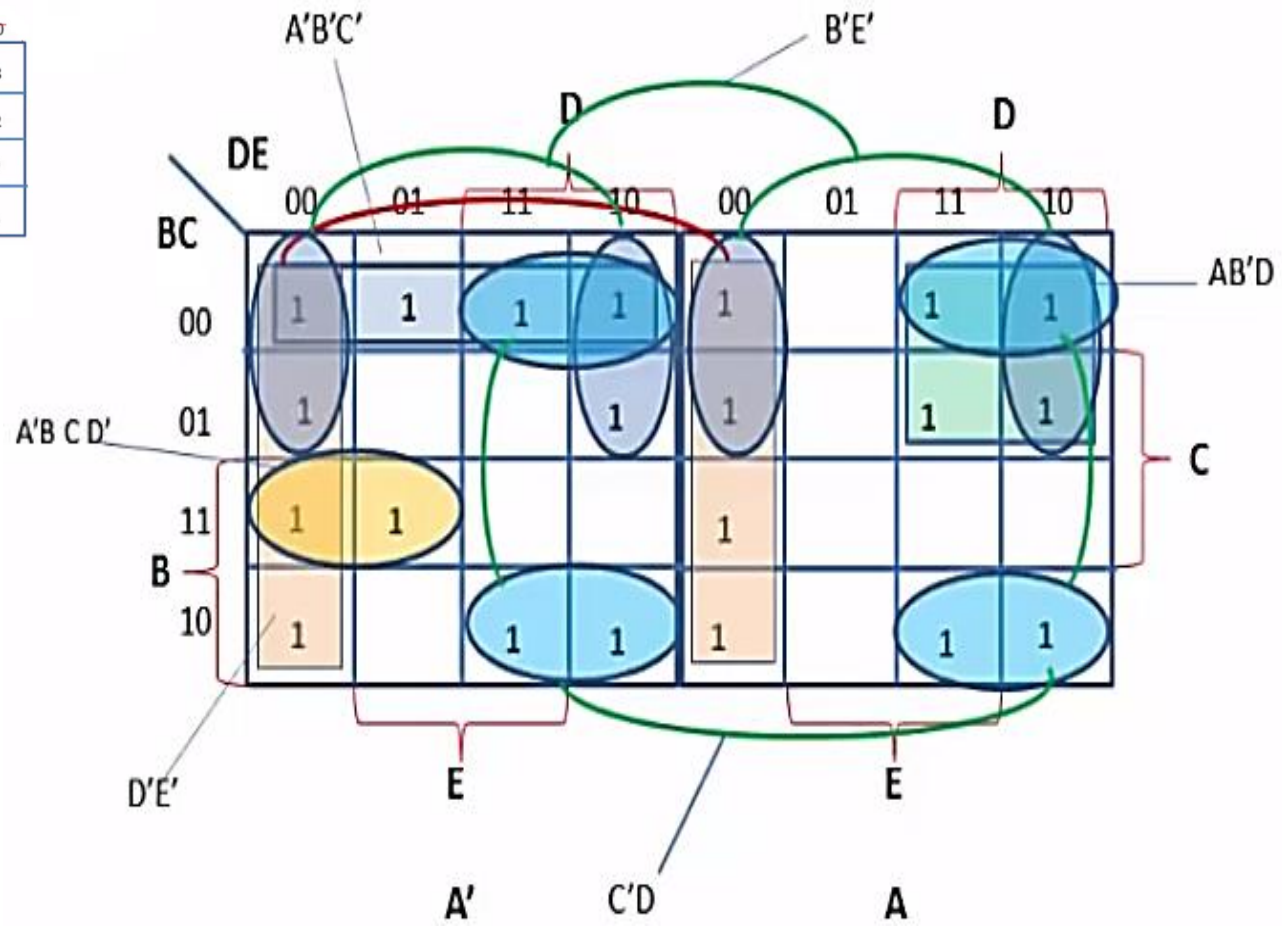
	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	1
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	0
16	1	0	0	0	0	1
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	1
20	1	0	1	0	0	1
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	1
24	1	1	0	0	0	1
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	1
28	1	1	1	0	0	1
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	0
31	1	1	1	1	1	0

MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN DE UN MAPA DE KARNAUGH DE 5 VARIABLES (CONTINUACIÓN)

BC \ DE	00	01	11	10	00	01	11	10
00	0	1	3	2	16	17	19	18
01	4	5	7	6	20	21	23	22
11	12	13	15	14	28	29	31	30
10	8	9	11	10	24	25	27	26

$\overline{A}$ A = 0 A A = 1



Rpta.: F = B'E' + D'E' + C'D + A'B'C' + AB'D + A'BCD'