Problema Grupal

# Màxima versemblança 1

**Considerem un experiment aleatori en què mesurem una determinada variable aleatòria X, que segueix una distribució Gaussiana univariada, cosa que escrivim X ∼ (μ, σ²). Prenem n mesures independents de X i obtenim una mostra aleatòria simple {x1 , ... , xn}, on cada xi és una realització de X, per i = 1, ... , n. Es demana:**

1. **Escriviu la funció de densitat de probabilitat per un xi qualsevol i construïu la funció log-versemblança (negativa) de la mostra.**
2. **Trobeu els estimadors de màxima versemblança i ² per μ i per σ² , a partir de la mostra.**

Estimador de

Estimador de σ²

1. **Demostreu que realment són mínims (i no extrems qualsevol).**

Demostrem primer que l’estimador de és mínim, en cas que ho sigui, com que l’estimador de σ² el trobem mitjançant l’estimador de **,** suposem que també serà mínim.

com que la σ² > 0, llavors és mínim

1. **Calculeu els biaixos dels dos estimadors.**

Amb la regla del càlcul del biaix:

Biaix de l’estimador de :

Biaix de l’estimador de σ² :

=

1. **Calculeu la variança de l’estimador per μ, de 2 maneres (que han de coincidir). Un cop obtinguda, determineu si l’estimador per μ és consistent.**
   1. **Usant la coneguda fórmula** .

Primer calculem el primer terme:

Aplicant la regla de l’enunciat:

Calculem el segon terme:

Finalment:

* 1. **Utilitzant la definició directa de la variància .**

Tornem a aplicar la regla de l’enunciat:

1. **Per determinar la velocitat màxima d’un prototip d’avió es van fer 15 proves independents (i caríssimes!) amb els resultats:**

**422.2, 418.7, 425.6, 420.3, 425.8, 423.1, 431.5, 428.2, 438.3, 434.0, 411.3, 417.2, 413.5, 441.3, 423.0**

**on els valors vénen expressats en m/s. Suposant que aquesta velocitat màxima és Gaussiana, quins valors estimaríeu per μ i per σ?**

Podem estimar els valors de μ i σ utilitzant les següents fórmules:

1. **[PROG] Fixeu μ i σ² al vostre gust i genereu 1000 mostres i.i.d. de mida n = 50 (noteu que no cal emmagatzemar-les); calculeu els valors teòrics del biaix i la variància. Utilitzeu les mostres (que han de ser independents entre si) per estimar els biaixos i variàncies i compareu els dos resultats.**

El codi es troba a la mateixa carpeta que aquest pdf [g.py]