第八次作业

2022211363 谢牧航

例题

P8

定义：设定阶矩阵组 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}|x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\}$$

对于 V 中的线性变换 $T(X)=X+2X^T$

求：

$$(T^3)(X),X=\begin{bmatrix}4&-4\\0&-3\end{bmatrix}\in V$$

$$(T^k)(X),\forall X\in V$$

解：

前置工作：

首先找到 V 的一组标准正交基

令 $x_{11}=-x_{12}-x_{21}$

找一组基

$$\begin{aligned}X&=\begin{bmatrix}-x_{12}-x_{21}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\\&=x_{12}\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}+x_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=x_{12}X_1+x_{21}X_2+x_{22}X_3\end{aligned}$$

下面将 X_1, X_2, X_3 进行施密特正交化过程

$$Y_1' = X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y_2' &= X_2 - \frac{(X_2, Y_1')}{(Y_1', Y_1')} Y_1' \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3' &= X_3 - \frac{(X_3, Y_1')}{(Y_1', Y_1')} Y_1' - \frac{(X_3, Y_2')}{(Y_2', Y_2')} Y_2' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

再进行单位化

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{Y_1'}{\|Y_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e_2 &= \frac{Y_2'}{\|Y_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ e_3 &= \frac{Y_3'}{\|Y_3'\|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

接下来求 T 在 e_1, e_2, e_3 下的矩阵 A_0

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_1 + 2e_1^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ T(e_2) &= e_2 + 2e_2^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T(e_3) &= e_3 + 2e_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Te_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理，对于 Te_2

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于 Te_3

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

所以

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下面求 A_0 的 Jordan 标准型

$$\lambda I - A_0 = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

经过初等变换

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda+1)(\lambda-3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) \end{bmatrix}$$

求得不变因子：$1, \lambda - 3, (\lambda+1)(\lambda-3)$
求得初等因子组：$(\lambda - 3), (\lambda + 1), (\lambda - 3)$

所以 Jordan 标准型为

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

接下来求 $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

$$A_0 = PJP^{-1}$$

即

$$PJ = A_0 P \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 & -x_2 & 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 x_1 & A_0 x_2 & A_0 x_3 \end{bmatrix}$$

解得

$$P=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

现在 $T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)J$ 转化为了

$$T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)PJP^{-1}\Rightarrow T(e_1,e_2,e_3)P=(e_1,e_2,e_3)PJ$$

令 $(E_1,E_2,E_3)=(e_1,e_2,e_3)P$，则 $T(E_1,E_2,E_3)=(E_1,E_2,E_3)J$

$$E_1=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$E_2=\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$E_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(1)

$$X=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_1 & E_2 & E_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}\\ -3\end{bmatrix}$$

所以

$$(T^3)(X)=(E_1,E_2,E_3)J^3\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}108 & -52\\ -56 & -81\end{bmatrix}$$

(2)

$$(T^k)(X)=(E_1,E_2,E_3)J^k\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=(E_1,E_2,E_3)\begin{bmatrix}3^k k_1\\ (-1)^k k_2\\ 3^k k_3\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x, E_1) \\ (x, E_2) \\ (x, E_3) \end{bmatrix}$$

1.36

在矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，设矩阵 A 与 B 的内积定义为 $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$，于是

$$V = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \middle| x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

V 中的线性变换 T

$$T(X) = XB_0 \quad (\forall X \in V), B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 V 的一个标准正交基；
(2) 证明 T 是 V 中的对称变换；
(3) 求 V 的一个标准正交基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解:

(1) 设 $X \in V$，则 $x_3 = x_4$，所以

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_4 & x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

发现已满足正交性，只需单位化即可

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)A$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$T(e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 3e_3$$

则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

易见 $A = A^{\mathrm{T}}$，所以 T 是对称变换。

(3) 对 A 进行相似对角化，则 $A = P\Lambda P^{-1}$，其中 Λ 为 A 特征值组成的对角矩阵，P 为 A 的特征向量组成的矩阵。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)A$

得 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)P\Lambda P^{-1}$

令 $(E_1, E_2, E_3) = (e_1, e_2, e_3)P$，则 $T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3)\Lambda$

所以

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

习题

1.3.15

在矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，定义 A 与 B 的内积定义为 $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$，子空间 V 为

$$V = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \middle| x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

V 中的线性变换 T

$$T(X) = XP + X^T P \quad (\forall X \in V), \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 求 V 的一个标准正交基；
(2) 证明 T 是 V 中的对称变换；
(3) 求 V 的一个标准正交基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解：

(1) 设 $X \in V$，则 $x_1 = x_4, x_2 = x_3$，所以

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

发现已满足正交性，只需单位化即可

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $T(X_1, X_2) = (X_1, X_2)A$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 1e_2$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 1e_2$$

则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

易见 $A = A^{\mathrm{T}}$，所以 T 是对称变换。

(3) 对 A 进行相似对角化，则 $A = P\Lambda P^{-1}$，其中 Λ 为 A 特征值组成的对角矩阵，P 为 A 的特征向量组成的矩阵。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $T(e_1, e_2) = (e_1, e_2)A$

得 $T(e_1, e_2) = (e_1, e_2)P\Lambda P^{-1}$

令 $(E_1, E_2) = (e_1, e_2)P$，则 $T(E_1, E_2) = (E_1, E_2)\Lambda$

所以

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$E_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$