第五周作业

2022211363 谢牧航

定义

1.19

首项系数是 1 （简称首 1），次数最小，且以矩阵 A 为根的 λ 的多项式。称为 A 的**最小多项式**。常用 $m(\lambda)$ 表示。

定理

1.17

任何 n 阶矩阵与三角矩阵相似。

1.18

（Hamilton-Cayley）n 阶矩阵 A 是其特征多项式的矩阵根（零点），即令

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

则

$$\varphi(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = O$$

1.20

矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与其特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的零点相同（不计重数）。

1.21

设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$，特征矩阵 $\lambda I - A$ 的全体 $n-1$ 阶子式的最大公因式为 $d(\lambda)$，则 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}$$

例题

1.20

已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $A^{100} + 2A^{50}$

解：令 $\psi(\lambda) = \lambda^{100} + 2\lambda^{50}$，可求得 A 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$\dfrac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ 可得

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)q(\lambda) + b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda$$

（这个式子由整除部分和余数部分组成）

对这个式子微分

$$\psi'(\lambda)=[2(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-1)^2]q(\lambda)+\varphi(\lambda)q'(\lambda)+b_1+2b_2\lambda$$

代入 1

$$b_1+2b_2=\psi'(1)=200$$

解三元一次方程组得

$$\begin{aligned}
b_0&=2^{100}+2^{51}-400 && (1)\\
b_1&=606-2^{101}-2^{51} && (2)\\
b_2&=-203+2^{100}+2^{51} && (3)
\end{aligned}$$

1.21

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&-3&2\\-1&5&2\\-1&3&0\end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解：设 $f(\lambda)=\lambda+k(k\in\mathbb{R})$，由于 $f(A)=A+kI\neq O$，所以任何一次多项式都不是 A 的最小多项式。

A 的特征多项式：

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

所以由定义 1.19 得

$$\psi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

P5

设 x_1,x_2 分别是线性空间 V 的一组基，线性映射 T 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

y_1,y_2 为 V 的另一组基，且

$$(y_1,y_2)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

(1) 求 T 在 y_1, y_2 下的矩阵 B.

(2) 求 A^*.

解:
(1) T在基 y_1, y_2 下的矩阵为:

$$B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

(2) 由 $B=C^{-1}AC$，得 $A=CBC^{-1}$

于是 $A^k=CB^kC^{-1}$

$$\begin{aligned}A^k&=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}k+1&k\\-k&-k+1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

P17

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

解: A的特征多项式 $\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-2\lambda+1$

由 $\varphi(\lambda)=2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4I=g(\lambda)$ 得

$$g(\lambda)=\varphi(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

因为 $\varphi(A)=0$,

$$2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I=24A^2-37A+10I$$

$$=\begin{bmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{bmatrix}$$

P22

求 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解: A的特征多项式为

$$\phi(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

因此 $A-I\neq 0$,

$$\begin{aligned}(A-I)^2&=A^2-2A+I\\ &=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=0\end{aligned}$$

因此，A的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$.

P30

初等变换化多项式矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准型。

解:

进行基本变换:

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) &= \begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

得到标准型，此时 $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda, d_3(\lambda) = \lambda^3+\lambda$。

P35

矩阵 A 为:

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

的最小多项式

解：求矩阵 $\lambda - A$ 的标准型:

$$\lambda - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

则 $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$

最后一个不变因子为矩阵的最小多项式:

$$m(\lambda) = d_3(\lambda)$$

有:
$m(A) = 0$

P38

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda+3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

经过一系列的矩阵变换，得到:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

不妨记子式 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

最后一个不为零的子式是 A 的最小多项式: $m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

有 $m(A)=0$

习题

1.2.14

除了上面例题 PPT P17 的解法，也可以直接计算得到结果。

首先，我们需要计算矩阵 A 的各次幂。为了减少计算量，我们可以先计算 A^2。然后使用 A^2 来计算 A^4，使用 A^4 来计算 A^8，等等。这样，我们只需要计算矩阵的四次乘法。

1. 计算 A^2
2. 使用 A^2 来计算 A^4
3. 使用 A^4 来计算 A^8
4. 使用 A 和 A^4 来计算 A^5
5. 最后，组合这些结果来得到 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

开始计算 A^2:

矩阵 A^2 为:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

接下来，我们将使用 A^2 来计算 A^4。

矩阵 A^4 为:

$$A^4=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

接下来，我们将使用 A^4 来计算 A^8。

矩阵 A^8 为:

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 0 & 34 & -21 \\ 0 & -21 & 13 \end{bmatrix}$$

接下来，我们将使用矩阵 A 和 A^4 来计算 A^5。

矩阵 A^5 为:

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

最后，我们可以将这些结果组合起来以得到 $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I$。

最后的结果为:

$$2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix}$$