第二周作业

2022211363 谢牧航

习题

第二周作业. 2022211363 谢牧航

P26

14. (1) $P(A)=0.7 \quad P(\bar{B})=0.6$

$\therefore P(A\cup\bar{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$

$P[B(A\cup\bar{B})]=P(AB)$

$=P(A(S-\bar{B}))$

$=P(A)-P(A\bar{B})$

$=0.7-0.5=0.2$

$\therefore P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.8}=0.25$

(2). $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

17. (1) 设两件都是正品为事件A.

$P(A)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$

(2) 设两件都是次品为事件B.

$$P(B)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

(3) 设一件正.一件次为事件C

$$P(C)=\frac{8}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$$

(4) 设第二件次品为事件D.

$$P(D)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

18. 设A为"不超过三次接通"

$$\therefore P(\bar{A})=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A)=\frac{3}{10}$$

若为奇数

$$P(\bar{A})=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

$$P(A)=\frac{3}{5}$$

21. 设此人是男性为事件A

$$P(A)=\frac{5\%\times\frac{1}{2}}{5\%\times\frac{1}{2}+0.25\%\times\frac{1}{2}}=\frac{\ }{21}$$

6 / 7

条件概率性质证明

有限可加性

对于任意的不相交事件 $A_1, A_2, ..., A_n$，证明:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots + P(A_n|B)$$

则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B)}{P(B)}$$

因为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是不相交的，所以：

$$P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

回到条件概率：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

根据条件概率的定义，这可以简化为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots + P(A_n|B)$$

证明完成。

加法公式

要证明条件概率的加法公式，即：

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 \cap B_2|A)$$

1. 表达 $P(B_1 \cup B_2|A)$

$$P(B_1 \cup B_2|A) = \frac{P(A \cap (B_1 \cup B_2))}{P(A)}$$

2. 分解 $A \cap (B_1 \cup B_2)$

$$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

3. 应用概率的加法公式

$$P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) - P((A \cap B_1) \cap (A \cap B_2))$$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) - P(A \cap B_1 \cap B_2)$$

4. 回到条件概率

$$
\begin{aligned}
P(B_1 \cup B_2|A) &= \frac{P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)-P(A\cap B_1\cap B_2)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A\cap B_1)}{P(A)}+\frac{P(A\cap B_2)}{P(A)}-\frac{P(A\cap B_1\cap B_2)}{P(A)} \\
&= P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1\cap B_2|A)
\end{aligned}
$$

证明完成。

系统可靠性

子系统 A_3, A_4 的可靠性较低，可以考虑将这两个子系统并联以提高他们的组合可靠性。

例如，A_3 和 A_4 并联后的可靠性是：

$$R_{A_3A_4} = 1-(1-0.7)\times(1-0.75) = 1-0.3\times0.25 = 1-0.075 = 0.925$$

然后，可以将这个并联组合（$R_{A_3A_4}=0.925$）与其他子系统（A_1, A_2, A_5）进行串联：

$$R_{total} = 0.925\times0.95\times0.95\times0.95 \approx 0.795$$

这样，整个系统的可靠性就达到了 0.795，满足了不低于 0.78 的要求。

生日问题

生日问题是一个著名的概率论问题，用于考察在一个大小为 n 的随机样本中，至少有两个人生日相同的概率。

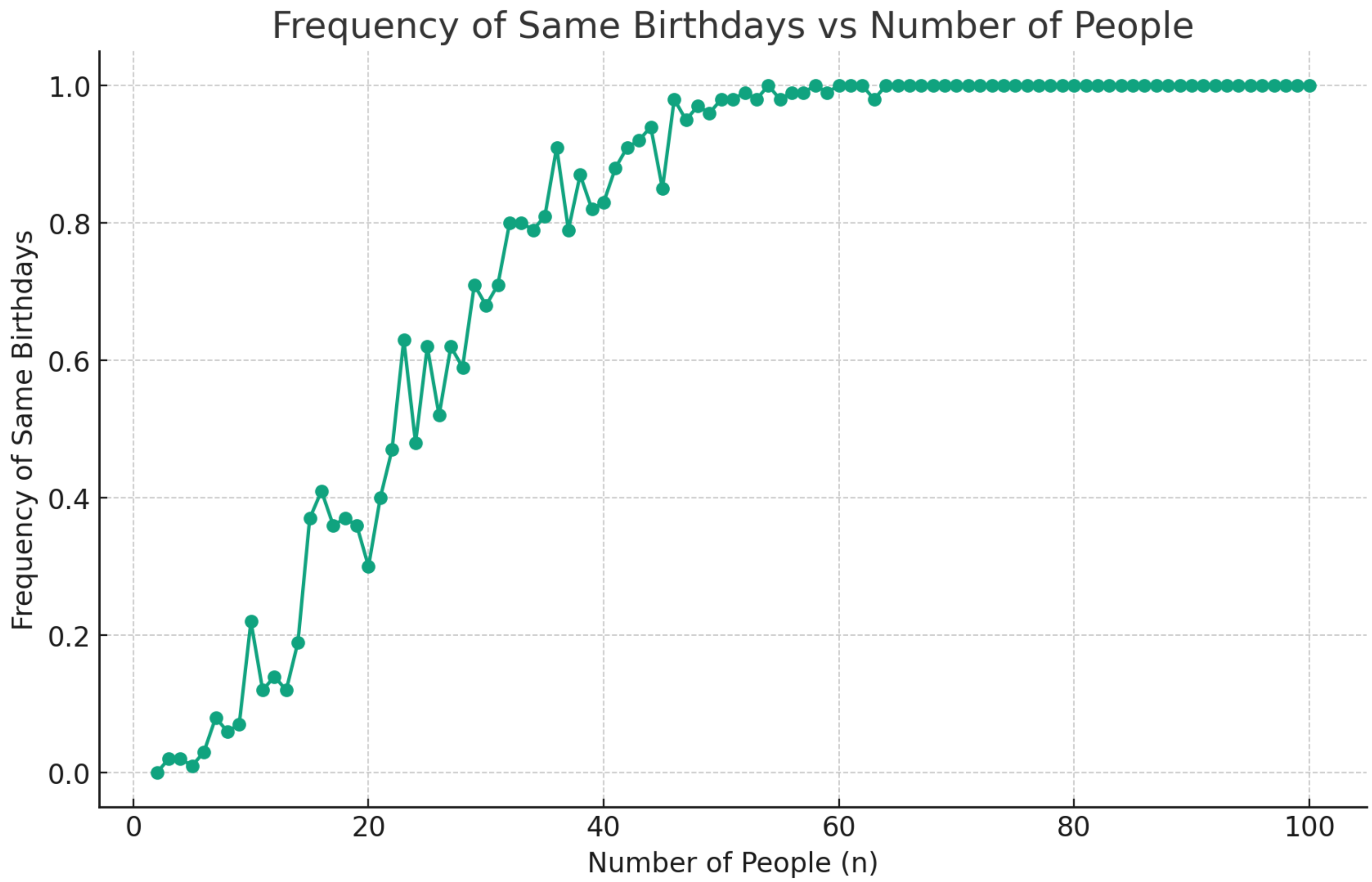
Python 仿真模拟

我将使用 Python 仿真模拟来绘制频率变化曲线。

1. 对于每一个 $n=k$（$k=2,3,\ldots,100$），我们会进行 100 次随机模拟。
2. 在每次模拟中，我们会随机生成 n 个介于 1 和 365 之间的整数，用以代表 n 个人的生日。
3. 我们将检查是否存在至少一对相同的生日。
4. 记录每次模拟结果，统计出现生日相同的频率。
5. 绘制 $n=k$ 和生日相同的累积频率之间的关系图。

```python
import random
import matplotlib.pyplot as plt

# 初始化变量
cumulative_frequencies = []  # 用于存储每个n=k时的累积频率
trials = 100  # 每个n=k的试验次数

# 进行模拟
for n in range(2, 101):  # n=k从2到100
    same_birthday_count = 0  # 初始化相同生日的计数器

    for _ in range(trials):  # 进行100次试验
        birthdays = [random.randint(1, 365) for _ in range(n)]  # 随机生成n个生日
        if len(set(birthdays)) < len(birthdays):  # 检查是否有相同的生日
            same_birthday_count += 1  # 如果有，计数器加1

    frequency = same_birthday_count / trials  # 计算频率
    cumulative_frequencies.append(frequency)  # 添加到累积频率列表

# 绘制图像
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(2, 101), cumulative_frequencies, marker='o')
plt.xlabel('Number of People (n)')
plt.ylabel('Frequency of Same Birthdays')
plt.title('Frequency of Same Birthdays vs Number of People')
plt.grid(True)
plt.show()
```

使用 matplotlib 绘制出的图像如下：



以上是 100 次试验中出现生日相同的累积频率变化曲线。横坐标表示人数 n（从 2 到 100），纵坐标表示出现至少一对生日相同的频率。

从图中可以明显看出，随着人数 n 的增加，出现至少一对生日相同的频率也逐渐增加。这与生日问题的理论预测是一致的。

在人数达到 23 人以上时， 至少两人生日相同的频率已大于 50%。在人数达到 60 人以上时， 至少两人生日相同的频率已大于 99%。

理论计算

设 k 个人生日互不相同为事件 A, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}$$

至少有两个人生日相同的概率为 $P(\overline{A})=1-P(A)$。根据题意可知 $P(\overline{A})\geq\frac{1}{2}$, 那么就有

$$P(A)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}\leq\frac{1}{2}$$

由不等式 $1+x \le \mathrm{e}^x$ 可得

$$P(A) \le \prod_{i=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{i}{n}\right) = \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

因此

$$\exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \le \frac{1}{2} \implies P(A) \le \frac{1}{2}$$

将 $n=365$ 代入，解得 $k \ge 23$。所以一个房间中至少 23 人，使其中两个人生日相同的概率达到 50%；当 $k>56$，$n=365$ 时，出现两个人同一天生日的概率将大于 99%。

应用

Pollard Rho 算法是一种用于找出一个合数 N 的非平凡因子（即既不是 1 也不是 N 自身）的有效算法。这个算法使用一个随机选择的多项式函数 $f(x)$ 和两个初始点 x_1 和 x_2。然后，它迭代地应用这个函数，并检查是否在某一点找到了合适的因子。

在 Pollard Rho 算法中，我们关心的是何时会有两个不同的 x 值（在模 N 下）满足 $f(x_1) \equiv f(x_2) \pmod{N}$。这样的话，$f(x_1)-f(x_2)$ 可能是 N 的一个非平凡因子。

这里的“碰撞” $f(x_1) \equiv f(x_2) \pmod{N}$ 类似于生日问题中至少两个人生日相同的情况。在生日问题中，我们知道，即使在相对小的人数 n 下，至少有两个人生日相同的概率也会很高。同样，在 Pollard's Rho 算法中，即使在较小的迭代次数下，也有很高的概率找到这样一个碰撞点。实际上根据生日问题可知序列中不同值的个数小于 $\sqrt{N}$。