第十四次作业

2022211363 谢牧航

定义

4.8

设 $A \in C_{m\times n}^{r}(r>0)$, 如果存在矩阵 $F \in C_r^{m\times r}$ 和 $G \in C_r^{r\times n}$, 使得

$$A = FG$$

则称式为矩阵 A 的**满秩分解**。

当 A 是满秩(列满秩或行满秩)矩阵的时候, A 可以分解为一个因子是单位矩阵，另一个因子是 A 本身, 称此满秩分解为**平凡分解**。

4.11

设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$, $A^H A$ 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

则称 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(i = 1, 2, \ldots, n)$为 A 的奇异值；当 A 为复数矩阵，它的奇异值都是 0.

易见, 矩阵 A 的奇异值的个数等于 A 的列数，A 的非零奇异值的个数等于 $\mathrm{rank}A$。

定理

4.13

设 $A \in C^r_{m\times n}(r > 0)$, 则 A 有满秩分解式 $A = FG$。

4.15

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆, 则存在正交矩阵 P 和 Q, 使得

$$P^T AQ = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

其中 $\sigma_i > 0(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4.16

设 $A \in C^r_{m\times n}(r > 0)$,则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V, 使得

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, 而 $\sigma_i(i = 1, 2, \ldots, r)$ 为矩阵 A 的全部非零奇异值.

例题

4.10

求矩阵 A 的满秩分解。其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵 $[A : I]$ 进行初等行变换，得到矩阵 B 和矩阵 P。为此，对矩阵 $[A : I]$ 进行初等行变换，当 A 所在的位置成为矩阵 B 时，所在矩阵 A 右侧变为矩阵 P。

$$
[A:I]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2 & -1 & | & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

进行行简化

$$
\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}
$$

则有

$$
B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}
$$

回求得

$$
P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}
$$

于是有

$$
A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}
$$

4.14

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

$$
B=A^TA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}
$$

求得 B 的特征值分别为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，对应的特征向量依次为

$$
\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}
$$

于是可得

$$\mathrm{rank}A=2,\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

可知

$$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

计算

$$U_1=AV\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

构造

$$U_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad U=[U_1:U_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则 A 的奇异值分解为

$$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}V^T$$

4.15

设矩阵 A 的奇异值分解中，证明：U 的列向量是 AA^H 的特征向量，V 的列向量是 A^HA 的特征向量。

可以求得

$$AA^H=U\begin{bmatrix}\Sigma^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}U^H$$

即

$$(AA^H)U=U\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r,0,\ldots,0)$$

记 $U=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$，则式可写为

$$(AA^H)u_i=\lambda_iu_i\quad(i=1,2,\ldots,m)$$

这表明了 u_i 是 AA^H 的一个特征向量，特征值为 λ_i ($i > r$ 时，$\lambda_i = 0$)。

同理可证明 v_i 是 $A^H A$ 的特征向量。

习题

4.3.1

求矩阵的满秩分解。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵 $[A:I]$ 进行初等行变换，得到矩阵 B 和矩阵 P。为此，对矩阵 $[A:I]$ 进行初等行变换，当 A 所在的位置成为矩阵 B 时，所在矩阵 A 右侧变为矩阵 P。

$$[A:I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进行行简化

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & \mid & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

回求得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\end{bmatrix}$$

4.4.2

把问题转化为求向量 x 的最优值使得 $\|Ax\|_2$ 的值最小。我们已经知道了 $x=0$ 是该方程的一个特解，为了避免 $x=0$ 这种情况，我们增加一个约束，比如 $\|x\|_2=1$，这样，问题就变为（带约束的优化问题）

$$\min\|Ax\| \quad , \quad \|x\|=1$$

$$\min\|Ax\|=\min\|UDV^Tx\|=\min\|DV^Tx\| \quad 且 \quad \|x\|=\|V^Tx\|$$

定义 $y=V^Tx$ 则问题变为：$\min\|Dy\| \quad , \quad \|y\|=1$（因为 V 为正交矩阵）

由于 D 是一个对角矩阵，对角元素按降序排列，因此最优解在 $y=(0,0,\ldots,1)$ 时取得，因为 $x=Vy$，所以最优解就是 V 的最小奇异值对应的列向量，即 $x=v_n$。

4.4.4

$A^HA=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1$，相应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$。

$$\operatorname{rank}(A)=2, \quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

可知

$$V=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

取

$$V_1=V, \quad U_1=AV\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{6}&0\end{bmatrix}, \quad U_2=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

构造正交矩阵 $U=[U_1,U_2]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$，则 A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$