第三周作业

2022211363 谢牧航

Part 1

例题

PPT P23

找到 $R^{2\times 2}$ 的一组基，

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^{\mathrm{T}}$$

$$T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}\alpha$$

$$f(T_1)(X)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{bmatrix}f(1)&&&\\&f(1)&&\\&&f(-1)&\\&&&f(-1)\end{bmatrix}\alpha$$

1.2.3

在 P_n 中，$T_1f(t)=f'(t),T_2f(t)=tf(t)$，证明

$$T_1T_2-T_2T_1=T$$

首先，考虑$T_1T_2f(t)$：

$$\begin{aligned}T_1T_2f(t)&=T_1(tf(t))\\&=\frac{d}{dt}(tf(t))\\&=f(t)+tf'(t)\end{aligned}$$

接着，考虑$T_2T_1f(t)$：

$$\begin{aligned}T_2T_1f(t)&=T_2(f'(t))\\&=tf'(t)\end{aligned}$$

然后我们有$T_1T_2f(t)-T_2T_1f(t)=(f(t)+tf'(t))-tf'(t)=f(t)$。

因此，$T_1T_2-T_2T_1=T$。

1.2.5

如果 x_1,x_2 是二维线性空间 V^2 的基，T_1,T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1x_1=y_1,T_1x_2=y_2$，且 $T_2(x_1+x_2)=y_1+y_2,T_2(x_1-x_2)=y_1-y_2$，试证明 $T_1=T_2$。

为了证明$T_1=T_2$，我们需要证明对于V^2空间内的任意向量x，$T_1x=T_2x$。

首先，任意一个向量$x\in V^2$可以表示为基x_1和x_2的线性组合：

$$x = ax_1 + bx_2$$

然后我们分别用T_1和T_2作用于x：

$$\begin{aligned} T_1 x &= T_1(ax_1 + bx_2) \\ &= aT_1x_1 + bT_1x_2 \\ &= ay_1 + by_2 \end{aligned}$$

接下来要找到T_2x的表达式。注意到：

$$\begin{aligned} T_2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \\ T_2(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \end{aligned}$$

解这个方程组得到T_2x_1和T_2x_2：

$$\begin{aligned} T_2x_1 = \frac{(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)}{2} = y_1 \\ T_2x_2 = \frac{(y_1 + y_2) - (y_1 - y_2)}{2} = y_2 \end{aligned}$$

T_2x的表达式：

$$\begin{aligned} T_2 x &= T_2(ax_1 + bx_2) \\ &= aT_2x_1 + bT_2x_2 \\ &= ay_1 + by_2 \end{aligned}$$

得出$T_1 = T_2$。

Part 2

定义

1.14

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$$

式中的矩阵 A 称为 T 在 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的矩阵。简称 A 为 T 的矩阵。

1.15

设 A, B 为数域 K 上的两个 n 阶矩阵，如果存在 K 上的 n 阶非奇异矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 相似于 B，记为 $A \sim B$。

定理

1.9

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基，线性变换 T_1, T_2 在该基下依次有 n 阶矩阵分别为 A, B，则有结论：

- $(T_1 + T_2)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)(A + B)$
- $(kT_1)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)(kA)$
- $(T_1T_2)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)(AB)$
- $T_1^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)(A^{-1})$

1.10

设线性变换 T 在线性空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})$，向量 x 在该基下的坐标为 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$，则 $T(x)$ 在该基下的坐标为 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ 可按公式

$$\beta = A\alpha$$

来计算。

例题

1.15(1)

在矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 中，给定矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

线性变换为 $T(X) = XB (\forall X \in R^{2\times 2})$，$R^{2\times 2}$ 的一个基为 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$，求 T 在该基下的矩阵。

为了找到线性变换$T(X) = XB$在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵表示，我们首先将每一个基矩阵与$B$相乘。

记$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，和$E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
T(E_{11}) &= E_{11}B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = E_{12}\\
T(E_{12}) &= E_{12}B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 4E_{21}\\
T(E_{21}) &= E_{21}B = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = E_{22}\\
T(E_{22}) &= E_{22}B = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix} = 4E_{21}
\end{aligned}
$$

因此，在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下，线性变换$T$的矩阵为

$$
\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}
$$

1.17

如果 $B = P^{-1}AP$，且 $f(t)$ 是数域 K 上的多项式，则矩阵多项式 $f(B)$ 与 $f(A)$ 之间有关系式 $f(B) = P^{-1}f(A)P$。

为了证明 $f(B) = P^{-1}f(A)P$，我们需要展示这个等式对于多项式 $f(t)$ 是成立的。

假设 $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ 是数域 K 上的一个多项式。

首先，我们注意到 A 和 B 是相似矩阵，即 $B = P^{-1}AP$。我们知道相似矩阵的多项式函数也是相似的，因此 $f(A)$ 和 $f(B)$ 应当是相似矩阵。

对于 $f(A)$，其表达式为：

$$
f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n
$$

将 $P^{-1}f(A)P$ 展开，我们有：

$$
\begin{aligned}
P^{-1}f(A)P &= P^{-1}(a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n)P\\
&= a_0P^{-1}P + a_1P^{-1}AP + a_2P^{-1}A^2P + \cdots + a_nP^{-1}A^nP\\
&= a_0I + a_1B + a_2B^2 + \cdots + a_nB^n\\
&= f(B)
\end{aligned}
$$

这证明了 $f(B) = P^{-1}f(A)P$。

习题

1.2.4

在 R^3 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2, xi_3)$，定义 $Tx = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$，试求 T 在基 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵。

为了找到变换 T 在基 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵表示，我们可以将 T 作用于这些基向量上，并观察结果。

首先，对 e_1：

$$\begin{aligned} Te_1 &= T(1, 0, 0) \\ &= (2(1) - 0, 0 + 0, 1) \\ &= (2, 0, 1) \end{aligned}$$

接着，对 e_2：

$$\begin{aligned} Te_2 &= T(0, 1, 0) \\ &= (2(0) - 1, 1 + 0, 0) \\ &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

最后，对 e_3：

$$\begin{aligned} Te_3 &= T(0, 0, 1) \\ &= (2(0) - 0, 0 + 1, 0) \\ &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

于是，我们可以把这些结果合并到一个矩阵中。 T 在给定基下的矩阵是：

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.8

在 $R^{2\times2}$ 中定义线性变换

$$T_1X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X, T_2X = X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T_3X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

求 T_1, T_2, T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

在 $R^{2\times 2}$ 中，我们选择基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$，其中

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对 T_1

$$\begin{aligned} T_1 E_{11} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \\ &= aE_{11} + cE_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 E_{12} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= bE_{12} + dE_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 E_{21} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \\ &= cE_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 E_{22} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= dE_{22} \end{aligned}$$

于是，T_1在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

对 T_2

通过类似的计算，T_2在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}$$

对 T_3

通过类似的计算，T_3在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a^2 & 2ab & 2ac & b^2 \\ ac & ad+bc & cd & bd \\ ca & cb & da & dc \\ c^2 & 2cd & 2db & d^2 \end{bmatrix}$$