第十二次作业

2022211363 谢牧航

定义

3.7

设一元函数 $f(x)$ 能展开为 x 的幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (|x|<r)$$

其中 $r>0$ 表示幂级数收敛的收敛半径。当 n 阶矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<r$ 时，把收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 的和称为矩阵函数，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$$

3.9

如果函数矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量 t 的可导函数，则称 $A(t)$ 可导，并称矩阵 $A(t)$ 的导数为

$$A'(t)=\frac{d}{dt}A(t)=\left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

3.10

如果函数矩阵 $A(t)$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0,t_1]$ 上的可积函数，则称 $A(t)$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)\,dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)\,dt\right)_{m\times n}$$

定理

3.7

如果 $AB = BA$，则 $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

3.8

设 $A(t), B(t)$ 是能够进行下面运算的两个可导的函数矩阵，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A(t)+B(t)) &= \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt} \\
\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) &= \frac{dA(t)}{dt} \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{dB(t)}{dt} \\
\frac{d}{dt}(aA(t)) &= \frac{da}{dt} \cdot A(t) + a \cdot \frac{dA(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

这里，$a = a(t)$ 是 t 的可导函数。

3.9

设 n 阶矩阵 A 与 t 无关，则有

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

$$\frac{d}{dt}\cos(tA) = -A(\sin(tA)) = -(\sin(tA))A$$

$$\frac{d}{dt}\sin(tA) = A(\cos(tA)) = (\cos(tA))A$$

例题

3.3

设 $AB = BA$，证明

$$
\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\
\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\
\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
\sin 2A &= 2\sin A \cos A
\end{aligned}
$$

(1)

$$
\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \frac{e^{i(A+B)} + e^{-i(A+B)}}{2} \\
&= \frac{e^{iA}e^{iB} + e^{-iA}e^{-iB}}{2} \\
&= \frac{(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) + (\cos A - i\sin A)(\cos B - i\sin B)}{2} \\
&= \frac{\cos A\cos B - \sin A\sin B + i(\sin A\cos B + \cos A\sin B) + \cos A\cos B - \sin A\sin B - i(\sin A\cos B + \cos A\sin B)}{2} \\
&= \frac{2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B}{2} \\
&= \cos A\cos B - \sin A\sin B.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\cos 2A &= \frac{e^{i2A}+e^{-i2A}}{2} \\
&= \frac{(e^{iA})^2+(e^{-iA})^2}{2} \\
&= \frac{(\cos A+i\sin A)^2+(\cos A-i\sin A)^2}{2} \\
&= \frac{(\cos^2 A-\sin^2 A+2i\cos A\sin A)+(\cos^2 A-\sin^2 A-2i\cos A\sin A)}{2} \\
&= \frac{2\cos^2 A-2\sin^2 A}{2} \\
&= \cos^2 A-\sin^2 A.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \frac{e^{i(A+B)}-e^{-i(A+B)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iA}e^{iB}-e^{-iA}e^{-iB}}{2i} \\
&= \frac{(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)-(\cos A-i\sin A)(\cos B-i\sin B)}{2i} \\
&= \frac{\cos A\cos B+i\cos A\sin B+i\sin A\cos B-\sin A\sin B-\cos A\cos B+i\cos A\sin B+i\sin A\cos B+\sin A\sin B}{2i} \\
&= \frac{2i\cos A\sin B+2i\sin A\cos B}{2i} \\
&= \cos A\sin B+\sin A\cos B.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\sin 2A &= \frac{e^{i2A}-e^{-i2A}}{2i} \\
&= \frac{(e^{iA})^2-(e^{-iA})^2}{2i} \\
&= \frac{(\cos A+i\sin A)^2-(\cos A-i\sin A)^2}{2i} \\
&= \frac{(\cos^2 A+2i\cos A\sin A-\sin^2 A)-(\cos^2 A-2i\cos A\sin A-\sin^2 A)}{2i} \\
&= \frac{4i\cos A\sin A}{2i} \\
&= 2\sin A\cos A.
\end{aligned}
$$

3.4

函数级数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ （$|x|<1$），求矩阵级数 $f(A)$.

因为

$$
f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad (|x|<1)
$$

根据定理 3.7，当矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<1$ 时，有

$$
f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k
$$

所以 $f(A)=(I-A)^{-1}$

3.5

设矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

求 e^A 与 e^{At} （$t\in\mathbb{R}$）。

特征多项式 $\phi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$，表示对角线上的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$，故 $\phi(\lambda)$ 与 $(\lambda-2)^2$ 相同。

(1) 对 $f(\lambda)=e^{\lambda}$，设 $f(\lambda)=\phi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$f(2)=e^2$$
$$f'(2)=e^2$$

解此方程组可得 $a=-e^2$，$b=e^2$。于是 $r(\lambda)=e^2(\lambda-1)$，从而

$$e^A=f(A)=r(A)=e^2(A-I)=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

(2) 对 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，设 $f(\lambda)=\phi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$f(2)=e^{2t}$$
$$f'(2)=te^{2t}$$

解此方程组可得 $a=(1-2t)e^{2t}$，$b=te^{2t}$。于是 $r(\lambda)=e^{2t}[(1-2t)+t\lambda]$，从而

$$e^{At}=f(A)=r(A)=e^{2t}[(1-2t)I+tA]=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

3.7

设矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$$

求 e^A，e^{At} （$t\in\mathbb{R}$）及 $\cos A$。

特征多项式 $\phi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$。对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量 $p_1=(-1,1,1)^T$，对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量分别是 $p_2=(-2,1,0)^T$，$p_3=(0,0,1)^T$。构造矩阵 P

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}$$

和

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

求得

$$e^A=P\begin{bmatrix}e^{-2}&0&0\\0&e&0\\0&0&e\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$
= \begin{bmatrix} 2e^{-2} - e^{-2} & 2e^{-2} - 2e^{-2} & 0 \\ e^{-2} - e & 2e^{-2} - e & 0 \\ e^{-2} - e & 2e^{-2} - 2e & e \end{bmatrix}
$$

同理

$$
e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} P^{-1}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{-2t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-2t} - e^{t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-2t} - 2e^{t} & e^{t} \end{bmatrix}
$$

以及

$$
\cos A = P \begin{bmatrix} \cos(-2) & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 1 \end{bmatrix} P^{-1}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{bmatrix}
$$

习题

3.3.5

设 A 为

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

求 e^{A}，e^{At} （$t \in \mathbb{R}$），$\sin A$。

解：

解 由 $\lambda I - A = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$，求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 2$，于是存在可逆矩阵

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

和

$$
P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

使得

$$
P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

根据矩阵函数的计算公式有

$$
e^{A} = P \cdot \mathrm{diag}(e^{-1}, e, e^{2}) P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6e^{2} & 4e^{2} - 3e^{-1} & -e^{-1} + 2e^{2} - 3e + e^{-1} \\ 0 & 3e + 3e^{-1} & 3e - 3e^{-1} \\ 0 & 3e - 3e^{-1} & 3e + 3e^{-1} \end{bmatrix}
$$

$$
e^{A}t = P \cdot \mathrm{diag}(e^{-t}, e^{t}, e^{2t}) P^{-1}
$$

$$
= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6e^{-t} & 4e^{-t}-3e^{-t} & -e^{-t}+2e^{-t}-3e^{t}+e^{2t} \\ 0 & 3e^{t}+3e^{t} & 3e^{t}-3e^{t} \\ 0 & 3e^{t}-3e^{t} & 3e^{t}+3e^{t} \end{bmatrix}
$$

和

$$
\sin A = P\cdot \mathrm{diag}(\sin(-t), \sin t, \sin 2t)P^{-1}
$$

$$
= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sin 2t & 4\sin 2t - 2\sin t & 2\sin 2t - 4\sin t \\ 0 & 0 & 6\sin t \\ 0 & 6\sin t & 0 \end{bmatrix}
$$

3.3.6

设 $f(x)=\ln x$，求 $f(A)$，这里 A 分别为

(1)

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

(2)

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

解:

(1)

$\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^4$

$$
J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\ln A = C\cdot \ln J \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

(2) $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，于是有

$$
\ln J_1 = \begin{bmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \ln 2 \end{bmatrix}, \quad \ln J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

因此

$$
\ln A = \begin{bmatrix} \ln J_1 & 0 \\ 0 & \ln J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

3.4.4

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T$，$A$ 是 n 阶对称矩阵，$b=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)^T$ 是 n 维向量，c 是常数，试求

$$
f(x) = x^T A x - b^T x + c
$$

关于 x 的导数。

解：

$$\frac{df}{dx} = 2Ax - b$$