- 第十次作业
  - 定义
    - P94 条件数
    - 2.5
  - 定理
    - 2.9
    - 2.10
  - 例题
    - 2.10

第十次作业

2022211363 谢牧航

定义

P94 条件数

设 $A \in C^{n\times n}$ 可逆， $B \in C^{n\times n}$，在某矩阵范数 $\|\cdot\|$ 下，若 $\|A^{-1}B\| < 1$，则有以下结论：

(1) $A+B$ 可逆；

(2) 设 $F = I - ((I + A^{-1}B)^{-1}$，则 $\|F\| \le \dfrac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$；

(3) $\dfrac{\|A^{-1}-(A+B)^{-1}\|}{||A^{-1}||} \le \dfrac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$。

若令 $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$，$d_A = \|\delta A\|\|A^{-1}\|$，则当 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ 时，由结论 (2) 与 (3) 可得

$$\|I - ((I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{d_A \mathrm{cond}(A)}{1 - d_A \mathrm{cond}(A)}$$

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{||A^{-1}||} \le \frac{d_A \mathrm{cond}(A)}{1 - d_A \mathrm{cond}(A)}$$

称 $\mathrm{cond}(A)$ 为矩阵 A 的条件数，它是衡量矩阵的相对误差扩大的一个重要量指标。一般说来，条件数越大，$(A+\delta A)^{-1}$ 与 A^{-1} 的相对误差就越大。

2.5

设矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，称

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

为 A 的谱半径。

定理

2.9

设 $A \in C^{n\times n}$，则对 $C^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(A) \le \|A\|$$

2.10

设 $A \in C^{n\times n}$，对任意的正数 ε，存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，使得

$$\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$$

例题

2.10

试用矩阵

$A = \begin{bmatrix} 1-j & 3 \\ 2 & 1+j \end{bmatrix} \quad (j = \sqrt{-1})$

验证式 $\rho(A) \le \|A\|$ 对于三种常用矩阵范数的正确性。

因为 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 5$，所以 $\lambda_1(A) = 1 + \sqrt{5}$，$\lambda_2(A) = 1 - \sqrt{5}$，从而 $\rho(A) = 1 + \sqrt{5}$

又 $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 3 + \sqrt{2}$，而

$$A^H A = \begin{bmatrix} 6 & 5+5j \\ 5-5j & 11 \end{bmatrix}, \det(\lambda I - A^H A) = \lambda^2 - 17\lambda + 16$$

由此得 $\lambda_1(A^HA) = 16$，$\lambda_2(A^HA) = 1$。则有

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1(A^HA)} = 4$$

因此

$$\rho(A) < \|A\|_1, \rho(A) < \|A\|_2, \rho(A) < \|A\|_\infty$$