第四周作业

1.2 作业1

例题

1.7

在 R^n 中，已知向量 x 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$，求 x 在基 $y_1 + y_2, \cdots, y_n$ 下的坐标。

过渡矩阵 C 为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

则新基下的坐标为

$$C^{-1}\xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2-\xi_1\\ \xi_3-\xi_2\\ \vdots\\ \xi_n-\xi_{n-1}\end{bmatrix}$$

1.8

已知矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的两个基

(I) $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

(II) $B_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

求过渡矩阵 C，使得 $B=CA$。

采用中介基方法

简单基向 (I) 的过渡矩阵为

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

简单基向 (II) 的过渡矩阵为

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

习题

1.1.8

(1)

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$x = Cy = \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

1.1.9

(1)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^{\mathrm{T}}$$

(3)

即求向量 x 使得 $x = Cx$

求 C 的特征向量为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.2.7

$x_1 = (-1, 1,, 1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (0, 1, 1)$ 向 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 的过渡矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$T' = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.11

给定 R^3 的两个基

$$x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (2, 1, 0), x_3 = (1, 1, 1)$$

$$y_1 = (1, 2, -1), y_2 = (2, 2, -1), y_3 = (2, -1, -1)$$

定义线性变换 $Tx_i = y_i$

(1)

过渡矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(2) $T=C=\begin{bmatrix}-2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

(3) $T=C=\begin{bmatrix}-2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

1.2 作业2

定义

1.16

设 $A \in R^{m\times n}$，$B \in R^{n\times m}$，又设 AB 的特征多项式为 $\varphi_{AB}(\lambda)$,BA的特征多项式为$\varphi_{BA}(\lambda)$，则 $\lambda^n\varphi_{AB}(\lambda)=\lambda^m\varphi_{BA}(\lambda)$。

1.17

任意 n 阶矩阵与三角矩阵相似。

例题

设 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，线性空间

$V=\{X=(X_{ij})_{2x2}|x_{11}+x_{22}=0,x_{ij}\in R\}$

中的线性变换为 $T(X)=B^TX-X^TB$ (对 $\forall X\in V$) ,求 T 的特征值与特征向量。

设 $X\in V$

$$X=x_{11}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+x_{12}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

三个矩阵构成一组基 X_1,X_2,X_3，则

$$T(X_1)=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}=0X_1-1X_2+1X_3$$

$$T(X_2)=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}=0X_1+1X_2-1X_3$$

$$T(X_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 - 1X_2 + 1X_3$$

则 T 在该基下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

求特征值和特征向量

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则

$$Y_1 = (X_1, X_2, X_3)\alpha 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Y_2 = (X_1, X_2, X_3)\alpha 2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

全体为 $k_1Y_1 + k_2Y_2$

$$Y_3 = (X_1, X_2, X_3)\alpha 3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

全体为 k_3Y_3

习题

1.2.12

T 是线性变换，已知 T 在 V^3 的基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

求 T 的特征值和特征向量。

首先计算 A 的特征值和特征向量

要找到线性变换 T 的特征值和特征向量，我们可以直接对矩阵 A 进行特征分解。

特征值 λ 和特征向量 v 满足以下方程：

$$Av = \lambda v$$

首先，我们会找到矩阵 A 的特征值，然后对每个特征值求其对应的特征向量。

现在，我们将计算矩阵 A 的特征值和特征向量。

线性变换 T 的特征值和对应的特征向量为：

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
对应的特征向量:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20} \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$

全体为 $k_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{20} \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$

特征值 $\lambda_3 = -2$
对应的特征向量:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

全体为 $k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$