第九次作业

2022211363 谢牧航

定义

2.1

如果 V 是数域 K 上的线性空间，对任意的 $x \in V$，定义一个实值函数 $\|x\|$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性：当 $x \neq 0$ 时，$\|x\| > 0$；当 $x = 0$ 时，$\|x\| = 0$；

(2) 齐次性：$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ （$\alpha \in K, x \in V$）；

(3) 三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （$x, y \in V$）。

2.2

满足 $c_1||x||_\beta \leq ||x||_\alpha \leq c_2||x||_\beta$ 的两个范数 $||\cdot||_\alpha$ 和 $||\cdot||_\beta$ 称为等价的。

2.3

设矩阵 $A \in C^{m\times n}$，定义一个实值函数 $\|A\|$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性：当 $A \neq O$ 时，$\|A\| > 0$；当 $A = O$ 时，$\|A\| = 0$；

(2) 齐次性：$\|aA\| = |a|\|A\|$ （$a \in C$）；

(3) 三角不等式：$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ （$B \in C^{m\times n}$）。

则称 $\|A\|$ 为 A 的广义矩阵范数。若对 $C^{m\times n}, C^{n\times l}$ 及 $C^{m\times l}$ 上的同类广义矩阵范数 $\|\cdot\|$ 还满足下面一个条件

(4) 相容性：$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ （$B \in C^{n\times l}$）。

则称 $\|\cdot\|$ 为 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数。

2.4

对于 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 和 C^m 与 C^n 上的同类向量范数 $\|\cdot\|_V$，如果满足

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M\|x\|_V \quad (\forall A \in C^{m\times n}, \forall x \in C^n)$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 是相容的。

定理

2.1

有限维线性空间上的不同范数是等价的。

2.2

C^n 中的向量序列

$$x^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

收敛到向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$，当且仅当对任何一个向量范数 $\|\cdot\|$，数列

$$\|x^{(k)} - x\|$$

的极限为零。

2.4

已知 C^m 和 C^n 上的向量范数 $\|\cdot\|$，设 $A \in C^{m\times n}$，则矩阵

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

是 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数，且与已知的向量范数相容。

2.5

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in C^n$，则从属于向量的三种范数 $\|x\|_1$，$\|x\|_2$，$\|x\|_\infty$ 的矩阵范数计算公式依次为：

(1) $\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^m|a_{ij}|$;

(2) $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$，λ_1 为 A^HA 的最大特征值；

(3) $\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$。

通常称 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$ 及 $\|A\|_\infty$ 依次为**列和范数**，**谱范数**及**行和范数**。

例题

2.1

在 n 维空间 C^n 上，复向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ 的长度定义为

$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\ldots+|\xi_n|^2}$$

证明其就是一种范数。

(1) 非负性：当 $x\neq 0$ 时，$\|x\|>0$; 当 $x=0$ 时，有 $\|x\|=\sqrt{0^2+\ldots+0^2}=0$。
(2) 齐次性：对任意的复数 a，有

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\ldots,a\xi_n)$$

所以

$$\|ax\|=\sqrt{|a\xi_1|^2+|a\xi_2|^2+\ldots+|a\xi_n|^2}=|a|\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\ldots+|\xi_n|^2}=|a|\|x\|$$

(3) 三角不等式：对于任意两个复向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，和 $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$，有

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots,\xi_n+\eta_n)$$

可以得

$$\|x+y\|=\sqrt{|\xi_1+\eta_1|^2+|\xi_2+\eta_2|^2+\ldots+|\xi_n+\eta_n|^2}$$

$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\ldots+|\xi_n|^2}$$

$$\|y\|=\sqrt{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+\ldots+|\eta_n|^2}$$

有

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2\mathrm{Re}(x,y)+(y,y)$$

因为

$$\mathrm{Re}(x,y)\le|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$$

所以

$$\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

即

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

所以 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的范数。

2.2

证明 $\|x\|=\max_i|\xi_i|$ 是 C^n 上的一种范数，这里 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in C^n$。

(1) 非负性：当 $x\ne0$ 时，有 $\|x\|=\max_i|\xi_i|>0$; 当 $x=0$ 时，有 $\|x\|=0$。
(2) 齐次性：对任意的 $a\in C$，有

$$\|ax\|=\max_i|a\xi_i|=|a|\max_i|\xi_i|=|a|\|x\|$$

(3) 三角不等式：对 C^n 的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，和 $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$，有

$$\|x+y\|=\max_i|\xi_i+\eta_i|\le\max_i|\xi_i|+\max_i|\eta_i|=\|x\|+\|y\|$$

所以 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的范数。

2.3

证明 $\|x\|=\sum_{i=1}^n|\xi_i|$，也是 C^n 上的一种范数，其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in C^n$。

(1) 非负性：$x\ne0$ 时，有 $\|x\|=\sum_{i=1}^n|\xi_i|>0$; 当 $x=0$ 时，由于 x 的每一分量都是零，故 $\|x\|=0$。

(2) 齐次性：对任意复数 $a\in C$，有

$$\|ax\|=\sum_{i=1}^n|a\xi_i|=|a|\sum_{i=1}^n|\xi_i|=|a|\|x\|$$

(3) 三角不等式：对任意两个向量 $x,y\in C^n$，有

$$\|x+y\|=\sum_{i=1}^n|\xi_i+\eta_i|\le\sum_{i=1}^n(|\xi_i|+|\eta_i|)=\sum_{i=1}^n|\xi_i|+\sum_{i=1}^n|\eta_i|=\|x\|+\|y\|$$

所以 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的范数。

2.6

给定线性空间 V^n 中的向量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，设 $x \in V^n$ 在该基下的坐标向量为 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$，那么

$$\|x\|_p = \|\alpha\|_p \quad (1 \leq p < +\infty)$$

证明 $\|\cdot\|_p$ 是 V^n 上的范数。

(1) 非负性：当 $x \neq 0$ 时，有 $\|x\|_p = \|\alpha\|_p > 0$; 当 $x = 0$ 时，有 $\|x\|_p = \|\alpha\|_p = 0$。

(2) 齐次性：对任意的 $a \in C$，有

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p$$

(3) 三角不等式：对任意两个向量 $x, y \in V^n$，有

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

（闵可夫斯基不等式）

所以 $\|\cdot\|_p$ 是 V^n 上的范数。

2.8

例 2.8 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in C^{m \times n}$，证明Frobenius范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = (\mathrm{tr}(A^H A))^{1/2}$$

是 $C^{m \times n}$ 上的矩阵范数，且与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 相容。

(1) 非负性：当 $A \neq O$ 时，有 $\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^H A))^{1/2} > 0$; 当 $A = O$ 时，有 $\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^H A))^{1/2} = 0$。

(2) 齐次性：对任意的 $a \in C$，有

$$\|aA\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a a_{ij}|^2\right)^{1/2} = |a| \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = |a| \|A\|_F$$

(3) 三角不等式：

设 $B \in C^{m \times n}$，且 A 的第 j 列为 a_j，B 的第 j 列为 b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$，则有

$$\|A+B\|_F^2 = \|a_1 + b_1\|_2^2 + \ldots + \|a_n + b_n\|_2^2 \leq (\|a_1\|_2 + \|b_1\|_2)^2 + \ldots + (\|a_n\|_2 + \|b_n\|_2)^2 =$$

$$(\|a_1\|_2^2+\ldots+\|a_n\|_2^2)+2(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\ldots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2)+(\|b_1\|_2^2+\ldots+\|b_n\|_2^2)$$

对上述第二项应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\|A+B\|_F^2 \le \|A\|_F^2+2\|A\|_F\|B\|_F+\|B\|_F^2=(\|A\|_F+\|B\|_F)^2$$

即三角不等式成立。

(4) 相容性：

设 $B=(b_{ij})\in C^{n\times l}$，则 $AB=(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})\in C^{m\times l}$，于是有

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

对上述中括号内的项应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\|AB\|_F^2 \le \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^l\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right)=\|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

即 $\|A\|_F$ 是 A 的矩阵范数。

若令 $B=x\in C^{n\times 1}$，则有

$$\|Ax\|_2=\|AB\|_F\le\|A\|_F\|B\|_F=\|A\|_F\|x\|_2$$

即矩阵范数 $\|\cdot\|_F$ 与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 相容。

2.9

设 $\|\cdot\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，任取在 C^n 中的非零向量 y，则函数

$$\|x\|_V=\|xy^H\|_M(\forall x\in C^n)$$

是 C^n 上的向量范数，且矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 和向量范数 $\|\cdot\|_V$ 相容。

(1) 非负性：当 $x\ne 0$ 时，$xy^H\ne O$，从而 $\|x\|_V>0$; 当 $x=0$ 时，$xy^H=O$，从而 $\|x\|_V=0$。

(2) 齐次性：对任意复数 $\alpha\in C$，有

$$\|\alpha x\|_V=\|\alpha xy^H\|_M=|\alpha|\|xy^H\|_M=|\alpha|\|x\|_V$$

(3) 三角不等式：对任意 $x_1,x_2\in C^n$，有

$$\|x_1+x_2\|_V=\|(x_1+x_2)y^H\|_M=\|x_1y^H+x_2y^H\|_M\le\|x_1y^H\|_M+\|x_2y^H\|_M=\|x_1\|_V+\|x_2\|_V$$

因此，$\|x\|_V$ 是 C^n 上的向量范数。对 $A\in C^{n\times n},x\in C^n$ 时，有

$$\|Ax\|_V = \|(Ax)y^H\|_M = \|A(xy^H)\|_M \le \|A\|_M \|xy^H\|_M = \|A\|_M \|x\|_V$$

即矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 相容。

习题

2.1.1

求向量 $e = (1, 1, \cdots, 1)$ 的 l_1, l_2, l_∞ 范数。

解:

$$\begin{aligned}
\|e\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |e_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \\
\|e\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |e_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n} \\
\|e\|_\infty &= \max_i |e_i| = \max_i 1 = 1
\end{aligned}$$

2.2.1

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} -j & 2 & 3 \\ 1 & 0 & j \end{bmatrix}$ 的 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ 范数。

解:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 2 \\
\|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6} \\
\|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 4 \\
\|B\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = 4 \\
\|B\|_2 &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8 + 2\sqrt{13}} \\
\|B\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = 6
\end{aligned}$$