#### ▼ 第二周作业

- ▼ 定义
  - **1.10**
  - **1.11**
- ▼ 例题
  - ▼ 1.10
    - 解答
  - ▼ 1.11
    - 解答
  - **▼** 1.12
    - 解答
- ▼ 习题
  - **▼** 1.1.10
    - 解答
  - **▼** 1.1.12
    - 解答
  - **▼** 1.2.1
    - 解答

# 第二周作业

2022211363 谢牧航

# 定义

# 1.10

设 V 是数域 K 上的线性空间,T 是 V 到自身的一个映射,使对任意向量  ${m x}\in V$ ,V 中都有唯一的向量  ${m y}$  与之对应,则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**。记为

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

称 y 为 x 在 T 下的**象**,而 x 是 y 的**原象**(或**象源**)。

#### 1.11

如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有下列性质:

$$T(k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}) = k(T\boldsymbol{x}) + l(T\boldsymbol{y})$$

其中,  $k, l \in K$ ,  $x, y \in V$ , 则称 T 为 V 的一个线性变换或线性算子。

# 例题

#### 1.10

在线性空间  $\mathbb{R}^2$  中的所有向量均绕原点顺(或逆)时针旋转  $\theta$  角的变换,就是一个线性变换。求这个线性变换。

### 解答

以逆时针为例

$$rac{x'}{r} = \cos( heta_0 + heta) = \cos heta_0\cos heta - \sin heta_0\sin heta = rac{x}{r}\cos heta - rac{y}{r}\sin heta$$
 $rac{y'}{r} = \sin( heta_0 + heta) = \sin heta_0\cos heta + \cos heta_0\sin heta = rac{y}{r}\cos heta + rac{x}{r}\sin heta$ 

整理得到

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = y\cos\theta + x\sin\theta$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

因此

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

#### 1.11

在线性空间  $P_n$  中,求微分是一个线性变换。为什么?

设

$$Df(t) = f'(t)$$

对于任意的  $f(t),g(t)\in P_n$ ,  $k,l\in K$ , 有

$$egin{aligned} D(kf(t) + lg(t)) &= (kf(t) + lg(t))' \ &= kf'(t) + lg'(t) \ &= k(Df(t)) + l(Dg(t)) \end{aligned}$$

因此,  $D \neq P_n$  的一个线性变换。

#### 1.12

在线性空间  $P_n$  中,求积分是一个线性变换。为什么?

#### 解答

对于任意的  $f(t), g(t) \in P_n$ ,  $k, l \in K$ , 有

$$J(kf(t) + lg(t)) = \int_a^b (kf(t) + lg(t))dt$$

$$= \int_a^b kf(t)dt + \int_a^b lg(t)dt$$

$$= k \int_a^b f(t)dt + l \int_a^b g(t)dt$$

$$= k \int_a^b f(t)dt + l \int_a^b g(t)dt$$

$$= k(Jf(t)) + l(Jg(t))$$

因此,求积分是 $P_n$ 的一个线性变换。

# 习题

#### 1.1.10

假定  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$  是  $\mathbb{R}^3$  的一个基,试求由

$$oldsymbol{y}_1 = oldsymbol{x}_1 - 2oldsymbol{x}_2 + 3oldsymbol{x}_3, \; oldsymbol{y}_2 = 2oldsymbol{x}_1 + 3oldsymbol{x}_2 + 2oldsymbol{x}_3, \; oldsymbol{y}_3 = 4oldsymbol{x}_1 + 13oldsymbol{x}_2$$

生成的子空间  $L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$  的基。

### 解答

给定的  $y_1, y_2, y_3$  可以表示为:

$$oldsymbol{y}_1 = egin{bmatrix} 1 \ -2 \ 3 \end{bmatrix}, \; oldsymbol{y}_2 = egin{bmatrix} 2 \ 3 \ 2 \end{bmatrix}, \; oldsymbol{y}_3 = egin{bmatrix} 4 \ 13 \ 0 \end{bmatrix}$$

组成一个矩阵 A:

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \ -2 & 3 & 13 \ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

通过行简化阶梯形,得到了以下矩阵:

$$RREF(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, $L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$  的一个基是  $[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2]$ 。

# 1.1.12

# 解答

- 1. 设  ${m A}=(a_{ij})_{2\times 2}$ , ${m B}=(b_{ij})_{2\times 2}$ ,则  ${m A}+{m B}=(a_{ij}+b_{ij})_{2\times 2}$ ,满足  $a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}=0$ ,则  ${m A}+{m B}\in V$ ,同理可得  $k{m A}\in V$  和  $O_{2\times 2}\in V$ ,因此 V 是  $\mathbb{R}^{2\times 2}$  的子空间。
- 2. 取一组线性无关矩阵  $m{A}_1 = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & -1 \end{bmatrix}, m{A}_2 = egin{bmatrix} 0 & 1 \ 0 & 0 \end{bmatrix}, m{A}_3 = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ m{M} \ m{A} = a_{11} m{A}_1 + a_{12} m{A}_2 + a_{21} m{A}_3, \ \ m{B}$ 此  $V = L(m{A}_1, m{A}_2, m{A}_3)$ ,所以  $\dim V = 3$ 。

#### 1.2.1

# 解答

- 1. 存在二次方项, 因此不是线性变换。
- 2. 满足两条性质,是线性变换。
- 3. 满足两条性质,是线性变换。