第十三次作业

2022211363 谢牧航

定义

4.1

如果方阵 A 可以分解成一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积，即 A 可作**三角分解**或 LU (或 LR) 分解。如果方阵 A 可分解成 $A=LDU$，其中 L 是单位下三角矩阵，D 是对角矩阵，U 是单位上三角矩阵，则称 A 可以 LDU 分解。

4.2

设矩阵 A 有唯一的 LDU 分解。若把 $A=LDU$ 中的 D 和 U 结合起来，并且用 $\hat{U}$ 表示，就得到唯一的分解为

$$A=L(DU)=\hat{U}$$

称为 A 的 **Doolittle 分解**；若把 $A=LDU$ 中的 L 和 D 结合起来，并且用 $\hat{L}$ 表示，就得到唯一的分解为

$$A=(LD)U=\hat{L}U$$

称为 A 的 **Crout 分解**。

4.3

设 A 为实对称正定矩阵，$\Delta_k > 0(k=1,2,\cdots,n)$，于是 A 有唯一的 LDU 分解，即 $A=LDU$，其中 $D=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，$\Delta_k>0(k=1,2,\ldots,n)$。于是 A 有唯一的 LDU 分解，即 $A=LDU$，其中 $D=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，$d_i>0(i=1,2,\ldots,n)$。令

$$\widetilde{D}=\operatorname{diag}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\ldots,\sqrt{d_n})$$

则有 $A=L\widetilde{D}^2U$。由 $A^T=A$ 得到 $L\widetilde{D}^2U=U^T\widetilde{D}^2L^T$，再由分解的唯一性有 $L=U^T$，$U=L^T$，于是

$$A=L\widetilde{D}^2L^T=LDL^T$$

或者

$$A=L\widetilde{D}^2L^T=(\widetilde{L}\widetilde{D})(\widetilde{D}L^T)=GG^T$$

这里 $G=L\widetilde{D}$ 是下三角矩阵，称为实对称正定矩阵的 **Cholesky 分解**(平方根分解或对称三角分解)。

例题

4.1

求 A 的 LDU 分解，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

矩阵的 $\Delta_1=2, \Delta_2=5$，所以 A 有唯一的 LDU 分解。构造矩阵:

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算, 得

$$L_1^{-1}A^{(0)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}=A^{(1)}$$

对 $A^{(1)}$ 构造矩阵，得

$$L_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

计算, 得

$$L_2^{-1}A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{5}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}=A^{(2)}$$

可求出

$$L=L_1L_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$

于是根据 $A^{(0)}=A$ 的 LDU 分解为

$$A=L_1L_2A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{5}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4.2

求矩阵 A 的 Cholesky 分解，其中

$$A=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

解 矩阵分解式是对称正定矩阵。由构造递推式可以得到如下

$$g_{11}=\sqrt{a_{11}}=\sqrt{5}$$

$$g_{21}=\frac{a_{21}}{g_{11}}=\frac{-2}{\sqrt{5}},\quad g_{22}=\sqrt{a_{22}-g_{21}^2}=\sqrt{\frac{11}{5}}$$

$$g_{31}=\frac{a_{31}}{g_{11}}=0,\quad g_{32}=\frac{a_{32}-g_{31}g_{21}}{g_{22}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

$$g_{33}=\sqrt{a_{33}-g_{31}^2-g_{32}^2}=\sqrt{1-\frac{5}{11}}=\sqrt{\frac{6}{11}}$$

从而

$$
A=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{11}{5}} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} & \sqrt{\frac{6}{11}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{11}{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{6}{11}}\end{bmatrix}
$$

习题

4.1.1

求矩阵 A 的 LDU 分解和 Doolittle 分解，其中

$$
A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ -4 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}
$$

解:

$$
\Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=1>0,\quad \Delta_3=5>0,\quad \Delta_4=2>0
$$

所以 A 有唯一的 LDU 分解。

构造矩阵

$$
L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0\\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},L_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0\\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

所以

$$
L_1^{-1}A^{(0)}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=A^{(1)}
$$

构造矩阵

$$
L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix},L_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

所以

$$L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

构造矩阵

$$L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$L_3^{-1}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{(3)}$$

所以

$$L = L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

于是根据 $A^{(0)} = A$ 的 LDU 分解为

$$A = L_1L_2L_3A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Doolittle 分解:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = A^{(3)}$$

所以

$$A = L(DU) = L\hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

4.1.2

求对称正定矩阵 A 的 Cholesky 分解，其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

解:

首先进行 LDU 分解

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = 1 > 0$$

所以 A 有唯一的 LDU 分解。

构造矩阵

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$L_1^{-1} A^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

构造矩阵

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$L_2^{-1} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

所以

$$L=L_1L_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{bmatrix}$$

于是根据 $A^{(0)}=A$ 的 LDU 分解为

$$A=L_1L_2A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\ 0&\frac{1}{5}&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\ 0&1&-2\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

下面求 Cholesky 分解

$$\widetilde{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,d_3)=\mathrm{diag}(\sqrt{5},\sqrt{\frac{1}{5}},1)$$

所以

$$G=L\widetilde{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\ 0&\sqrt{\frac{1}{5}}&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\ \frac{-4}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&1\end{bmatrix},G^T=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-4}{\sqrt{5}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$A=GG^T=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\ \frac{-4}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-4}{\sqrt{5}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$