第七次作业

2022211363 谢牧航

定义

1.22

对于定义域为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V, 对于 V 中任二向量:

对于 x, y, 按某规则定义一个实数, 若 (x, y) 用 (x, y) 表示，且它满足以下四个条件:

1. 交换律：$(x, y) = (y, x)$;
2. 分配律：$(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;
3. 齐次性：$(kx, y) = k(x, y)$ ($\forall k \in \mathbb{R}$);
4. 正定性：$(x, x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $(x, x) = 0$.

则称 V 为 Euclid 空间, 简称欧氏空间或实内积空间。

1.28

设 V 为欧氏空间, T 是 V 的一个线性变换, 如果 T 保持 V 中任意向量 x 的长度不变, 即有

$$(x, x) = (Tx, Tx)$$

那么称 T 是 V 的一个正交变换。

1.29

如果实方阵 A 满足 $A^T A = I$, 那么称 A 为正交矩阵。

容易证明 A 是正交矩阵的充要条件它的列向量是两两正交的单位向量。

1.30

设 T 是欧氏空间 V 的一个线性变换, 且对 V 中任意向量 x, y 有

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

那么称 T 是 V 的一个对称变换。

定理

1.33

对于欧氏空间 V^n 的任一基 $x_1, x_2, ..., x_n$, 都可以找到一个标准正交基 $y_1, y_2, ..., y_n$。换言之, 任一个非零欧氏空间都有正交基和标准正交基。

1.36

线性变换 T 为正交变换的充要条件是，对于欧氏空间 V 中任意向量 x, y 有

$$(Tx, Ty) = (x, y)$$

1.38

欧氏空间的线性变换是实对称变换的充要条件是，它对于标准正交基的矩阵是实对称矩阵。

例题

1.33

设欧氏空间 $x_1 = (1,1,0,0)$, $x_2 = (1,0,1,0)$, $x_3 = (-1,0,0,1)$, $x_4 = (1,-1,-1,1)$ 正交化后化简.

解：先进行正交化处理, 可得

$$\begin{aligned}
y_1' &= x_1 = (1,1,0,0) \\
y_2' &= x_2 - \frac{(x_2, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \\
y_3' &= x_3 - \frac{(x_3, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' - \frac{(x_3, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\
y_4' &= x_4 - \frac{(x_4, y_3')}{(y_3', y_3')} y_3' - \frac{(x_4, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' - \frac{(x_4, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' = (1,-1,-1,1)
\end{aligned}$$

再单位化处理, 得到

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{|y_1'|} y_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \\
y_2 &= \frac{1}{|y_2'|} y_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) \\
y_3 &= \frac{1}{|y_3'|} y_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right) \\
y_4 &= \frac{1}{|y_4'|} y_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

习题

1.3.2

设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是线性空间 V^n 的基, 且给定 $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$, $y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n$ 对应于双线性 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} i \xi_i \eta_i$。试问 V^n 是否是欧氏空间。

解：

1. 交换律：$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} i\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n} i\eta_i\xi_i=(y,x)$;
2. 分配律：$(x,y+z)=\sum_{i=1}^{n} i\xi_i(\eta_i+\zeta_i)=\sum_{i=1}^{n} i\xi_i\eta_i+\sum_{i=1}^{n} i\xi_i\zeta_i=(x,y)+(x,z)$;
3. 齐次性：$(kx,y)=\sum_{i=1}^{n} i(k\xi_i)\eta_i=k\sum_{i=1}^{n} i\xi_i\eta_i=k(x,y)$;
4. 正定性：$(x,x)=\sum_{i=1}^{n} i\xi_i\xi_i\geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时, $(x,x)=0$.

所以 V^n 是欧氏空间。

1.3.5

设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 是属于空间 $\mathbb{V}^5$ 的一个标准正交基。$V_1=L(y_1,y_2,y_3)$，其中

$$y_1=x_1+x_5, y_2=x_1-x_2+x_4, y_3=2x_1+x_2+x_3,$$

求 V_1 的一个标准正交基。

解：

正交化：

$$\begin{aligned}
&y_1'=y_1=x_1+x_5\\
&y_2'=y_2-\frac{(y_2,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=x_1-x_2+x_4-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_5=\frac{1}{2}x_1-x_2+x_4-\frac{1}{2}x_5\\
&y_3'=y_3-\frac{(y_3,y_2')}{(y_2',y_2')}y_2'-\frac{(y_3,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'\\
&\quad=2x_1+x_2+x_3-\frac{(2x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_5)}{2}(x_1+x_5)-\frac{(2x_1+x_2+x_3)\cdot(\frac{1}{2}x_1-x_2+x_4-\frac{1}{2}x_5)}{\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}x_1-x_2+x_4-\frac{1}{2}x_5)\\
&\quad=x_1+x_2+x_3-x_5
\end{aligned}$$

单位化：

$$\begin{aligned}
y_1&=\frac{1}{|y_1'|}y_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_5)\\
y_2&=\frac{1}{|y_2'|}y_2'=\frac{1}{\sqrt{10}}(x_1-2x_2+2x_4-x_5)\\
y_3&=\frac{1}{|y_3'|}y_3'=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3-x_5)
\end{aligned}$$