第二周作业

2022211363 谢牧航

定义

1.10

设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使对任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$，V 中都有唯一的向量 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**。记为

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 T 下的**象**，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**（或**象源**）。

1.11

如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有下列性质：

$$T(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=k(T\boldsymbol{x})+l(T\boldsymbol{y})$$

其中，$k,l\in K$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，则称 T 为 V 的一个**线性变换**或**线性算子**。

例题

1.10

在线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中的所有向量均绕原点顺（或逆）时针旋转 θ 角的变换，就是一个线性变换。求这个线性变换。

解答

以逆时针为例

$$\frac{x'}{r}=\cos(\theta_0+\theta)=\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta=\frac{x}{r}\cos\theta-\frac{y}{r}\sin\theta$$
$$\frac{y'}{r}=\sin(\theta_0+\theta)=\sin\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta=\frac{y}{r}\cos\theta+\frac{x}{r}\sin\theta$$

整理得到

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$

$$y'=y\cos\theta+x\sin\theta$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

因此

$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

1.11

在线性空间 P_n 中，求微分是一个线性变换。为什么?

解答

设

$$Df(t) = f'(t)$$

对于任意的 $f(t), g(t) \in P_n$，$k, l \in K$，有

$$\begin{aligned} D(kf(t) + lg(t)) &= (kf(t) + lg(t))' \\ &= kf'(t) + lg'(t) \\ &= k(Df(t)) + l(Dg(t)) \end{aligned}$$

因此，D 是 P_n 的一个线性变换。

1.12

在线性空间 P_n 中，求积分是一个线性变换。为什么?

解答

对于任意的 $f(t), g(t) \in P_n$，$k, l \in K$，有

$$\begin{aligned} J(kf(t) + lg(t)) &= \int_a^b (kf(t) + lg(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b kf(t)\mathrm{d}t + \int_a^b lg(t)\mathrm{d}t \\ &= k\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + l\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \\ &= k\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + l\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \\ &= k(Jf(t)) + l(Jg(t)) \end{aligned}$$

因此，求积分是 P_n 的一个线性变换。

习题

1.1.10

假定 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，试求由

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{y}_2 = 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{y}_3 = 4\boldsymbol{x}_1 + 13\boldsymbol{x}_2$$

生成的子空间 $L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$ 的基。

解答

给定的 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

组成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

通过行简化阶梯形，得到了以下矩阵：

$$\mathrm{RREF}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，$L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$ 的一个基是 $[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]$。

1.1.12

解答

1. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{2\times 2}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{2\times 2}$，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{2\times 2}$，满足 $a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} = 0$，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in V$，同理可得 $k\boldsymbol{A} \in V$ 和 $O_{2\times 2} \in V$，因此 V 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。
2. 取一组线性无关矩阵 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} = a_{11}\boldsymbol{A}_1 + a_{12}\boldsymbol{A}_2 + a_{21}\boldsymbol{A}_3$，因此 $V = L(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$，所以 $\dim V = 3$。

1.2.1

解答

1. 存在二次方项，因此不是线性变换。
2. 满足两条性质，是线性变换。
3. 满足两条性质，是线性变换。