第十一次作业

2022211363 谢牧航

定义

3.1

设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$, 其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$ 当 $k\to\infty$ 时, 称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛,或称矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\{A^{(k)}\}$ 的极限, 或称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A, 记为

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A或A^{(k)}\to A$$

不收敛的矩阵序列称为**发散**。

3.2

矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 称为**有界**的, 如果存在常数 $M > 0$, 使得对一切 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

3.3

设 A 为方阵, 且 $A^k \to O\ (k \to \infty)$, 则称 A 为**收敛矩阵**。

3.4

把定义 3.1 中的矩阵序列所形成的无穷和 $A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots$ 称为**矩阵级数**，记为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots$$

3.5

记 $S^{(N)} = \sum\limits_{k=0}^{N} A^{(k)}$，称其为级数和的部分和。如果矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$ 收敛，且有极限 S，则有

$$\lim_{N \to \infty} S^{(N)} = S$$

那么就称矩阵级数式收敛，而且有和为 S，记为

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$$

不收敛的矩阵级数称为发散的。

3.6

如果 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k))} = s_{ij}$，如果式左端 mn 个数项级数都是绝对收敛的，则称矩阵级数式是**绝对收敛**的。

定理

3.1

设 $A^{(k)} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则

1. $A^{(k)} \to O$ 的充要条件是 $\|A^{(k)}\| \to 0$;
2. $A^{(k)} \to A$ 的充要条件是 $\|A^{(k)} - A\| \to 0$.

这里，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的任何一种矩阵范数。

3.2

A 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A) < 1$。

3.3

A 为收敛矩阵的充分条件是只要有一种矩阵范数使得 $\|A\| < 1$。

3.5

设方阵 A 对某一种矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A\| < 1$，则对任何非负整数 N，以 $(I-A)^{-1}$ 为部分和 $I + A + A^2 + \ldots + A^N$ 的近似矩阵时，其误差为

$$\|(I-A)^{-1} - (I + A + A^2 + \ldots + A^N)\| \le \frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$$

3.6

设幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

的收敛半径为 r，如果方阵 A 的谱半径 $\rho(A) < r$，则相应矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

是绝对收敛的; 如果 $\rho(A) > r$，则矩阵幂级数式是发散的。

例题

3.1

判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}$ 是否为收敛矩阵。

注：矩阵 A 的 1-范数为 $\|A\|_1=0.9$，因此 A 是收敛矩阵。

3.2

研究矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 的收敛性，其中

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3\times 4^k}\\ 0 & \frac{1}{k(k+1)}\end{bmatrix}\quad (k=1,2,\ldots)$$

$$S^{(N)}=\sum_{k=1}^{N} A^{(k)}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k} & \sum\limits_{k=1}^{N}\frac{\pi}{3\times 4^k}\\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\left(\frac{1}{2}\right)^N & \frac{\pi}{9}1-\left(\frac{1}{4}\right)^N\\ 0 & \frac{N}{N+1}\end{bmatrix}$$

所以

$$S=\lim_{N\to\infty} S^{(N)}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\pi}{9}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

习题

3.1.2

设 $A=\begin{bmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{bmatrix}$ $(c\in\mathbb{R})$，讨论 c 为何值时，A 为收敛矩阵。

解：A 的谱半径为 $\rho(A)=2|c|$，因此 $-\frac{1}{2}<c<\frac{1}{2}$ 时，A 为收敛矩阵。

3.2.1

计算得到谱半径 $\rho(A) = 1$，因此 A 不是收敛矩阵。

3.2.3

(1) 求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$，$\rho(A) = 2$。由于级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ 的收敛半径为 $r = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)^2}{k^2} = 1$。

由于 $\rho(A) = 2 > r$，所以矩阵幂级数发散。

(2) 求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$，所以 $\rho(B) = 5$。

级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} z^k$ 的收敛半径为 $r = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k6^{k+1}}{(k+1)6^k} = 6$。

由于 $\rho(B) < r$，所以矩阵幂级数绝对收敛。

3.2.4

由于收敛，可得 $\lim\limits_{k\to\infty} S^{(k)} = S$，于是有

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \left(S^{(k)} - S^{(k-1)}\right) = O$$