- 第六次作业
  - 定义
    - 1.21
  - 定理
    - 1.29
    - 1.30
  - 例题
    - 1.28
    - P36
    - 1.28
  - 习题
    - 1.2.16
    - 1.2.19

第六次作业

2022211363 谢牧航

定义

1.21

矩阵 J 称为矩阵 A 的 Jordan 标准形，$J(\lambda i)$ 称为主元 $(\lambda-\lambda i)^{mi}$ 的 Jordan 块。

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix}$$

定理

1.29

设 A 是 n 阶复矩阵，且其特征多项式的某种分解式是 $\varphi(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{mi}$，则存在 n 阶复矩阵 P，使

$$P^{-1}AP = J$$

1.30

每个 n 阶复矩阵 A 都与一个 Jordan 标准形相似，这个 Jordan 标准形除去其中 Jordan 块的排列次序外是被 A 唯一确定的。

例题

1.28

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

解:

设 λ 是 A 的特征值，那么 $\det(A - \lambda I) = 0$

则矩阵 $\lambda I - A$ 为

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

所求初等因子组为 $\lambda - 2, (\lambda - 1)^2$

矩阵 A 的 Jordan 标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P36

解:

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$ 的初等变换。

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda\\ -2\lambda & 0 & \lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & \lambda-1\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

所以，A 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-2$。

故 A 的标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

1.28

对于 1.26，

$$\begin{aligned}(2I-A)x_1&=0\\ (I-A)x_2&=0\\ (I-A)x_3&=-x_2\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}x_1&=(0,0,1)^{\mathrm{T}}\\ x_2&=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}\\ x_3&=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

得矩阵 P

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

对于 1.27，

$$\begin{aligned}(I-A)x_1&=0\\(I-A)x_2&=-x_1\\(I-A)x_3&=-x_2\\(I-A)x_4&=-x_3\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}x_1&=(8,0,0,0)^{\mathrm{T}}\\x_2&=(4,4,0,0)^{\mathrm{T}}\\x_3&=(0,-1,2,0)^{\mathrm{T}}\\x_4&=(0,1,-2,1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

得矩阵 P

$$P=\begin{bmatrix}8 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

习题

1.2.16

解：

(1)

给定的矩阵 A 是：

$$A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -4\\ 4 & -8 & -1\\ -4 & -1 & -8\end{bmatrix}$$

则

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-7 & -4 & 4\\ -4 & \lambda+8 & 1\\ 4 & 1 & \lambda+8\end{bmatrix}$$

求 $\det(\lambda I-A)$ 得特征多项式

$$p(\lambda)=\lambda^3+9\lambda^2-81\lambda-729$$

分解得到

$$(\lambda-9)(\lambda+9)^2$$

所以最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-9)(\lambda+9)$

(2)

给定的矩阵 A 是:

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1\\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0\end{bmatrix}$$

求 $\det(\lambda I-A)$ 得特征多项式

$$p(\lambda)=\lambda^4-4a_0\lambda^3+(6a_0^2+2a_1^2+2a_2^2+2a_3^2)\lambda^2-4a_0(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda$$
$$+a_0^4+2a_0^2a_1^2+a_1^4+2a_0^2a_2^2+2a_1^2a_2^2+a_2^4+2a_0^2a_3^2+2a_1^2a_3^2+2a_2^2a_3^2+a_3^4$$

分解得到 $p(\lambda)=[\lambda^2-2a_0\lambda+(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)]^2$

则最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-a_0)^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$

1.2.19

19. 求下列各矩阵的 Jordan 标准形:

(1)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解:

(1)

求得初等因子组为 $(\lambda-2),(\lambda+1),(\lambda-1)$

所以 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

求得初等因子组为 $(\lambda^2+1),(\lambda+2)$

所以 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(3)

求得初等因子为 $(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$

所以 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$