الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(x';y')$ بحيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

حالات خاصة:

✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

✳ $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

✳ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

2. تعامد شعاعين

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \vec{0}}$$

3. قواعد الحساب

أ) خواص الجداء السلمي:

❶ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; ❷ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$; ❸ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

ب) المتطابقات الشهيرة:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'}$

✳ إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ و $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على (AB)فإن:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}}$$

حالات خاصة:

✳ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$

✳ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$

5. تطبيقات الجداء السلمي

أ) في المستقيم:

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

شعاع التوجيه: $\boxed{\vec{v}(-b;a)}$; $\boxed{\vec{v}\binom{-b}{a}}$

الشعاع الناظمي: $\boxed{\vec{n}(a;b)}$; $\boxed{\vec{n}\binom{a}{b}}$

✳ **ملاحظة:** يكون الشعاع الناظمي دائما عمودي على شعاع التوجيه $\boxed{\vec{n} \perp \vec{v}}$ أي $\boxed{\vec{n}.\vec{v} = \vec{0}}$

ب) في الدائرة:

❶ معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0;y_0)$ و نصف قطرها r هي $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$

❷ الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}}$

✳ **ملاحظة:** لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و العكس غير صحيح.

6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

ABC مثلث مساحته S و نصف محيطه p أي $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$

أ) مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان و I منتصف $[AB]$ من أجل كل نقطة M لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) مبرهنة الكاشي

❶ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

❷ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

❸ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

ج) مبرهنة المساحة

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

د) قاعدة هيرون

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ه) مبرهنة الجيوب

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0;y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

8. دساتير الجمع

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos 2a=\boxed{\cos^2 a-sin^2 a}=\boxed{2\cos^2 a-1}=\boxed{1-2sin^2 a}$$

$$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

إضافة: $\cos\widehat{A}=1+\frac{2p(p-a)}{bc}$; $\cos\widehat{A}=1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$