Chapitre 3

Chapitre 3 : Introduction aux systèmes formels

L'expression " système formel " se compose de deux mots :

- **Système :** qui est défini comme étant un ensemble d'éléments matériels ou non dépendant les uns des autres de manière à former un tout cohérent et organisé,
- **Formel :** c'est-à-dire qui porte principalement sur la forme et ne tient pas compte du contenu.

3.1 Définition

Les systèmes Axiomatico-Déductifs ou systèmes formels (SF) fournissent un cadre général pour exprimer et étudier de façon rigoureuse et mathématique les notions d'axiomatique et de mécanismes déductifs.

Un système formel est donc un procédé mécanique de construction des phrases d'un langage, une entité idéale qui engendre sous forme de *théorèmes* toutes les conséquences qui découlent selon des critères déterminés (règles) d'un ensemble de propositions initiales considérées comme vérités premières (axiomes). Les expressions qui figurent dans un système formel n'ont aucun sens et résultent des possibilités opératoires précisées dans les règles de maniement du système. Lorsqu'on construit un système formel c'est en général avec l'intention de représenter dans ce système une théorie non formalisée. le but de la formalisation est alors de permettre une étude précise et systématique des aspects structuraux des théories scientifiques.

3.2 Composants

Un système formel S est composé d'un quadruplet :

- Un ensemble fini et dénombrable de symboles appelé alphabet,
- Un sous ensemble récursif W de l'ensemble de suites finies de S appelé " Ensemble de formules bien formées " construites à partir de l'alphabet,
- Un sous ensemble A de W appelé ensemble d'axiomes,
- Un ensemble fini R de règles (dites encore règles d'inférence, de déduction ou de dérivation) telle que R = $\{R_1, R_2, ..., R_n\}$

Notion de démonstration : Établir une démonstration dans S revient à trouver une suite finie de fbf, f_1, f_2,...., f_k telle que f_i (sachant que $1 \leqslant i \leqslant k$) est soit un axiome de S, soit une fbf obtenue d'une autre fbf par application d'une règle d'inférence R.

Notion de théorème : Une formule d'un système formel est dite un *théorème* si c'est un axiome, ou bien si la formule est obtenue par application d'une règle d'inférence à un théorème.

Une preuve d'un système formel est une suite de formules qui sont soit des axiomes, soit des formules déduites des formules précédentes.

Soient f_1, f_2,...., f_k et g des fbf, on note f_1, f_2,...., $f_k \vdash$ g et on lira qu'à partir des formules f_1, f_2,...., f_k on peut déduire la formule g.

Exemple : Soit le système PEU avec :

- L'alphabet S = $\{p, e, u\}$,
- W est l'ensemble des fbf formée à partir de l'alphabet (suite de p,e,u),
- L'ensemble des axiomes A = $\{upueuu\}$,
- Les règles d'inférence sont définies comme suit :
  - R_1 : si une expression de la forme AeB est un théorème $\Longrightarrow$ uAeBu est un théorème
  - R_2 : si une expression de la forme AeB est un théorème $\Longrightarrow$ AueuB est un théorème.

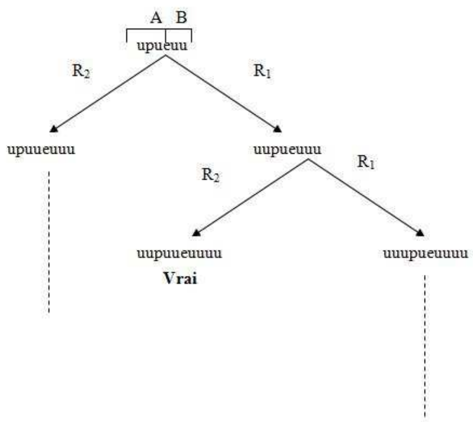
Questions

Q1 : Est ce que uupuueuuuu est un théorème ?

Q2 : Est ce que upupueuuu est un théorème ?

Solutions

Q1 : On peut démontrer que uupuueuuuu est un théorème en construisant l'arbre de dérivation.



Q2 : upupueuuu n'est pas un théorème, car un théorème ne peut pas contenir plus d'un symbole p et on peut démontrer ça par récurrence.

Le raisonnement par récurrence : Les raisonnements en mathématique se font généralement par dérivation ou par déduction comme par exemple dans la Q1. Mais il existe aussi un autre type de raisonnement, que l'on appelle raisonnement par récurrence, particulièrement adapté lorsqu'il est demandé de prouver des propriétés portant sur n paramètres. Par exemple, essayant de démontrer l'égalité suivante :

1+2+3+4+....+n = $\frac{(n)(n+1)}{2}$ quelque soit le nombre n, bien sur Gauss était astucieux car il a pu démontrer cette formule en se basant sur la somme des n premiers nombres entiers positifs.

S_n = 1 + 2 + 3 + 4 +....+(n-1) + n

S_n = n + (n-1) + (n-2)+ (n-3) +....+ 2 + 1

Si on fait la somme colonne par colonne, on trouve :

$2S_n$ = (n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1) = n(n+1) d'où la formule $S_n = \frac{(n)(n+1)}{2}$

On peut aussi se rabattre sur le raisonnement par récurrence pour prouver cette formule et il y a deux démonstrations à faire :

- Montrer que la formule est vraie pour n = 1, en effet 1 = (1.2)/2
- On suppose que la formule est vraie à un certain rang n puis on montre qu'elle reste vraie au rang suivant.

Si on prend par exemple S_{n+1} = 1+2+3+4+....+n+(n+1)= S_n + (n+1) = $\frac{(n)(n+1)}{2}$ +(n+1), la formule étant supposée vraie au rang n. Il reste à factoriser et à réduire au même dénominateur cela donne à la fin $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ qui est la formule au rang n+1.

Ces deux démonstrations étant faites, nous pouvons affirmer que la propriété est vraie pour tout rang n.
Revenant maintenant à la question 2 (Q2) pour démontrer que upupueuuu n'est pas un théorème, on prend l'axiome du système qui est le upueuu on remarque qu'il existe uniquement un seul p alors que le mot proposé "upupueuuu" contient deux p. Passant maintenant au rang 1 selon l'arbre de dérivation on constate qu'il y a toujours un seul p dans les deux mots générés et ainsi de suite sachant que le passage d'un rang à un autre se fait à base des deux règles R_1 et R_2.

3.3 Les propriétés d'un système formel

La propriété de consistance Un système formel est consistant (c'est-à-dire non contradictoire) si on ne peut pas prouver à la fois que A est un théorème et son contraire aussi ($\vdash$ A et $\vdash \neg$ A) ou bien $\vdash$ A et $\neg \vdash$ A. Un système non consistant est dit inconsistant.

La propriété de complétude Un système formel est dit complet s'il fournit une stratégie permettant d'atteindre la solution si celle-ci existe. C'est-à-dire , il a la capacité de pouvoir prouver tous les théorèmes valides.

La propriété de décidabilité On dit qu'un système formel est décidable s'il existe une procédure mécanique permettant d'établir en un temps fini si un mot du langage est ou n'est pas un théorème.

La saturation d'un système formel Un SF est saturé si et seulement si en ajoutant une formule f qui n'est pas un théorème, le SF devient inconsistant.

3.4 Exercices

Exercice 1
1. Définissez un système formel de telle sorte qu'on puisse produire les théorèmes kst, kstst, ksststst,........ à partir d'un axiome k.

2. Définissez un système formel de telle sorte que l'on puisse produire les théorèmes ca, caba, cababa, cabababa, cababababa,..., etc.L'axiome est c.

3. Définissez un systeme formel de telle sorte que l'on puisse produire les théorèmes b, ba, baa, baaa, baaaa,...,etc. L'axiome est b.

Exercice 2 Soit le système MIU qui comprend :
- L'alphabet S = $\{M, I, U\}$
- L'axiome A = $\{MI\}$
- les règles :
  - R_1 : si une chaine se termine par un I on peut ajouter un U à la fin,
  - R_2 : si on a une chaine Mx on peut former Mxx (où x est une chaine quelconque),
  - R_3 : on peut remplacer III par un U dans une chaine,
  - R_4 : on peut supprimer toute paire UU.

1. Prouver que MUIUI est un théorème.
2. UM est-il un théorème ?
3. MU est-il un théorème ?

Exercice 3 Soit le système formel p-q
S= $\{p, /, q\}$ A= $\{pq\}$ R =
- a- $x \rightarrow /x/$
- b- $xpy \rightarrow xp/y/$ (x et y sont des mots du système)

Peut-on dériver les chaines suivante : $//p/q///$;$/p//q/$;$//////p///q/////////$?

Exercice 4 Soit un système formel composé :
d'un alphabet $\{A, B, C, D\}$,
Des axiomes D, DD,
des règles de production :

- a- ajouter C à la fin d'une chaîne quelconque.
- b- ajouter un A au début et à la fin d'une chaîne quelconque.
- c- remplacer un C par un B dans une chaîne.

Parmi les chaînes suivantes, lesquelles sont des théorèmes ? Donner les preuves
DC, DCCC, DCCA, AAADAAA, AAADAAAA, AADCCCABBA.

Exercice 5 Soit le système formel S (Σ, A, W, R) tel que :

- Σ : c'est l'ensemble de l'alphabet tel que $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- A : c'est l'ensemble des axiomes qui ont la forme suivantes A $= \{a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1\}$,
- W : représente l'ensemble des fbfs générées à partir des axiomes et des fbfs déjà générées,
- R : c'est l'ensemble des règles tel que R $= \{r_1 : (a^k bc^m, a^p bc^n) \longrightarrow a^{k+n}bc^{m+p}\}$

Q1 : Est ce que les formules suivantes sont des théorèmes $a^4bc^4, a^5bc^5, a^6bc^6$?

Q2 : Donner les différentes formes possibles de théorèmes.