TD 3: Méthode Simplexe

Exercice 1

1) Résoudre le PL suivant en utilisant l'algorithme du simplexe:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 3x_1 & +2x_2 & & \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq 5 \\
 & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq 0
\end{array}
$$

2) Donner une illustration graphique.

Exercice 2

Résoudre les PL suivant en utilisant l'algorithme du simplexe:

1)

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 5x_1 & +x_2 & +6x_3 & +2x_4 & \\
 & 4x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq 44 \\
 & 8x_1 & +6x_2 & +4x_3 & +3x_4 & \leq 36 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

2)

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +x_4 & \\
 & x_1 & +3x_2 & & +x_4 & \leq 4 \\
 & 2x_1 & +x_2 & & & \leq 3 \\
 & & x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

3)

$$
\begin{array}{lllll}
\max & x_1 & -2x_2 & +x_3 & \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 12 \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & +3x_2 & & \leq 9 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

4)

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\
 & x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq 10 \\
 & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leq 10 \\
 & x_1 & -3x_2 & +x_3 & \leq 10 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

5)

$$
\begin{array}{llll}
\min & 2x_1 & -x_2 & \\
 & x_1 & -3x_2 & \geq -3 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \geq -2 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\
 & 3x_1 & -2x_2 & \leq 6
\end{array}
$$

Exercice 3

Soit le PL:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 2x_1 & +x_2 & +6x_3 & -4x_4 & \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -x_4 & \leq 6 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 12 \\
 & x_1 & & +x_3 & +x_4 & \leq 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

1) Trouver une solution de base réalisable avec comme variables de base x_1, x_2, x_4.

2) Est-ce une solution optimale ? Si non, l'utiliser comme solution initiale en appliquant l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale.

Exercice 4

Résoudre le PL suivant en débutant avec la solution de base réalisable de coordonnées $(x_1 = 0, x_2 = 2)$:

$$
\begin{array}{llll}
\max & 2x_1 & -x_2 & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & = 6 \\
 & x_1 & -2x_2 & \leq 0 \\
 & x_1, & x_2, & \geq 0
\end{array}
$$

Exercice 5

Soit le PL:

$$
\begin{array}{lllllll}
\max z = & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +10x_4 & +3x_5 & \\
 & 7x_1 & +3x_2 & +10x_3 & +5x_4 & +8x_5 & = 37 \\
 & 7x_1 & +4x_2 & +7x_3 & +8x_4 & +6x_5 & = 26 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Soit B la matrice formée des colonnes 1 et 3 de la matrice des contraintes.

1) Vérifier que B est une base. Est-ce une base réalisable?

2) Écrire le PL sous forme canonique par rapport à cette base.

Exercice 6

On considère le programme linéaire suivant :

Max Z = 25 x1 + 20 x2

$$
\text{Sc} \quad \left\{
\begin{array}{l}
3x1 + x2 \leq 60 \\
x1 + 2x2 \leq 70 \\
x1 + x2 \leq 100 \\
X1 \geq 0 , x2 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Résoudre ce programme linéaire par la méthode du simplexe tableaux.

Exercice 7

On considère le programme linéaire suivant:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sc} \begin{cases} -x_1 + x_2 \geq -1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ X_1 - 3x_2 \geq 2 \\ X_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre ce programme en utilisant la méthode des pénalités.

Exercice 8

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{Sc} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre ce programme par la méthode des deux phases.

Exercice 9

Déterminer toutes les solutions optimales du PL:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +4x_4 & \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq 5 \\ & x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$