Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Introduction

En mathématiques, on nous touvons de différents ensembles comme par exemple : l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (en arithmétique), des rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$ (en analyse ou en géométrie), l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$, Pour chaque définition ou résultat qui sera énoncé dans ce chapitre, il faudra toujours essayer d'imaginer de nombreuses situations concrètes dans chacun des ensembles précédents (et dans d'autres. . .). L'étude de la théorie des ensembles (ainsi que l'étude de la logique mathématique) s'est développée à la fin du XIXe siècle et au début du XXe et les notations que l'on utilise aujourd'hui ($A \cap B, x \in E, P \Rightarrow Q$...) datent la plupart du temps de cette époque. Ce sont, dans un premier temps, les progrès réalisés dans la théorie de l'intégration qui ont conduit la communauté mathématique à s'intéresser à ces notions. Les deux grands noms de l'étude de la théorie des ensembles et de la logique mathématique sont (*Georg Ferdinand Ludwig Philipp*) *Cantor* (1845-1918) pour les ensembles et (Kurt) *Gödel* (1906-1978) pour la logique. En mathématiques, nous avons besoin d'un vocabulaire simple mais efficace, des notations de base ainsi que d'un certain nombre de raisonnements types qui seront ensuite utilisés par la suite dans tous les autres chapitres.

2.2 Ensembles

Définition 2.2.1 (Ensembles et éléments)

Un ensemble est *une collection d'objets*, où chaque objet de cette collectionest est appelés *éléments d'ensemble.* On notera, en général, les éléments par les lettres minuscule x, y, z.... et un ensemble par une lettre majuscule E, F,....
Il y a principalement deux façons de définir un ensemble :

1- **En extension** s'il est constitué d'un nombre fini d'éléments distincts

Exemple 1

a- $E = \{0, 1, 2\}$

b- $E = \{0, 1, \square, \clubsuit\}$.

2- En compréhension s'il est constitué d'un nombre infini d'éléments ou même fini si on donne pas la liste de ces éléments mais juste leurs propriétés.

Exemple 2

a- $E = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 1\} =]1, 3[$

b- Un ensemble formé d'un seul élément est appelé singleton : Par exemple

$$F = \{n \in \mathbb{N} / \ -1 < n < 1\} = \{0\}.$$

c- Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\varnothing$, qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 2.2.2 (Ensemble fini)

On dit qu'un ensemble E est fini lorsque le nombre des éléments qui le composent est fini. Le nombre des éléments de E est appélé cardinal de E. On le note $card(E)$.

Définition 2.2.3

On dit qu'un ensemble E est fini lorsque le $card(E)$ est un entier naturel (fini).

Exemple 3

$E = \{0, 1, 2\}$ est ensemble fini et le $card(E) = 3$.

Définition 2.2.4

On dit qu'un ensemble E est infini s'il n'est pas fini

Exemple 4

a- $E = \mathbb{R}$ est ensemble infini

b- L'ensemble $F = [0, 1]$ est ensemble infini.

Remarque 1

Par convention le cardinale de l'ensemble égale à zéro, c-à-d : $card(\varnothing) = 0$.

Définition 2.2. 5

Soit E un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de l'ensemble E. Dans le cas contraire on écrit $x \notin E$.

2.3 Sous ensemble

2.3.1 L'inclusion

Définition 2.3.1

Nous dirons qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E si tout élément de A appartient à E, on note

$$A \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in E)$$

et dans ce cas dit aussi que A est **une partie** ou **sous ensemble** de E.

Mais dans le cas contraire, on dit

$$A \text{ n'est pas inclus dans } E \Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge x \notin E).$$

Exemple 5.

1- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2- $\mathbb{Z}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$ car : $\exists x = -1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$

3- Nous admettons l'existence d'un ensemble noté $\varnothing$, appelé ensemble vide, qui ne contient aucun élément. Alors, pour chaque ensemble E on a : $\varnothing \subset E$ et aussi $E \subset E$.

Proposition 2.3.2

1-On dit qu'un ensemble E est fini son cardinale est fini, c'est à dire si $card(\varnothing) < \infty$

2- Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Si $A \subset B$, alors on a : $card(A) < card(B)$.

Définition 2.3.3 (ensembles égaux)

On dit que l'ensemble E est **égal** à l'ensemble F, et on note $E = F$, si on a $E \subset F$ et $F \subset E$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **distincts** et on note $E \neq F$.

Exemple

On considère les trois ensembles finis de $\mathbb{R}$ suivants : $A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq 1\}$, $B = [0, 2]$, $C = [0.2[$. Alors, on a :

$$A = B, \ A \neq C, \ B \neq C \text{ et } C \subset B.$$

Définition 2.3.4 (Parties d'ensembles)

Nous admettrons que pour tous ensemble E, il existe un nouvel ensemble appelé ensemble des parties de E, noté $P(E)$, et dont les éléments sont tous les sous-ensembles de E, y compris l'ensemble vide et E lui-même. Ainsi

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Exemple

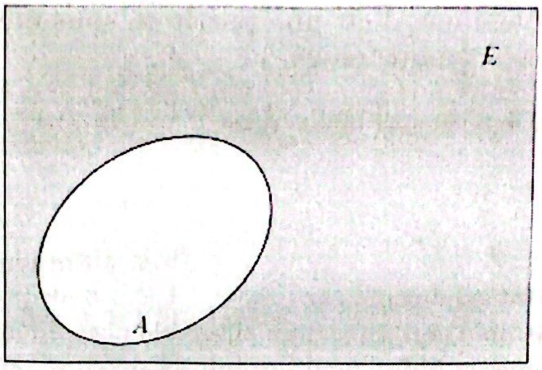
Soit $E = \{0, 1, 2\}$, alors $P(E) = \{\varnothing, E, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$.

Proposition 2.3.5

Soit E un ensemble finis, si $card(E) = n$, alors $card(P(E)) = 2^n$.

Définition 2.3.6 (Complémentaire d'un ensemble)

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



On note le complémentaire de A dans E par

$$C_E A = \{x : x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

Exemple

Soient les ensembles suivants : $E = \left\{-1, 2, \sqrt{5}, 6\right\}$, $F = \{-1, 2\}$ et $G = \{6\}$. Alors on a :

$$C_E F = \left\{\sqrt{5}, 6\right\} \text{ et } C_E G = \left\{-1, 2, \sqrt{5}\right\}.$$

Proposition 3.2.7

Soit E un ensemble et A et B deux sous ensemble de E, alors on a les égalités suivantes sont évidentes :

$$C_E (C_E A) = A,\ C_E E = \emptyset \text{ et } C_E \emptyset = E,$$

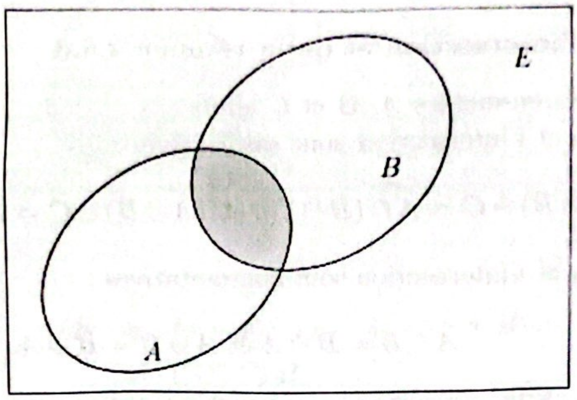
et de même, si $A \subset B$, on a :

$$C_E B \subset C_E A.$$

2.4 INTERSECTION ET RÉUNION DE DEUX ENSEMBLES

Définition 2.4.1

On appelle intersection de deux ensembles A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in A$ et $x \in B$.



On a donc,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

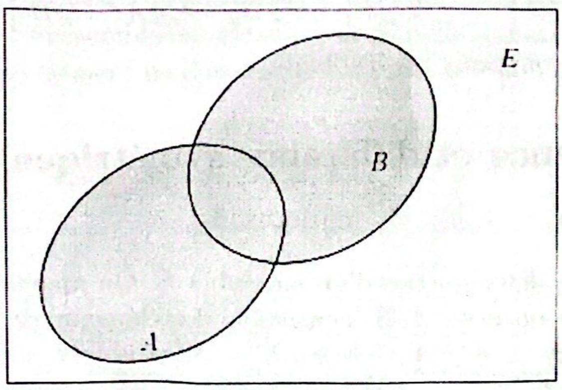
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjoints.

Définition 2.4.2

Soit E un ensemble, on dit qu'un élément $x \notin A \cap B$ si $x \notin A$ **ou** $x \notin B$.

Définition 2.4.3

On appelle réunion de deux ensembles A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in A$ ou $x \in B$.



On a donc,

$$A \cup B = x : \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Il est évident que

$$A \cup \varnothing = E \text{ et si } A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \text{ et } B = \varnothing.$$

$C_A \cup A = E$

Définition 2.4.4

Soit E un ensemble, on dit qu'un élément $x \notin A \cup B$ si $x \notin A$ et $x \notin G$.

Propriétés de l'intersection et de la réunion 2.4.3

Soit donnés les ensembles A, B et C, alors
1- La réunion et l'intersection sont associatives :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ et } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

2- La réunion et l'intersection sont commutatives :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

3- La réunion et l'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre :

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$
$$\boxed{F \cap (G \cup H) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

4- La réunion et l'intersection sont idempotentes :

$$\boxed{A \cup A = A \text{ et } A \cap A = A.}$$

Théorème 2.4.4 (Lois de Morgan)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors on a les égalités suivantes :

$$\boxed{1- C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B}$$

et

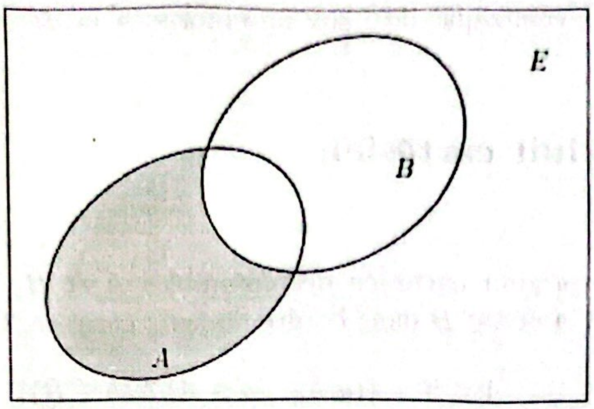
$$\boxed{2- C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B}$$

Preuve : Devoir pour les étudiants.

2.5 Différence et différence symétrique

Définition 2.5.1

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence de A et de B dans cet ordre, et on note A/B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A mais pas à B.



On note

$$\begin{aligned} A/B &= \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \\ &= (A \cap C_E B) \end{aligned}$$

Exemple

Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}$, $A = [-1, 2]$ et $B = [0, 3]$, alors on a :

$$A/B = [-1,\ 0[\text{ et } B/A =]2,\ 3].$$

Remarque

D'après cet exemple, on voit bien que la différence des ensembles n'est pas commutative.

2.5.1 Différence symétrique

Définition 2.5.2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A \Delta B$, l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B. le «ou» est exclusif c-à-d qu'un élément ne doit pas appartenir à F et à G simultanément. On a alors :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A/B) \cup (B/A) \\ &= (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A). \end{aligned}$$

Exemple

Soient les ensembles suivants : $E = \mathbb{Z}$, $A = \{-1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{-2, -1, 5, 7\}$. Alors, l'ensemble $B \Delta A = \{-2\}$.

Remarque

La différence symétrique de deux ensembles A et B est commutative, c-à-d : $A \triangle B = B \triangle A$.

2.6 Le produit cartésien

Définition 2.6.1

On appelle le produit cartésien des ensembles A et B, l'ensemble des éléments (a, b), tels que $a \in A$ et $b \in B$ dans l'ordre de leurs écriture. On le note par

$$A \times B = \{(a, b)/ \ (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Le système ordonné (a, b) s'appelle un couple ou a est la 1ère composante, b est la 2ième composante du couple (a, b).

Exemple

Soient l'ensembles $A = \{0, 1, 2\}$ et l'ensemble $B = \{4, 5\}$. Déterminons l'ensemble $A \times B$. Alors,

$$A \times B = \{(0,4), \ (0,5), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5)\}$$

Remarque

En général le produit cartésien n'est pas commutatif, c-à-d : $A \times B \neq B \times A$. Si on prend l'exemple précédent on a :

$$(0,4) \in A \times B \text{ mais } (0,4) \notin B \times A.$$