

Chapitre 1

Notions fondamentales en théorie des graphes

1.1 Introduction

La notion de graphe et les problèmes liés aux graphes peuvent être rencontrés dans diverses situations de la vie réelle ainsi que dans des problèmes d'ingénierie, notamment en informatique. Les graphes sont à la fois un moyen de modélisation et un moyen de raisonnement sur de nombreux problèmes.

La *topologie* du graphe, ou la disposition des entités et des liens, permet d'induire plusieurs propriétés intéressantes. Pour illustrer cela, nous allons prendre quelques exemples introductifs.

Exemple 1 : modélisation d'un réseau d'amis

Dans la vie quotidienne, on est ami avec une ou plusieurs personnes qui, à leur tour, peuvent être des amis à d'autres personnes, et ainsi de suite. Les réseaux sociaux, par exemple, favorisent la formation de communautés et la mise en place de normes pour le partage des données. Il est intéressant de noter (et cela peut être démontré par la théorie des graphes) que dans n'importe quel ensemble de groupes d'amis, il y a toujours au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis.

Exemple 2 : modélisation d'un réseau routier

Un réseau routier est constitué d'un ensemble de villes reliées par des routes. La visualisation d'un tel réseau est utile si l'on veut retrouver son chemin lorsqu'on est perdu, ou si l'on veut trouver le plus court chemin entre deux villes. La théorie des graphes permet de construire des chemins intéressants comme celui qui passe une seule fois par chaque ville ou celui qui passe une seule fois par chaque route.

Exemple 3 : modélisation d'un réseau de télécommunication

Un réseau informatique est composé d'un ensemble de machines (des ordinateurs, des hubs, des switches, des routeurs, des répéteurs, etc.), ainsi que de liaisons physiques (câbles métalliques, fibres optiques, ondes radio, etc.). Un routeur permet d'acheminer un paquet vers la bonne sortie afin que ce dernier puisse retrouver son chemin vers sa destination. En particulier, on peut s'intéresser au chemin optimal dans le réseau (en termes de temps de transmission, d'énergie utilisée, de nombre de sauts, etc.) ainsi que le débit maximum du réseau afin d'éviter des situations agaçantes comme la congestion du réseau.

Exemple 4 : modélisation de la résolution d'un problème

En intelligence artificielle, la résolution d'un problème consiste à déterminer une séquence d'actions permettant de passer d'une situation initiale à une situation but. Chaque action appliquée permet de passer d'une situation à une autre. Ceci crée une sorte de liens entre les différentes situations du problème. En recherchant un chemin basé sur ces liens, on arrive alors à résoudre le problème.

Exemple 5 : modélisation de programmes

Lorsqu'on apprend la programmation, on définit un programme (en particulier dans le cas d'un langage impératif comme le langage C) comme étant une succession d'actions. On utilise souvent la métaphore d'une recette de cuisine pour illustrer cela.

Il est, toutefois, possible de considérer un programme sous un angle différent. Chaque action du programme change les valeurs des variables en leur attribuant de nouvelles valeurs. Le terme "état" est utilisé pour décrire les valeurs des variables d'un programme. Une instruction est alors vue comme un lien entre deux états, et tout le programme est considéré comme étant un ensemble de liens entre différents états. Ceci permet, par exemple, de repérer les cycles dans un programme (ce qui correspond à des boucles infinies) et de raisonner sur le comportement d'un programme (ce que l'on appelle la sémantique d'un programme).

Ces exemples (et bien d'autres) illustrent la notion de graphes et leur intérêt dans le monde réel. Nous allons donner une série de définitions et de propriétés des graphes permettant de répondre à des questions de la vie réelle.

D'une manière informelle, on peut définir un graphe par une représentation figurative où l'on retrouve un ensemble de points (appelés *nœuds* ou *sommets*) reliés par un ensemble de courbes droites ou non. Ces liens représentent généralement une relation ou une dépendance entre les sommets. Ils sont appelés des *arêtes* si la relation est symétrique (on parle de graphe non-orienté), ou des *arcs* sinon (on parle de graphe orienté).

1.2 Les graphes non-orientés

1.2.1 Définitions générales et propriétés

Un graphe non-orienté est défini par une paire (X, E) où X est l'ensemble de sommets et E est un ensemble d'arêtes (en d'autres termes, c'est un ensemble de liens entre les sommets de X). Un lien est représenté par une paire (s, t) avec $s, t \in X$ mais l'ordre n'est pas important ici. De plus, un lien peut figurer plusieurs fois. Les sommets sont généralement nommés, mais on peut être ramené à nommer les arêtes aussi. Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une *boucle*.

La figure 1.1 montre le schéma d'un graphe dont les sommets sont $\{a, b, c, d, e\}$ et les arêtes sont $\{A = (a, b), B = (a, c), C = (b, b), E = (c, d), F = (c, d), G = (d, e), H = (b, d)\}$. La figure 1.2 montre un graphe dont les sommets sont $\{p, q, r, s\}$ et les arêtes sont $\{U = (p, r), V = (p, q), X = (p, s), Y = (q, s), Z = (r, s)\}$.

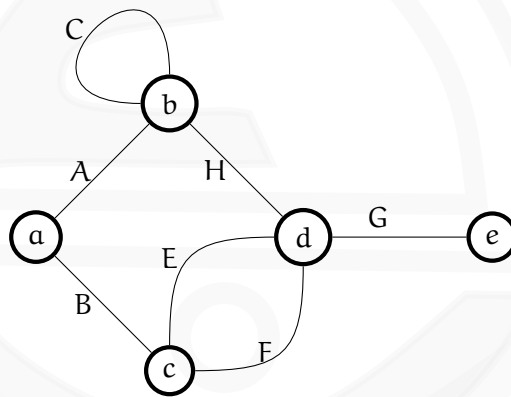


Figure 1.1 : exemple d'un multi-graphe

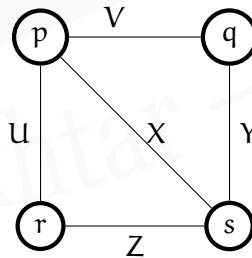


Figure 1.2 : exemple d'un graphe simple

Remarque : le dessin d'un graphe n'est pas caractéristique, plusieurs schémas géométriques du même graphe peuvent être dessinés. Une arête peut être rectiligne ou une courbe. Si on peut tracer un graphe sans que deux arêtes ne s'entrecroisent, alors on dit qu'il est *planaire*.

Si une arête A part d'un sommet x , on dit que A est incidente à x . Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents. Lorsque deux arêtes ont un sommet en commun, on dit aussi qu'elles sont adjacentes. Dans la figure 1.1, les sommets a et b sont adjacents et les arêtes A et B sont adjacentes.

Souvent, on associe une information à une arête, on l'appelle alors la valeur de l'arête (on peut utiliser aussi le terme *étiquette* ou parfois le terme *poids*). Un graphe possédant des valeurs aux arêtes est appelé *graphe valué*.

1.2.2 L'ordre et les degrés d'un graphe

Le nombre de sommets d'un graphe G est dit l'ordre du graphe, on le note par $\text{ordre}(G)$. Le nombre d'arêtes d'un graphe est appelé la taille du graphe, on le note par $\text{taille}(G)$.

Soit un sommet x d'un graphe G , on note par $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x et on l'appelle le degré du sommet x . Le degré d'un graphe est égal au degré maximal des degrés de ses sommets (noté $d(G)$).

Dans le graphe de la figure 1.3, l'ordre du graphe est 7. Les degrés des sommets sont donnés par le tableau suivant :

Sommet	a	b	c	d	e	f	g
Degré ($d_G(x)$)	4	2	2	3	2	1	0

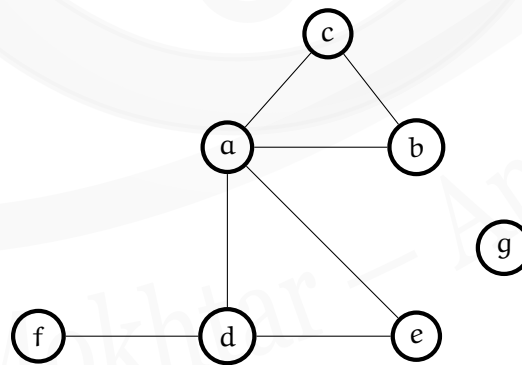


Figure 1.3 : des exemples de types de sommets (g est isolé, et f est pendent)

Le degré de ce graphe est donc égal à 4 (le degré de a). Le sommet g est dit un sommet *isolé* (son degré est 0), le sommet f est dit *pendant* (son degré est 1). Notons que la somme des degrés des sommets est paire. Elle est même égale au double du nombre d'arêtes. Ceci n'est pas une propriété spécifique de ce graphe, comme le laisse voir le théorème suivant :

Théorème 1

Pour tout graphe $G = (X, E)$, l'égalité $\sum_{s \in X} d(s) = 2 \times \text{taille}(G)$ est satisfaite. La somme des degrés des sommets d'un graphe est, par conséquent, toujours paire.

Proposition 1

Une application directe de ce théorème implique que le nombre de sommets ayant un degré impair d'un graphe est pair.

On peut maintenant facilement répondre à la question suivante : peut-on trouver un groupe de cinq personnes tel que chaque personne est amie avec exactement trois autres ?

Un graphe est dit *régulier* si tous ces sommets ont le même degré. Si ce degré est k , alors le graphe est dit k -régulier. On peut constater que si un graphe est k -régulier et k est impair, alors le graphe contient un nombre pair de sommets.

1.2.3 Terminologie pour quelques types particuliers de graphes

Il existe des types particuliers de graphes selon la topologie des arêtes. Ces types peuvent avoir des propriétés spécifiques.

Multi-graphe

Dans un multi-graphe, plusieurs liens peuvent exister entre deux sommets. Il est également possible d'avoir des boucles.

►►► Le graphe de la figure 1.1 est un multi-graphe.

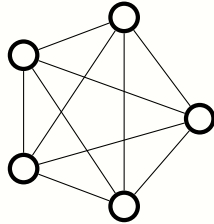
Graphe simple

Dans un graphe simple, il ne peut y avoir qu'un seul lien (au plus) entre deux sommets. De plus, il n'y a pas de boucle. Un graphe simple possède la propriété suivante : il existe toujours deux sommets ayant le même degré.

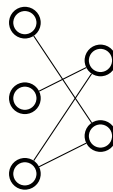
►►► Le graphe de la figure 1.2 est un graphe simple.

Graphe complet

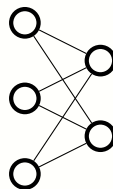
Un graphe simple est dit complet si chaque sommet est relié à tout autre sommet. Le graphe complet contenant n sommets est noté K_n . La taille du graphe K_n est $n(n-1)/2$. Il s'agit aussi d'un graphe régulier (il est $(n-1)$ -régulier).

**Graphe biparti**

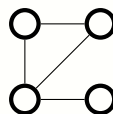
Les sommets d'un graphe biparti peuvent être divisés en deux ensembles disjoints X et Y tels que les arêtes relient un sommet de X à un sommet de Y (il n'y a pas d'arêtes entre les sommets du même ensemble).

**Graphe biparti complet**

Dans un graphe biparti, si tout sommet de X est relié à tout sommet de Y , on dit qu'il est biparti complet. Il est noté par $K_{m,n}$ où m est le nombre de sommets de X et n est le nombre de sommets de Y . La taille du graphe $K_{m,n}$ est $m \times n$. Ce graphe ne peut être régulier que si $m = n$.

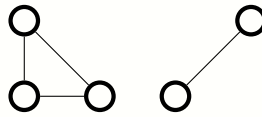
**Graphe connexe**

Un graphe connexe est un graphe qui permet de partir de n'importe quel sommet pour rejoindre n'importe quel autre sommet en suivant une ou plusieurs arêtes.



Graphe non-connexe

C'est un graphe ayant au moins un sommet ne permettant pas de rejoindre au moins un autre sommet.



Les graphes bipartis sont utilisés pour modéliser des problèmes d'affectation entre les éléments d'un ensemble de sources et les éléments d'un ensemble de destination. Par exemple, le premier ensemble peut correspondre à des tâches tandis que le deuxième peut correspondre à des ressources nécessaires pour effectuer ces tâches. Les arêtes décrivent alors les possibilités d'affectation.

1.2.4 Graphes planaires

L'appellation initiale des graphes vient du fait qu'on les dessine. Leurs propriétés géométriques peuvent alors être utilisées pour modéliser des contraintes structurelles, notamment dans un espace à deux dimensions. Un graphe *planaire* a la particularité d'être clair lorsqu'on le dessine. On entend ici la propriété suivante : en le dessinant, on ne peut pas trouver deux arêtes s'entrecoupant à part aux sommets. Il est important de comprendre ce que l'on entend par *dessiner* les arêtes : le dessin d'une arête peut se faire par n'importe quelle courbe continue, qu'elle soit rectiligne ou non.

Les graphes planaires ont plusieurs applications. Par exemple, on peut les utiliser pour concevoir des circuits imprimés où les liaisons électriques ne doivent pas s'entrecouper. Pour les applications informatiques, les graphes planaires sont plus simples à visualiser sur un écran. En évitant les chevauchements des arêtes, ils évitent aux humains d'apercevoir de faux sommets.

Prenons un exemple : le graphe de la figure 1.4 est dessiné avec deux arêtes s'entrecoupant en un point. On peut, cependant, le redessiner selon la figure 1.5 sans aucune intersection entre les arêtes. Il s'agit donc d'un graphe planaire.

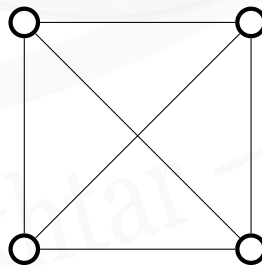


Figure 1.4 : dessin du graphe avec deux arêtes s'entrecoupant

Dans un graphe planaire, on appelle *face* une région du plan limitée par les arêtes, telle que deux points arbitraires peuvent être reliés par une arête ne rencontrant ni sommet ni arête. Dans la figure 1.5, le graphe possède 4 faces : 3 de surface finie (A, B et C) et une de surface infinie (D). Les frontières d'une face sont l'ensemble des arêtes qui l'entourent. On définit le *degré d'une face* par le nombre d'arêtes qui la limitent. Ainsi, dans le graphe de la figure 1.5, toutes les faces ont un degré égal à trois.

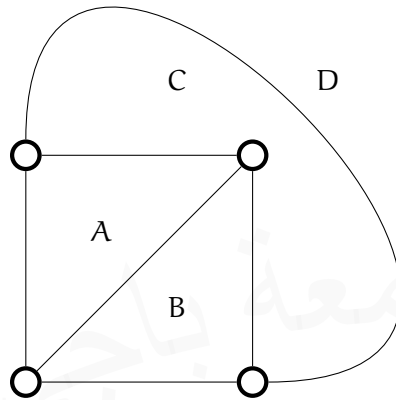


Figure 1.5 : le même graphe mais sans chevauchement

On peut donner deux théorèmes concernant les graphes planaires :

Théorème 2

La somme des degrés des faces d'un graphe planaire est égale au double de sa taille.

Théorème 3

(dit de planarité) Dans un graphe G , soient S l'ordre du graphe, A sa taille et R nombre de ses faces. Si G est planaire alors $S - A + R = 2$. Cette formule n'a de sens que si le graphe est planaire.

On peut vérifier ces propriétés pour le graphe de la figure 1.5 :

1. La taille du graphe est 6, la somme des degrés des faces est $3+3+3+3=12$. Vérifiée.
2. $S=4$, $A=6$ et $R=4$: $4-6+4=2$. Vérifiée.

On peut utiliser le dernier théorème pour prouver que le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire. En effet, l'ordre de ce graphe est 6, et sa taille est de 9. S'il est planaire, il devrait contenir un nombre de faces $R = 2 + A - S = 2 + 9 - 6 = 5$. Si on exclut la face externe, il reste alors quatre faces F_1, F_2, F_3 et F_4 (F_5 désigne la face externe qui a forcément un degré supérieur ou égal à 3). Soient X l'ensemble des sommets à gauche et Y l'ensemble des sommets à droite. Si on prend un sommet de X , la région correspondante se construit en rajoutant un sommet de Y , puis un autre de X (différent du premier) et ensuite un autre de Y qui nous permet de revenir vers le premier sommet. Donc une région doit avoir un degré minimal de 4. En utilisant le premier théorème, on a alors :

$$\sum_{i=1}^5 d(F_i) = 18$$

or d'après notre raisonnement, on devrait avoir :

$$\sum_{i=1}^5 d(F_i) \geq 4 \times 4 + 3 = 19$$

Contradiction ! Donc, le graphe n'est pas planaire.

On peut aussi montrer que le graphe K_5 n'est pas planaire. **Il est évident de noter que si un graphe contient un autre graphe non-planaire alors le premier n'est pas planaire non plus.**

Les deux autres types de graphes que l'on étudiera nécessitent de définir la notion de circuits, elle-même basée sur les chaînes et les chemins très importants en théorie des graphes.

La figure 1.6 donne un exemple d'un autre graphe non-planaire.

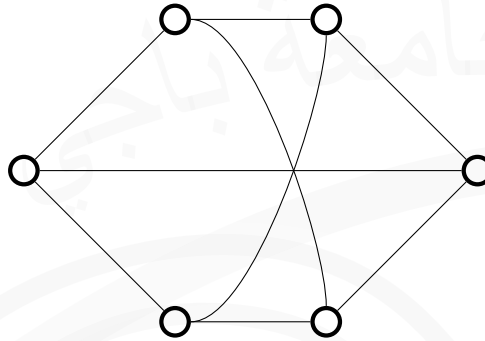


Figure 1.6 : un graphe non planaire

1.2.5 Les chaînes, les cycles et cocycles

Dans un graphe G , une *chaîne* du sommet x_0 vers le sommet x_k est une séquence de sommets x_0, x_1, \dots, x_k telle le sommet x_{i-1} est relié par une arête au sommet x_i pour tout $i = 1..k$. Les chaînes x_0, x_1, \dots, x_k et $x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0$ (obtenue en inversant l'ordre des sommets de la chaîne) sont identiques.

Remarque : cette définition n'est pas très précise. En fait, elle est seulement valable pour les graphes simples. Pour les multi-graphes, on doit également indiquer les arêtes par lesquelles on passe d'un sommet à un autre.

Dans le graphe de la figure 1.7, on peut voir en gras la chaîne b, a, d, f (équivalente à f, d, a, b). Notons aussi que la suite b, a, c, b, a, d, f est également une chaîne bien que certains sommets apparaissent plusieurs fois. Pour les différencier, on dit d'une chaîne qu'elle est *élémentaire* si aucun sommet ne peut figurer plus qu'une fois dans la chaîne.

On peut également définir une chaîne *simple* comme étant une chaîne dans laquelle une arête figure au plus une fois. Par exemple, la chaîne a, c, b, a, d, f est simple mais pas élémentaire.

Une chaîne dont le sommet initial et final sont identiques est dite *fermée*. Si, de surcroît, elle est simple, alors on dit qu'elle forme un *cycle*. Dans la figure 1.7, les cycles sont a, b, c, a et a, e, d, a .

Pour un graphe $G = (X, E)$, on considère un ensemble de sommets $W \subseteq X$. Un *cocycle* est l'ensemble des arêtes ayant un sommet dans W et un autre dans $X - W$. De cette façon, si on enlève le cocycle d'un ensemble W , alors on isole ses sommets du reste du graphe. Dans le graphe de la figure 1.7, si on prend $W = \{a, e, d\}$ alors son cocycle est $\{(a, c), (a, b), (f, d)\}$.

Les chaînes permettent de définir des mesures utiles pour un graphe. On définit, d'abord, la

longueur d'une chaîne par le nombre d'arêtes qui la composent. La longueur de la chaîne b, a, d, f est 3. La distance entre deux sommets est égale à la longueur minimale des chaînes qui les relient. Par exemple, la distance entre b et d est de 2. Enfin, on appelle *diamètre* d'un graphe la distance maximale entre deux sommets quelconques (comparez cela avec le diamètre d'un disque). Le diamètre du graphe considéré ici est alors de 3.

Les longueurs et les cycles nous donnent un théorème intéressant caractérisant les graphes bipartis. Il permet par exemple de montrer que le graphe de la figure 1.7 n'est pas biparti.

Théorème 4

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

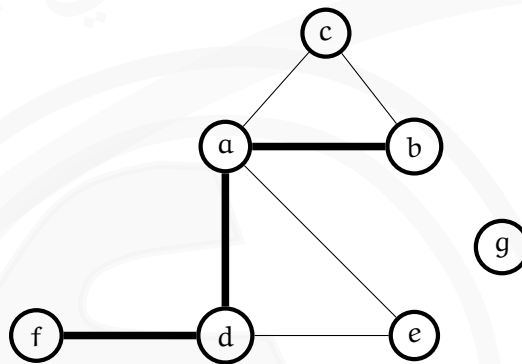


Figure 1.7 : exemple de chaîne : b, a, d, f

1.2.6 Graphe eulérien

Dans un graphe G , on appelle *cycle eulérien* un cycle passant une seule fois par toutes les arêtes du graphe. Le graphe est alors dit *eulérien*. On peut également définir un graphe eulérien par un graphe que l'on peut tracer (c'est-à-dire tracer toutes ses arêtes) sans lever la main et sans passer deux fois par la même arête. Attention, pour parler de cycle eulérien, il faut que le sommet de départ soit le même que le sommet final (sinon, c'est une chaîne eulérienne seulement comme expliqué ci-bas).

Une chaîne est dite *eulérienne* si elle permet de passer une seule fois par toutes les arêtes du graphe (elle n'est pas fermée). Si un graphe non-eulérien possède une chaîne eulérienne, alors on dit qu'il est *semi-eulérien*.

L'appellation "eulérien" provient d'un problème célèbre concernant la ville dite à l'époque Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) et ses ponts. La carte des ponts de cette ville est donnée par la figure 1.8. Le graphe correspondant est donné par la figure 1.9. Le problème consiste à passer par chacun des ponts de la ville une seule fois. Euler était le premier à résoudre ce problème.

Euler a même démontré un théorème donnant des critères nécessaires et suffisants pour qu'un graphe soit eulérien.

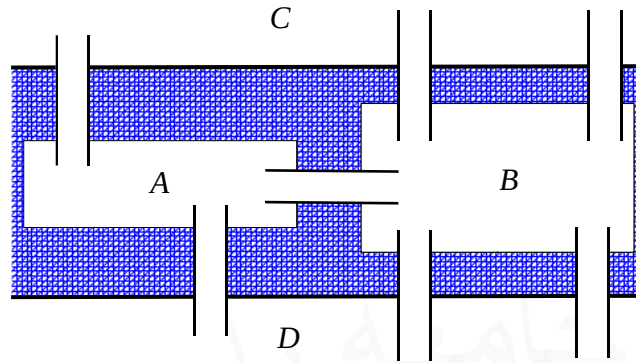


Figure 1.8 : carte des cours d'eau et des ponts de Königsberg

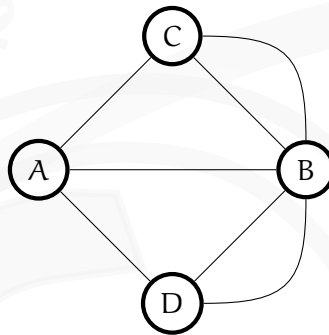


Figure 1.9 : le graphe correspondant au problème de Königsberg

Théorème 5

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Ainsi, le graphe de la figure 1.9 n'est pas semi-eulérien car il possède trois sommets ayant des degrés impairs (A a un degré de 3, C a un degré de 3 et D a un degré de 3). Évidemment, il ne peut pas être eulérien.

Considérons maintenant le problème de l'enveloppe montré par la figure 1.10. Dans ce graphe, les sommets (a, b et c) ont un degré pair, mais les sommets d et e ont un degré impair. En vertu du théorème précédent, le graphe est semi-eulérien, mais il n'est pas eulérien. Une chaîne eulérienne est alors : d, a, c, b, e, a, b, d, e.

La construction d'une chaîne eulérienne peut se faire selon plusieurs algorithmes, l'un d'eux est l'algorithme de Fleury, qui nécessite bien sûr que le graphe soit au moins semi-eulérien.

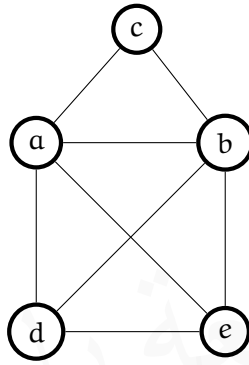


Figure 1.10 : problème de l'enveloppe

Algorithme de Fleury

- 1 **si** le graphe est eulérien **alors**
- 2 | commencer par n'importe quel sommet
- 3 **sinon**
- 4 | commencer par un sommet dont le degré est impair.
- 5 choisir le prochain sommet en fonction des arêtes incidentes non encore visitées. Si l'on doit choisir entre un pont et un non-pont alors on choisit un non-pont. Un pont est une arête telle que si elle est supprimée, certaines parties du graphe ne seront plus accessibles. Lorsqu'une arête est sélectionnée, alors elle est enlevée du graphe.
- 6 s'arrêter lorsqu'il n'y a plus d'arêtes.

Pour décider si une arête est un pont ou non, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme pour décider si une arête (u, v) est un pont

- 1 **si** il y a un seul sommet adjacent à u (qui est v) **alors**
- 2 | ce n'est pas un pont
- 3 **sinon**
- 4 | calculer le nombre de sommets accessibles depuis u , soit le nombre a
- 5 | enlever l'arête (u, v) puis calculer le nombre de sommets accessibles depuis u , soit le nombre b
- 6 **si** $a > b$ **alors**
- 7 | c'est un pont
- 8 **sinon**
- 9 | ce n'est pas un pont

1.2.7 Graphe hamiltonien

Dans un graphe G , on appelle cycle *hamiltonien* un cycle passant une seule fois par chacun des sommets de G . Si un tel cycle existe, alors le graphe est dit *hamiltonien*.

Une chaîne est dite *hamiltonienne* si elle permet de passer une seule fois par chacun des sommets du graphe. Si un graphe non-hamiltonien contient une chaîne hamiltonienne, alors on dit qu'il est *semi-hamiltonien*.

Les graphes hamiltoniens possèdent beaucoup d'applications. On les retrouve notamment dans le problème du voyageur de commerce où un commerçant doit visiter toutes les villes d'un certain réseau une seule fois tout en minimisant le coût des déplacements.

Il n'existe pas de propriété simple pour un graphe hamiltonien ou semi-hamiltonien. Mais on peut déjà dire que :

- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
- Si, dans un graphe, un sommet est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Il existe deux théorèmes (en fait un théorème et son application directe) permettant de définir des conditions suffisantes (et pas nécessaires) d'un graphe hamiltonien.

Théorème 6

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire (x, y) de sommets non adjacents, on a : $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

On peut dériver une autre caractéristique (plus forte mais plus simple à vérifier) pour un graphe hamiltonien : pour $n > 3$, si pour sommet x on a $d(x) \geq n/2$ alors le graphe est hamiltonien.

Si on applique cela au graphe de la figure 1.10, on aura le tableau suivant (en jaune, ce sont les seuls cas où les sommets ne sont pas adjacents). Étant donné que l'ordre du graphe est 5, il est alors hamiltonien.

Sommet	$a(d(a) = 4)$	$b(d(b) = 4)$	$c(d(c) = 2)$	$\underline{d}(d(\underline{d}) = 3)$	$e(d(e) = 3)$
a					
b					
c				$d(c) + d(\underline{d}) = 5$	$d(c) + d(e) = 5$
<u>d</u>					
e					

1.2.8 Graphe partiel et sous-graphe

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On appelle *graphe partiel* le graphe $G' = (X, E')$ tel que $E' \subset E$. En d'autres termes, on enlève quelques arêtes de E .

Soit $A \subset X$ un ensemble de sommets. On appelle *sous-graphe* induit par A le graphe $(A, E(A))$

dont les sommets appartiennent à A , les arêtes sont celles de A ayant les deux extrémités en A .

On appelle *clique*, d'un graphe G , un sous-graphe complet de G . Parmi toutes les cliques, la clique maximale (celle ayant le plus de sommets) possède des propriétés intéressantes pour certains algorithmes notamment dans la coloration. La figure 1.11 donne un graphe avec ses cliques. Il existe deux cliques ici, l'une (en jaune) a un ordre de 3, l'autre (maximale) est d'ordre 4.

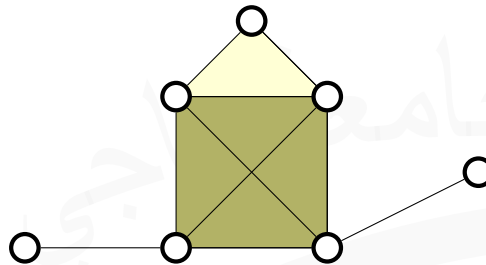


Figure 1.11 : un graphe avec ses cliques

Comme exemples des sous-graphes et graphes partiels, on considère la carte des villes et routes en Algérie. Un sous-graphe serait une vue d'une région ou d'une wilaya avec toutes leurs routes. Un graphe partiel peut correspondre à la vue des routes nationales uniquement.

À partir de la notion des sous-graphes, on peut aussi définir la notion des composantes connexes. Une composante connexe est un sous-graphe qui est connexe et maximal (en termes d'ordre). Le graphe utilisé pour définir la notion du "graphe non-connexe" (en section 1.2.3) possède deux composantes connexes. Un graphe connexe contient une seule composante connexe.

Un *stable* d'un graphe est un ensemble de sommets n'ayant aucune arête entre eux (pris deux à deux). Par exemple, pour un graphe biparti tel que les sommets d'un ensemble X sont reliés aux sommets de l'ensemble Y , ces deux ensembles sont alors des stables. La cardinalité du plus grand stable d'un graphe G est appelée le nombre de stabilité de G (et on le note $\alpha(G)$). Le nombre de stabilité du graphe de la figure 1.11 est de 3.

1.2.9 Autres opérations sur les graphes

En plus des opérations mentionnées précédemment, plusieurs autres peuvent être définies. Chacune a un intérêt particulier dans la théorie des graphes.

Graphe complémentaire

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Le graphe complémentaire de G est un graphe dont les sommets sont X tels qu'une arête relie le sommet x et y s'ils n'étaient pas déjà reliés dans le graphe G . Intuitivement, si les arêtes représentent une relation entre les sommets, alors le graphe complémentaire représente la négation de cette relation. La figure 1.12 donne le graphe complémentaire de la figure 1.10.

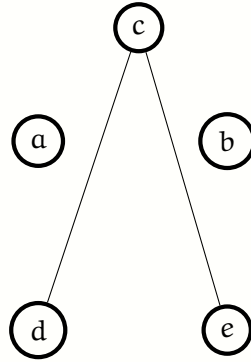


Figure 1.12 : le graphe complémentaire du graphe de la figure 1.10

Graphe dual

Le graphe dual est construit à partir d'un graphe planaire. En effet, lorsqu'on construit les faces d'un graphe planaire, on considère chaque face comme un sommet du graphe dual, et chaque arête frontière comme étant une arête du graphe dual. La figure 1.13 donne un graphe et son dual (tracé en rouge). Si on applique la transformation une deuxième fois au dernier, on obtient le premier graphe. La forme duale permet, par exemple, de passer de la notion d'un cycle dans un graphe à la notion de cocycle en graphe dual.

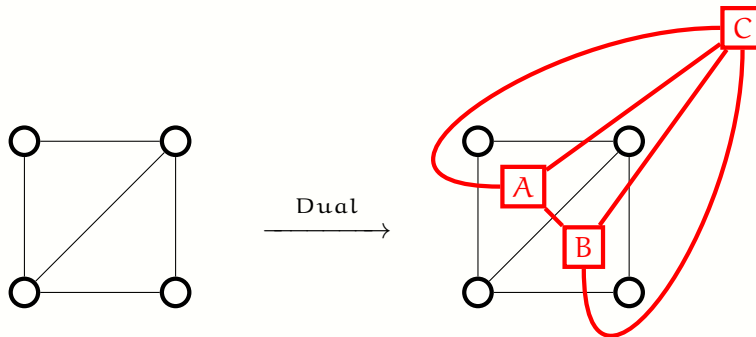


Figure 1.13 : exemple d'un graphe dual

Graphe adjoint

Le graphe adjoint s'obtient à partir de n'importe quel graphe en transformant les arêtes en sommets. Lorsque deux arêtes partagent un sommet dans le premier graphe, alors les deux sommets correspondants (aux arêtes) seront reliés par une arête dans le graphe adjoint. La figure 1.14 donne le graphe adjoint du graphe de la figure 1.2.

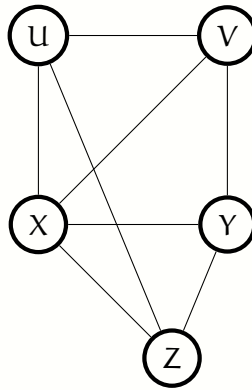


Figure 1.14 : exemple d'un graphe adjoint du graphe de la figure 1.2

1.2.10 Représentation non graphique d'un graphe

Un graphe peut être représenté par d'autres moyens que la représentation schématique. En particulier, les représentations matricielles sont souvent utilisées pour définir un graphe ou même le stocker sur un support informatique.

Pour tout graphe, on peut définir deux matrices : *matrice d'adjacence* et *matrice d'incidence*. La matrice d'adjacence, celle qui est la plus utilisée, représente le voisinage des sommets. C'est une matrice carrée. Pour un graphe d'ordre n , elle comporte alors n lignes et n colonnes. Soient i l'indice du sommet x et j l'indice du sommet y . L'élément de la matrice d'adjacence à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne représentent le nombre d'arêtes reliant x à y . Une boucle est comptée deux fois.

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est, par conséquent, symétrique (ce qui pose un problème de redondance de données en la stockant). Comme exemple, la matrice adjacence du graphe de la figure 1.1 (en adoptant l'ordre des sommets : a, b, c, d, e) est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & d & e \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

Les matrices d'adjacence peuvent avoir des formes particulières pour certains graphes. Par exemple, pour un graphe complet, la matrice d'adjacence ne contient que des 1. Pour un graphe biparti, la matrice d'adjacence peut avoir une forme particulière lorsqu'on réarrange ses sommets (comment?).

La matrice d'incidence permet de représenter à la fois les sommets et les arêtes. Les lignes cor-

respondent aux sommets et les colonnes aux arêtes. Si une arête est incidente à un sommet alors on met 1 à la case correspondante. Dans le cas d'une boucle, on met 2. De manière générale, ce n'est pas une matrice carrée. Pour la matrice précédente, la matrice d'incidence est :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & E & F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Des représentations non-matricielles existent aussi, parmi lesquelles on peut citer les listes des adjacences (reposant sur la notion de pointeurs). Elles consistent à donner pour chaque sommet la liste de sommets adjacents. Pour les matrices précédentes, elles sont (notons que l'on a répété d et c deux fois car il s'agit d'un multi-graphe) :

Sommet	Liste d'adjacence
a	b, c
b	a, b, b, d
c	a, d, d
d	b, c, c, e
e	d

1.2.11 Coloration d'un graphe

La coloration des sommets d'un graphe simple consiste à donner une couleur (abstraite) à chaque sommet d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents ne puissent pas avoir la même couleur. Une coloration d'un graphe en k couleurs est une partition des sommets en k stables.

Le terme coloration provient classiquement de la coloration d'une carte géographique. En effet, si on considère une carte de plusieurs pays, le problème consiste à colorer chaque pays de sorte que deux pays voisins ne puissent pas avoir la même couleur.

Ce problème a de nombreuses applications pratiques. En effet, la *couleur* est un terme abstrait qui fait référence à une information distincte des autres. Par exemple, la coloration peut être utilisée dans des problèmes d'élaboration des emplois de temps en affectant les cours des salles selon leur incompatibilité.

Le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer un graphe G est appelé son nombre chromatique (noté $\delta(G)$). De manière générale, il est très difficile de calculer ce nombre pour un graphe quelconque. Mais on peut encadrer ce nombre dans certains cas. Commençons d'abord par un théorème très intéressant caractérisant les graphes planaires.

Théorème 7

(dit des quatre couleurs) Tout graphe planaire peut être coloré avec au plus quatre couleurs (attention, un graphe colorable avec moins de cinq couleurs n'est pas forcément planaire).

Pour un graphe G quelconque, on peut aussi trouver les bornes suivantes :

* **Bornes supérieures :**

- Si G n'est pas complet, alors $\delta(G) \leq r$ tel que r est le plus grand des degrés de G ($r = \max_x d(x)$). Si G est complet (K_n), alors son nombre chromatique est égal à son degré + 1 (soit n). Pour le graphe de la figure 1.11, la borne supérieure est alors de 4.
- $\delta(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ tel que n est l'ordre du graphe, et $\alpha(G)$ est son nombre de stabilité. Dans le cas de l'exemple considéré, cette borne est égale à $7+1-3=5$. On prends la valeur minimale des deux bornes supérieures, ce qui donne 4.

* **Bornes inférieures :**

- Le nombre chromatique de G est supérieur ou égal au nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes. Ceci peut être utile si le nombre de sous-graphes n'est pas important.
- Le nombre chromatique est supérieur ou égal à l'ordre de sa clique maximale. Dans notre exemple, l'ordre de la clique maximale est de 4. Le nombre chromatique est alors égal à 4.

Comme souligné plus haut, le calcul du nombre chromatique d'un graphe quelconque est un problème très difficile. Il existe néanmoins des algorithmes permettant de donner une bonne approximation du nombre chromatique (pas forcément minimale) en un temps très réduit (on appelle des tels algorithmes des *heuristiques*). L'algorithme de Welsh et Powell permet de réaliser cela. Cependant, il peut, parfois, donner de mauvais résultats.

Algorithme de Welsh et Powell

- 1 trier les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leurs degrés
- 2 **tant que** il reste des sommets non colorés dans le graphe **faire**
- 3 En parcourant la liste dans l'ordre donné dans la première étape, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, puis attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non-adjacent à un sommet ayant cette couleur

On applique cela au graphe de la figure 1.11 (selon les noms dans la figure 1.15 et les couleurs rouge, jaune, vert, bleu). On trie d'abord les sommets et on applique l'algorithme (NA signifie non affectée). On voit ici que l'algorithme a bien calculé le nombre chromatique du graphe (voir aussi la figure 1.15).

La coloration permet également de caractériser les graphes bipartis. En effet, un graphe a un nombre chromatique de 2 si et seulement s'il est un graphe biparti. Les arêtes d'un graphe biparti relient les sommets d'un ensemble X aux sommets d'un ensemble Y . Il suffit alors d'affecter à ces deux ensembles des couleurs différentes comme le montre la figure 1.16.

Sommet	b	c	e	f	d	a	g
Degré	4	4	4	4	2	1	1
Initialisation	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Itération 1	Rouge	NA	NA	NA	NA	Rouge	Rouge
Itération 2	Rouge	Jaune	NA	NA	Jaune	Rouge	Rouge
Itération 3	Rouge	Jaune	Vert	NA	Jaune	Rouge	Rouge
Itération 4	Rouge	Jaune	Vert	Bleu	Jaune	Rouge	Rouge

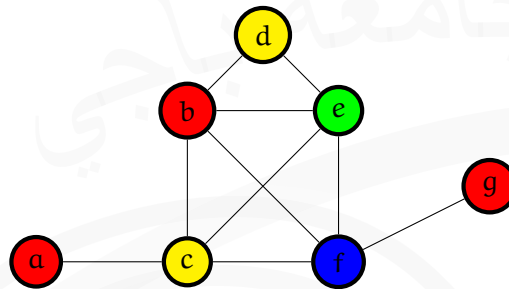


Figure 1.15 : exemple de coloration d'un graphe

Remarque : un problème similaire existe, il s'agit de la coloration des arêtes. En effet, on se propose de colorer les arêtes d'un graphe de façon que deux arêtes ayant un sommet en commun n'aient pas la même couleur. Pour résoudre ce problème, on peut construire le graphe adjoint et appliquer ensuite l'algorithme de coloration des sommets

1.3 Les graphes orientés

Les graphes orientés traduisent des relations asymétriques. Comme les graphes non-orientés, ils se définissent sur un ensemble de sommets, mais les liens entre les sommets sont associés à une direction.

Formellement, un graphe orienté ou encore un *digraphe* est une paire (X, E) où X est un ensemble de sommets et E est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times X$. Pour deux sommets adjacents x et y , le lien (x, y) est appelé un *arc* de x vers y . Pour l'arc (x, y) , x s'appelle l'extrémité initiale de l'arc et y son extrémité finale.

Toutes les notions définies pour les graphes non-orientés peuvent être transposées aux graphes orientés à quelques différences près. Par exemple, un graphe orienté peut également être valué.

De manière générale, les graphes orientés sont dits des p -graphes, où p est le nombre maximal d'arcs pouvant relier deux sommets (ils ressemblent donc aux graphes multiples non-orientés). Dans ce cours, on s'intéressera aux 1-graphes, c'est-à-dire ceux dans lesquels un seul arc, au plus, relie deux sommets. Ceci exclut bien sûr les boucles. Pour le reste du cours, on utilisera l'expression "graphe orienté" pour désigner un 1-graphe.

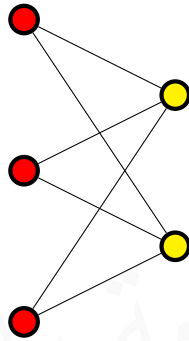


Figure 1.16 : coloration d'un graphe biparti

Exemple 6 : un graphe orienté

Dans un tournoi, les joueurs s'affrontent deux à deux. On a obtenu les résultats suivants :

- Le joueur A a battu B et D;
- Le joueur B a battu C et D;
- Le joueur C a battu A;
- Le joueur D a battu C.

On peut représenter les résultats par le graphe de la figure 1.17.

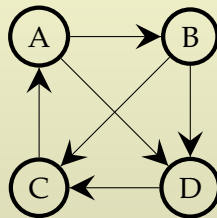


Figure 1.17 : le graphe correspondant aux résultats du jeu

1.3.1 Les prédécesseurs, les successeurs et les voisins

Pour un graphe orienté $G = (X, E)$, un prédécesseur d'un sommet x est tout sommet y tel que (y, x) est un arc. On note l'ensemble des prédécesseurs par $\Gamma^-(x)$. Pour le graphe de la figure 1.17, on a : $\Gamma^-(C) = \{B, D\}$ (ils représentent les joueurs ayant battu C).

Un successeur d'un sommet x est tout sommet y tel que (x, y) est un arc. L'ensemble des successeurs est noté par $\Gamma^+(x)$. Pour le graphe considéré, on a : $\Gamma^+(C) = \{A\}$.

Les voisins d'un sommet x sont l'union de ses prédécesseurs et ses successeurs : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$. Ainsi, on a : $\Gamma(C) = \{A, B, D\}$.

1.3.2 Les degrés dans un graphe orienté

Évidemment, un graphe orienté peut être caractérisé déjà par son ordre et sa taille. Chaque sommet peut également être caractérisé par son degré mais nous avons besoin de différencier entre les arcs entrants et les arcs sortants.

Pour un sommet x , on appelle son demi-degré extérieur la cardinalité de $\Gamma^+(x)$, et on le note par : $d^+(x)$. Le demi-degré intérieur d'un sommet x est la cardinalité de $\Gamma^-(x)$, et on le note par $d^-(x)$. Le degré de x (noté $d_G(x)$) est donné par la somme de son demi-degré extérieur et son demi-degré intérieur.

Pour le graphe de la figure 1.17, les différents degrés sont donnés par la table suivante :

Sommet	A	B	C	D	Total
$d^+(x)$	2	2	1	1	6
$d^-(x)$	1	1	2	2	6
$d_G(x)$	3	3	3	3	12

Les graphes orientés possèdent une propriété reliant les demi-degrés :

Théorème 8

Soit $G = (X, E)$ un graphe orienté, nous avons :

$$\sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)$$

Ce qui fait que la somme des degrés d'un graphe orienté est toujours paire.

1.3.3 Les chemins et circuits

Étant donné qu'un arc possède une direction, les concepts de chaînes et de cycles ne peuvent pas être directement utilisés dans un graphe orienté.

Dans un graphe $G = (X, E)$, un *chemin* entre deux sommets x et y (on n'utilise pas le terme chaîne) est une suite de sommets x_0, x_1, \dots, x_k tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $(x_{i-1}, x_i) \in E$ pour tout i (en d'autres termes, (x_{i-1}, x_i) est un arc pour tout i). La notion de la direction est importante ici car si x_0, x_1, \dots, x_k est un chemin, alors x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 ne l'est pas forcément. La longueur du chemin ici est k . Dans la figure 1.17, le chemin A, B, C est de longueur 2. Le chemin A a une longueur de 0.

Lorsque le début d'un chemin se coïncide avec sa fin ($x_0 = x_k$), on dit que le chemin forme un *circuit*. Dans le graphe considéré ici, A, B, C, A est un circuit.

La notion de cocycle pour les graphes non-orientés correspond à la notion de *cocircuit* pour les graphes orientés. Soit A un ensemble de sommets d'un graphe $G = (X, E)$. On note par $w^+(A)$ l'ensemble d'arcs ayant leurs extrémités initiales dans A et leurs extrémités finales dans $X - A$. On note aussi par $w^-(A)$ l'ensemble d'arcs ayant leurs extrémités initiales dans $X - A$ et leurs extrémités finales dans A . Le cocircuit de A (noté $w(A)$) est donné par : $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A)$. Ainsi, pour le graphe considéré, si $Z = \{A, B\}$ alors le cocircuit de Z est $\{(A, D), (B, C), (B, D), (C, A)\}$.

1.3.4 Représentation non graphique d'un graphe orienté

Un graphe orienté peut aussi être représenté par une matrice d'adjacence. Cette matrice carrée a n lignes et n colonnes, tel que n est l'ordre du graphe ; les lignes et colonnes correspondent aux sommets. S'il y a un arc entre le sommet x et le sommet y , alors on met 1 dans la case correspondante, sinon 0. La matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.17 est :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On peut facilement constater que la matrice d'adjacence n'est, en général, pas symétrique. La matrice d'incidence nécessite un peu de modifications lorsqu'on la construit, car on a besoin de différencier entre les arcs entrants et les arcs sortants. Pour un graphe donné, les lignes de la matrice d'incidence correspondent aux sommets et les colonnes aux arcs. Pour un arc entrant à un sommet, on met 1, si l'arc est sortant, on met -1.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Les listes d'adjacences peuvent également être utilisées pour représenter un graphe orienté. On fera, cependant, attention ici au fait que les listes d'adjacence font figurer les successeurs des sommets uniquement, et non tout le voisinage étant donné que cela créera une redondance de données (en d'autres termes, on ne représente pas les prédécesseurs).

La matrice d'adjacence possède un avantage de taille par rapport aux autres représentations. En effet, soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, notons avant tout que cette matrice donne le nombre d'arcs entre les sommets. On peut donc considérer qu'elle représente les chemins de longueur 1.

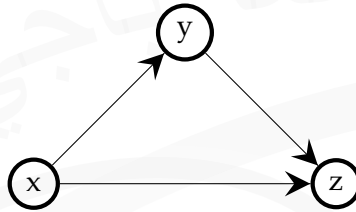
La matrice M est carrée, on peut donc calculer le produit matriciel $M^2 = M.M$. L'élément $a_{i,j}$ de M^2 est calculé par : $a_{i,j} = \sum_k M_{i,k}M_{k,j}$, ce qui correspond à un chemin partant du sommet i vers le sommet j en passant par le sommet k . Étant donné que l'on calcule la somme, on calcule alors le nombre des chemins de longueur 2 entre i et j . En généralisant, on obtient $M^n = M.M^{n-1}$: la matrice donnant le nombre de chemins de longueur n d'un sommet à un autre.

Puissance de M	Résultat	Puissance de M	Résultat
M	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	M^3	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
M^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	M^4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.5 Graphe transitif et fermeture transitive d'un graphe

Un graphe orienté modélise une relation binaire sur un ensemble de sommets. On peut définir certaines propriétés des relations pour les graphes. Parmi ces propriétés, la transitivité signifie que si un élément x est en relation avec y et que celui-ci est en relation avec z , alors x est en relation avec z .

Un graphe transitif est un graphe ayant la propriété suivante : s'il y a un arc de x vers y , et un arc entre y et z , alors, il y a un arc de x vers z , comme on peut le voir ici :



Pour tout graphe non-transitif G , on peut construire un graphe transitif G^* appelé *fermeture transitive* du graphe. L'idée est de rendre le graphe transitif en ajoutant le minimum d'arcs possibles : s'il y a un arc entre x et y , un arc entre y et z et s'il n'y a pas d'arc entre x et z , alors rajouter cet arc.

La figure 1.18 donne un exemple d'un graphe non-transitif auquel on a rajouté les arcs en rouge pour qu'il devienne transitif. Le graphe obtenu est donc appelé la fermeture transitive du premier graphe (celui dont les arcs sont en noir).

Dans la fermeture transitive G^* d'un graphe G , il y a une transition entre un sommet x et y si et seulement s'il existe un chemin entre x et y dans le graphe G . La fermeture transitive permet alors de rechercher des chemins entre des sommets d'un graphe (ce problème s'appelle problème d'accessibilité et possède beaucoup d'applications).

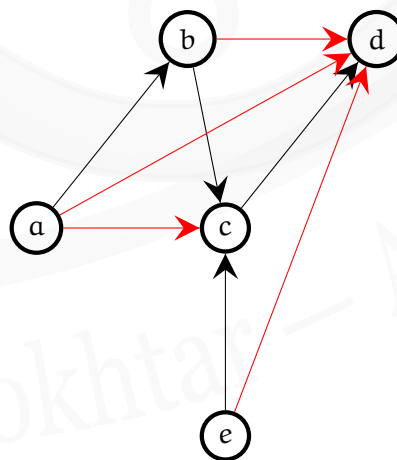


Figure 1.18 : la fermeture transitive d'un graphe (les arcs rouges représentent la fermeture transitive calculée)

Il existe plusieurs algorithmes pour la construction de la fermeture transitive. L'un d'eux est basé sur la matrice d'adjacence. Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, on a déjà vu que cette matrice représente le nombre de chemins de longueur 1 entre les sommets du graphe. En calculant les différentes puissances M^i de la matrice, on calcule alors le nombre de chemins de longueur i

entre les sommets du graphe. Si le graphe est d'ordre n , alors les circuits peuvent avoir une longueur maximale de $n - 1$. L'algorithme de construction est le suivant :

Algorithme de construction de la fermeture transitive d'un graphe G

- 1 $n = \text{ordre}(G)$
- 2 $M = \text{matrice d'adjacence de } G$
- 3 calculer $M^* = M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^{n-1}$ (il s'agit d'une somme booléenne, c'est-à-dire que $u \oplus v = 1$ si $u \neq 0$ ou $v \neq 0$, sinon c'est 0)

Si on applique cet algorithme au graphe de la figure 1.18 (uniquement la partie en noir), on obtient :

M	M^2	M^3	M^4
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice M^* est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet algorithme n'est pas efficace car il nécessite n^4 itérations. Un autre algorithme plus efficace s'appelle algorithme de Warshall et nécessite n^3 itérations seulement.

Algorithme de Warshall pour la construction de la fermeture transitive d'un graphe G

- 1 $n = \text{ordre}(G)$
- 2 $M = \text{matrice d'adjacence de } G$
- 3 $R^{(0)} = M$
- 4 **pour** $k = 1..n$ **faire**
- 5 **pour** $i = 1..n$ **faire**
- 6 **pour** $j = 1..n$ **faire**
- 7 $R_{(i,j)}^k = R_{(i,j)}^{k-1}$ ou $(R_{(i,k)}^{k-1} \text{ et } R_{(k,j)}^{k-1})$
- 8 $M^* = R^{(n)}$

L'application au graphe précédent donne le déroulement suivant :

$R^{(0)}$	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(3)}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$R^{(4)}$	$R^{(5)}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3.6 Graphe fortement connexe et composantes fortement connexes

La notion de connexité s'applique aussi aux graphes orientés. La seule différence est que la définition se repose sur la notion de chemins.

Un graphe orienté est dit *connexe* si, en transformant ses arcs en arêtes, on obtient un graphe non-orienté connexe.

Un graphe orienté est dit *fortement connexe* si pour toute paire de sommets (x, y) , il existe au moins chemin entre x et y . Depuis n'importe quel sommet, on peut alors atteindre n'importe quel autre sommet.

Une *composante fortement connexe* est un sous-graphe qui est fortement connexe. Un graphe fortement connexe contient une seule composante connexe, égale à lui-même.

Si un graphe n'est pas fortement connexe, alors on peut être intéressé par trouver ses composantes connexes. Ceci se fait par un algorithme dit de marquage.

Algorithme de marquage pour trouver les composantes connexes d'un graphe G

- 1 $k = 0$
- 2 choisir un sommet x et le marquer par (+) et (-), $k = k + 1$
- 3 marquer tous les successeurs directs et indirects de x par (+)
- 4 marquer tous les prédécesseurs directs et indirects par (-)
- 5 les sommets marqués avec (+) et (-) forment la composante connexe C_k
- 6 retirer tous les sommets de C_k , effacer toutes les marques et recommencer 2 tant qu'il reste des sommets dans le graphe

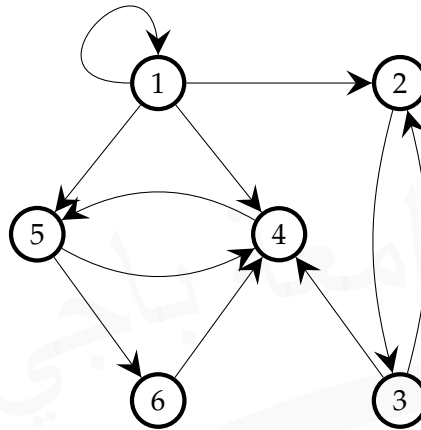


Figure 1.19 : le graphe pour calculer les composantes connexes

On applique cet algorithme au graphe de la figure 1.19.

	1	2	3	4	5	6	
Marquage	+-	+	+	+	+	+	$C_1 = \{1\}$
Marquage		+-	+-	+	+	+	$C_2 = \{2, 3\}$
Marquage				+-	+-	+-	$C_3 = \{4, 5, 6\}$

Lorsqu'on détermine les composantes connexes, on peut construire ce que l'on appelle le *graphe réduit* : c'est un graphe dont les sommets sont les composantes connexes, lorsqu'il y a un arc entre $x \in C_i$ et $y \in C_j$ ($i \neq j$) alors on trace un arc entre C_i et C_j . Pour le dernier exemple, le graphe réduit est donné par la figure 1.20.

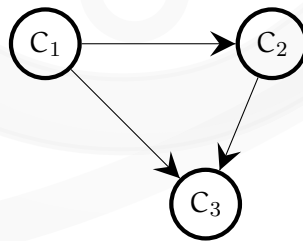


Figure 1.20 : le graphe réduit du graphe de la figure 1.19

1.3.7 Ordonnancement d'un graphe

Dans un graphe orienté connexe et sans circuit, l'ordonnancement des sommets consiste à organiser les sommets en niveaux tels que les arcs vont seulement d'un niveau inférieur à un niveau supérieur (pas forcément successifs).

Formellement, l'ordonnancement d'un graphe $G = (X, E)$ ici consiste à définir une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ donnant le niveau ou ce que l'on appelle le rang de chaque sommet. La fonction f doit

respecter les contraintes suivantes :

- Si (x, y) est un arc, alors $f(x) < f(y)$;
- Elle doit minimiser la quantité $\min_x f(x)$ (en d'autres termes, on doit avoir un minimum de niveaux possibles).

L'ordonnancement utilise les prédécesseurs des sommets, car les sommets de rang 1 n'ont pas de prédécesseurs. Par conséquent, leur rang est égal à 1 au début de l'algorithme.

Algorithme de classement des sommets en rangs d'un graphe G

- 1 rang = 1
- 2 déterminer les sommets non classés dont l'ensemble des prédécesseurs est vide
- 3 leur affecter le niveau rang
- 4 rang = rang + 1
- 5 s'il existe encore des sommets non classés dans G, aller à 2

On applique cet algorithme au graphe de la figure 1.21.

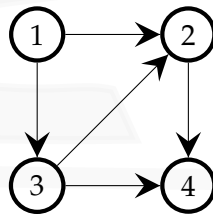


Figure 1.21 : graphe pour calculer les rangs

x	Γ^-	Action	x	Γ^-	Action	x	Γ^-	Action	x	Γ^-	Action
1	\emptyset	niv(1) = 1	1	-		1	-		1	-	
2	1,3		2	3		2	\emptyset	niv(2) = 3	2	-	
3	1		3	\emptyset	niv(3) = 2	3	-		3	-	
4	2,3		4	2,3		4	2		4	\emptyset	niv(4) = 4

La figure 1.22 donne le classement des sommets en niveaux (de 1 à 4).

1.3.8 Recherche de circuits dans un graphe

La recherche de circuits dans un graphe orienté possède plusieurs applications. Par exemple, si le graphe représente des processus qui attendent d'autres processus, alors l'existence d'un circuit indique la présence d'un *interblocage*.

La recherche de circuits peut se faire en utilisant l'algorithme de la fermeture transitive notamment avec l'algorithme de Warshall (ou même la première méthode). Dans l'algorithme, si, à une

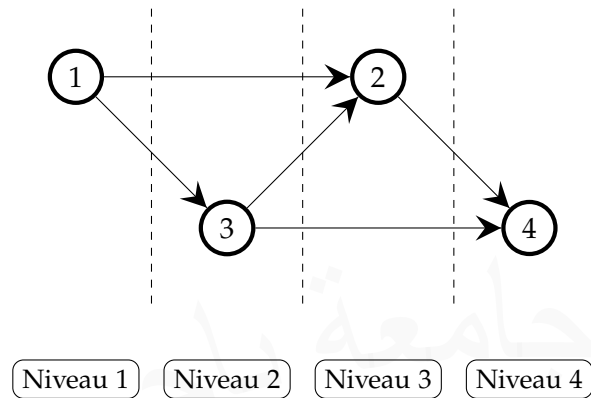


Figure 1.22 : classement des sommets du graphe en niveaux

itération donnée, on trouve un k et i tel que $R_{(i,i)}^{(k)} = 1$ alors le graphe contient un circuit. Mais cette procédure ne permet pas de construire le circuit.

Dans l'algorithme de classement des sommets, si un graphe contient un circuit alors on trouvera forcément une itération dans laquelle tous les sommets possèdent des prédécesseurs (rappelons que le graphe est fortement connexe). Ceci bloque l'algorithme de classement, mais indique la présence d'un circuit que l'on peut construire comme suit :

Algorithme de détection et de construction d'un circuit dans un graphe G

- 1 appliquer l'algorithme de classement jusqu'au blocage (une itération dans laquelle tous les sommets ont des prédécesseurs). Si une telle itération existe alors le graphe possède un circuit
- 2 choisir un sommet pas encore classé et le marquer (soit le sommet x_0), et marquer l'un de ses prédécesseurs
- 3 choisir un des prédécesseurs du dernier sommet marqué (il ne doit pas être marqué) et le marquer
- 4 répéter 3 jusqu'à revenir à x_0
- 5 le circuit consiste à écrire le chemin à partir de x_0 mais dans l'ordre inverse

On applique maintenant au graphe de la figure 1.23.

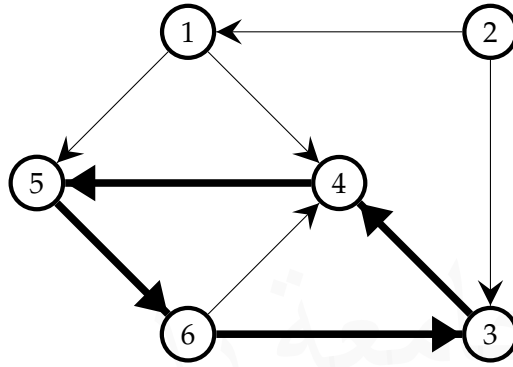


Figure 1.23 : exemple de graphe avec circuit

x	Γ^-	Action	x	Γ^-	Action	x	Γ^-	Action
1	2	niv(2) = 1	1	\emptyset	niv(1) = 2	1	-	il y a un circuit
2	\emptyset		2	-		2	-	
3	2,6		3	6		3	6	
4	1,3,6		4	1,3,6		4	3,6	
5	1,4		5	1,4		5	4	
6	5		6	5		6	5	

On choisit ainsi la chaîne : 3, 6, 5, 4, 3 (le choix de 3 au début est arbitraire). Le circuit est alors : 3, 4, 5, 6, 3.