UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2020-2021

Rattrapage – ALGEBRE 1

Avril 2021 Durée: 1h

Exercice 1: Soient $E = [0, 1]$, $F = [-1, 1]$, et $G = [0, 2]$ trois intervalles de $\mathbb{R}$. Considérons l'application f de E dans G définie par :

$$f(x) = 2 - x,$$

et l'application g de F dans G définie par :

$$g(x) = x^2 + 1$$

1. Déterminer $f(\{\frac{1}{2}\})$, $f^{-1}(0)$, $g([-1, 1])$, $g^{-1}[0, 2])$.
2. L'application f est-elle bijective ? justifier.
3. L'application g est-elle bijective ? justifier.

Exercice 2: Soit $\mathcal{R}$, la relation dééfinie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y, x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1.

Exercice 3: On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

1. Vérifier que loi $\star$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.
2. Résoudre les équations $x \star x = 1$ et $2 \star y = 5$.

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2020-2021

Corrigé rattrapage – ALGEBRE 1

Février 2021 Durée: 1h

Exercice 1: (5 points)

1. $f(\{\frac{1}{2}\}) = \{f(x) \in [0,2]/x = \frac{1}{2}\}$, 0,5
$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \in [0,2]$, alors : $f(\{\frac{1}{2}\}) = \{\frac{3}{2}\}$ 0,5

$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1,1]/f(x) = 0\}$. 0,5
On a $f(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2 \notin [-1,1]$, alors : $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ 0,5

$g([-1,1]) = \{g(x) \in [0,2]/x \in [-1,1]\}, on\ a\ x \in [-1,0] \cup]0,1]$.

$$\begin{aligned} x2 \in [-1,0] &\Longrightarrow -1 \le x \le 0 \\ &\Longrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \\ &\Longrightarrow 1 \le x^2+1 \le 2 \\ &\Longrightarrow g(x) \in [1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

1

d'où

$$g([-1,0]) = [1,2]$$

$$\begin{aligned} x \in]0,1] &\Longrightarrow 0 < x \le 1 \\ &\Longrightarrow 0 < x^2 \le 1 \\ &\Longrightarrow 1 < x^2+1 \le 2 \\ &\Longrightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où

$$g(]0,1]) =]1,2], g([-1,1]) = [1,2].$$

$g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1]/g(x) \in [0,2]\}$, on a

$$\begin{aligned} g(x) \in [0,2] &\Longrightarrow 0 \le x^2+1 \le 2 \\ &\Longrightarrow -1 \le x^2 \le 1 \\ &\Longrightarrow (-1 \le x^2 < 0) \vee (0 \le x^2 \le 1) \\ &\Longrightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

1

l'ingalité $(-1 \le x^2 < 0)$ n'a pas de solutions.

$$0 \le x^2 \le 1, 0 \le |x| \le 1, -1 \le x \le 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$

0,1 Déf

2. Comme $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ c'est à dire l'élément $0 \in [0,2]$ n'admet pas d'antécédent par f dans $[-1,1]$ donc f n'est pas surjective et par suite n'est pas bijective. 1

0,5 Déf 3. On a $g(-1) = g(1)$ or $-1 \neq 1$ donc g n'est pas injective d'où g ne peut être bijective, aussi on remarque que $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$ donc g n'est pas surjecive, alors n'est pas aussi bijective. 1

Exercice 2: (5 points)

1. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence il faut qu'elle soit : réflexive, symétrique et transitive.

La réflexivité $x^4 - x^4 = x^2 - x^2$, ceci veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x$, donc la relation $\mathcal{R}$ est réflexive 1

La symétrie $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et montrons que $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

$$x^4 - y^4 = x^2 - y^2) \Longrightarrow (-1) \times (x^4 - y^4) = (-1) \times (x^2 - y^2) \Longrightarrow y^4 - x^4 = y^2 - x^2;$$

ce qui implique que $y\mathcal{R}x$. Donc la relation est symétrique. 1

la transitivité $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$. On a $x^4 - y^4 = x^2 - y^2$ et $y^4 - z^4 = y^2 - z^2$. En faisant l'addition on obtient que $x^4 - z^4 = x^2 - z^2$. Ce qui veut dire que $x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive. 1

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. $cl(0) = \{y \in \mathbb{R}/0\mathcal{R}y\}$ Or
0,5

$$0\mathcal{R}y \Longleftrightarrow 0 - y^4 = 0 - y^2$$
$$\Longleftrightarrow y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1$$ 1

Donc on conclut que $cl(0) = \{0, -1, 1\}$ On remarque que $1 \in cl(0)$ donc $cl(0) = cl(1)$.
0,5 1

Exercice 3:

1. $\star$ est commutative si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}/x \star y = y \star x.$$ 0,5

$x \star y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y \star x.$ Car le produit et la somme sont commutatives. 0,5

2. $\star$ est non associative, on suppose que c'est associative c'est à dire :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$ 0,5

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= [xy + (x^2-1)(y^2-1)] \star z \\
&= (xy + (x^2-1)(y^2-1))z + (z^2-1)([xy + (x^2-1)(y^2-1)]^2 - 1) \\
&= xyz + (x^2-1)(y^2-1)z + (z^2-1)x^2y^2 + 2(z^2-1)(x^2-1)(y^2-1)(xy) \\
&+ (z^2-1)(x^2-1)^2(y^2-1)^2 - (z^2-1)\ldots(1)
\end{aligned}$$ 1

$$
\begin{aligned}
x \star (y \star z) &= x \star [yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)] \\
&= x(yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)) + (x^2 - 1)([yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)]^2 - 1) \\
&= xyz + x(y^2 - 1)(z^2 - 1) + (x^2 - 1)y^2z^2 + 2(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1)(yz) \\
&+ (x^2 - 1)(y^2 - 1)^2(z^2 - 1)^2 - (x^2 - 1) \ldots (2)
\end{aligned}
$$

contradiction (1) $\neq$ (2) d'où $\star$ n'est pas associative 0,5

3. $\star$ admet un élément neutre si et séulement si

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x \star e = e \star x = x.$$ 0,5

$$
\begin{gathered}
x \star e = x \\
xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x \\
(e - 1)(x + (x^2 - 1)(e + 1)) = 0
\end{gathered}
$$ 1

Alors on a

$$
\begin{cases}
e - 1 = 0 \\
\vee \\
x + (e + 1)x^2 - (e + 1) = 0
\end{cases}
$$

On sait qu'un polynôme est nul $\forall x$ si tous ses coefficients sont tous nuls, et comme le coefficient de x est $1 \neq 0$ on déduit que le polynôme ne peut s'annuler, d'où $e = 1$ est vraie. $e = 1$ est l'élément neutre. 0,5

4. $2 \star y = 5 \Longrightarrow 2y + 3(y^2 - 1) = 5 \Longrightarrow y = \frac{4}{3} \vee y = -2.$ 1

5. $x \star x = 1 \Longrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, x = \mp 1.$ 1