Solution série 2 du TD logique mathématique

Exercice 1 Solution :
1- Le système formel qui produit les théorèmes **kst, kstst, ksststst,..........** à partir de l'axiome **k** est le suivant :

- L'ensemble de l'alphabet $\Sigma = \{k, s, t\}$.
- L'ensemble **W** qui représente tous les mots générés par ce système formel ainsi que les axiomes utilisés. Tel que $\mathbf{W} = \{k, kst, kstst, ksststst, kststststst, ...\}$.
- L'ensemble d'axiomes $\mathbf{A} = \{k\}$.
- L'ensemble des règles de déduction ou d'inférence **R** qui contient une seule règle r_1 tel que $\mathbf{R} = \{r_1 : x \longrightarrow xst | x \in \mathbf{W}\}$.

2- Le système formel qui produit les théorèmes **ca, caba, cababa, cabababa, ...** à partir de l'axiome **c** est le suivant :

- L'ensemble de l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
- L'ensemble **W** $\{c, ca, caba, cababa, cabababa, ...\}$.
- L'ensemble d'axiomes $\mathbf{A} = \{c\}$.
- L'ensemble des règles de déduction ou d'inférence **R** qui contient deux règles r_1 et r_1 tel que $\mathbf{R} = \{r_1 : c \longrightarrow ca, r_2 : cx \longrightarrow cxba\}$ tel que x est une séquence quelconque $\in \{a, b, c\}$ et x $\neq \epsilon$.

3- Le système formel qui produit les théorèmes **b, ba, baa, baaa, baaaa,.....** à partir de l'axiome **b** est le suivant :

- L'ensemble de l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
- L'ensemble **W** $\{b, ba, baa, baaa, baaaa, ...\}$.
- L'ensemble d'axiomes $\mathbf{A} = \{b\}$.
- L'ensemble des règles de déduction $\mathbf{R} = \{r_1 : bx \longrightarrow bxa\}$

Exercice 2 Solution :
1- Pour prouver que **MUIUI** est un théorème, on va utiliser l'arbre de dérivation donc pour arriver à **MUIUI** qui est la feuille de l'arbre qu'on cherche il suffit de faire (commençant par l'axiome) :
$MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R3} MUI \xrightarrow{R2} MUIUI$ **vrai**.

2- **UM** n'est pas un théorème car à partir de l'axiome **MI** on ne peut pas atteindre **UM** c'est à dire :
L'axiome **MI** contient un **M** au début et toutes les règles permettent de générer un **M** au début selon l'axiome c'est à dire aucune règle ne permet de réécrire le **M** (ex : qui a la forme $M \longrightarrow ...$).

3- **MU** n'est pas un théorème et on peut prouver ça en utilisant un autre système de production de théorèmes bien connu sous le nom d'arithmétique.
La chaine **MU** contient zéro (**I**) qui est un multiple de 3 et l'axiome du début **MI** contient

un seul (**I**) donc un nombre de (**I**) non multiple de 3. Donc il faut chercher un moyen pour éliminer les **I** en se basant sur les règles d'inférence.
On remarque que les règles **R1** et **R4** ne changent pas le nombre de **I**. La règle **R3** diminue le nombre de **I** de 3, donc elle ne le change pas sauf s'il est divisible par 3. La règle **R2** double le nombre de **I**. Comme 2n ne peut être divisé par 3 que si n est divisible par 3 et la règle **R2** ne produit pas de multiple de 3, donc aucune règle ne produit de multiple de 3.
Conclusion : **MU** n'est pas démontrable dans le système formel **MIU**.
Remarque : Avec l'arbre de dérivation, le système **MIU** n'est pas décidable pour **MU**.

Exercice 3 Solution :
1- Pour la chaine //p/q/// oui on peut.
Preuve :
en utilisant l'arbre de dérivation, on peut avoir : pq $\xrightarrow{a}$ /pq/ $\xrightarrow{a}$ //pq// $\xrightarrow{b}$ //p/q///.

2- On ne peut dériver /p//q/, car selon les règles du système p-q on a toujours des théorèmes qui ont la forme suivante : r(///**...**//)**p** s(//**...**/)**q** r+s(///**...**///).

Pour la chaine //////p///q///////// oui on peut.
Preuve :
pq $\xrightarrow{a}$ /pq/ $\xrightarrow{a}$ //pq// $\xrightarrow{a}$ ///pq/// $\xrightarrow{a}$ ////pq//// $\xrightarrow{a}$ /////pq///// $\xrightarrow{a}$ //////pq////// $\xrightarrow{b}$ //////p/q/////// $\xrightarrow{b}$ //////p//q//////// $\xrightarrow{a}$ //////p///q/////////.

Exercice 4 Solution :
1- D $\xrightarrow{a}$ DC oui.

2- D $\xrightarrow{a}$ DC $\xrightarrow{a}$ DCC $\xrightarrow{a}$ DCCC oui.

3- D $\xrightarrow{b}$ ADA $\xrightarrow{b}$ AADAA $\xrightarrow{b}$ AAADAAA oui.

4- D $\xrightarrow{a}$ DC $\xrightarrow{a}$ DCC $\xrightarrow{a}$ DCCC $\xrightarrow{b}$ ADCCCA $\xrightarrow{a}$ ADCCCAC $\xrightarrow{a}$ ADCCCACC $\xrightarrow{b}$ AADCC-CACCA $\xrightarrow{c}$ AADCCCABCA $\xrightarrow{c}$ AADCCCABBA oui.

Exercice 5 Solution :
Q_1-
1- a^4bc^4 est un théorème.
Preuve :
A partir de l'ensemble A des axiomes on peut générer l'axiome $A_1 = a^3bc$ en remplaçant dans l'ensemble A le i par 1.
En appliquant la règle R_1 en utilisant l'axiome A_1 c'est à dire on remplace le premier élément de la règle par A_1 et le deuxième aussi ($R_1 = (A_1, A_1)$) on aura :

$(a^3bc,\ a^3bc) \xrightarrow{R_1} a^4bc^4$. Donc a^4bc^4 est effectivement un théorème.

2- a^6bc^6 est un théorème.
Preuve :
- Premièrement, on créé le premier axiom $A_1 = a^5bc^3$ en remplaçant dans la forme générale des axiomes le i par 2.
-On créé aussi un deuxième axiome $A_2 = a^3bc$ en remplaçant dans la forme générale des axiomes le i par 1.
En appliquant la règle $R_1 = (a^5bc^3,\ a^3bc) \xrightarrow{R_1} a^6bc^6$. Donc a^6bc^6 est un théorème.

3- a^5bc^5 n'est pas un théorème.
Preuve :
Car si on additionne deux axiomes selon la règle R_1, on trouve toujours un nombre pair de i (nombre de a = au nombre de c) et si on additionne un théorème généré avec un nombre pair de i et un axiome, on ne trouvera jamais l'égalité entre les a et les c.
Q_2-
Pour trouver les différentes formes possibles des théorèmes, il faut essayer d'appliquer la règle d'inférence en changeant les éléments de cette règles (les données entrantes).
1- La première forme validée est la forme des axiomes c'est à dire $forme_1 = \{a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1\}$.
A partir des axiomes, on peut appliquer la règle R_1 c'est à dire :
$(a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1, a^{2s+1}bc^{2s-1} | s \geq 1) \xrightarrow{R_1} (a^{2(i+s)}bc^{2(i+s)}) \longrightarrow \{a^{2k}bc^{2k} | k \geq 2\}$.
On peut aussi avoir :
$(a^{2k}bc^{2k} | k \geq 2, a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1) \xrightarrow{R_1} (a^{2(k+i)-1}bc^{2(k+i)+1}) \longrightarrow \{a^{2p-1}bc^{2p+1} | p \geq 3\}$.
Ou bien :
$(a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1, a^{2k}bc^{2k} | k \geq 2) \xrightarrow{R_1} (a^{2(i+k)+1}bc^{2(i+k)-1}) \longrightarrow \{a^{2p+1}bc^{2p-1} | p \geq 3\} \subset \{a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1\}$.
Ou bien :
$(a^{2k}bc^{2k} | k \geq 2, a^{2p-1}bc^{2p+1} | p \geq 3) \xrightarrow{R_1} (a^{2g+1}bc^{2g-1}) \subset \{a^{2i+1}bc^{2i-1}\}$.
Et ainsi de suite.
Donc après plusieurs essais, on conclu que la forme générale des théorèmes est comme suit : $\{a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1\} \cup \{a^{2k}bc^{2k} | k \geq 2\} \cup \{a^{2p-1}bc^{2p+1} | p \geq 3\} \cup \{a^{2r+2}bc^{2r-2} | p \geq 4\} \cup \{a^{2r-2}bc^{2r+2} | p \geq 4\}$,... etc.