Chapitre 1

Notions de logique mathématiques

1.1 Quelques motivations

La langue d'une manière générale est souvent ambigüe, car un texte mathématique contient parfois des éléments de nature non mathématique, annotations utiles à la compréhension d'une preuve, mais aussi rappels historiques et bien d'autres choses. Aussi, nous notons que ce langage est artificiel et ne couvre pas tous les énoncés mathématiques ; par exemple dans un magasin : « Je prends une pomme ou une banane » cela signifie l'un ou l'autre mais pas les deux en même temps. Par contre « As-tu 15 DA en poche ? » si l'on dispose de 20 DA ? la réponse peut être « oui » et aussi « non j'ai 20 DA ». Donc, le fait de croiser des notions difficiles à expliquer avec des mots nous mènent directement à un autre langage formel dit « langage mathématique » Par exemple, la continuité d'une fonction est décrite comme suit « on trace le graphe sans lever le stylo ». Donc, Il est clair que c'est une définition peu satisfaisante. Or, la définition rigoureuse d'une fonction continue est

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \eta > 0,\; \forall x \in I,\; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, dans ce chapitre nous allons commencer de décrire un langage formel pour les mathématiques, en isolant et précisant un certain nombre de notations du langage mathématique usuel. Mais pour en être sûr, il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche qu'on appelle « raisonnement mathématique » doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres.

Les notations que nous allons utiliser ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ .....), ne sont pas celles introduites par *Gottlob Frege* qui ont eu peu de succès, entre autre à cause de leur complexité. Elles sont essentiellement dues à *Giuseppe Peano* (1894), et ont été popularisées par les "Principia mathematica" de *Bertrand Russell* et *Alfred Whitehead* (1910). Elles sont pour la plupart assez communes dans les mathématiques actuelles.

1.2 Logique

1.2.1 Assertion

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples.

1. Il fait beau aujourd'hui.
2. $2 - 4 = 6$.
3. $9/3 = 3$.
4."Un Bônois a dit : Tous les Bônois sont des menteurs". Cette phrase n'est pas une assertion car, on peut pas lui attribuer la valeur de vérité e vrai ou faux. Si on suppose que cette phrase est vrai, alors tous les bônois sont des menteurs et lui est bônois, donc il ment. Ce qui est absurde. D'un autre coté si on suppose que cette phrase est fausse, alors les bônois ne sont pas des menteurs et donc il dit la vérité. Ce qui est absurde aussi.

1.2.2 La proposition.

Une **proposition** est une **expression mathématique** à laquelle nous pouvons attribuer une valeur de vérité à savoir si elle est vraie ou fausse.

Exemples

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x^2 < 0$. Proposition vrais.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z| = 2$. Proposition fausse, car pour $z = i$, on a $|z| = 1$.

Remarque

En mathématiques, la proposition est généralement notée par P, Q, L....

1.2.3 L'axiome

Un **axiome** est une proposition non contradictoire et non démontrée, utilisée comme fondement d'un raisonnement ou d'une théorie.

Exemples

1. Tout nombre X a un successeur noté $succ(X)$.
2. $X + 0 = X$.

1.2.4 Le théorème

En mathématiques et en logique, un **théorème** (*du grec théorêma, objet digne d'étude*) est une assertion qui est démontrée, c'est-à-dire établie comme vraie à partir d'autres assertions déjà démontrées ou des assertions acceptées comme vraies, appelées axiomes. Plus précisément, les **théorèmes** sont des propositions qui décrivent des propriétés de moins en moins évidentes des objets considérés.

Exemple 1.

Si un triangle est rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (ou côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple 2.

Le thèorème des valeurs intermédiaires " *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout k comprs entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$* **admet au moins une solution** *sur l'intervalle $[a, b]$* ."

1.2.5 Le corollaire

Un **corollaire** est un résultat qui découle directement d'un théorème prouvé.

Exemple 1

Comme résultat du théorème des valeurs intermédiaires "*Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes differents, alors l'équation $f(x) = 0$* ***admet au moins une solution*** *sur l'intervalle $[a, b]$*".

Exemple 2

Comme résultat aussi du théorème des valeurs intermédiaires "*Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes differents, alors l'équation $f(x) = 0$* ***admet une solution unique*** *sur l'intervalle $[a, b]$*"

1.2.6 Le lemme

Le **lemme** est un résultat sur lequel on s'appuie pour conduire la démonstration d'un théorème plus important.

Exemple

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ toute partie admet au moins un majorant.

1.3 Opérations Logiques

1.3.1 La négation

La négation d'une proposition mathématique P notée $\overline{P}$, est vraie lorsque P est fausse. Aussi, elle est fausse lorsque P est vraie.

Remarque

Par convention, nous attribuons la valeur 1 à une proposition vraie et la valeur 0 à une proposition fausse

La négation d'une proposition peut être schématisée par le tableau qui s'appelle " Table de vérité".

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Remarque

La négation de la négation d'une proposition logique P est équivalente à P, donc on a :

$$\overline{\overline{P}} = P.$$

1.3.2 La Conjonction $\wedge$

Etant données deux propositions logiques P et Q, on appelle conjonction de P et Q, la proposition logique $P \wedge Q$ qui est Vraie quand P et Q sont vraies à la fois. La table de vérités est donnée par :

P	Q	$P \wedge Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	0

Remarque

A partir de la définition de la conjonction, nous déduisons le principe du "tiers exclu" qui stipule qu'une proposition ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. C'est à dire une "**proposition logique ne peut pas être vraie et fausse à la fois**"

P	$\overline{P}$	$P \wedge \overline{P}$
1	0	0
0	1	0

Dans ce cas on dit que les deux propositions sont **incompatibles.**

1.3.3 La Disjonction $\vee$

Soient les propositions logiques P et Q, on appelle disjonction de P et Q, la proposition logique notée par $(P \vee Q)$ qui est Vraie si l'une des propositions logiques

(P ou Q) est vraie. La table de vérités est donnée par :

P	Q	$P \vee Q$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

1.3.4 L'implication

L'implication de deux propositions P, Q est notée : ($P \Rightarrow Q$) on dit (P implique Q) ou bien si P alors Q. On dit que $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, sinon $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les autres cas. La table de vérité est donnée par

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0
0	1	1
1	1	1
0	0	1

Exemple

1- $(0 \leq x \leq 36) \Rightarrow (\sqrt{x} \leq 6)$ est vraie, il suffit de prendre la racine carrée.
2- $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ est fausse car pour $\theta = 2\pi$ on a $\cos\theta = 1$.
Vient maintenant une règle essentielle pour mener des démonstrations.

1.3.5 Théorème (Transitivité de l'implication)

Soient P, Q et R trois propositions. Alors,

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

Démonstration

Vous démontrerez ce théorème à l'aide d'une table.

1.3.6 L'équivalence

On dit que (P est équivalent à Q) ou (P si et seulement si Q). Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. On peut la définir aussi par

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ est la proposition } (P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P).$$

La table de vérité de l'équivalence est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	1

Proposition

Soient P et Q deux propositions logiques, alors on a :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.

Propriété

Soient la valeur de vérité des propositions P ; Q et R. Alors, les propriétés suivantes sont toujours vraies.

1- L'opérateur $\wedge$ est commutatif, c'est à dire : $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

2- L'opérateur $\vee$ est commutatif, c'est à dire : $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

3- Les opérateurs logiques $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs :

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \quad \text{et} \quad (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

4- Distributivité de $\wedge$ par rapport a $\vee$:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

5- Distributivité de $\vee$ par rapport a $\wedge$:

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee Q).$$

1.3.7 Théorème. (Lois de de Morgan)

Soient P et Q deux propositions, alors on a :

$$\overline{(P \wedge Q)} = (\overline{P} \vee \overline{Q}) \quad \text{et} \quad \overline{(P \vee Q)} = (\overline{P} \wedge \overline{Q}).$$

Comme résultat de ce théorème : (Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

Preuve : On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{(P \wedge Q)}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

et de la même manière on a :

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{(P \vee Q)}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1.4 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

1.4.1 1- Le quantificateur universel noté $\forall$

Le quantificateur universel noté $\forall$ et qui signifie que « Quelque soit x *un élément d'un ensemble E tel que la proposition $P(x)$ est vraie* », s'écrit également sous forme abrégée :

$$« \forall x \in E,\ P(x) »$$

Exemple.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 > 0$.

1.4.2 2- Le quantificateur existentiel noté $\exists$

Le quantificateur existentiel noté $\exists$ et qui signifie que *« il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie »*, s'écrit également sous forme abrégée :

$$« \exists\ x \in E,\ P(x) »$$

Exemple.

Il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$, tel que $x - 1 > 0$. (Par exemple $x = 3$).

1.4.3 3- Le quantificateur existentiel unique noté $\exists!$

Le quantificateur existentiel unique noté $\exists!$ signifie que *« il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie »*, s'écrit également sous forme abrégée :

$$« \exists!\ x \in E,\ P(x) »$$

Exemple

Pour la résolution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$, il existe un et un seul élément $x = 1$, car la solution $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Remarque

Dans une phrase quantifiée, on ne peut pas modifier l'ordre des quantificateurs s'ils ne sont pas de même nature,

Exemple

La proposition : $(\forall x \in E,\ \exists\ y \in E.\ P(x.y)) \Leftrightarrow$Pour tout x dans E, nous cherchons un y dans E pour que $P(x, y)$ soit vérifée.

La négation de cette proposition est :
$(\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x, y)) \Leftrightarrow$Il existe au moins un élément x dans E, pour que $P(x, y)$ soit vérifée, et ce pour tout y dans E .

Exemple illustratif

1- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ y \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 1 = y^2$. Alors, on doit chercher un élément y tel que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on a $x^2 - 1 = y^2$, ce qui évident car la partie $x^2 + 1 > 0$, d'où $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$.

2- Si on permute les deux quantificateurs, alors on a : $\exists\ x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$, tel que $x^2 + 1 = y^2$. Ceci est faux car pour $y = 0$, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 1 = 0$, autrement on aura $x^2 = -1$, ce qui est absurde.

Remarque

On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature

$$(\forall x \in E,\ \forall\ y \in E,\ P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall\ y \in E, \forall x \in E\ ,\ \ P(x, y)).$$

1.5 Les différents types de raisonnement mathématiques

Pour montrer qu'une $(P \Rightarrow Q)$ est vraie il existe cinq méthodes (mathématiques). En général, P désigne la donnée et Q désigne le résultat.

1.5.1 Le raisonnement direct

On suppose que la proposition P est vraie et on démontre que Q l'est aussi.

Exemple

Montrons que si $n \in \mathbb{N}$ est impair alors n^2 l'est aussi

Preuve

Supposons que $n \in \mathbb{N}$ est impair, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, d'où $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, si on pose $k' = 2k^2 + 2k$ alors $\exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$. D'où le résultat.

1.5.2 Le raisonnement par la contraposée

Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ par la contraposée, il suffit de montrer la proposition $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ de manière directe, c'est à dire on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on démontre que $\overline{P}$ est vraie.

Exemple

Montrons que si $n^2 \in \mathbb{N}$ est impair alors n l'est aussi.

Preuve

Supposons que la proposition Q est fausse, alors n est pair, d'où il existe un k tel que $n = 2k \Leftrightarrow n^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right)$, d'où n^2 est pair (CQFD).

1.5.3 Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer la proposition ($P \Rightarrow Q$) par l'absurde, on suppose que la proposition R est vraie et que la proposition Q est fausse. On tombe sue une troisième proposition noté R contradictoire avec P. Plus précisément, si on suppose $P \wedge \overline{Q}$, alors on trouve une proposition R contradictoire avec la donnée P.

Exemple

Montrer par l'absurde que pour $a,\ b \geq 0$, alors si

$$\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a = b.$$

Preuve

Supposons que $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$ et $a \neq b$, alors on obtient

$$a\,(a+1) = b\,(b+1) \Rightarrow a^2 - b^2 = b - a \Rightarrow (a-b)\,(a+b)\,(b-a)\,,$$

comme $a \neq b$, on arrive à

$$a + b = -1.$$

D'où la contradiction avec le fait que $a,\ b \geq 0$.

1.5.4 Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition ($P \Rightarrow Q$) est fausse, il suffit de donner un cas exemple pour lequel la proposition ($P \Rightarrow Q$) est fausse.

Exemple .

Est-ce que toute fonction continue est dérivable ?

Preuve

Cette proposition est fausse, car si on prend la fonction $f\,(x) = |x|\,,\ x \in [0,\ 1]$ est continue sur cette intervalle mais elle n'est pas dérivable au point $x = 0$, effectivement

$$\lim_{x \to 0^+} f\,(x) = 1 \text{ mais } \lim_{x \to 0^-} f\,(x) = -1\ .$$

Alors, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe mais pas unique.

1.5.5 Le raisonnement par récurrence

Pour montrer que la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0,\ P_n(x)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

a- On montre que $P(n)$ est vraie pour la valeur initiale n_0.

b- On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n

c- On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$. Alors P est vrai pour tous $n > n_0$.

Exemple

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Preuve

a- Pour $n = 1$ valeur initiale, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$, d'où $P(1)$ est vraie
b- Maintenant, on suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

et on doit démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

On utilisant le fait que $P(n)$ est vraie on obtient :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.