المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ فسر النتيجة هندسيا.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5) مثل بيانيا (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

01 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x-e^{-x}] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}-1\right)\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x-e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$$
$$= 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

▪ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x+1-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x+1-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x\,(-e^{-x}+x)}{(e^x+1)^2}$$
$$\frac{-e^x\,g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha)$$
$$= \frac{-e^{\alpha}g(\alpha)}{(e^{\alpha}+1)^2}$$
$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$y = f(\alpha)$

3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	$-$	$-$		$-$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

4) تبيين أن المعادلة $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$:

لتبيين أن $f(x) = x$

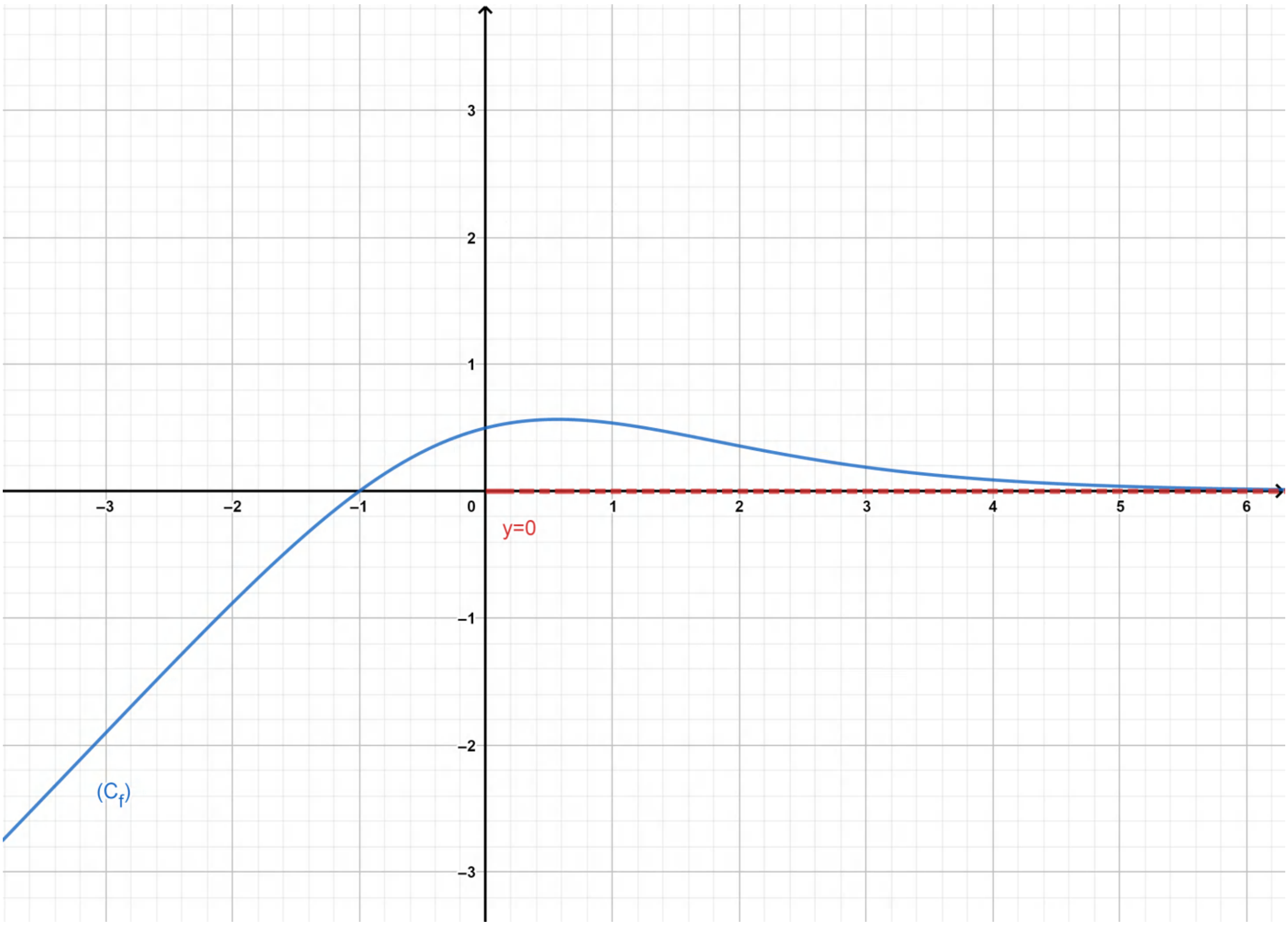
يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\
&= \frac{x + 1 - xe^x - x}{e^x + 1} \\
&= \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \\
&= \frac{e^x(e^{-x} - x)}{e^x + 1} \\
&= \frac{-e^x(x - e^{-x})}{e^x + 1} \\
&= \frac{-e^x g(x)}{e^x + 1} \\
&= \frac{0}{e^x + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا $f(x) = x$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$

5) التمثيل البياني:



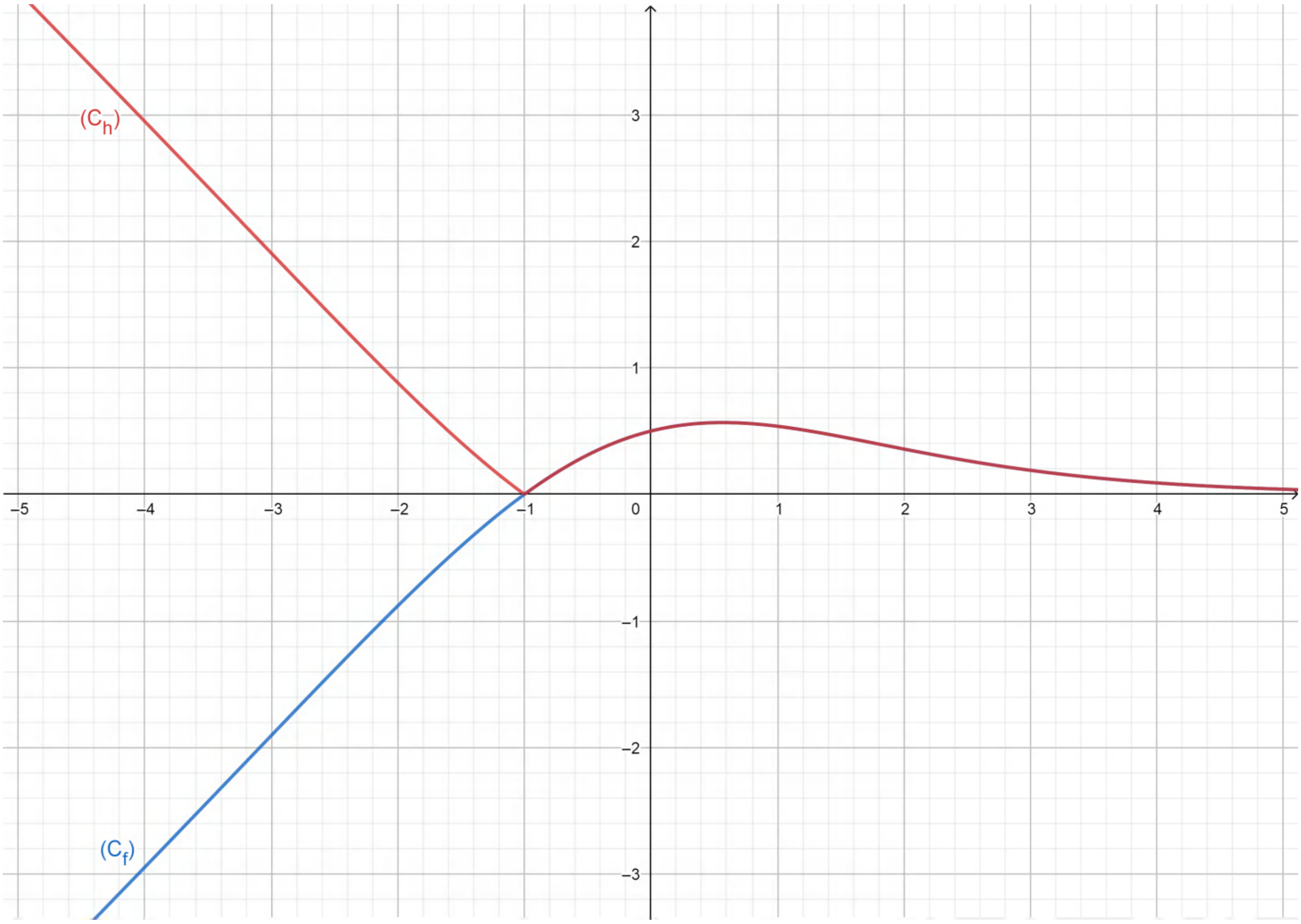
(III)

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = |f(x)|$$
$$= \left|\frac{x+1}{e^x+1}\right|$$
$$= \frac{|x+1|}{e^x+1}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x+1}{e^x+1}; x \geq -1 \\ \dfrac{-x-1}{e^x+1}; x \leq -1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x); x \geq -1 \\ -f(x); x \leq -1 \end{cases}$$

2) تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ ويناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



(C_h)
(C_f)

02 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ – برر اجابتك.

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

9) مثّل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=3f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y=\frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x-2e^x+3x+6}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(x-2+\dfrac{3x+6}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{3}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2+\dfrac{3x+6}{e^x}}{1+\dfrac{3}{e^x}}\right] = +\infty$$

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$:

$$f'(x) = 1-\frac{4e^x(e^x+3)-e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

ومنه $f''(\ln 3) = 0$

4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_1] = \lim_{x \to -\infty} \left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_2] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{12}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$: لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^{x})$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f(x)-y_1$	$-$
الوضعية	(Δ) تحت (C_f)

- <u>الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2)</u> :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_2]$: لدينا:

$$f(x)-y_2=4-\frac{4e^{x}}{e^{x}+3}=\frac{12}{e^{x}+3}>0$$

ومنه

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f(x)-y$	$+$
الوضعية	(Δ) فوق (C_f)

6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$=\left(\frac{e^{0}-3}{e^{0}+3}\right)^{2}(x)+0+2-\frac{4e^{0}}{e^{0}+3}$$

$$=\frac{1}{4}x+1$$

7) تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

- <u>نبين أن $(\ln 3+x)\in D_f$ و $(\ln 3-x)\in D_f$</u> :

لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln 3+x)\in]-\infty;+\infty[$ و $(\ln 3-x)\in]-\infty;+\infty[$

- <u>نبين أن $f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=2\ln 3$</u>

$$f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=\left(\ln 3+x+2-\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}\right)+\left(\ln 3-x+2-\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}+\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{12e^{x}}{3e^{x}+3}+\frac{12e^{-x}}{3e^{-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4+4e^{x}+4+4e^{-x}}{1+e^{x}+e^{-x}+1}\right)$$

$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$
$$= 2\ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$

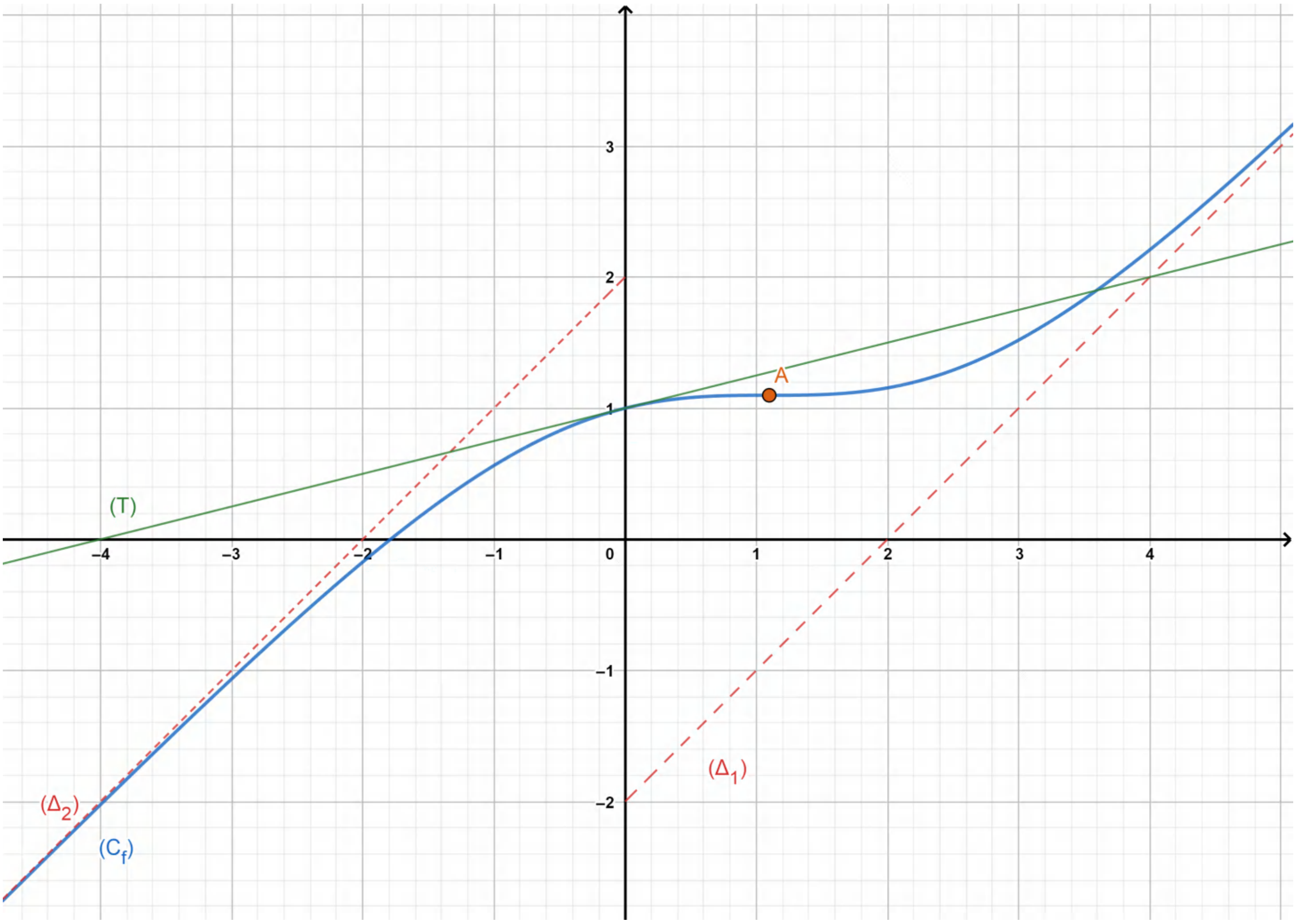
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10)المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

نضع $h(x) = f(-|x|)$

ومنه:

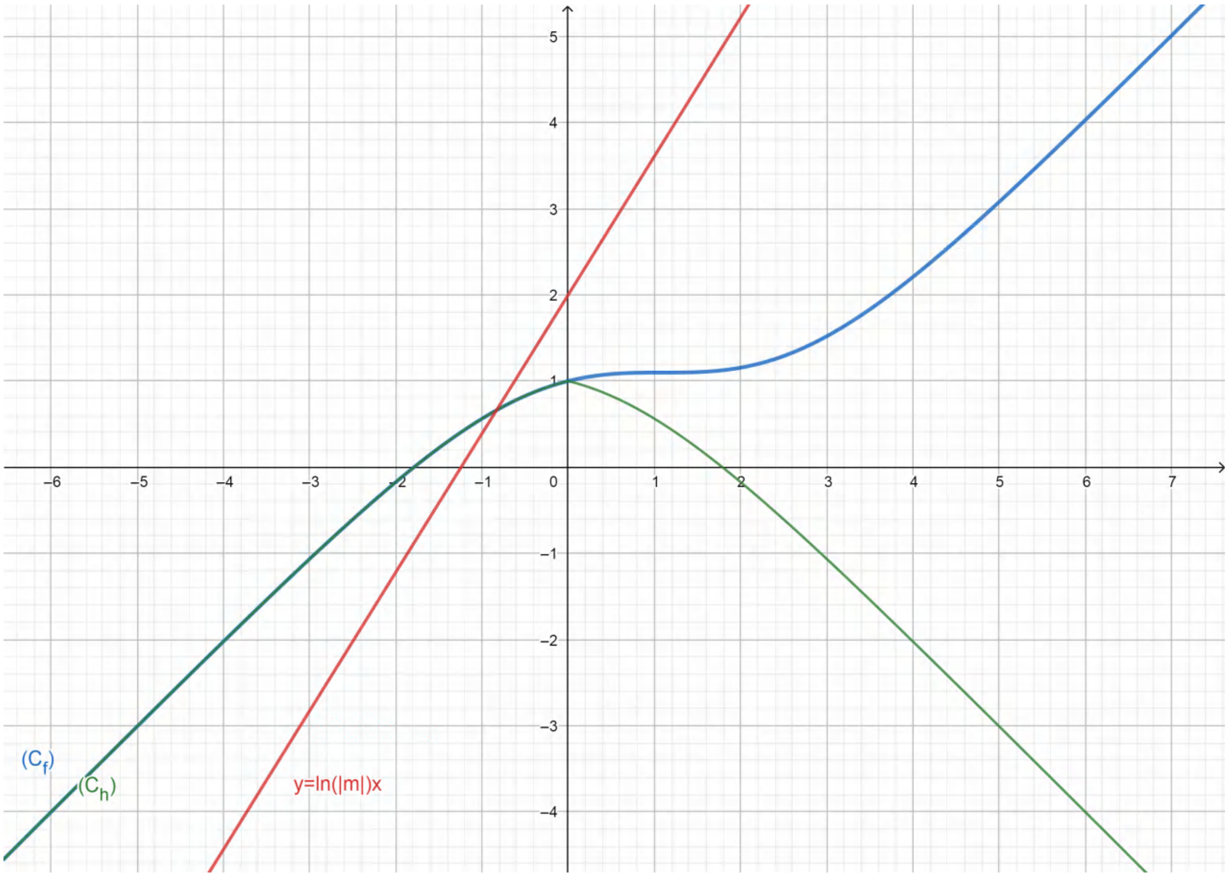
$$h(x) = \begin{cases} f(-(x)); x \geq 0 \\ f(-(-x)); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y = \ln|m|\, x$



ومنه المناقشة كالآتي:

المعادلة لا تقبل حلولا لما:

$$-1 \leq \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$\ln|m| \geq -1 \text{ و } \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$|m| \geq e^{-1} \text{ و } |m| \leq e$$

أي:

$$m \in]-e; e[$$

و

$$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$$

أي:

$$m \in \begin{pmatrix}]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[\\ \cap \\ ]-e; e[\end{pmatrix}$$

أي:

$$m \in]-e; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| < -1$$

أي:

$$|m| < e^{-1}$$

أي:

$$-e^{-1} < m < e^{-1}$$

أي:

$$m \in]-e^{-1}; e^{-1}[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| > -1$$

أي:

$$|m| > e$$

أي:

$$m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$$

لما: $< \ln|m| \leq 1$ أي: $|m| \leq e$ أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0\\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)\end{aligned}$$

4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} = 0\\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}\\ &\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3) - 4e^{\alpha} = 0\\ &\Rightarrow ae^{\alpha} + 3a + 2e^{\alpha} + 6 - 4e^{\alpha} = 0\\ &\Rightarrow e^{\alpha}(a-2) = -(3a+6)\\ &\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{3a+6}{2-\alpha}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^{\alpha} - 3}{e^{\alpha} + 3}\right)^{2}\left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3}\right)^{2}\left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2}\left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= \frac{3\alpha^{2}}{4}x - \frac{\alpha^{2}(\alpha + 2)}{4}$$

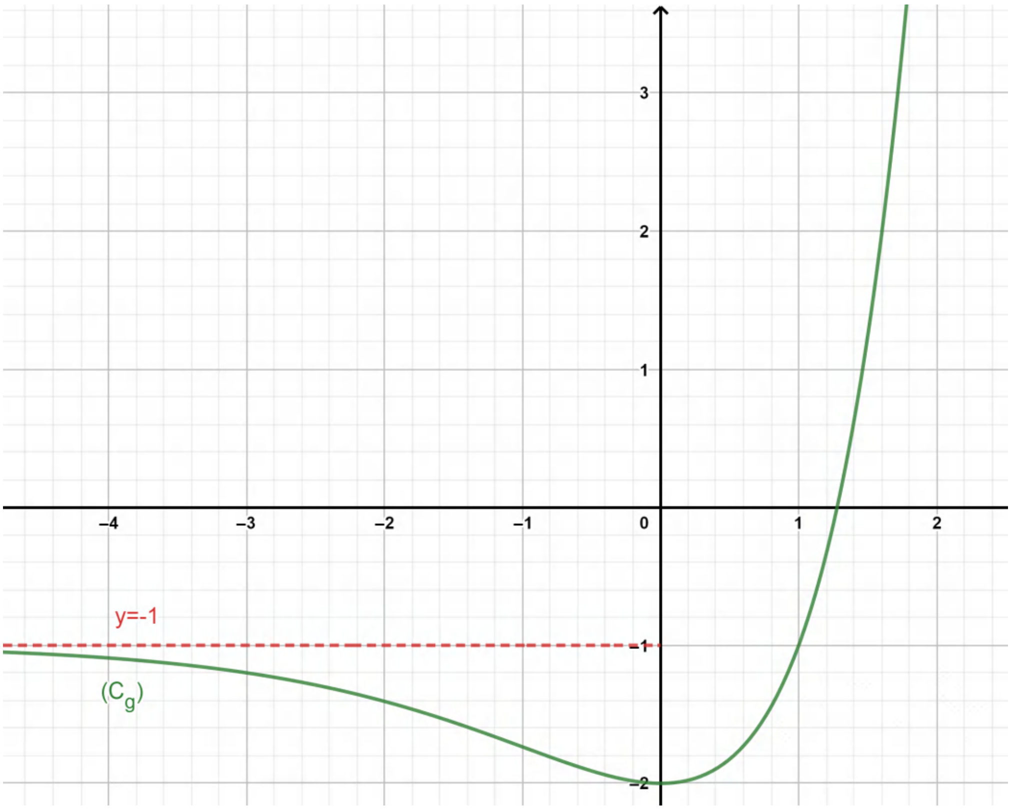
المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهـــدة الحـــل

(I) a ، b و c أعداد حقيقة، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax+b)e^x + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. كما في الشكل أدناه:



1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]$.

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$.

2) مما سبق أوجد a ، b و c.

3) نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

1) أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب/ احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنّه من اجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

5) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

7) مثّل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

حل المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) من البيان نجد:

أ/

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$

ب-

- $g(0) = -2$
- $g'(0) = 0$

2) ايجاد a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + c = -2 \\ (a(0)+a+b)e^0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c = -2 \\ a+b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

3) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

لدينا: $g(1.3) = 0.1$ و $g(1.2) = -0.3$

ولدينا: $g(1.3) \times g(1.2) < 0$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

2) أ/ تبيين أنه من اجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-\left((x-1)e^x-1\right)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $0 > \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} = f'(x)$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

3) تعيين $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α موازٍ لحامل محور الفواصل.

4) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)(0-a) + f(a) = 0 \\ &\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0 \\ &\Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0 \\ &\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0 \\ &\Rightarrow a^2e^a = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1} \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

5) تبيين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1 \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} &1.2 < \alpha < 1.3 \\ &0.2 < \alpha - 1 < 0.3 \\ &0.2 < f(\alpha) < 0.3 \end{aligned}$$

6) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-y]$:

$$f(x)-y = \frac{x}{e^x+1}-x$$
$$= \frac{x-xe^x-x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $(e^x+1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

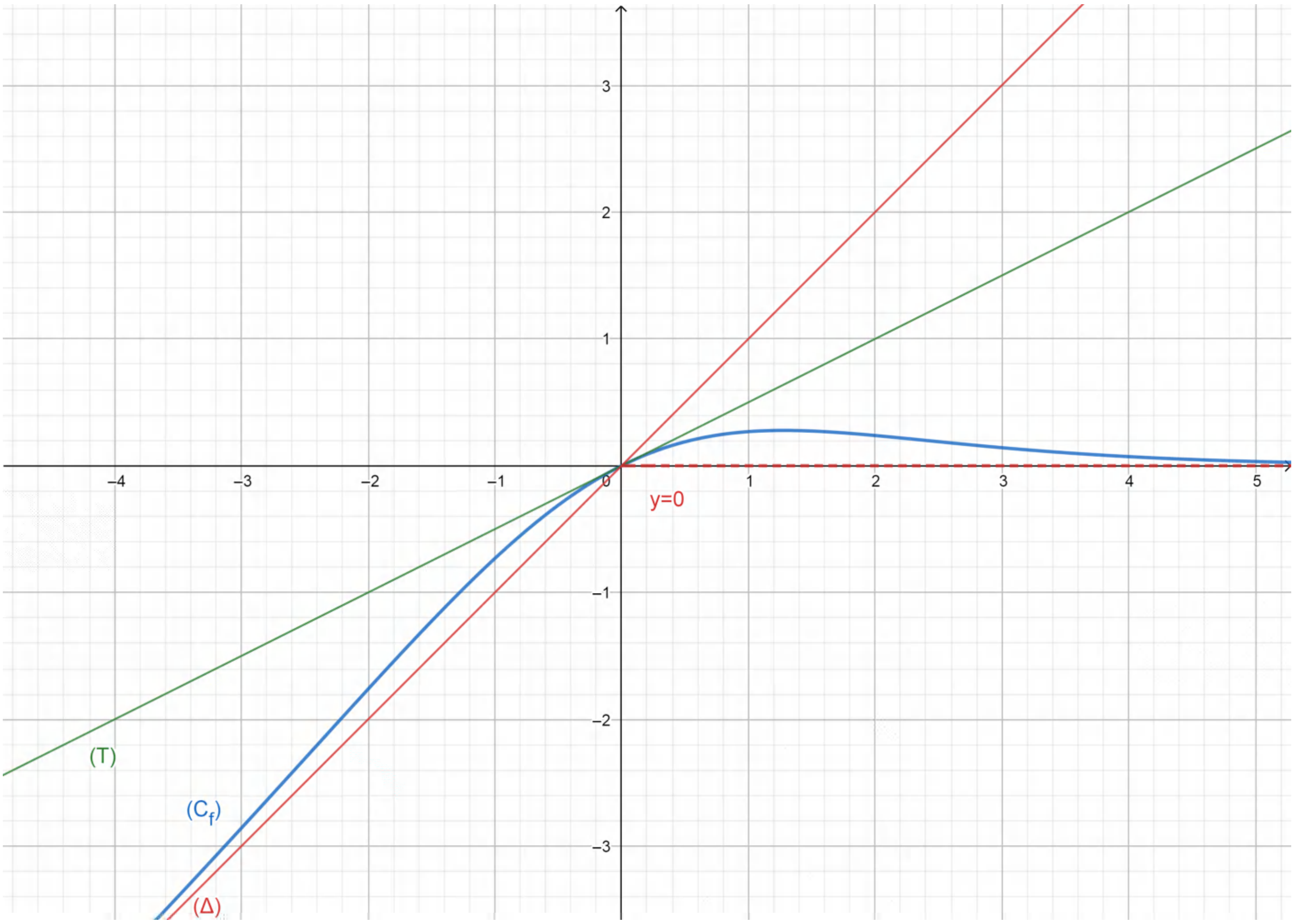
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0;+\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $0 < m < \alpha$ المعادلة تقبل حلين موجبين

لما $m = \alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما $m > \alpha$ المعادلة لا تقبل حلولا

المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) برهن أنّ النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

5) مثّل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أن الدالة k زوجية .

2) أ/ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

حل المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهــــدة المسألة

(I)

1) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \end{aligned}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتها

ومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1}\right]$
$= -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$
$= +\infty$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) برهان أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني $\left(C_f\right)$:

◄شاهد هذا التذكير►
(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نثبت أن: $(2(0)-x) \in D_f$:

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(0)-x)+f(x) &= -x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1} \\
&= -2+\frac{4}{e^{-x}+1}+\frac{4}{e^{x}+1} \\
&= \frac{-2(e^{-x}+1)(e^{x}+1)+4(e^{x}+1)+4(e^{-x}+1)}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+1)+2(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)(e^{x}+1)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{e^{x}+e^{-x}+2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني $\left(C_f\right)$.

3) أ/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x+1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}\right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x - 1$.

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= 3$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]-3 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3] = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◄ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لانها لا تتعلق بالمتغير x ►

4) تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-2.76) = 0.001$ و $f(-2.77) = -0.3$

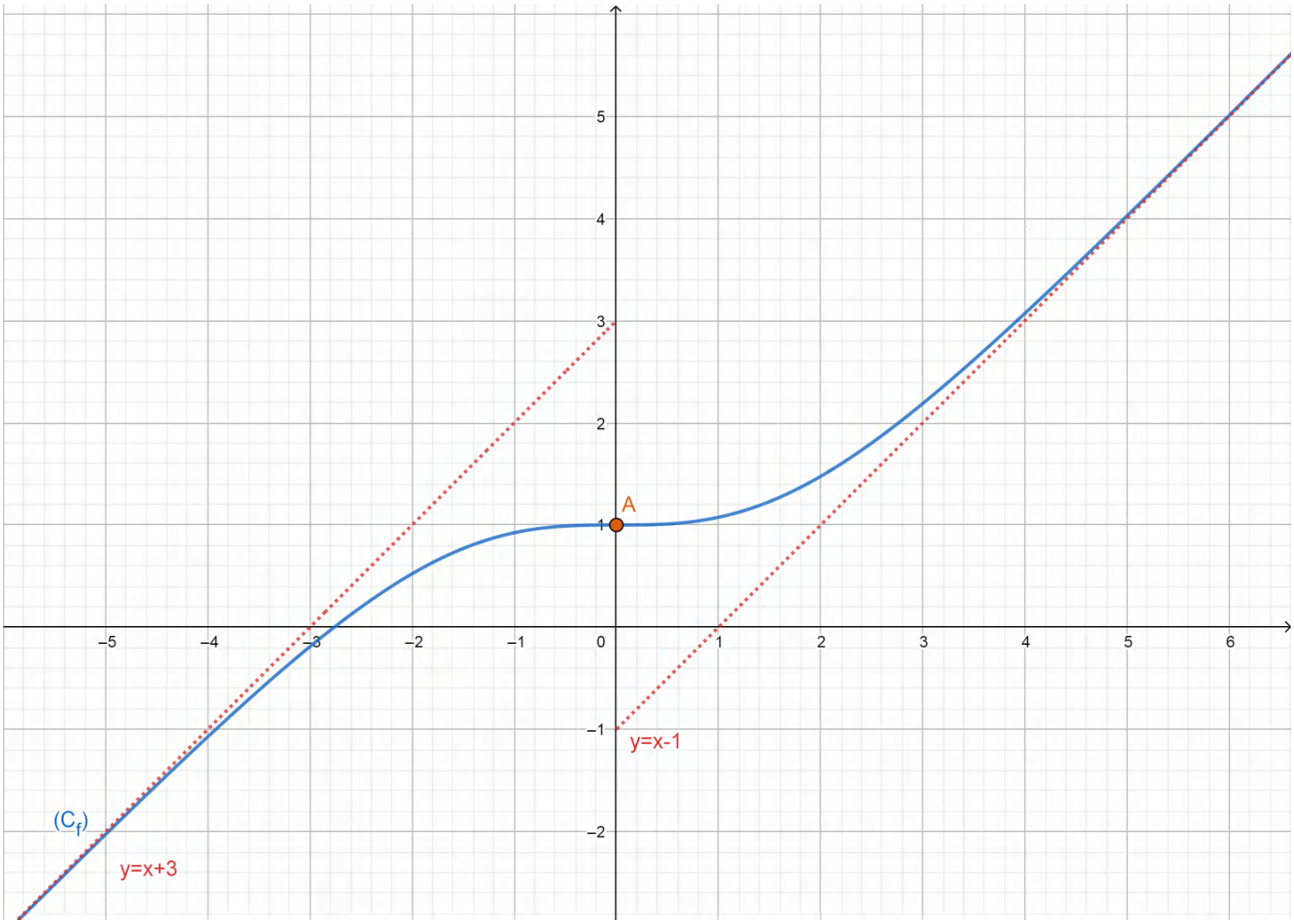
ولدينا: $f(-2.77) \times f(-2.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $(y = x - 1)$ و $(y = x + 3)$
- نعين A نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزادية تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= f\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right) \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تبيين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x+1)$ ومنه :

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= 4f'\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right) \\ &= 4f'(\alpha) \end{aligned}$$

f دالة معرفة على مجال I
وg دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$\begin{aligned}(T): y &= g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\\ &= 4f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+0\\ &= 4f'(\alpha)x-f'(\alpha)(\alpha-1)\end{aligned}$$

4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha)=0 &\Rightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^\alpha+1}=0\\ &\Rightarrow \frac{4}{e^\alpha+1}=1-\alpha\\ &\Rightarrow e^\alpha=\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(T): y &= 4\left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}+1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)\\ &= 4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)\\ &= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}\\ &= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}\\ &= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}\end{aligned}$$

(III)

1) تبيين أن الدالة k زوجية :

لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

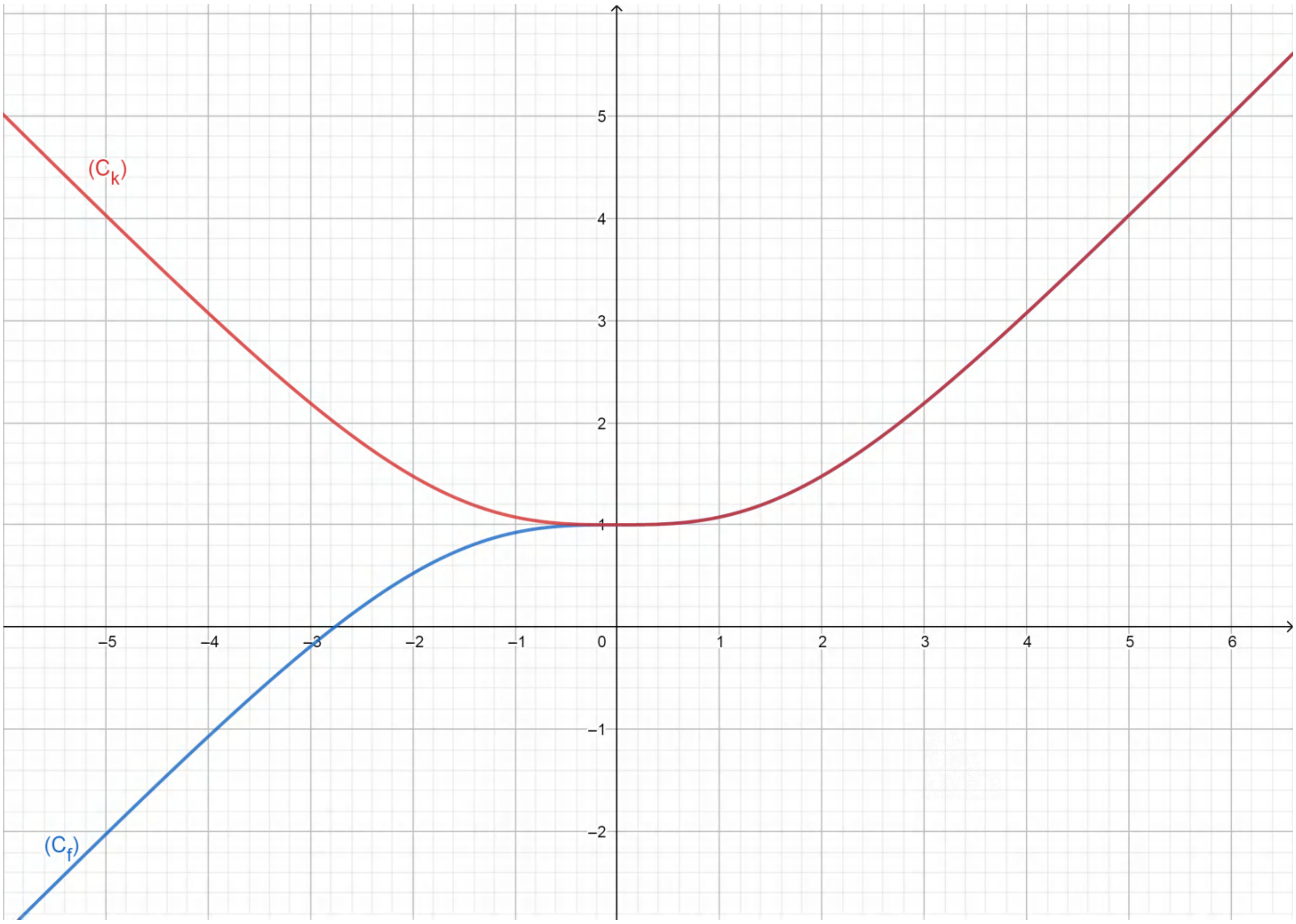
ومنه الدالة k زوجية.

2) أ/ تبيين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) :

لمّا $x\geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب (yy')

ب/ التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV)

1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

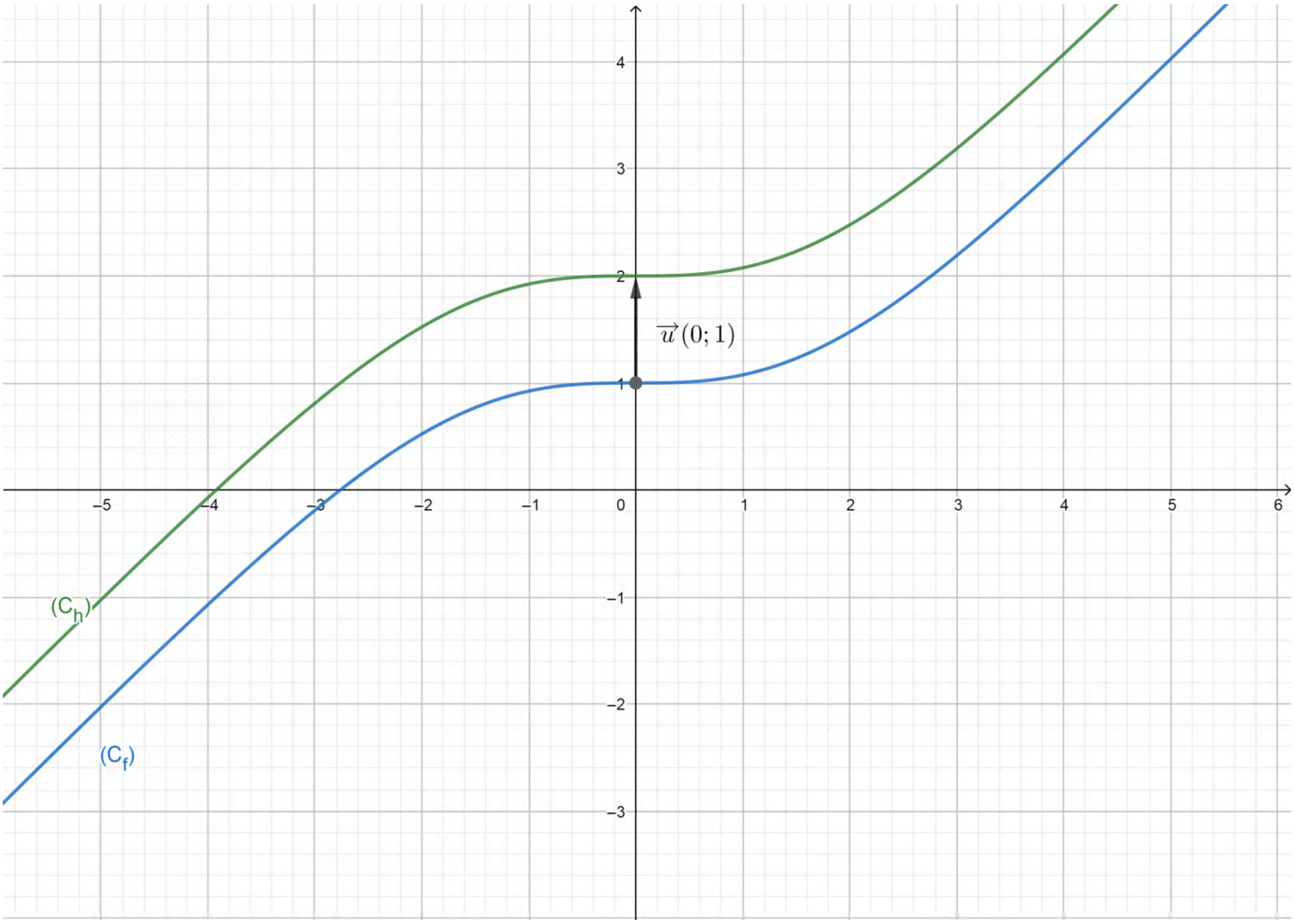
$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2) أ/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0;1)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :


$\overrightarrow{u}(0;1)$
(C_h)
(C_f)

05 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسيا.

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عيّن دون حساب كل من : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ و $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$

ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

7) نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أنّ: $p(0) = 0$.

8) أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1-mx^2)+mx-1=0$$

حل المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x+2-e^x] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x+2-e\text{^}x\,] = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$ نهاية شهيرة)

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1-e^x$$

لدينا:

$$g'(x)=0 \Rightarrow 1-e^x=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=\ln 1 \Rightarrow x=0$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلان α و β :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(1.15)=-0.008$ و $g(1.14)=0.01$

ولدينا: $g(1.14)\times g(1.15)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]1.14;1.15[$:

ولدينا: $g(-1.8)=0.03$ و $g(-1.9)=-0.04$

ولدينا: $g(-1.9)\times g(-1.8)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد β في المجال $]-1.9;-1.8[$:

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right]$$
$$=-1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x]=0$ (نهاية شهيرة)

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}\right]$$
$$=0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $y=-1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y=0$.

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}$:

$$f'(x)=\frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$$
$$=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$=\frac{-e^{2x}+2e^x+xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}$$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $e^{x} > 0$ و $(xe^{x}+1)^{2} > 0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ولدينا : $f(0)=0$ ومنه جدول التغيرات كالآتي:

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) تعيين دون حساب كل من : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ و $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$:

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]=f'(\alpha)=0$
- $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]=f'(\beta)=0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β .

5) تبيين أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha+2-e^{\alpha}$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}=\alpha+2$$

ومنه:

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$$
$$=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$$
$$=\frac{\alpha+1}{\alpha^{2}+2\alpha+1}$$
$$=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^{2}}$$
$$=\frac{1}{\alpha+1}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.14<\alpha<1.15$$
$$1.14+1<\alpha+1<1.15+1$$

$$\frac{1}{2.15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

6) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$:

لدينا $h(0) = 0$

ولدينا:

- $$\lim_{x\to+\infty}[h(x)] = \lim_{x\to+\infty}[e^x - xe^x - 1]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right)\right]$$
$$= -\infty$$
- $$\lim_{x\to-\infty}[h(x)] = \lim_{x\to-\infty}[e^x - xe^x - 1]$$
$$= -\infty$$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة h هي 0

ومنه $h(x) \leq 0$.

7) التحقق من ان: $p(0) = 0$:

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

8) أ- تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$:

◄ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ►

ومنه:

$$f'(a) \times -1 = -1 \Rightarrow f'(a) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{e^a(a + 2 - e^a)}{(ae^a + 1)^2} = 1$$
$$\Rightarrow e^a(a + 2 - e^a) = (ae^a + 1)^2$$
$$\Rightarrow (ae^a + 1)^2 - e^a(a + 2 - e^a) = 0$$

$$\Rightarrow a^2e^{2a}+1+2ae^a+e^{2a}-2e^a-ae^a=0$$
$$\Rightarrow (a^2+1)e^{2a}+(a-2)e^a+1=0$$
$$\Rightarrow p(a)=0$$
$$\Rightarrow a=0$$

المعادلة تقبل حل، ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x+5$

ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

$$(T): y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$=x+f(0)$$
$$=x$$

ج- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x$$
$$=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}$$
$$=\frac{e^x(1-x^2)-(1+x)}{xe^x+1}$$
$$=\frac{e^x(1-x)(1+x)-(1+x)}{xe^x+1}$$
$$=\frac{(1+x)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}$$
$$=\frac{(1+x)h(x)}{xe^x+1}$$

لدينا: $h(x)\leq 0$

ولدينا:

$$1+x=0\Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$

- ندرس إشارة (xe^x+1) :

نضع $\varphi(x)=xe^x+1$

$$\varphi'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

$e^x>0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1+x)$

$$1+x=0\Rightarrow x=-1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	0.6	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أن $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h(x)$		$-$		$-$	
$1 + x$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (T) لما $x \in]-\infty; -1[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(-1; -1)$
- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-1; +\infty[$

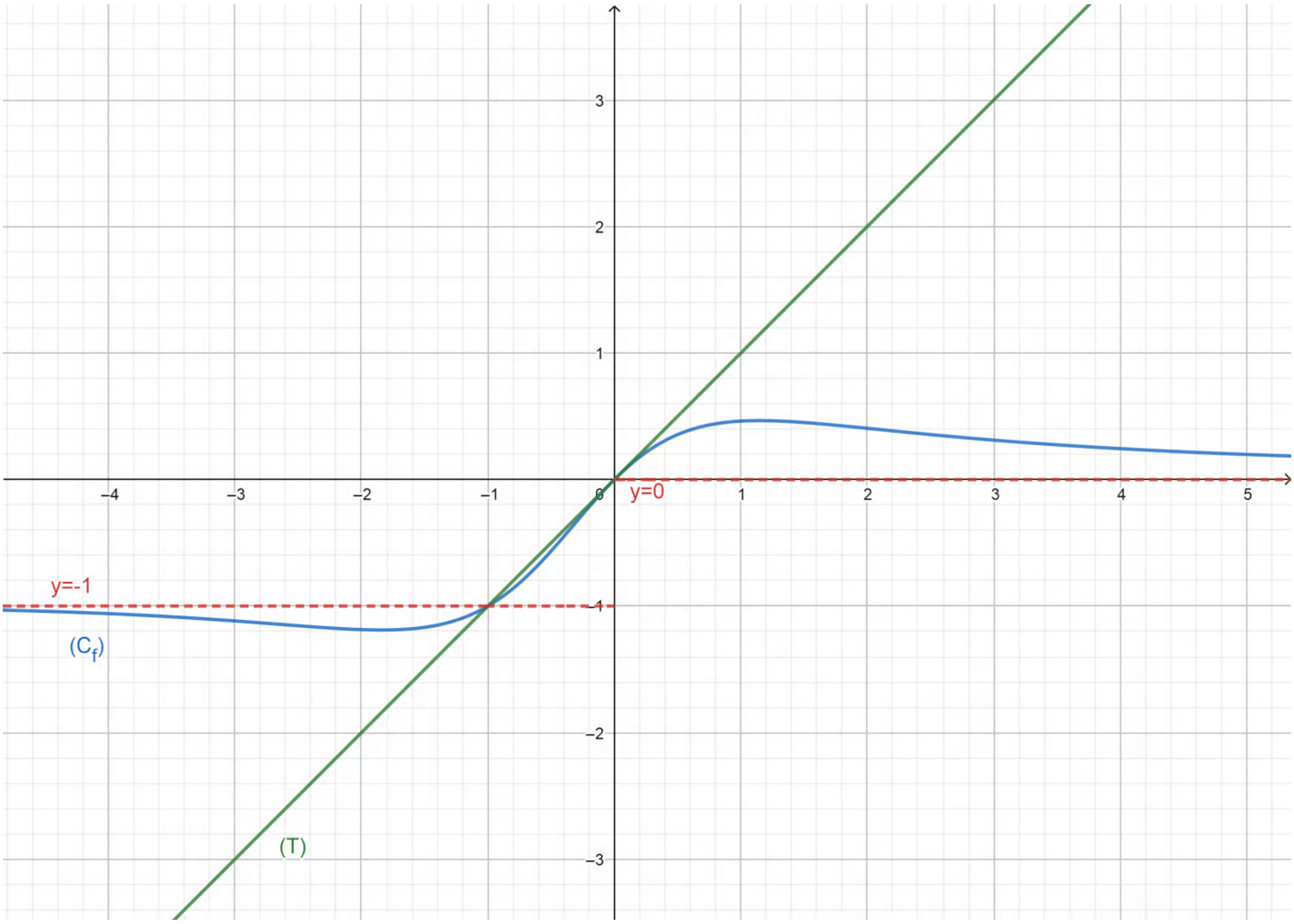
- الاستنتاج:

المماس (T) يقطع المنحني (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$ معناه توجد نقطة انعطاف

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $(y = -1)$ و $(y = 0)$
- نرسم المماس (T).
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10) المناقشة البيانية:

$$e^x(1-mx^2)+mx-1=0 \Rightarrow e^x-mx^2e^x+mx-1=0$$
$$\Rightarrow mx(1-xe^x)=1-e^x$$
$$\Rightarrow mx=\frac{1-e^x}{1-xe^x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{xe^x-1}=mx$$
$$\Rightarrow f(x)=mx$$

مجموعة حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة : $f(x)=mx$

ومنه:

لما $m=1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x=0$ وحلا سالبا

لما $0<m<1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m\leq 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لما $m>1$ المعادلة تقبل حلا معدوما

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f' .

2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$1.9 < \alpha < 2$ و $-0.6 < \beta < -0.5$.

6) مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \;...\; (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

حل المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة المسألة

1) دراسة تغيرات الدالة f' :

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} \\ &= 2 - (1+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة f' :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= 2$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= -\infty$$

- حساب $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1} \\ &= -(2+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$:

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	2	$\nearrow$	$f'(-2)$	$\searrow$	$-\infty$

2) حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

3) دراسة تغيرات الدالة f :

- <u>النهايات:</u>

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^{x-1}] = 0$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x+1-xe^{x-1}] = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{2x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}-x\right)\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{e^{x-1}}\right] = 0$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$

4) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}-2x-1] = \lim_{x\to-\infty}[-xe^{x-1}] = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$

- **الوضعية:**

- (C_f) فوق (Δ) لما : $x < 0$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات: $(0;1)$
- (C_f) تحت (Δ) لما : $x > 0$.

5) أ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):

المستقيم (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه:

$$\begin{aligned} f'(a) = 2 &\Rightarrow 2-(1+a)e^{a-1} = 2 \\ &\Rightarrow -(1+a)e^{a-1} = 0 \\ &\Rightarrow -(1+a) = 0 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1) \\ &= 2x+2+2(-1)+1-(-1)e^{-1-1} \\ &= 2x+1+e^{-2} \end{aligned}$$

إذن معادلة المماس (T) هي :

$$y = 2x+1+e^{-2}$$

ب/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(1.9)\times f(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.9;2[$

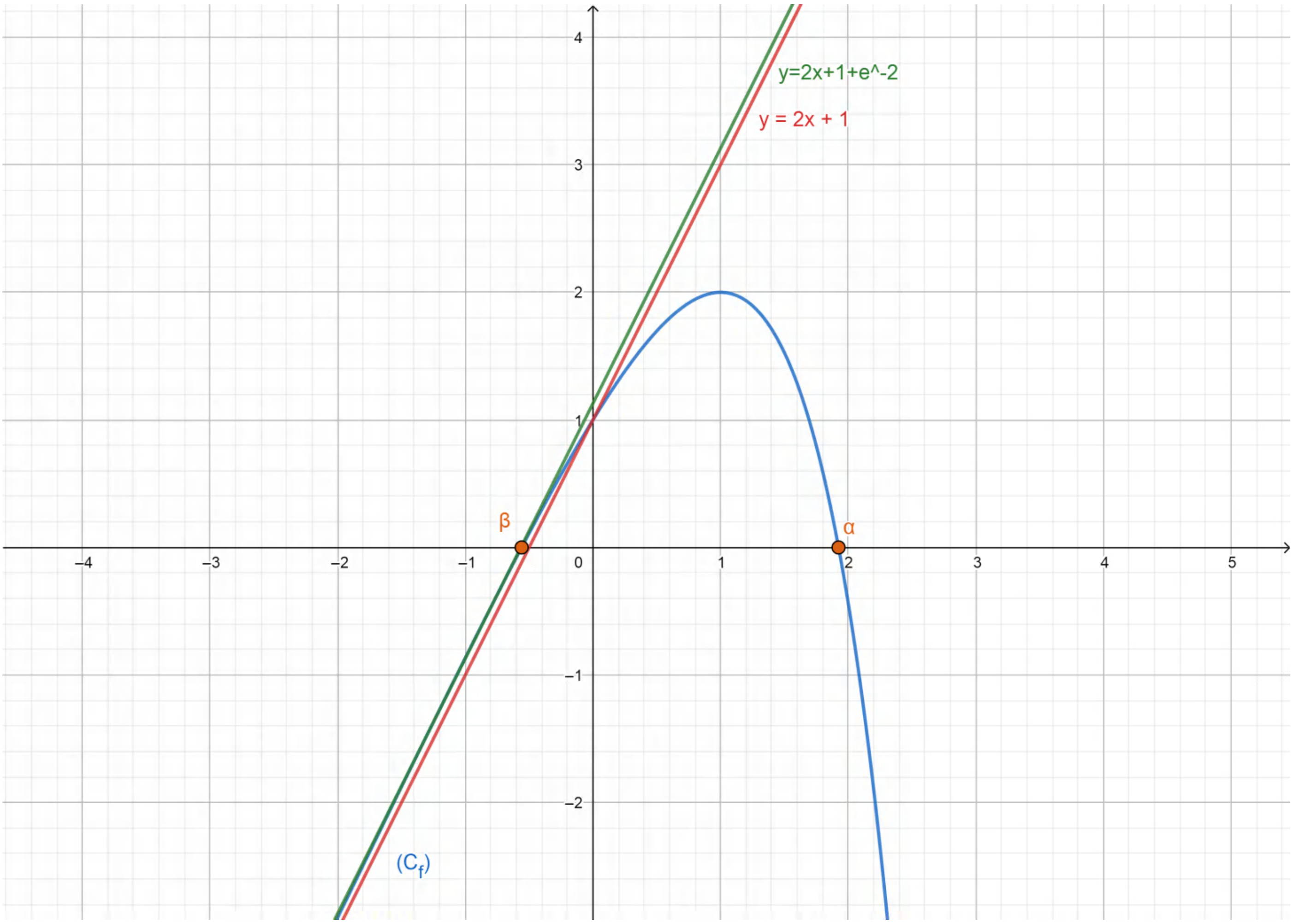
ولدينا: $f(-0.6)\times f(-0.5) <$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-0.6;-0.5[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين α و β نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل : $(y = 2x+1)$.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة (E) : $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2x + \ln m$

ومنه:

لما $\ln m < 1$ أي $m < e$ أي $m \in]0; e[$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $\ln m = 1$ أي $m = e$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $1 < \ln m < 1 + e^{-2}$ أي $e < m < e^{1+e^{-2}}$ أي $m \in \left]e; e^{1+e^{-2}}\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين

لما $\ln m = 1 + e^{-2}$ أي $m = e^{1+e^{-2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف

لما $\ln m > 1 + e^{-2}$ أي $m > e^{1+e^{-2}}$ أي $m \in \left]e^{1+e^{-2}}; +\infty\right[$ المعادلة لا تقبل حلول

07 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=(2x+1)e^{x}-1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g' :

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x(e^{x}-1)^{2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحى (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x)=(e^{x}-1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند المبدأ.

5) مثّل بيانيا كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x)=mx$$

حل المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g' :

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2x+1)e^x - 1] = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(2x+1)e^x - 1] = +\infty$

- التفسير الهندسي للنهايات:

- منحني الدالة g يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x$$
$$= (2x+3)e^x$$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+3)$:

$$2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(\frac{-3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = (2(0)+1)e^0 - 1 = 0$$

- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(e^x-1)^2] = +\infty$

2) أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] &= \lim_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2-x]\\ &= \lim_{x\to-\infty}[xe^{2x}+x-2xe^x-x]\\ &= \lim_{x\to-\infty}[xe^x(e^x-2)]\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x)-y = xe^x(e^x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2\,; +\infty[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $A(0;0)$ و $B(\ln 2\,; \ln 2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]0; \ln 2[$.

3) أ/ تبيين أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = (e^x-1)g(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x-1)^2 + 2xe^x(e^x-1)\\ &= (e^x-1)(e^x-1+2xe^x)\\ &= (e^x-1)(e^x(2x+1)-1)\\ &= (e^x-1)g(x)\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة (e^x-1)

$$\begin{aligned}e^x - 1 = 0 &\Rightarrow e^x = 1\\ &\Rightarrow x = \ln 1\\ &\Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
f'(a)(0-a) + f(a) = 0 \\
&\Rightarrow -a(e^a-1)g(a) + a(e^a-1) = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-g(a) + (e^a-1)] = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-(2a+1)e^a + 1 + e^a - 1] = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] = 0 \\
&\Rightarrow -2a^2(e^a-1)e^a = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow a = 0
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
(T): y &= f'(0)x + f(0) \\
y &= 0x + 0 \\
y &= 0
\end{aligned}$$

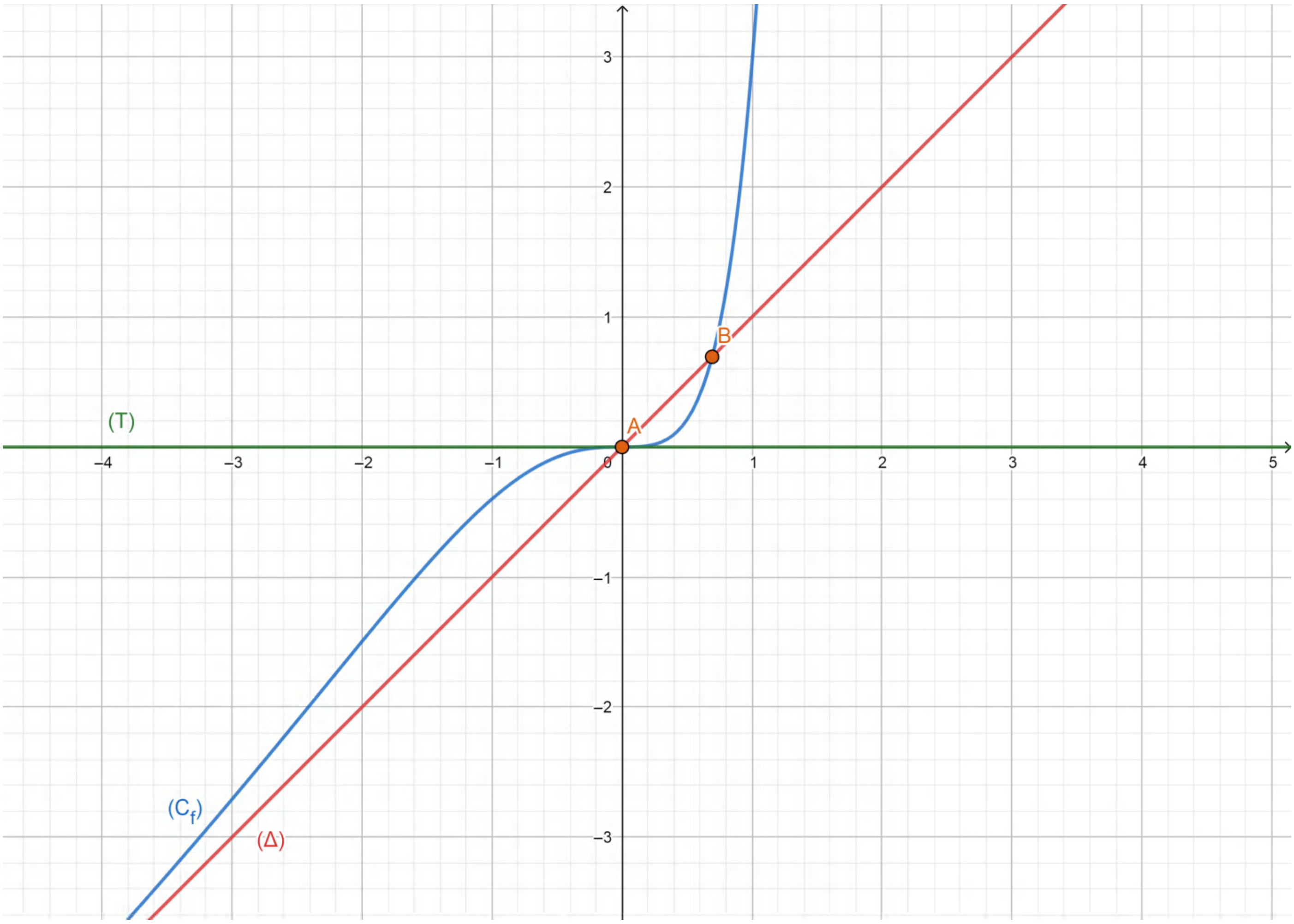
ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مماس للمنحني (C_f) .

5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) : $(y = x)$.
- نعين A و B نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم. (Δ)
- نرسم المماس (T) .

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

08 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

2) احسب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها.

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ/ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right] 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

6) مثل بيانيا (C_f) .

حل المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ تبيين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^{x}+1}$:

$$1 - \frac{1}{e^{x}+1} = \frac{e^{x}+1-1}{e^{x}+1}$$
$$= \frac{e^{x}}{e^{x}+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$
$$= \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ب/ استنتاج أن الدالة f فردية:

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^{-x}+1} - \frac{1}{e^{-x}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{e^{x}+1} - 1 + \frac{1}{e^{x}+1}$$
$$= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^{x}+1}$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1}\right)$$
$$= -f(x)$$

إذن الدالة f فردية

2) حساب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = -\infty$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^{x}+1)^2 + 4e^{x}}{2(e^{x}+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x} - 1 - 2e^{x} + 4e^{x}}{2(e^{x}+1)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا $-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0;0)$

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

4) أ/ تبيين أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right] = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} + \frac{1}{2}x - 1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} + \frac{1}{2}x + 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{2}{e^x+1}\right]$$

$$= 2 - 2 = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$
$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f(x) - y$	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (d)

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$ و $\left(y = -\frac{1}{2}x + 1\right)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)


y=-1/2 x-1
(C_f)
y=-1/2 x+1

المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$.

2) أ/ بيّن أنّ المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أنّ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2+\ln 4]$ وتحته على المجال $[2+\ln 4\,; +\infty[$

3) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5) اثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$.

6) مثّل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

1) تبيين أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}[x-2] = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty}[e^x] = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = +\infty \end{cases}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = -\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right] = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty}[x-2] = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right] = -\infty \end{cases}$$

2) أ/ تبيين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$:

$$e^{x-2}-4=0 \Rightarrow e^{x-2}=4$$
$$\Rightarrow x-2=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=\ln 4+2$$

- تبيين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2+\ln 4[$ وتحته على المجال $]2+\ln 4\,; +\infty[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x)-y = -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2}-4=0 \Rightarrow x=\ln 4+2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4+2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$		$-$
$e^{x-2}-4$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2+\ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2+\ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2+\ln 4\,; +\infty[$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)-\frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}-2e^{x-2}+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -\left(1+e^{2(x-2)}-2e^{x-2}\right) \\ &= -(e^{x-2}-1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Rightarrow -(e^{x-2}-1)^2=0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2}-1)^2=0 \\ &\Rightarrow e^{x-2}-1=0 \\ &\Rightarrow e^{x-2}=1 \\ &\Rightarrow x-2=0 \\ &\Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x)=-2e^{x-2}(e^{x-2}-1)$$

دراسة $f''(x)$:

لدينا $-2e^{x-2} < 0$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	$-$	0	$-$
$e^{x-2} - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2 + \ln 4) = -0.83$ و $f(2 + \ln 3) = 0.93$

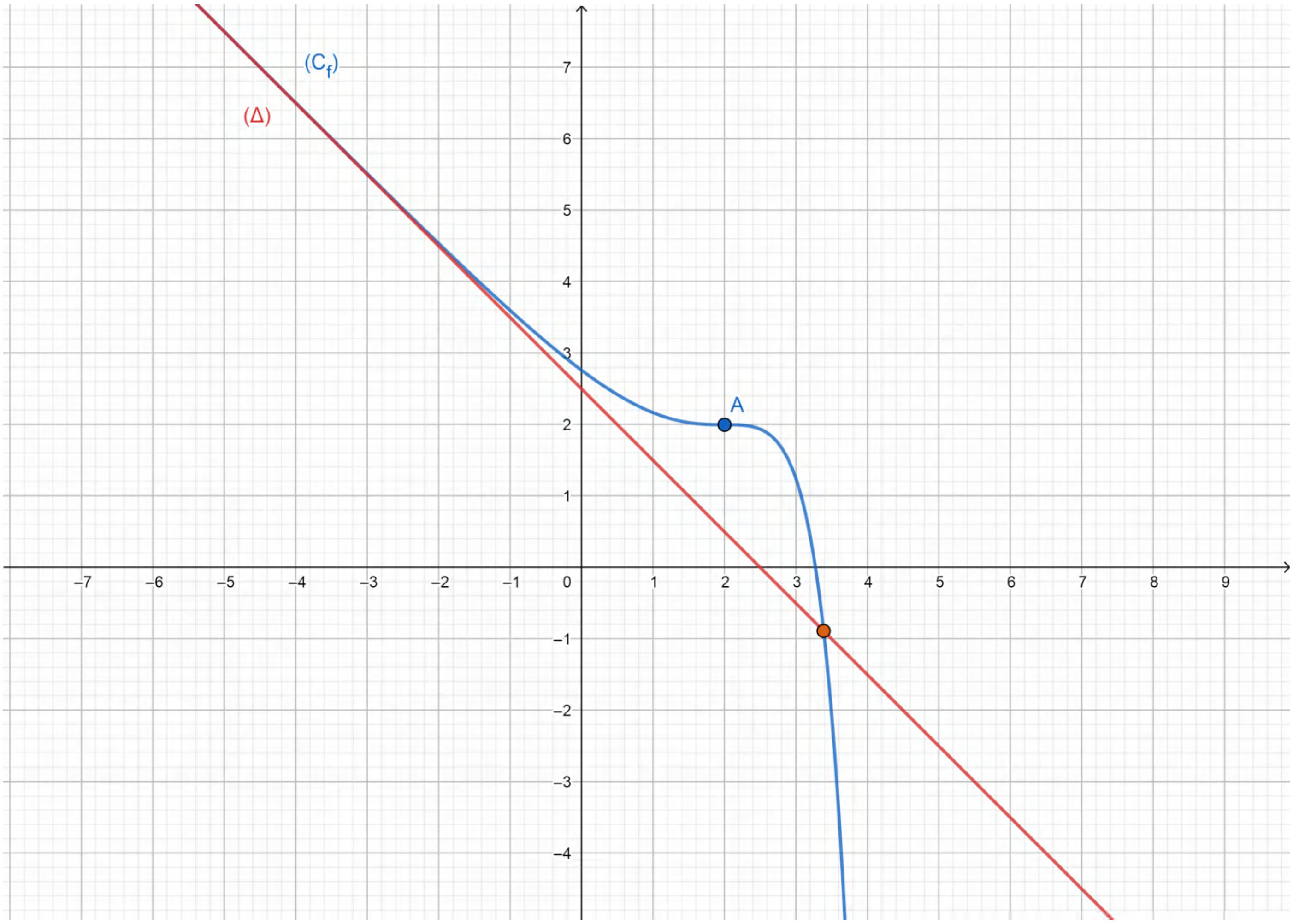
ولدينا: $f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3 < 0)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(C_f)
(Δ)
A

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ـ ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim_{x \to +\infty} [f(x)]$.

2) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.

6) مثّل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

10 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[e^x + x + 2] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[e^x + x + 2]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$:

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\quad g(-2.2) = -0.08 \quad$ و $\quad g(-2.1) = 0.02$

ولدينا: $\quad g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$:

$$f(x) = \frac{1-xe^x}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-x\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{e^x}-x}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$= \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = 0$

2) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(-e^x-xe^x)(e^x+1)-e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x(1+x)(e^x+1)-e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-(1+x)(e^x+1)-(1-xe^x)]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-e^x-1-xe^x-x-1+xe^x]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x[e^x+x+2]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$$

3) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4) أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}-x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x+xe^x+x}{e^x+1}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x}{e^x+1}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$

$$f(x)-y = \frac{1+x}{e^x+1}$$

لدينا: $(e^x+1) > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty;-1[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1;+\infty[$.

5) أ/ تبيين أن: $f(\alpha) = -(\alpha+1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}g(\alpha) = 0 &\Rightarrow e^\alpha + \alpha + 2 = 0\\ &\Rightarrow e^\alpha = -(\alpha+2)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}\\ &= \frac{1+\alpha(\alpha+2)}{-(\alpha+2)+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{-(\alpha + 1)}$$
$$= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)}$$
$$= -(\alpha + 1)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$
$$-1.2 < \alpha + 1 < -1.1$$
$$1.1 < -(\alpha + 1) < 1.2$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبيين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.6) = -0.03$ و $f(0.5) = 0.06$

ولدينا: $f(0.4) \times f(0.6) < 0$

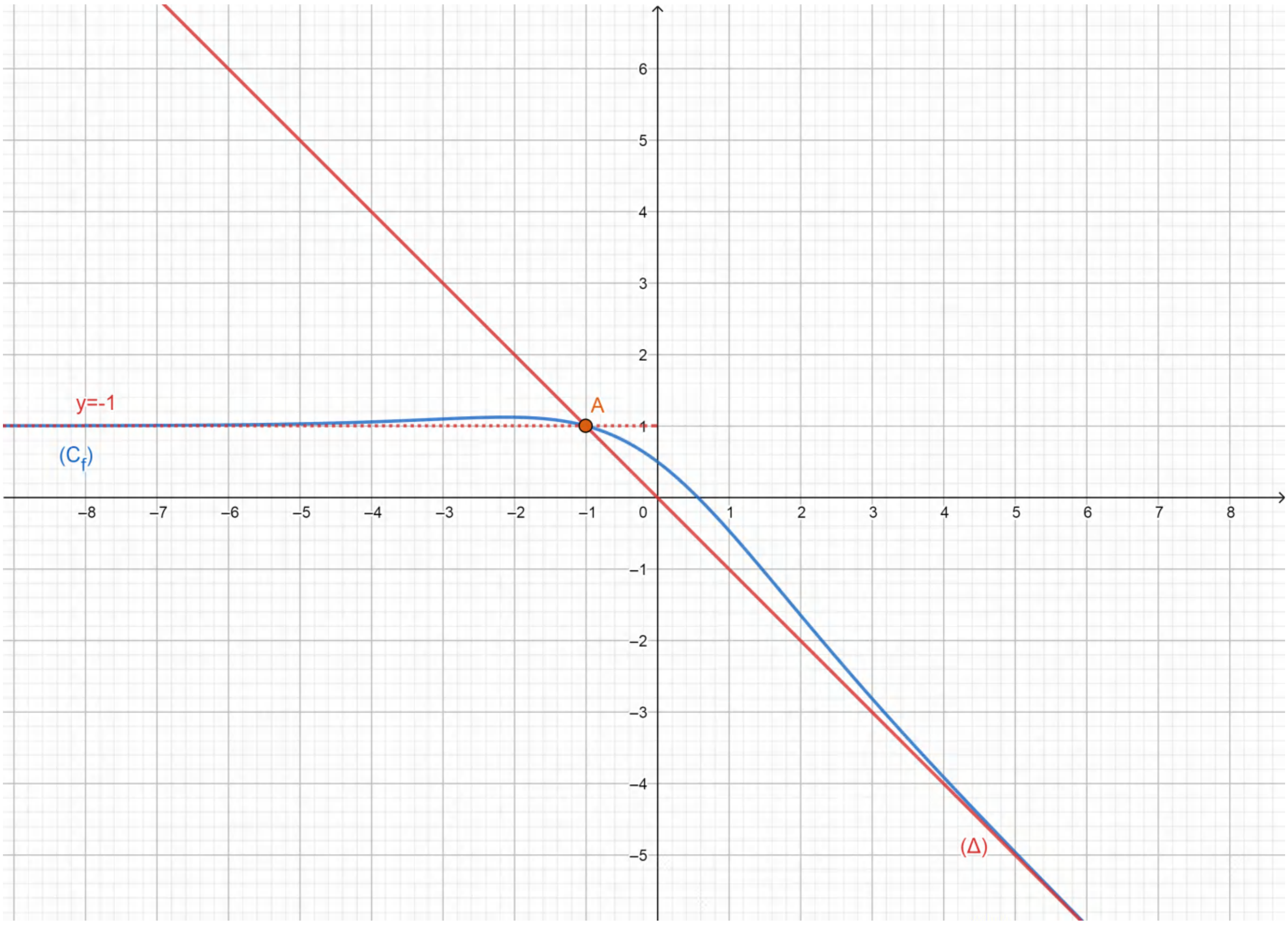
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $]0.5; 0.6[$

ومنه المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة β .

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $(y = -x)$
- نعين A نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\ln m+(x+\ln x)e^{x}-1=0 \Rightarrow \ln m+xe^{x}+e^{x}\ln m-1=0$$
$$\Rightarrow \ln m\,(1+e^{x})=1-xe^{x}$$
$$\Rightarrow \ln m=\frac{1-xe^{x}}{1+e^{x}}$$
$$\Rightarrow f(x)=\ln m$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\ln m$

لما $\ln m<\frac{1}{2}$ أي $m<\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $\ln m=\frac{1}{2}$ أي $m=\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $\frac{1}{2}<\ln m<1$ أي $\sqrt{e}<m<e$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $1<\ln m<f(\alpha)$ أي $e<m<e^{f(\alpha)}$ المعادلة تقبل حلان سالبان

لما $\ln m=f(\alpha)$ أي $m=e^{f(\alpha)}$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

لما $\ln m>f(\alpha)$ أي $m>e^{f(\alpha)}$ المعادلة لا تقبل حلول

11 المسألة الشاملة رقم:

مشاهــــدة الحــــل

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^{x} - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1 - x$ تارة أخرى)

2) نضع: $g(x) = e^{x} - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$-1.15 < \alpha < -1.14$ وَ $1.84 < \beta < 1.85$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^{x} h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) مثل بيانيا (C_f) .

حل المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow\ -2g(1-t) = -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \ldots (1)$$

نضع : $t = 1 - x$ معناه: $x = 1 - t$ ، نجد:

$$g(1-t) - 2g(1-1+t) = e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3$$
$$\Rightarrow g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \ldots (2)$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t$$
$$-e^t - 3 = -4e^t$$

$$\Rightarrow -3g(t) = -3e^t + 3t + 3$$
$$\Rightarrow g(t) = e^t - t - 1$$

إذن :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

(2

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$u(x) = -x$ و $v(x) = g\big(u(x)\big) = g(-x)$ أي $v(x) = (g \circ u)(x)$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $\underbrace{]-\infty; 0]}_{I \text{ المجال}}$ والدالة u متناقصة على المجال $\underbrace{[0; +\infty[}_{g(I) \text{ المجال}}$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$

ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أنّ الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

- واضح أن $g(-x) = k(x)$ أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأنّ: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$	0 $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(0) = 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β:

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.14) = 0.01$ و $h(-1.15) = -0.08$

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15;-1.14[$

ولدينا: $h(1.85)=-0.007$ و $h(1.84)=0.001$

ولدينا: $h(1.84)\times h(1.85)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84;1.85[$

اذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين α و β

5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+e^x-x-1}{1+e^x-x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right]=1$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$.

2) أ/ اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x+g(x)}{1+g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x)=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} h(x)&=1-g(-x)\\ &=1-e^{-x}-x+1\\ &=2-x-e^{-x}\end{aligned}}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\\ &=\frac{e^x[e^x-x-(1-e^{-x})(e^x-1)]}{(e^x-x+1-1)^2}\\ &=\frac{e^x(e^x-x-e^x+1+1-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\ &=\frac{e^x(2-x-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\ &=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(1+g(x))^2>0$ و $e^x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0)=0$

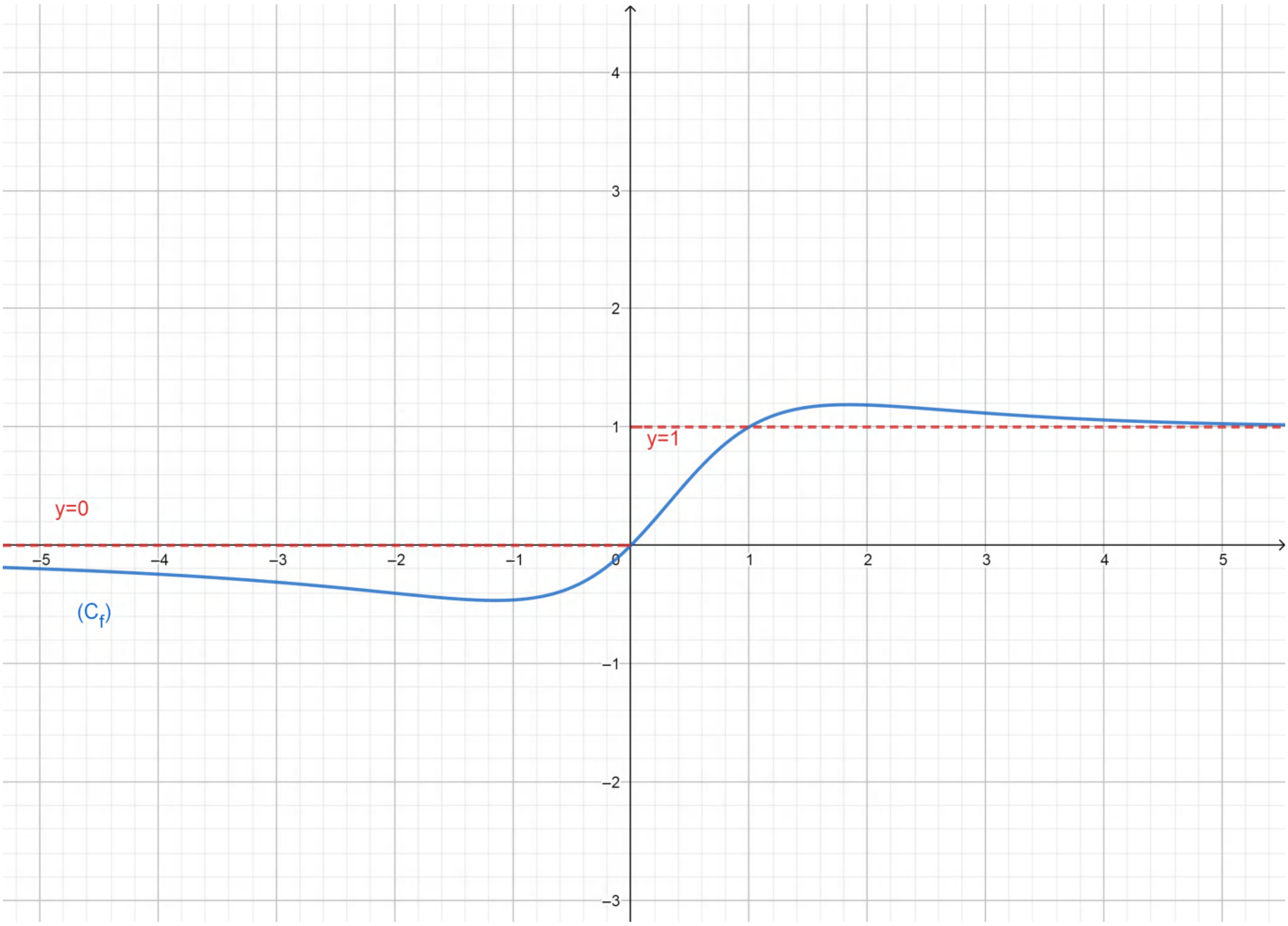
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجوعة تعريف الدالة f .

2) أ/ احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

ج/ احسب $\lim_{x\to+\infty}[x]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها .

4) بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحنى (C_f)

5) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A .

6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ/ حلل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

7) مثل بيانيا (T) و (C_f) .

حل المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة المسألة

1) تعيين مجوعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة لما : $e^x + 1 \neq 0$

ولدينا $e^x + 1 > 0$

ومنه الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

2) أ/ حساب $\lim_{x \to -\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$:

لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$
$$= \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

ج/ حساب $\lim_{x \to +\infty} [x]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{1 + e^{-x}}\right]$$
$$= 1$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

3) اثبات أن الدالة f متزايدة تماما:

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

4) تبيين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◄ شاهد هذا التذكير ►

(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نبيّن أن $(2(0)-x) \in D_f$:

واضح أن $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبيّن أن $f(2(0)-x)+f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} f(2(0)-x)+f(x) &= \frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} \\ &= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

5) تعيين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ &= \frac{e^0}{(e^0+1)^2}x+\frac{e^0}{e^0+1} \\ &= \frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

6)

أ/ تحليل العبارة: $\qquad$ $e^{2x}-2e^x+1$:

$$e^{2x}-2e^x+1 = (e^x-1)^2$$

ب/

$$
\begin{aligned}
\bullet\ g'(x) &= \frac{1}{4} - f'(x)\\
&= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\\
&= \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{4(e^x+1)^2}\\
&= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{4(e^x+1)^2}\\
&= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{4(e^x+1)^2}\\
&= \frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}
\end{aligned}
$$

ولدينا:

$$\bullet\ g(0) = 0$$

- دراسة تغيرات الدالة g :

حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$
\begin{aligned}
\bullet\ \lim_{x\to-\infty}[g(x)] &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to-\infty}[f(x)]\\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\ \lim_{x\to+\infty}[g(x)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to+\infty}[f(x)]\\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

لدينا: $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$
\begin{aligned}
(e^x-1)^2 = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0\\
&\Rightarrow e^x = 1\\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج/ استنتاج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$:

لدينا من جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

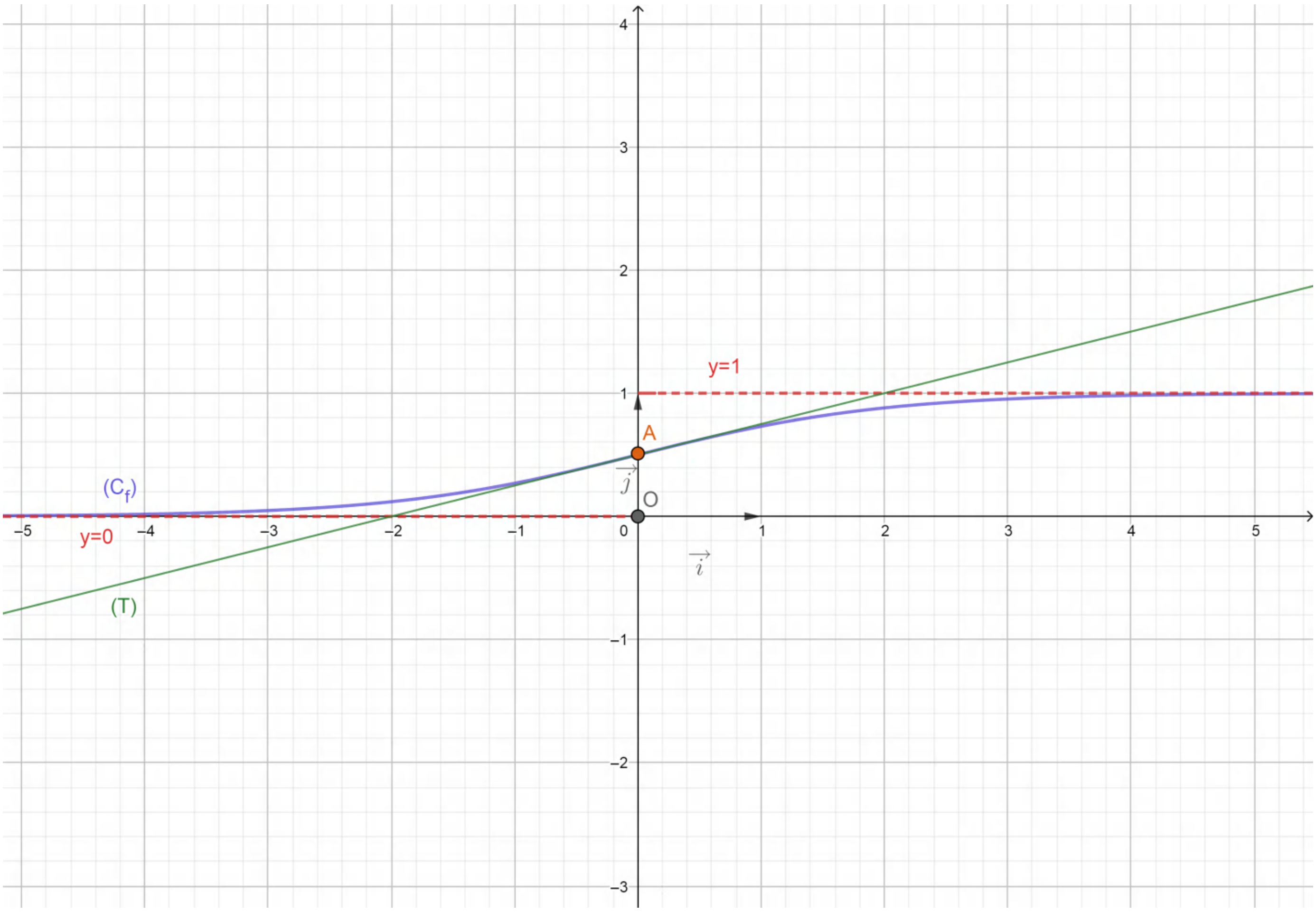
- الوضعية:

- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-\infty; 0[$.
- (C_f) يقطع (T) في النقطة A .
- (C_f) فوق (T) لما $x \in]0; +\infty[$.

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- نعين نقطة A تقاطع (C_f) مع (T)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



y=1
A
(C_f)
y=0
(T)
O