UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2017-2018

1^er^ EXAMEN – ALGEBRE 1

Janvier 2018 Durée: 1h30m

Exercice 1: (6 points) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1. Soient les ensembles: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{2\}$
   a) Déterminer $f(A)$.
   b) En déduire que f n'est pas injective, justifier.
   c) Déterminer $f^{-1}(B)$.
2. On désigne par $\mathfrak{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$
   a) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la classe d'équivalence de 0 et -2.

Exercice 2: (7 points)
Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, on définit sur G la loi de composition interne $*$ par
$$\forall (x, y) \in G^2, x * y = xy + 2(x + y) + 2.$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
2. Soit $H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
3. On considère l'application f du groupe $(G, *)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$
$$f(x) = x + 2$$
   a) Montrer que f est un isorphisme de groupes.
   b) Déterminer le noyau de f $(ker f)$.

Questions indépendante: (3 points)

1. Est-ce que l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est intègre? (Justifier).
2. Est-ce que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?(Justifier).
3. Est-ce que $2\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?(Justifier).

Exercice 3: (4 points)

1. Déterminer le *pgcd* des polynômes A et B suivants
$$A(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4 \ et \ B(X) = X^2 + 2X - 3.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = (X + 1)^n + X^n + 1$ par $Q(X) = X(X + 1)$.