Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies
Département d'Informatique

Examen D'Algèbre

Exercice 1 *(5 points)*

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. *Soient P et Q deux propositions logiques, alors on a l'équivalence suivante :*

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

2. *Soit $E = \{a, b, c\}$, alors l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des parties de E est égal :*

$$\mathbb{P}(E) = \{a, b, c, \}$$

3. *Soient A et B deux parties de l'ensemble E , alors on a l'égalité suivante :*

$$A/B = C_A(A \cap B)$$

4. *Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y = 1$, alors $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.*
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2 *(7 points)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. *Soient les ensembles : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{2\}$*
   (a) *Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.*
   (b) *L'application f est-elle injective ? bijective ? justifier.*
2. *On désigne par $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

   (a) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Déterminer la classe d'équivalence de 0 et -2.*

Exercice 3 *(8 points)*

Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, on définie sur G la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall x, y \in G, x * y = xy + 2(x + y) + 2$$

1. *Montrer que $(G, *)$ est un groupe Abélien.*
2. *Soit $H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$, Montrer que $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$.*
3. *On considère l'application f du groupe $(G, *)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ par :*

$$f(x) = x + 2$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupes $(G, *)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Corrigé de l'examen d'Algèbre (1)

Exo 1:

1) Vraie , La preuve de cette équivalence peut être donnée en utilisant l'équivalence $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

On a: $$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Leftrightarrow \overline{\overline{Q}} \vee \overline{P}$$
$$\Leftrightarrow Q \vee \overline{P}$$
$$\Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$$
$$\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

(1)

2) Fausse , La preuve :

$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$ (1)

3) Vraie, La preuve:

$A / B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin A \cap B\}$

$= C_A (A \cap B)$ (1)

4) Fausse , La preuve: si on prend $x = 0$ et $y = \pi$

On a: $0 R \pi$ car: $\cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$, et aussi $\pi R 0$ car $\cos^2 \pi + \sin^2 0 = 1$

mais $0 \neq \pi$ (1)

5) Vraie , La preuve par le raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $P(1)$ est vraie car : pour $n = 1$ on a: $1 = 1$ (1)
- On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est aussi vraie tel que: $P(n+1)$: $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a: $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{P(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

donc $P(n+1)$ est vraie , par récurrence $P(n)$ est vraie.

Exo 02 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 2$

1) a) Calculons $f(A)$ et $f^{-1}(B)$

$f(A) = \{ f(x) , x \in A \}$ 0,25 $= \{ f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2) \} = \{0, 2, 4\}$ 0,75

$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} , f(x) \in B \}$ 0,25

$= \{ x \in \mathbb{R} , x^3 - 3x + 2 = 2 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} , x(x^2 - 3) = 0 \}$

$= \{ -\sqrt{3} , 0 , \sqrt{3} \}$ 0,75

b) - L'injectivité de f : d'après la question précédente,

On a : $f(-2) = f(1) = 0$ mais $-2 \neq 1$ 0,5

donc f n'est pas injective 0,5

- La Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective 0,5

2) Soit R la relation binaire définie par :

$\forall x, y \in \mathbb{R} , x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

a) Montrons que R est une relation d'équivalence

i) Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R} : x R x$ (vraie) 0,25

On a : $x R x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ (vraie) 0,25

donc R est réflexive.

ii) symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R} ; x R y \Rightarrow y R x$ 0,25

On a : $x R y \Rightarrow f(x) = f(y)$
$\Rightarrow f(y) = f(x)$
$\Rightarrow y R x$ 0,5

donc : R est symétrique

iii) Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \begin{cases} xRy \\ \text{et} \\ yRz \end{cases} \Rightarrow xRz$ (0,25)

On a : $\begin{cases} xRy \\ \text{et} \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=f(y) \\ \text{et} \\ f(y)=f(z) \end{cases} \Rightarrow f(x)=f(z) \Leftrightarrow xRz$ (0,5)

donc R est transitive.

Conclusion : De i), ii) et iii), R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminons les classes d'équivalences de 0 et -2

$\overline{0} = \{x \in \mathbb{R} : xR0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) = 2\}$ (0,25)

$= \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ (0,5)

$\overline{-2} = \{x \in \mathbb{R} : xR-2\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-2) = 0\}$ (0,25)

et d'après la question 1) a), on déduit que :

$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$

alors, $\overline{-2} = \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-1)^2 = 0\}$

$= \{-2, 1\}$ (0,5)

Exo3: $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, $\forall x, y \in G$: $\boxed{x * y = xy + 2(x+y) + 2}$

1) Montrons que $(G, *)$ est un groupe Abélien :

i) La commutativité : $\forall x, y \in G : x * y \overset{?}{=} y * x$ (0,25)

$x * y = xy + 2(x+y) + 2 = yx + 2(y+x) + 2 = y * x$

d'où $*$ est commutative. (0,75)

ii) L'associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x*y)*z \overset{?}{=} x*(y*z)$ (0,25)

$(x*y)*z = [xy + 2(x+y) + 2] * z = xyz + 2z(x+y) + 2z + 2[xy + 2(x+y) + 2 + z] + 2$

$= xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y + 4z + 6$ (0,5)

$x*(y*z) = x * [yz + 2(y+z) + 2] = xyz + 2x(y+z) + 2x + 2[yz + 2(y+z) + 2 + x] + 2$

$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6$ (0,5)

donc : $x*(y*z) = (x*y)*z$ d'où l'associativité de $*$

iii) L'existence du neutre :

$\exists ! e \in G, \forall x \in G$ tq : $x * e = e * x = x$ (0,25)

On a : $x * e = x \Rightarrow xe + 2(x+e) + 2 = x$

$\Rightarrow xe + x + 2e + 2 = 0$ (0,75)

$\Rightarrow e(x+2) = -(x+2) \Rightarrow \boxed{e = -1} \in G$

iv) L'existence du symétrique :

$\forall x \in G, \exists ! x^{-1} \in G$ tq $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (0,25)

On a : $x * x^{-1} = e = -1 \Rightarrow x x^{-1} + 2(x + x^{-1}) + 2 = -1$

$\Rightarrow x^{-1}(x+2) = -3 - 2x \Rightarrow x^{-1} = \dfrac{-3-2x}{x+2} \overset{?}{\in} G$ (0,5)

On montre que : $x^{-1} \in G \Leftrightarrow x^{-1} \neq -2$

On suppose que $x^{-1} = \frac{-3-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow -3-2x = -2x-4$

$\Rightarrow -3 = -4$ (fausse)

d'où $x^{-1} \in G$ 0,25

et $\boxed{x^{-1} = \frac{-3-2x}{x+2}}$

2) $H = \{x \in \mathbb{R} \, , \, x > -2\}$

$(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$ ssi $\begin{cases} e \in H \\ \forall x, y \in H : x * y \in H \\ \forall x \in H : x^{-1} \in H \end{cases}$ 0,25

i) $e = -1 \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$ 0,25

ii) $\forall x, y \in H : x * y \overset{?}{\in} H$

On a : $\begin{cases} x \in H \\ \text{et} \\ y \in H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \text{et} \\ y > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ \text{et} \\ y+2 > 0 \end{cases}$

de plus : $x * y = xy + 2(x+y) + 2$

$= xy + 2x + 2y + 2$

On veut démontrer que : $x * y \in H \Leftrightarrow x * y > -2$

c-à-d : $xy + 2x + 2y + 2 > -2$

$\Leftrightarrow xy + 2x + 2y + 4 > 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(y+2) > 0$

Comme : $\begin{cases} x+2 > 0 \\ \text{et} \\ y+2 > 0 \end{cases}$ alors : $(x+2)(y+2) > 0$

d'où $x * y \in H$ 0,5

iii) $\forall x \in H : x^{-1} \in H$

$x \in H \Rightarrow x > -2$ On veut démontrer que $x^{-1} > -2$

c-à-d $\dfrac{-3-2x}{x+2} > -2 \Leftrightarrow \dfrac{-3-2x}{x+2} + 2 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} > 0$ 0,5

Comme $x > -2$ alors : $\dfrac{1}{x+2} > 0$ d'où $x^{-1} \in H$

On déduit que $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

3) $f : (G, *) \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ avec : $f(x) = x + 2$

. f est un isomorphisme de groupes ssi : $\begin{cases} - f \text{ est morphisme} \\ - f \text{ est bijective} \end{cases}$ 0,25

- f est un morphisme de groupes ssi : $\boxed{f(x * y) = f(x) \times f(y)}$ 0,25

$f(x * y) = f(xy + 2(x+y) + 2) = xy + 2(x+y) + 2 + 2$

$= xy + 2(x+y) + 4$

$f(x) \times f(y) = (x+2)(y+2) = xy + 2x + 2y + 4$ 0,75

$= xy + 2(x+y) + 4$

d'où : $f(x * y) = f(x) \times f(y)$

On déduit que f est un morphisme de groupes

- f est bijective :

L'injectivité : $\forall x_1, x_2 \in G : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ 0,5

d'où f est injective

La surjectivité : $\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists ! x \in G$ tq $y = f(x)$

On a : $y = f(x) \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$ 0,5

Comme $y \neq 0$ alors $x \neq -2$ alors f est surjective et elle est bijective

On conclue que f est isomorphisme de groupes