UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2020-2021

1er EXAMEN – ALGEBRE 1

Mars 2021 — Durée: 1h

Exercice 1: (5 points) Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x| \end{aligned}$$

1. f est-elle injective? Surjective?(Justifier)
2. Soit $A = [-2, 0]$ et $B = [0, 1]$, calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Exercice 2: (5 points)
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3: (5 points) On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \star b = \ln(e^a + e^b)$$

1. La loi $\star$ est-elle commutative ? Associative? Possède-t-elle un élément neutre ?
2. $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe?

Exercice 4: (5 points)

1. Écrire la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{\times})$ et quelles sont les élément non inversibles.
2. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$ est-il un anneaux intègre?(Justifier)
3. Donner la condition necessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.

Exercice 5: (2 points) On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, qui s'écrit

$$P(X) = X^4 - X^3 + aX^2 + b$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette $1 - \imath$ comme zéro dans $\mathbb{C}$.

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 – 2020-2021

Corrigé 1^{er} examen – ALGEBRE 1

Février 2021 Durée: 1h

Exercice 1: (5 points) Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x| \end{aligned}$$

1. f n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$ mais $1 \neq -1$. **(1.5 points)**
   f n'est pas surjective car pour $y = -1$ par exemple il n'existe pas un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$, $-1 = |x|$ (impossible à résoudre) **(1.5 points)**

2. $A = [-2, 0]$,$f(A) = \{f(x)/x \in [-2, 0]\} = f([-2, 0]) = [f(0), f(-2)]$
   car f est décroissante sur $[-2, 0]$, donc $f(A) = [0, 2]$ **(1 points)**

   $B = [0, 1]$, $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [0, 1]\} = [-1, 1]$ **(1 points)**.

Exercice 2: (5 points)
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. On montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   La réflexivité

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}^{?}x$$

   $\forall x \in \mathbb{R}, x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}x$, d'où$\mathcal{R}$ est réflexive **(1 points)**.

   La symétrie

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longrightarrow^{?} y\mathcal{R}x$$

   $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Longrightarrow y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x} \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, d'où $\mathcal{R}$ est symétrique **(1 points)**.

   La transitivité

   $$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Longrightarrow^{?} x\mathcal{R}z$$

   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z \Longleftrightarrow (x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}) \wedge (y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z}) \Longrightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z} \Longrightarrow x\mathcal{R}z$, d'où $\mathcal{R}$ est transitive **(1 points)**.

2. déterminons la classe d'équivalence de a.

$$\begin{aligned}
cl(a) &= \{x \in \mathbb{R}^*/x\mathcal{R}a\} \quad \textbf{(0.5 points)} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/x - a = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/x - a - \frac{a-x}{xa} = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/(x-a)(\frac{xa+1}{xa}) = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/x - a = 0 \ ou \ xa + 1 = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*/x = a \ ou \ x = \frac{-1}{a}\} \quad \textbf{(1 points)} \\
&= \{a, \frac{-1}{a}\} \quad \textbf{(0.5 points)}
\end{aligned}$$

<u>**Exercice 3:**</u> (5 points) On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \star b = \ln(e^a + e^b)$$

1. **La commutativité** $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b =^? b \star a$ **(0.5 points)**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b = ln(e^a + e^b) = ln(e^b + e^a) = b \star a$$

. D'où la loi $\star$ est commutative. **(1 points)**

L'associativité $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \star b) \star c =^? a \star (b \star c)$ **(0.5 points)**

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \star b) \star c = ln(e^{(a \star b)} + e^c) = ln(e^{(ln(e^a + e^b))} + e^c) = ln(e^a + e^b + e^c)$

$a \star (b \star c) = ln(e^a + e^{b \star c}) = ln(e^a + e^{ln(e^b + e^c)}) = ln(e^a + e^b + e^c)$

On remarque que $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ d'où $\star$ est un loi associative **(1 points)**.

L'existance de l'élément neutre $\exists ? e_\star \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a \star e_\star = e_\star \star a = a$ **(0.5 points)**

$a \star e_\star = a \Longrightarrow ln(e^a + e^{e_\star}) = a \Longrightarrow e^a + e^{e_\star} = e^a \Longrightarrow e_\star = 0$. Il n'y a donc pas d'élément neutre **(1 points)**.

2. $(\mathbb{R}, \star)$ n'est pas un groupe **(0.5 points)**.

<u>**Exercice 4:**</u> (5 points)

1. Écrire la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{\times})$

$\bar{\times}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

(1 points)

d'après la table de multiplication les classes d'équivalence $\bar{0}$ et $\bar{2}$ sont des éléments non inversibles **(1 points)**, car

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}, \bar{0} \bar{\times} \bar{x} \neq \bar{1} \wedge \bar{x} \bar{\times} \bar{0} \neq \bar{1}$$

et

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}, \bar{2} \bar{\times} \bar{x} \neq \bar{1} \wedge \bar{x} \bar{\times} \bar{2} \neq \bar{1} \quad \textbf{(1 points)}$$

2. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$ n'est pas un anneaux intègre, car il possède des diviseurs de zéro tel que, $\bar{2}$ ($\bar{2} \neq 0$ mais $\bar{2} \overline{\times} \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}$ **(~~2~~ 1 points)**

3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier. **(0.5 points)**

<u>**Exercice 5:**</u> (2 points) $P(X) = X^4 - X^3 + aX^2 + b$.
$P(X)$ admet $1 - \imath$ comme zéro dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $P(1 - \imath) = 0$ **(0.5 points)**

$$\begin{aligned}
P(1-\imath) &= (1-\imath)^4 - (1-\imath)^3 + a(1-\imath)^2 + b \\
&= (1-\imath)^2(1-\imath)^2 - (1-\imath)^2(1-\imath) + a(-2\imath) + b \\
&= (-2\imath)(-2\imath) - (-2\imath)(1-\imath) - 2a\imath + b \\
&= -4 + 2\imath + 2 - 2a\imath + b \\
&= b - 2 + (2 - 2a)\imath \\
&= 0 \quad \textbf{(1 points)}
\end{aligned}$$

$$b - 2 + (2 - 2a)\imath = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b - 2 = 0 \Longrightarrow b = 2; \\ 2 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 1. \end{array} \right. \quad \textbf{(0.5 points)}$$