Faculté des sciences
Département MI

2021-2022
1er année

Serie d'exercices sur la logique mathématique

EXO1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les propositions suivantes:

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } Q : (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont vraies ?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

EXO2. Soit la proposition $1 - 1 = 0 \vee \frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$. Ecrire la proposition sous la forme d'une implication.

1. Ecrire une autre implication équivalente.
2. L'implication est-elle vraie ?
3. Donner sa négation.

EXO3. On note la négation de la proposition P par $\overline{P}$. On note aussi la proposition vraie a priori par 1 et la proposition fausse par 0.

1. Simplifier $P \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
2. Donner la négation des propositions suivantes
   (a) $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q}) \Rightarrow P$
   (b) $P \Rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q})$.

EXO4. Quelle est la différence entre les deux propositions suivantes ?

1. $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4)$
2. $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 = 1 \wedge x^2 = 4)$.

3. Sont-elles vraies ?

EXO5. On considère la proposition (P) suivante : (P) : « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

1. **1.** Ecrire la proposition (P) avec des quantificateurs.
   2. Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

EXO6. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.

2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.

3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$.

4. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$.

EXO7. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. .....$x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

2. .....$x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$.

3. .....$x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$.

4. .....$x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 \neq 0$.

EXO8. En utilisant le raisonnement mathématique. Montrer :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$. (par la méthode directe).

3. $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x + y\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 0)$. (par l'absurde).

3. $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$. (par récurrence).

EXO9.

1. Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante : Si n^2 est impair, alors n est impair.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

EXO10. Pour chacune des propositions suivantes dites si elle est vraie ou fausse. En utilisant les types de raisonnement mathématique, expliquer le pourquoi.

1. $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \Rightarrow x = y$

2. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \Rightarrow x = y$

3. $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$

4. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$

5. $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -z \Rightarrow x = -z$

6. $(a+b+c)^2 = a^3 + b^3 + c^3$, $a, b, c \in \mathbb{N}$. Peut-on utiliser $a = 1, b = 2, c = 3$

7. Tout tablier blanc est lavable alors tout tablier jaune est non lavable.

SERIE D'EXERCICES SUR LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les propositions suivantes :*

$$P \equiv \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0. \qquad Q \equiv \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0.$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont vraies ?

(1) $P \Rightarrow Q$.

(2) $Q \Rightarrow P$.

(3) $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Démonstration. (1) Vrai. Si pour tout réel x, on a $f(x) = 0$, alors certainement il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 0$.

(2) Faux. S'il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on ne peut pas confirmer que pour tout réel x, $f(x) = 0$ aussi.

(3) Vrai. C'est la contraposée de 1 donc elle est vraie.

$\square$

Exercice 2. *Soit la proposition* $1 - 1 = 0 \vee \frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$

(1) Ecrire la proposition sous la forme d'une implication.

(2) Ecrire une autre implication équivalente.

(3) L'implication est-elle vraie ?

(4) Donner sa négation.

Démonstration.

(1) $P \vee Q$ est équivalente à :

$\neg P \Rightarrow Q$ donc $1 - 1 = 0 \vee \frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$ est équivalente à $1 - 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$.

(2) Si on prend P égale à $\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$ et Q égale à $1 - 1 = 0$ on retrouve la contraposée suivante : $1 - 1 = 0 \Leftarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

(3) Il suffit d'utiliser une des propositions précédente pour voir quelle est juste.

(4) Sa négation est une conjonction $1 - 1 \neq 0 \wedge \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

□

Exercice 3. *On note la négation de la proposition P par $\neg P$ ou $\overline{P}$. On note aussi la proposition vraie à priori par V ou Ω et la proposition fausse par F ou Φ. Il ne faut pas confondre Φ ici avec l'ensemble vide.*

On rappelle que $(P \vee F) \Leftrightarrow P$ quelle que soit la valeur de vérité de la proposition P.

(1) Simplifier $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(2) Donner la négation des propositions suivantes

(a) $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q) \Rightarrow P$

(b) $P \Rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)$

Démonstration.

(1) On sait que $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ donc $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R)$. $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ est équivalente à $P \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$ qui est équivalent à $P \vee (\neg P \wedge V)$. Car $(Q \vee \neg Q)$ est toujours vraie. De plus $\neg P \wedge V$ est équivalente à P. On arrive à la proposition suivante $P \vee (\neg P)$ qui est toujours vraie. Donc la simplification est V ou Ω.

(2) (a) $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q) \Rightarrow P$ admet comme négation $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)$ et $\neg P$ donc $[(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)] \wedge P$.

(b) Il est préférable de simplifier cette proposition avant de faire la négation. $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \vee (Q \vee \neg Q)) \equiv (P \wedge Q) \vee P \equiv P$. Donc la proposition est équivalente à $P \Rightarrow P$ qui admet la négation suivante $P \vee \neg P$ ou plus simplement V.

□

Exercice 4. *Quelle est la différence entre les deux propositions suivantes ?*

(1) $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4)$

(2) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 = 1 \wedge x^2 = 4)$

Sont-elles vraies ?

Démonstration. La différence réside dans le fait que pour la première la variable x qu'on choisit pour $x^2 = 1$ peut-être différente de celle choisie pour vérifier $x^2 = 4$, mais pour la deuxième proposition, il faut choisir une variable x qui vérifie les deux en même temps. la deuxième proposition est fausse. La première est juste, car $x = 1$ vérifie $x^2 = 1$ et on choisit aussi $x = -2$ pour que $x^2 = 4$. □

Exercice 5. *On considère la proposition P suivante :*

$P \equiv$ Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x.

(1) Ecrire la proposition P avec des quantificateurs.

(2) Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en langue française.

Démonstration.

(1) $P \equiv \forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$.

(2) Sa négation est $\overline{P} \equiv \exists x \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$. L'énoncé en français est : Il existe un nombre réel x supérieur strictement à tout entier naturel n.

□

Exercice 6. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles ne le sont pas, énoncer leurs négations.*

(1) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 > 7$.

(2) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 7$.

(3) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x^2$.

(4) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : y > x^2$.

Démonstration.

(1) La proposition est vraie. Il suffit de prendre $x = 3$.

(2) La proposition est fausse. On effet, $x = 2$ est un contre exemple. La négation de la proposition est $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 7$.

(3) La proposition est juste. Pour tout x naturel on par exemple $y = (x+1)^2$ une valeur qui vérifie la relation $y > x^2$.

(4) La proposition est fausse. On n'arrive pas à trouver x un entier naturel telque $y > x^2$ soit vraie. Pour mieux comprendre, on essaye quelques valeurs de x. Par exemple, $x = 1$ vérifie $y > 1$ pour presque toutes les valeurs de y mais pas tous. On essaye avec une autre valeur, $x = 0$ de même $y > 0$ n'est pas vérifiée si $y = 0$.

(5) Si on avait $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : y \geq (x-1)^2$ alors la proposition serait vraie. Dans ce cas, $x = 0$ ou $x = 1$ vérifient bien $y \geq (x-1)^2$.

□

Exercice 7. *Compléter, lorsque c'est possible, avec un des quantificatifs $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.*

(1) $\ldots x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

(2) $\ldots x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 = 0$.

(3) $\ldots x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 0$.

(4) $\ldots x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 \neq 0$.

Démonstration. Quand on met $\forall$ cela veut dire qu'on peut mettre $\exists$ aussi mais l'inverse non.

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

(2) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 = 0$.

(3) $\exists x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 0$.

(4) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 \neq 0$.

$\square$

Exercice 8. *En utilisant le raisonnement mathématique proposé, montrer :*

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1$. *(par la méthode directe)*

(2) $\forall x, y \in \mathbb{Q} : x + y\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 0)$. *(par l'absurde)*

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$. *(par la récurrence)*

Démonstration.

(1) Par la méthode directe, on distingue deux cas :

Premier cas : Si $x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq 0 \Rightarrow |x-1| = 1 - x$ d'où

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (1-x) = x^2 - x + 1 - 1 + x = x^2 \geq 0$$

alors,

$$x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq |x-1|.$$

Deuxième cas : Si $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x - 1$ d'où

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1) = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

alors,

$$x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq |x-1|.$$

(2) Dans un premier temps, montrons que $\forall x, y \in \mathbb{Q} : x + y\sqrt{2} = 1 \Rightarrow (x = 1 \text{ et } y = 0)$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, supposons que $x + y\sqrt{2} = 1$ et $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 0)$.

De l'hypothèse $y \neq 0$, $x + y\sqrt{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1-x}{y}$

Puisque $x, y \in \mathbb{Q}$, il est clair que $\frac{1-x}{y} \in \mathbb{Q}$ d'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui absurde. Nous avons ainsi établi que $y = 0$. Il s'en suit, en remplaçant $y = 0$ dans $x + y\sqrt{2} = 1$, on trouve directement $x = 1$, ce qui termine la démonstration de l'implication.

On démontre maintenant la réciproque. Il est immédiat que ($x = 1$ et $y = 0$) $\Rightarrow$ $x + y\sqrt{2} = 1$. En effet, si ($x = 1$ et $y = 0$) alors en remplaçant $1 + 0\sqrt{2} = 1$. D'où l'équivalence.

(3) Démonstration par récurrence :

(a) Pour $n = 0, (1 + x)^0 = 1 + 0x \Leftrightarrow 1 = 1$. On a montré que $(1 + x)^0 \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie.

(b) On suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que

$$P(n+1) \equiv \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x?$$

On a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Donc

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+x)(1+nx) \\ &\geq 1 + x + nx + nx^2 \\ &\geq 1 + (1+n)x + nx^2 \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

d'où $P(n+1)$ est vraie.

Des étapes précédente, par récurrence, $P(n)$ est vraie.

□

Exercice 9.

(1) Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

(2) Soit n un entier. Enoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

(3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Démonstration.

(1) La proposition s'écrit sous la forme $\forall n \in \mathbb{N}(\exists k \in \mathbb{N} : n = k^2) \Rightarrow \overline{\exists p \in \mathbb{N} : 2n = p^2}$.

On procède par l'absurde. On suppose que la négation est valide. $\forall n \in \mathbb{N}(\exists k \in \mathbb{N} : n = k^2) \vee (\exists p \in \mathbb{N} : 2n = p^2)$. On remarque que $2k^2 = p^2$. On arrive aisément à une contradiction car $2k^2 = p^2$ est équivalente à $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Donc la proposition initiale est vraie.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k + 1) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p + 1)$.

Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}(\forall p \in \mathbb{N} : n \neq 2p + 1) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N} : n^2 \neq 2k + 1)$. En d'autres termes $\forall n \in \mathbb{N}(\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k)$.

On suppose que $\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p$ donc $n^2 = (2p)^2 = 2(2p)p$. Il suffit de prendre $k = (2p)p$ on a ainsi montré que $\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k$. Il s'ensuit que la proposition et sa contraposée sont vraies.

(3) Pour montrer cette proposition, on raisonne par récurrence. On utilise les inégalités suivantes, lors de la démonstration.

$$2 \leq n \leq (n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$2^n \leq n^n \leq (n+1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Exercice 10. *Pour chacune des propositions suivantes dites si elle est vraie ou fausse. En utilisant les types de raisonnement mathématique, expliquer le pourquoi.*

(1) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \Rightarrow x = y$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \Rightarrow x = y$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$

(4) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$

(5) $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -z \Rightarrow x = -z$

(6) $(a+b+c)^2 = a^3 + b^3 + c^3$, $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Peut-on utiliser* $a = 1, b = 2, c = 3$.

(7) Tout tablier blanc est lavable alors tout tablier jaune est non lavable.

(8) Si tout tournou est un routnou et si tout nourtou est un routnou alors tout tournou est un nourtou.

Démonstration.

(1) La proposition $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \Rightarrow x = y$ est fausse

Il suffit de trouver un contre exemple : $x = 1$ et $x = -1$.

(2) La proposition suivante en revanche est juste : $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \Rightarrow x = y$

Méthode 1 : Il faut remarquer que la proposition $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

Pour la proposition précédente $x = -y$ est fausse toujours sauf si $x = y = 0$. Dans le cas où $x = -y$ est fausse la proposition $x = y$ ne peut pas être juste. Si on prend par exemple $x = 2$ et $y = 3$ on a $2 = -3$ fausse et $2 = 3$ fausse donc l'implication est juste. Le seul cas où $x = -y$ est juste est quand $x = 0$ et $y = 0$. Dans ce cas $x = -y$ est juste et $x = y$ est juste. En conclusion, il est impossible de trouver x et y telle que la proposition est fausse.

Méthode 2 : Utilisation de l'absurde. C'est-à-dire, il faut savoir la négation de l'implication.

la négation de $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \Rightarrow x = y$ est la proposition $\exists x, y \in \mathbb{N} : x = -y \wedge x \neq y$ qui est fausse, ...

(3) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$ est juste. Ce démontre de la même manière précédente.

(4) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x = -y \wedge y = -x \Rightarrow x = y$ est par contre fausse. Car on peut trouver des nombres 2 et -2 par exemple qui vérifie la partie gauche de l'implication, mais pas la partie droite.

(5) $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -z \Rightarrow x = -z$ est juste.
Par l'absurde, on suppose que $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -z \Rightarrow x = -z$ est fausse, en d'autres termes, $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : x = -y \wedge y = -z \wedge x \neq -z$. On distingue deux cas $x = y = z = 0$ et les autres cas. Le premier vérifie $x = -y \wedge y = -z$, mais pas $x \neq -z$. Pour le second, étant donné des nombres naturels **positifs** dont au moins l'un est strictement positif $x = -y \wedge y = -z$ n'est pas vérifiée. Ce qui est absurde.

(6) Il faut écrire la table de vérité. En conclusion, il suffit de trouver un tablier jaune lavable et vérifier que tous les tabliers blancs sont lavables pour dire que la proposition est fausse sinon elle ne l'est pas.

(7) La proposition suivante est fausse. $(a + b + c)^2 = a^3 + b^3 + c^3$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ n'est vérifiée que pour certaines valeurs de a, b et c. Dans le cas où on ne précise pas, il faut comprendre que c'est "quelque soit".

(8) Pour mieux voir la proposition notons chaque partie par un symbole.
x : tournou, y : routnou, z : nourtou.
A : les tournou
B : les routnou
C : les nourtou
La proposition est donc équivalente à $(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$ et $(\forall x : x \in C \Rightarrow x \in B)$ implique que $(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C)$ qui est faux dans le cas général, sauf si tournou=nourtou=routnou. Une démonstration appropriée est faite pour le groupe d'exercices sur les ensembles.

□

Quelques remarques : Pour les propositions contenant ∃ il suffit de trouver une valeur qui vérifie. Pour les propositions contenant ∀ soit on trouve un contre exemple soit on énumère tout les cas possible. Si les ensembles sont infinis, il faut passer par d'autres manières.