النهايات ①
(السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

❶ بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

❷ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

❸ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة

❹ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

I. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن ل f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = l$

II. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $\boxed{f(x) = \dfrac{d}{g(x)}}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، d و a عددان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

إذا كانت إشارة $g(x)$	وإشارة d	فإن
x: $-\infty \quad a \quad +\infty$ $g(x)$: $- \quad 0 \quad +$	$d > 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$
x: $-\infty \quad a \quad +\infty$ $g(x)$: $+ \quad 0 \quad -$	$d > 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$

✱ملاحظة:

إذا كانت	وإشارة d	فإن
$f(x) = \dfrac{d}{\lvert g(x)\rvert}$ أو $f(x) = \dfrac{d}{[g(x)]^2}$	$d > 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$

III. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \dfrac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$

و منه نستنتج أن: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$

IV. نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

نقول أن ل f نهاية غير منتهية ∞ عند ∞ معناه $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$

V]. المبرهنات الأولية على النهايات

① نهاية مجموع دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)+g(x)] =$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

② نهاية جداء دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)\times g(x)] =$
l	l'	$l\times l'$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	ح ع ت
0	$-\infty$	ح ع ت
$l<0$	0^+	0^-
$l<0$	0^-	0^+

③ نهاية حاصل قسمة دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$
l	l'	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$+\infty$	$l>0$	$+\infty$
$+\infty$	$l<0$	$-\infty$
$-\infty$	$l>0$	$-\infty$
$-\infty$	$l<0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	ح ع ت
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
0	0	ح ع ت
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l<0$	0^+	$-\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$l<0$	0^-	$+\infty$

④ حالات خاصة

إذا كانت $\lim f(x) =$	فإن: $\lim [f(x)]^2 =$	$\lim \lvert f(x)\rvert =$	$\lim\sqrt{f(x)} =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
0^-	0^+	0^+	

⑤ حالات عدم التعيين

$+\infty-\infty$ $-\infty+\infty$	$0\times\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

النهايات ②
(التفسير الهندسي)

❶ المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (عمودي)

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Longrightarrow x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب

❷ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \Longrightarrow y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

❸ المستقيم المقارب المائل

أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Longrightarrow$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

إذا كان $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$ $\Longrightarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f

ب] إثبات أن مستقيم هو مقارب مائل ل C_f

لإثبات أن $\boxed{y = ax + b}$ مقارب مائل ل C_f يكفي برهان أن: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$

ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق: $\boxed{f(x) - (ax + b)}$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
إشارة $f(x) - y$	$-$		$+$
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)

✳**ملاحظة:** يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - cb \neq 0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$