*Université Badji Mokhtar Annaba.*
*Faculté des Sciences*
*Département M.I*

*Année 2019/2020*

# Examen d'algèbre I

**Exercice 1.** Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant votre réponse.

1. $\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$
2. $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}_+$, si: $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$
3. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $n\,(n+1) = 2p$.

**Exercice 2.** Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur $E$ une relation binaire notée $\Re$ par:

$$(a,b)\,\Re\,(c,d) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c,d) = (\lambda a, \lambda b)\,.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1,2)$.

**Exercice 3.** Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur $G$ la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall\ a,\ b \in G,\ a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative
2. Montrer que $(G,\ *)$ est un groupe.
3. Soit

$$\begin{array}{cccc} f & (G,\ *) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\ +) \\ x & \longrightarrow & 3x + \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

Montrer que $f$ est un isomorphisme de groupe..

**Exercice 4.** Calculer le *pgcd* de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

Pr. A. Djebabla

## Corrigé

Exercice 1. Parmi les propositions suivantes, déterminons celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant les réponses.

**1.** $\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4.$

Cette proposition est vraie car pour $x = 3 \in \mathbb{N}$, on a $2 < 3 < 4$ $\longrightarrow$ 1pt

1. **2.** $\forall\, a,\ b\ \in \mathbb{R}_+$, si: $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b.$

Cette proposition est vraie, en utilisant le raisonnement par l'absurde. Suppons que $a \neq b$ et $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1}$, alors,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+1} &= \frac{b}{b+1} \Rightarrow a\,(b+1) = b\,(a+1) \\
&\Rightarrow\ ab + a = ba + b \\
&\Rightarrow\ a = b
\end{aligned}$$

d'où la contradiction avec le fait que $a = b$. $\longrightarrow$ 1,5 pts

**3.** Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable.

Cette proposition est fausse car la fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. $\longrightarrow$ 1pt

**4.** $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $n\,(n+1) = 2p$.

Cette proposition est vraie, en utilise le raisonnement par récurrence.

Pour $n = 0$, il existe un $p = 0$ tel que $0.\,(0+1) = 2.0$ (Vraie)
Pour $n = 1$, il existe un $p = 1$ tel que $1.\,(1+1) = 2.1$.(Vraie)

Supposons que la proposition est vraie pour $n$ est on la démontre pour $n+1$. Alors,

$$\begin{aligned}
(n+1)\,(n+2) &= n\,(n+1) + 2\,(n+1) \\
&= 2p + +2\,(n+1) \\
&= 2\,(p+n+1) = 2p'.
\end{aligned}$$

D'où, il existe un $p' \in \mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie pour $n+1$. $\longrightarrow$ 1,5pts

**Exercice 2.** Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire notée $\Re$ par:

$$(a, b)\,\Re\,(c, d) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b)\,.$$

**1.** Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

a. $\Re$ est réflexive car $(a, b)\,\Re\,(a, b)$ pour $\lambda = 1$. $\longrightarrow$ 1pt

b. $\Re$ est symétrique car si $(a, b)\,\Re\,(c, d)$ alors, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(c, d) = (\lambda a, \lambda b)$. d'où $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$, donc

$$a = \frac{1}{\lambda}c \text{ et } b = \frac{1}{\lambda}d$$

ainsi il existe un $\lambda' = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a, b) = (\lambda' c, \lambda' d)$. D'où $(c, d)\,\Re\,(a, b)$ $\longrightarrow$ 1pt

c. $\Re$ est transitive car si

$$\begin{cases} (a,\ b)\,\Re\,(c,\ d) \Rightarrow\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b) \\ (c,\ d)\,\Re\,(e,\ f) \Rightarrow\ \lambda' \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (e, f) = (\lambda' c, \lambda' d)\,, \end{cases}$$

donc, $(e, f) = (\lambda' c, \lambda' d) = (\lambda'\lambda a,\ \lambda'\lambda b)$. D'où il existe un $\lambda" = \lambda'\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a,\ b)\,\Re\,(e,\ f)$. $\longrightarrow$ 1pt

**2.** Déterminons la classe d'équivalence de $(1, 2)$.

La classe d'équivalence de l'élément $(1, 2)$ est

$$\begin{aligned} \widehat{(1,2)} &= \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 /\ (1, 2)\,\Re\,(c, d)\} \\ &= \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 /\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda, 2\lambda)\} \end{aligned}$$

donc, $c = \lambda$ et $d = 2\lambda$. D'où

$$\widehat{(1,2)} = \{\lambda\,(1, 2)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}\,.$$ $\longrightarrow$ 1pt

**Exercice 3.** Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur $G$ la loi de composition notée $*$ par

$$\forall a,\ b \in G,\ a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

**1.** La commutativité: Soit $a,\ b \in G$, alors,

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a. \longrightarrow \text{1pt}$$

Doù la commutativité.

**2.** Montrons que $(G,\ *)$ est un groupe.

a. L'associativité:

Soit $a,\ b,\ c \in G$, alors, d'une part

$$a * (b * c) = a * \left(b + c + \frac{1}{6}\right) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow \text{0,75 pts}$$

D'autre part

$$(a * b) * c = \left(a + b + \frac{1}{6}\right) * c = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow \text{0,75 pts}$$

D'où l'associativité.

b. L'élément neutre. Comme la loi est commutative il suffit de démontrer l'existence de l'élément neutre uniquement à gauche ou à droite.

$$a * e = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6} \in G. \longrightarrow \text{1,5 pts}$$

c. L'élément symétrique: Soit $a \in G$, alors il existe un $a' \in G$ tel que $a * a' = e = -\frac{1}{6}$. Alors

$$\begin{aligned} a * a' &= a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ &\Rightarrow a' = -a - \frac{1}{3} \in G. \longrightarrow \text{1pt} \end{aligned}$$

**2.** Soit

$$\begin{aligned} f &: (G,\ *) \longrightarrow (\mathbb{R},\ +) \\ x &\rightarrow 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrons que $f$ est un isomorphisme de groupe.

a. $f$ est un homomorphisme

Soit $x,\ y \in G$, alors,

$$\begin{aligned} f(x * y) &= 3(x * y) + \frac{1}{2} \\ &= 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = \left(3x + \frac{1}{2}\right) + \left(3y + \frac{1}{2}\right) \\ &= f(x) + f(y). \longrightarrow \text{1pt} \end{aligned}$$

b. $f$ est bijective

1. L'injection. Soit $x,\ y \in G$, alors

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = 3y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y. \text{ d'où l'injection } \longrightarrow \text{1pt}$$

2. La surjection: Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, on démontre qu'il existe un $x \in G$ tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= y \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{1}{6} \in G. \end{aligned}$$

D'où la surjection. De 1 et 2 on déduit que $f$ est une bijection. $\longrightarrow$ 1pt

**Exercice 4.** Calculons le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$. En utilisant l'algorithme d'Euclide donné par

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1}, & n \geq 1 \\ R_0 = A, \text{ et } R_1 = B. \end{cases} \longrightarrow \text{0,5pts.}$$

Alors, pour $n = 1$, on a

$$R_0 = R_1 Q_1 + R_2 \Leftrightarrow A = BQ_1 + R_2 \Leftrightarrow \underbrace{X^4 - 1}_{=A} = \underbrace{(X^3 - 1)}_{=B} . \underbrace{X}_{=Q_1} + \underbrace{X - 1}_{=R_2} \longrightarrow \text{1pt}$$

Comme $R_2 \neq 0$, on continu pour $n = 2$, c'est à dire

$$R_1 = R_2 Q_2 + R_3 \Leftrightarrow \underbrace{X^3 - 1}_{=R_1} = \underbrace{(X - 1)}_{=R_2} . \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{=Q_2} + \underbrace{0}_{=R_3} \longrightarrow \text{1pt}$$

Comme $R_3 = 0$, alors le *pgcd* est le denier reste non nul c'est à dire $pgcd\,(A,\ B) = X - 1$ $\longrightarrow$ 0,5pt