Université Badji Mokhtar //Faculté de Technologie
Département d'Informatique

Corrigé Type du Rattrapage Programmation Linéaire

Exercice 1 :

$\boldsymbol{Min}\ z = 7x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_5$

S.C:

$$\begin{array}{llllll}
7x_1 & +3x_2 & -4x_3 & & & = 70 \\
x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 10 \\
7x_1 & & +3x_3 & & +x_5 & = 20 \\
x_1 & & & & -4x_5 & \leq 0 \\
& x_2 & & +x_4 & & \geq 5
\end{array}$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \qquad x_5 \geq 0$

- **Mise sous forme canonique du PL : Type I** **(2.5 Pt)**

$-\boldsymbol{Max}\ z = -7x_1 - 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- - x_5$

S.C:

$7x_1 + 3x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- \leq 70$

$-7x_1 - 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- \leq -70$

$x_1 + x_2 - x_4^+ + x_4^- \leq 10$

$-x_1 - x_2 + x_4^+ - x_4^- \leq -10$

$7x_1 + 3x_3^+ - 3x_3^- \qquad +x_5 \leq 20$

$-7x_1 - 3x_3^+ + 3x_3^- \qquad -x_5 \leq -20$

$x_1 - 4x_5 \leq 0$

$-x_2 - x_4^+ + x_4^- \qquad \leq -5$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, x_4^+ \geq, x_4^-, x_5 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 70 \\ -70 \\ 10 \\ -10 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- **Mise sous forme canonique du PL : Type II**

$\boldsymbol{Min}\ z = 7x_1 + 3x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- + x_5$

S.C:

$7x_1 + 3x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- \geq 70$

$-7x_1 - 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- \geq -70$

$x_1 + x_2 - x_4^+ + x_4^- \geq 10$

$-x_1 - x_2 + x_4^+ - x_4^- \geq -10$

$7x_1 + 3x_3^+ - 3x_3^- \qquad +x_5 \geq 20$

$-7x_1 - 3x_3^+ + 3x_3^- \qquad -x_5 \geq -20$

$-x_1 + 4x_5 \geq 0$

$x_2 + x_4^+ - x_4^- \qquad \geq 5$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, x_4^+ \geq, x_4^-, x_5 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 70 \\ -70 \\ 10 \\ -10 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• **<u>Mise sous forme standard du PL</u> (2.5 Pt)**

$-\boldsymbol{Max}\, z = -7x_1 - 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- - x_5$

S.C:

$7x_1 + 3x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- = 70$

$x_1 + x_2 - x_4^+ + x_4^- = 10$

$7x_1 + 3x_3^+ - 3x_3^- \qquad +x_5 = 20$

$x_1 - 4x_5 + x_6 \quad = 0$

$x_2 + x_4^+ - x_4^- - x_7 \quad = 5$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, x_4^+ \geq, x_4^-, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 20 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 2 :</u>

$\boldsymbol{Max}\, z = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 7x_4$

S.C :

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 16$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

• Démonstration que $z \leq 62$ **(2.5 Pt)**

$$\left.\begin{matrix} 3 \times (2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 30 \\ 2 \times (2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4) \leq 32 \end{matrix}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$10x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 7x_4 = z + x_1 + x_3 \leq 62,$

$x_1 \geq 0\,, x_3 \geq 0$

$\therefore \; z \leq 62$

• Démonstration que $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$ est une solution optimale pour P **(2.5 Pt)**

$\forall x_1 \geq 0, \forall x_2 \geq 0, \forall x_3 \geq 0, \forall x_4 \geq 0,$ on a $z \leq 62,$ i.e. la valeur maximale (optimale) de *z* est *62*

Pour la solution $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

z=$9x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 9 \times 0 + 12 \times 4 + 10 \times 0 + 7 \times 2 = 48 + 14 = 62$

cette solution maximise la fonction z, donc c'est une solution optimale.

<u>Exercice 3 :</u>

Max *z= $-x_1 - x_2$*

$Sx_1 + Tx_2 \geq 1$

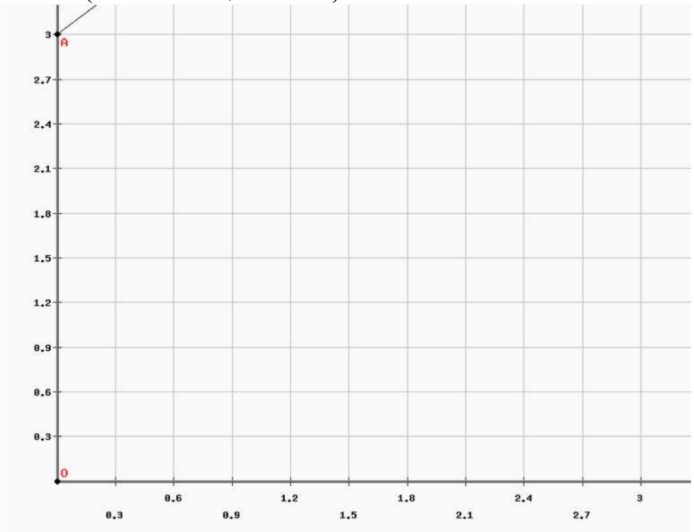
$Sx_1 - Tx_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

• .Les conditions sur les paramètres *S*, T $\in \mathbb{R}$ telles que le PL n'a aucune solution réalisable : **(2 Pt)**

Le PL n'a pas de solution réalisable lorsque l'une de ses contrainte n'est pas vérifiée, i.e.
$Sx_1 + Tx_2 < 1$
$Sx_1 - Tx_2 > 3$
$x_1 < 0$
$x_2 < 0$
Par exemple :

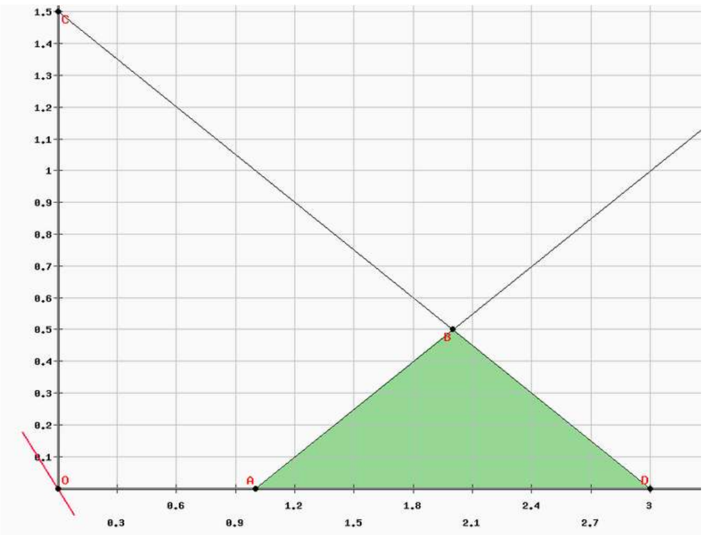
- La contrainte $Sx_1 + Tx_2 < 1$ sera toujours vérifiée si $S \leq 0$ et $T \leq 0$
- Alors que la contrainte $Sx_1 - Tx_2 > 3$ sera vérifiée si $S = \frac{n1}{x_1}, T = \frac{n2}{x_2}, n1 - n2 > 3, x_1 > 0, x_2 > 0, (n1, n2) \in \mathbb{R}^2$ (ex. $n1 = 5, n2 = 1$)



Le PL n'a pas de solution réalisable : S=-1 et T=-1

- Les conditions sur les paramètres *S*, T ∈ ℝ telles que le PL a une solution optimale: **(2 Pt)**

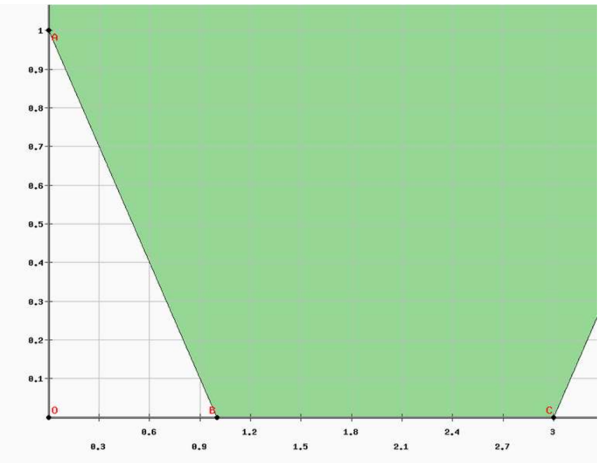
$S > 0$ et $T < 0$



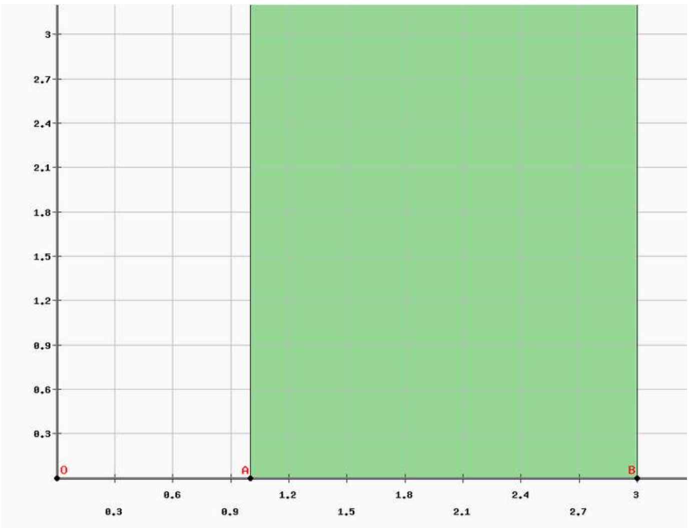
Le PL a une solution optimale: S=1 et T=-2, $X^* = (x_1, x_2) = (1,0), z^* = -1.$

- Les conditions sur les paramètres *S*, T ∈ ℝ telles que le PL a une fonction objectif non majorée **(2 Pt)**

$T > 0$ ou $\{S > 0, T = 0\}$



Le PL a une fonction objectif non majorée : T=1.



Le PL a une fonction objectif non majorée : S=1, T=0.

- Solution du PL avec la méthode simplexe tableau

Max z$= x_1 + x_2 + x_3$

$-x_1 + x_2 - x_3 \geq -1$

$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

<u>Mise sous forme standard du PL</u> (1.5 Pt)

Max z$= x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Tableau 0								
C_B	c_j	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	1	-1	1	1	0	11/4
1	x_2	-1	2	3	0	1	2
1	***x3***	1	1	1	0	0	1/4
c_j-z_j		0	0	0	0	0	z=5

$c_j - z_j = 0$, pour j=1,2,…,5, donc la solution de base actuelle est optimale et multiple, $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$=(11/4,2,1/4,0,0), $z^* = 5$ **(2.5 Pt)**