Corrigé Type de la série TD N°4

Exercice 1

Primal

- Max $Z = 2x1 + 4x2 + 3x3$

$3x1 + 4x2 + 2x3 \leq 60$
$2x1 + x2 + 2x3 \leq 40$
$x1 + 3x2 + 2x3 \leq 80$
$x1, x2, x3 \geq 0$

- Min $Z = 20x1 + 24x2$

$x1 + x2 \geq 30$
$x1 + 2x2 \geq 40$
$x1, x2 \geq 0$

- Max $Z = 10x1 + 6x2$

$x1 + 4x2 \leq 40$
$3x1 + 2x2 = 60$
$2x1 + x2 \geq 25$
$x1, x2 \geq 0$

Dual

- Min $w = 60y1 + 40y2 + 80y3$

$3y1 + 2y2 + y3 \geq 2$
$4y1 + y2 + 3y3 \geq 4$
$2y1 + 2y2 + 2y3 \geq 3$
$y1\geq 0$, $y2 \geq$, $y3 \geq 0$

- Max $w = 30y1 + 40y2$

$y1 + y2 \leq 20$
$y1 + 2y2 \leq 24$
$y1\geq 0$, $y3 \geq 0$

- Min $w = 40y1 + 60y2 - 25y3$

$y1 + 3y2 - 2y3 \geq 10$
$4y1 + 2y2 - y3 \geq 6$
$y1\geq 0$, $y3 \geq 0$, $y2$ quelconque

Exercice 2

i) Qu'en est-il de l'algorithme dual du simplexe?

L'algorithme dual du simplexe permet de passer d'une solution de base du primal à une autre qui satisfait aux conditions d'optimalité: un vecteur de coût relatif dont les composantes sont non négatives. L'algorithme termine lorsque la solution de base est réalisable pour le primal.

ii) Qu'en est-il de l'algorithme primal-dual?

L'algorithme primal-dual permet de passer à chaque itération d'une solution réalisable pour le problème dual à une autre, et d'une solution irréalisable pour le primal qui satisfait aux conditions d'optimalité (le théorème des écarts complémentaires) à une autre. L'algorithme termine lorsque la solution primale est réalisable.

Exercice 3

1. Donner le dual PL (D) de ce primal (P)

Min *w=80y1 + 24y2 + 36y3*

Sous les contraintes:

$5y1+y2+3y3 \geq 40$

$4y1+2y2+2y3 \geq 50$

$y1,y2,y3 \geq 0$

2. Résoudre le primal PL (P) par le simplexe

Max $z = 40x_1 + 50x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Sous les contraintes:

$5x_1 + 4x_2 + s_1 = 80$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 24$

$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 36$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
5	4	1	0	0	80	80/4	s_1
1	2	0	1	0	24	**24/2**	s_2
3	2	0	0	1	36	36/2	s_3
-40	**-50**	0	0	0	0		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
3	0	1	-2	0	32	32/3	s_1
1/2	1	0	1/2	0	12	12*2	x_2
2	0	0	-1	1	12	**12/2**	s_3
-15	0	0	25	0	600		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	Base
0	0	1	-1/2	-3/2	**14**		s_1
0	1	0	3/4	-1/4	**9**		x_2
1	0	0	-1/2	1/2	**6**		x_1
0	**0**	**0**	**17.5**=35/2	**7.5**=15/2	**690**		

La solution est :
x_1 = 6, x_2 = 9, s_1 =14,
s_2 = 0, s_3 = 0
z = 690

3. Déduire la solution du dual (D)

A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes:

- les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale **z=cx* = y*b=w**
- la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement
- les variables du primal (**x_1, x_2**), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées, d'où pour le dual à résoudre:

5y1+y2+3y3 = 40
4y1+2y2+2y3 = 50

- la première variable d'écart **s_1** est non nulle donc la première valeur y_1 = 0, d'où le dual à résoudre est :
y2+3y3 = 40
2y2+2y3 = 50

Primal	**z = 690**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	6	9	14	0	0
	valeurs marginales	0	0	0	-17.5	-7.5
Dual	**w = 690**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	0	17.5	7.5
	valeurs marginales	-6	-9	-14	0	0

Au fait, il n'existe que quatre situations possibles pour une paire de problèmes liés par la dualité :
1. Les deux problèmes possèdent des solutions optimales finies (liées par les relations ci-dessus)
2. Le problème primal est non borné et le problème dual est impossible
3. Le problème primal est impossible et le problème dual est non borné
4. Les deux problèmes sont impossibles

Exercice 4

a)
max z = $6x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 \leq 85x_2$
≤ 22
$3x_1 \leq 12$
$x_1 , x_2 \geq 0$

max z = $6x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 + s_1 = 8$ (Farine)
$5x_2 + s_2 = 22$ (Chocolat)
$3x_1 + s_3 = 12$ (Noix de coco)
$x_1 , x_2 , s_1\ s_2\ s_3 \geq 0$

Forme tableau							
Coefficients						bi	Var base
f	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	1	1	1	0	0	8	s_1
0	0	5	0	1	0	22	s_2
0	**3**	0	0	0	1	12	s_3
1	**-6**	**-5**	1	0	0	0	f
0	0	**1**	1	0	-1/3	4	s_1
0	0	5	0	1	0	22	s_2
0	1	0	0	0	1/3	4	x_1
1	0	**-5**	1	0	0	24	f
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**-1/3**	**4**	$\boldsymbol{x_2}$
0	0	0	5	-1	-5/3	-2	s_2
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1/3**	**4**	$\boldsymbol{x_1}$
1	0	0	5	0	1/3	44	f

La solution est : $f = 44$
$x_1 = 4$
$x_2 = 4$
$s_2 = 2$
$s_1 = 0$
$s_3 = 0$

b)
max $z = 6x_1 + C_2\, x_2$
$\boldsymbol{x_2 = 4 - s_1 + (1/3)\, s_3}$
$\boldsymbol{x_1 = 4 - (1/3)\, s_3}$
$z = 6(4 - (1/3)\, s_3) + C_2\,(4 - s_1 + (1/3)\, s_3)$
$z - (-s_1 C_2) - s_3((1/3)\, C_2 - 2) = 4(6 + C_2)$
$\Rightarrow -C_2 \leq 0 \Rightarrow C_2 \geq 0$
et $(1/3)\, C_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (1/3)\, C_2 \leq 2 \Rightarrow C_2 \leq 6$

On en déduit que $C_2 \in [0, 6]$

c)
d'après les coût marginaux, il nous reste en stock 2 quantité de chocolat, donc la quantité minimale pour que plan de fabrication optimal ne soit pas compromis, il faut avoir en réserve 22-2 =20 quantité de chocolat

d)

$\max z = 6x_1 + 5x_2 + 8x_3$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$5x_2 + (1/3)\, x_3 \leq 22$

$3x_1 + (2/3)\, x_3 \leq 12$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

e) Déterminer le dual PL* de ce primal PL

$\max z = 6x_1 + 5x_2$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$5x_2 \leq 22$

$3x_1 \leq 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

min w = 8y1 + 22y2 + 12y3

y1 + 5y2 + 3y3 ≥ 6

y1 ≥ 22

y1 ≥ 0, y2 ≥ 0, y3 ≥ 0

f) En déduire la solution du dual PL*

z = cx* = y*b = w

Primal	**z = 44**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	4	4	0	2	0
	valeurs marginales	0	0	-5	0	-1/3
Dual	**w = 44**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	5	0	1/3
	valeurs marginales	-4	-4	0	-2	0