Université Badji Mokhtar, Annaba
Faculté des Sciences
Département M.I

16/01/2019

Examen d'algèbre1

Exercice 1. **(7pts).** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

I. Soient les ensembles $A = \left\{-2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$ et $B = \{4\}$.

(a). Déterminer $f(A) \to$ **(1.5pts)**

(b). En déduire que f n'est pas injective. Justifier.$\to$ **(1.5pts)**

(c). Déterminer $f^{-1}(B)$. $\to$ **(1pt)**

II. On désigne par $\Re$ la relation binaire définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(a). Montrer que $\Re$ est relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. $\to$ **(1.5pts)**

(b). Déterminer les classes d'équivalences de -2, 0 et 2. $\to$ **(1.5pts)**

Exercice 2. **(6pts)** On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition $*$ par $x * y = x + y - 2$.

1. la loi $*$ est elle commutative, associative, possède elle un élément neutre et un élément symétrique ?$\to$ **(3pts)**
2. Soit $n \in \mathbb{N}/\{0\}$. On pose $x^{(1)} = x$ et $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$

   (a). Calculer $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$. $\to$ **(1.5pts)**

   (b). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}/\{0\} :\ x^{(n)} = nx - 2(n-1)$. $\to$ **(1.5pts)**

Exercice 3. **(4.5pts)**

1 Est ce que l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5}\right\}$ est un anneau intègre ?$\to$ **(1.5pts)**

2. Déterminer la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et quelles sont les éléments non symétrisables.**(1.5pts)**
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $\left(\dot{x} - \dot{2}\right)\left(\dot{x} - \dot{3}\right) = \dot{0}$. Qu'est ce qu'on déduit ?**(1.5pts)**

Exercice 4. **(3.5pts)**Déterminer le $PGCD$ de A et B avec $A = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.

Bon courage