

Logique mathématique

Série de TD N°01 : La calculabilité

Exercice 1 soient les instructions suivantes d'une MT quelconque :

```

q0 s0 D q1
q0 s1 s2 q2
q1 s0 D q1
q1 s2 D q1
q1 s1 D q2
q1 #
q2 s2 G q3
q3 (s0/s1/s2) G q3
q3 #

```

Dérouler cette MT sur la séquence suivante : $\#s_0s_0s_2s_1s_2s_1s_2s_0s_2\#$ sachant que le $\#$ est le symbole blanc.

Exercice 2 Écrire la MT qui étant donné un mot sur le ruban composé des symboles a et b, détermine si le mot se termine par un b ou non. Elle écrit à la fin du mot un T si vrai et un F sinon. Le blanc = \$.

Exercice 3 Modifier la MT précédente pour qu'elle vérifie si le mot en entrée se termine par le même symbole de départ (qu'il soit a ou b).

Exercice 4 Les valeurs en base 10 correspondants aux codes ASCII des lettres sont :

- A : 65 ; B : 66 ; C : 67 ; etc,
- a : 97 ; b : 98 ; c : 99 ; etc.

Pour passer du code ASCII d'une lettre minuscule à celui de la majuscule correspondante, il suffit de transformer le 3^{ème} bit en partant de la gauche de 1 à 0. Par ailleurs, les deux premiers bits sont toujours égaux à « 01 » et les 5 derniers bits ne sont pas modifiés.

A : 65 = 01000001 et a : 97 = 01100001
 C : 67 = 01000011 et c : 99 = 01100011
 Écrire la MT qui transforme une lettre minuscule en lettre majuscule.

Exercice 5 Écrire la MT qui reconnaît la séquence 0001 dans un mot sachant que le ruban contient plusieurs mots et l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Il y a plusieurs mots sur le ruban séparés par un seul $\#$. Deux $\#$ successifs désignent la fin de la séquence.

Exercice 6 Écrire la MT qui vérifie si un mot donné sur le ruban contient la séquence de caractères suivants : « aab ». Le blanc = $\#$ et il y a plusieurs mots sur le ruban séparés par un seul $\#$. Deux $\#$ successifs désignent la fin. A = $\{a, b, \#\}$. On écrit un T ou un F.

Exercice 7 Écrire la MT qui remplace le "0" qui vient après deux "1" par un "1". $A = \{0, 1, \#\}$, q_0 est l'état initial et le ruban contient une seule séquence.

Exercice 8 Écrire la MT qui transforme le mot sur le ruban écrit sur $\{a, b, \#\}$ de telle sorte que tous les "a" soient au début. Exemple : aabbaba devient aaaabbb.

Exercice 9 Écrire une MT permettant de reconnaître les palindromes (un palindrome est un mot qui se lit identiquement dans les deux sens exemple : 0010100), sachant que l'alphabet est $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ et le ruban contient un seul mot.

Exercice 10 Écrire une MT permettant de rajouter un "1" à un nombre binaire n donné comme entrée sachant que l'alphabet est $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, le ruban contient plusieurs mots séparés par deux $\#$ successifs et trois $\#$ successifs représentent la fin du ruban.

Exercice 11 Montrez que les fonctions suivantes sont primitives récurrentes :

1. La fonction plus $= x + y$,
2. La fonction Sigma $= \sum_{i=0}^x i$,
3. La fonction prédécesseur ($\text{pred}(x)$),
4. La fonction différence tronquée ($\text{diff}(x,y)$) telle que $\text{diff}(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{si } x > y \\ 0 & \text{si } x \leq y \end{cases}$,
5. La fonction différence absolue $|x - y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x < y \end{cases}$,
6. La fonction alpha tel que $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$,
7. La fonction multiplication $\text{mult} = x * y$,
8. La fonction factorielle $\text{Fact}(x) = x!$.