المرجح في المستوي ①

❖ مرجح نقطتين

* G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$

- α و β عددان حقيقيان
- تسمى الثنائية (A,α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ $\Leftarrow$ G منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=1$)

مبرهنات:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
- G منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$

خواص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ فإن النقط A , B و G على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

إنشاء مرجح نقطتين:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* G مرجح النقط A , B و C المرفقة بالمعاملات α , β و γ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- α , β و γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

* إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ و النقط A , B و C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$)

مبرهنة:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

خواص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

طريقة 1:

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
2) نرسم الشعاع $\overrightarrow{AG}$ محصلة مجموع الشعاعين $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}$

طريقة 2:

1) ننشيء I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha+\gamma\neq 0$
2) نكتب $\overrightarrow{GI}$ بدلالة $\overrightarrow{BI}$ و ننشيء G

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	إذا كان	فإن مجموعة النقط هي	
❶	$\|\overrightarrow{MG}\| = k'$ حيث $k' > 0$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	دائرة
	$\|\overrightarrow{MG}\| = AB$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = AB$ (لأن AB طول موجب ثابت)	
	$(MG)\perp(MH)$	دائرة قطرها GH و مركزها منتصف $[GH]$	
❷	$\|\overrightarrow{MG}\| = k'$ حيث $k' < 0$	مجموعة خالية	ϕ
❸	$\|\overrightarrow{MG}\| = 0$	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	نقطة
❹	$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$	مستقيم محور القطعة $[GH]$	مستقيم
❺	$\|\overrightarrow{MG}\| \leq k'$	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	جزء من المستوي
	$\|\overrightarrow{MG}\| > k'$	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	
	$\|\overrightarrow{MG}\| < \|\overrightarrow{MH}\|$	نصف المستوي في جهة النقطة G و حده محور $[GH]$	

✳**ملاحظة1:** لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M ب B في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة

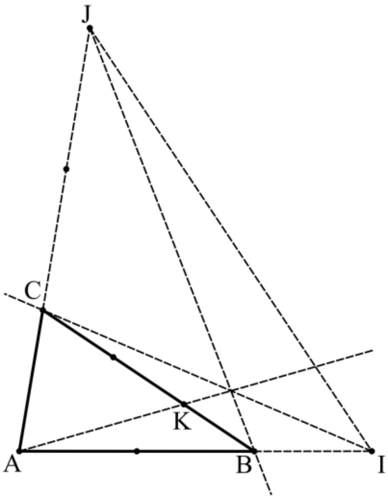
✳**ملاحظة2:** لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

❖ اثبات تلاقي مستقيمات

مثال: ABC مثلث و النقط I , J و K معرفة كما يلي:

- I نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B
- النقطة J تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- النقطة K تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I , J و K مع التبرير.
2) أثبت أن كل نقطة من النقط I , J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A , B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.
3) أثبت أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة.



الحل:

1) الإنشاء مع التبرير:

- $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \Leftarrow 2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftarrow 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \Leftarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftarrow \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه I مرجح الجملة: $\{A(1), B(-3)\}$

* بنفس الطريقة نجد: J مرجح : $\{A(2), C(-3)\}$ و K مرجح : $\{B(2), C(1)\}$

3) إثبات أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة:

ليكن G مرجح $\{(A,2); (B,-6); (C,-3)\}$, G موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

G مرجح $\{(I,-4); (C,-3)\}$ و منه $G \in (IC)$

G مرجح $\{(J,-1); (B,-6)\}$ و منه $G \in (JB)$

G مرجح $\{(K,-9); (A,2)\}$ و منه $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في النقطة G

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{GI} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{IC}$ و منه $G \in (IC)$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في G

❖ مستقيم اولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.

مرجّح نقطتين

① نسمّي مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، النّقطة الوحيدة من المستوي G التي تحقّق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}}$$

② إذا كان $\alpha=\beta\neq 0$ فإنّ G هي منتصف القطعة $[AB]$.

③ لإنشاء النّقطة G نستخدم العلاقة: $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$ ، ثمّ نستعمل مبرهنة طالس لتقسيم القطعة $[AB]$.

④ النُقط A ، B و G على استقامة واحدة.

⑤ G مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \Leftrightarrow G$ مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ ، حيث $k\neq 0$.

⑥ من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$.

مرجّح ثلاث نقط

① نسمّي مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ، النّقطة الوحيدة من المستوي G التي تحقّق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}}$

② ★ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإنّ G تُسمّى مركز المسافات المتساوية .

★★ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma=1$ فإنّ G هي مركز ثقل المثلث ABC (نُقطة تلاقي متوسّطات المثلث)

③ لإنشاء النّقطة G نستخدم العلاقة: $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$ أو نستخدم الخاصية التالية

④ **خاصية التجميع:** إذا كانت G مرجّح الجُملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ و كانت I مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنّ G مرجح الجملة $\{(I,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$.

⑤ G مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \Leftrightarrow G$ مرجّح الجملة المُثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ ، مع $k\neq 0$.

⑥ من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$.

⑦ إحداثيات مرجّح ثلاث نُقط: $$\boxed{\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}}$$

⑧ خواصُّ مرجّح ثلاث نُقط تبقى صحيحةً من أجل أربع نقط ، خمس نقط ... n نقطة .

مجموعات النّقط

مجموعة النّقط M من المستوي التي تحقّق	هي
$MG = r$ مع $r > 0$	هي دائرة (C) مركزها النّقطة G ونصفُ قطرها r
$MG = AB$	هي الدائرة التي مركزها النّقطة G نصف قطرها AB
$(MG) \perp (MH)$	الدّائرة التي قُطرها $[GH]$
$MG \leq r$ مع $r > 0$	كلُّ النّقط التي تقع داخل الدّائرة (C) وعلى محيطها
$MG > r$ مع $r > 0$	كلُّ النّقط من المستوي ماعدا تلك التي تقع داخل الدّائرة (C) وعلى محيطها
$MG = MH$	المستقيم المحوري للقطعة $[HG]$
$\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{AB}$ مع $k \in \mathbb{R}$	المستقيم الذي يشمل G ويوازي (AB)
$MG < MH$	نصف المستوي الذي حدُّه محور القطعة $[GH]$ جهةَ النقطة G

① إذا كان $\|\overrightarrow{MG}\| \leq k < 0$ فإنّ مجموعة النّقط خالية $\emptyset$ ② إذا كان $\|\overrightarrow{MG}\| = 0$ فإنّ M مُنطبقة على G .

★ لكي نُثبت أنّ نقطة E تنتمي إلى مجموعة نقط ما يكفي أن نثبت أنّها تحقق علاقَتها المُعطاة.

استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمات

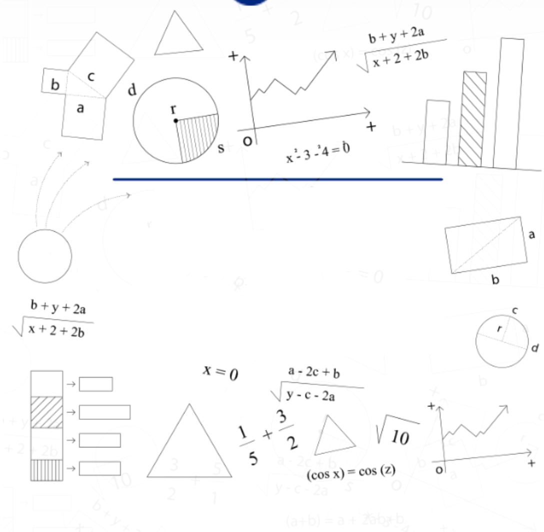
لكي نثبت أنّ النّقطة G هي نقطة تلاقي المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) يكفي أن نثبت أنّ :

① $G \in (CI)$ ، $G \in (BJ)$ و $G \in (AK)$ باستعمال **الارتباط الخطّي، أو** :

② يكفي أن نُّثبت أنّها مرجح الجُمل المثقلة $\{(C,\alpha);(I,\beta)\}$ ، $\{(B,\gamma);(J,\delta)\}$ و $\{(A,\rho);(K,\lambda)\}$ باستعمال **خاصيّة التجميع** ، حيث α ، β ، γ ، δ ، ρ و λ أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

★ **مستقيم أويلر** : هو المستقيم الذي يشمل **نقطة التقاء ارتفاعات المثلث** و **مركز ثقله** و **مركز الدائرة المحيطة به.**

★★ إذا كان المثلث متقايس الأضلاع فإنّ النّقط الثلاث السابقة منطبقة على بعضها.



سنة **ثانية** ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

ملخص في

المرجح

مرجح نقطتين

❖ **تعريف:** A و B نقطتين متمايزتين، وα و β عددين حقيقين حيث $(\alpha+\beta\neq 0)$

نسمي G مرجح النقطتين A و B المرفقين بالمعاملين α و β على الترتيب حيث:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

❖ **مفاهيم عامة:**

- الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة
- الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين
- إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي $\alpha=-\beta$ ومنه العلاقة تصبح $\alpha(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$
- إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل على $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ والنقطة G منتصف $[AB]$

❖ **نتائج هامــة:**

- النقطة G وحيدة
- G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
- النقط A، B و G على استقامية واحدة
- من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}}$

❖ **إنشاء مرجح نقطتين:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

❖ **إحداثيي مرجح نقطتين:** G مرجح النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ المرفقين بالمعاملين α و β على الترتيب و$G(x_G;y_G)$، لدينا:

$$\boxed{y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\quad\text{و}\quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}}$$

❖ **مجموعات النقط:**

النقطة G مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$

والنقطة G' مرجح الجملة $\{(A;\alpha');(B;\beta')\}$

- كل علاقة من الشكل $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\alpha'\,\overrightarrow{MA}+\beta'\,\overrightarrow{MB}\right\|}$
  حيث: $|\alpha+\beta|=|\alpha'+\beta'|\neq 0$
  هي محور القطعة $[GG']$
- كل علاقة من الشكل: $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\lambda\,\overrightarrow{MA}-\lambda\,\overrightarrow{MB}\right\|}$
  حيث: $\lambda\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$
  هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:
  $$r=\frac{|\lambda|}{|\alpha+\beta|}\times AB$$
- كل علاقة من الشكل: $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=k}$
  حيث k عدد حقيقي موجب تماما و $\alpha+\beta\neq 0$
  هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:
  $$r=\frac{k}{|\alpha+\beta|}$$

مرجح ثلاث نقط

❖ **تعريف:** A ، B و C ثلاث نقط متمايزة و α ، β و γ أعداد حقيقية حيث $(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$
نسمي G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب حيث

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

❖ **مفاهيم عامة:**
- إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإنّ المرجح غير موجود
- إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية
- إذا كان $\alpha=\beta=\gamma=1$ والنقط A، B و C ليست على استقامية فإن G مركز ثقل المثلث ABC

❖ **نتائج هامــة:**
- النقطة G وحيدة
- G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta);(C;\lambda\gamma)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
- من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}}$

❖ **إنشاء مرجح ثلاث نقط:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AC}}$$

❖ **إحداثيي مرجح ثلاث نقط:** G مرجح النقط $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب و$G(x_G;y_G)$ ، لدينا:

$$\boxed{y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\quad \text{و}\quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

❖ **إنشاء مرجح ثلاث نقط:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AC}}$$

❖ **خاصية التجميع:** G مرجح $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$، إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ وكانت G' مرجح $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$
فإنّ G مرجح الجملة $\boxed{\{(G';\alpha+\beta);(C;\gamma)\}}$

❖ **مجموعات النقط:**
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=AB}$ ، فإن مجموعة النقط M هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها AB
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=k}$ حيث: $k>0$ ، فإن مجموعة النقط M هي:
دائرة مركزها G ونصف قطرها k
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=k}$ حيث: $k<0$ ، فإن مجموعة النقط M هي: مجموعة خالية $\emptyset$
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=0}$ ، فإن مجموعة النقط M هي: النقطة G

❖ **ملاحظات:**
- لإثبات أن النقطة B تنتمي إلى مجموعة النقاط يكفي تعويض M بـ B في العلاقة المعطاة ونتحصل على علاقة صحيحة
- لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال وخواص الأشعة للتخلص من M

❖ **اثبات تلاقي مستقيمات:** لاثبات أن مستقيمات تتقاطع في نقطة G يكفي أن نثبت أن هذه النقطة مرجح لنقطتين من كل مستقيم بمعاملات حقيقية

❖ **اثبات استقامية نقــط:** لاثبات أن ثلاث نقط في استقامية يكفي أن نثبت أن نقطة منها هي مرجح للنقطتين الأخريين بمعاملين حقيقين