Solution d'exercice

- Démonstration que la fonction *f(x)* est linéaire par morceau et concave

Une fonction $f: I \to R$, où I est un intervalle, est linéaire si, pour tous x de I : $f(x) = ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- ❖ $Si\ x \leq 1, f(x) = 1.x + 0$, donc f est linéaire
- ❖ $Si\ 1 \leq x \leq 3, f(x) = \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2}$, donc f est linéaire
- ❖ $Si\ x \geq 3, f(x) = -1.x + 5$, donc f est linéaire

Donc *f* est linéaire par morceau.

- ❖ Une fonction $f: I \to R$, où I est un intervalle, est convexe si, pour tous x et y de I, pour tout t de $[0,1]$: $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$,
- ❖ La fonction linéaire affine $f(x) = ax + b$ est concave, puisque $f(tx + (1-t)y) = a(tx + (1-t)y) + b = t(ax + b) - tb + (1-t)(ay + b) - (1-t)b + b = tf(x) + (1-t)f(y)$
- ❖ $f(x)$ est linéaire par morceau donc, elle est concave.

- Démonstration que le problème d'optimisation $max_{x \in R} f(x)$ peut s'écrire sous forme d'un PL

- ❖ Pour chaque définition de la fonction, on associe une variable de décision. Il y a trois définitions, donc on a trois variables $x1, x2$ et $x3$
- ❖ On associe aussi une variable globale à la fonction à maximiser, soit y cette variable
- ❖ Il y a deux contraintes associées à la première définition de la fonction. Ces contraintes sont :
  - ✓ $y \geq x1$
  - ✓ $x1 \leq 1$
- ❖ Il y a trois contraintes associées à la deuxième définition de la fonction. Ces contraintes sont :
  - ✓ $y \geq (x2 + 1)/2$
  - ✓ $x2 \geq 1$
  - ✓ $x2 \leq 3$
- ❖ Il y a deux contraintes associées à la troisième définition de la fonction. Ces contraintes sont :
  - ✓ $y \leq (-x3 + 5)$
  - ✓ $x3 \geq 3$

- Donc, le PL associé à ce problème d'optimisation est :

$\boldsymbol{Max}\ Z = y$
Sujet à :
$y \geq x1$
$x1 \leq 1$
$y \geq (x2 + 1)/2$
$x2 \geq 1$
$x2 \leq 3$
$y \leq -x3 + 5$
$x3 \geq 3$
$x1, x2, x3, y \geq 0$