مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)
الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 المستقيمات المقاربة:

المستقيم المقارب	النهاية	التفسير الهندسي
①العمودي	$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=a}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ(C_f).
②الأفقي	$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=b}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند ∞.
③المائل	$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

ملاحظة: إذا كان: $\begin{cases} f(x)=ax+b+g(x) \\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0 \end{cases}$،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

الدّالة f	معناه	ويكون
①الزوجية	**1)** D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) **2)** $\boxed{f(-x)=f(x)}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.
②الفردية	**1)** D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) **2)** $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ **أو** $\boxed{f(-x)+f(x)=0}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

①محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=\alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha-x)=f(x)}$ **أو** $\boxed{f(\alpha-x)=f(\alpha+x)}$.
②مركز التناظر	النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ **أو** $\boxed{f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta}$.

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

	الطريقة	ونكتب
①تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب $(C_f)\cap(yy')$	▪ نحسب $\boxed{f(0)}$.	$(C_f)\cap(yy')=\{A(0;\dots)\}$
②تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f)\cap(xx')$	▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ في D_f.	$(C_f)\cap(xx')=\{A(\dots;0);B(\dots;0)\}$

5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

الصيغة	الطـــــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$، و عند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، و عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha\times f'(x_0)=-1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيين $(x_M;y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M=f'(x_0)(x_M-x_0)+f(x_0)}$، و عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax+b$:

الطريقة	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$	▪ $f(x)-(ax+b)>0$	▪ (C_f) يقع **فوق** (Δ).
	▪ $f(x)-(ax+b)<0$	▪ (C_f) يقع **تحت** (Δ).
	▪ $f(x)-(ax+b)=0$	▪ (C_f) **يقطع** (Δ).

7 النهايات:

أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

توجد ؟	الجمع	الجداء	حاصل القسمة	
أربع (04) أشكال	$(+\infty)+(-\infty)$ والعكس	$0\times\infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

ب) نهاية #دَالة كثير حدود عند $+\infty$ أو$-\infty$:

○ **النهاية** عند $+\infty$ وَ عند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

$f(x)=\boldsymbol{x^3}+x-2$	$g(x)=x^2\boldsymbol{-2x^3}+1$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\boldsymbol{x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{x^3})$	$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$

ج) نهاية #دَالة ناطقة عند $+\infty$ أو$-\infty$:

○ **النهاية** عند $+\infty$ وَ عند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

○ **لحساب نهايات #دَالة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0}=\infty}$ **ويُحدّد بدراسة إشارة المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

المقام من الشكل/ حيث	n فردي	n زوجي
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** x^n **من إشارة** x **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$	**إشارة** x^n **موجب** $(x^n\geq 0)$ **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to0}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$
$(ax+b)^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** $(ax+b)^n$ **من إشارة** $(ax+b)$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{b}{a}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0^{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{b}{a}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0^{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ وَ	**إشارة** $(ax+b)^n$ **موجب** $(ax+b)^n\geq 0$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$
ax^2+bx+c	**ندرس إشارة** ax^2+bx+c **باستعمال المميز** $\Delta=b^2-4ac$	

ج) إشارة $ax+b$ $(a\neq 0)$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		**عكس** إشارة a	0	**مثل** إشارة a	

ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	x: $-\infty$ … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a	لا يُمكن تحليل $P(x)$
$\Delta = 0$	$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ○ مثل إشارة a	$P(x) = a(x - x_0)^2$ $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ○ عكس إشارة a ○ مثل إشارة a (نفرض أنّ $x_1 < x_2$)	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

8 الإشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

$f(x) =$	$f'(x) =$	مجالات قابلية الاشتقاق
$(k \in \mathbb{R})$ k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})$ x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال: u و v دالّتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدّالة	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدّالة v **لا تنعدم** على I)
المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u'v + v'u$	$\frac{-v'}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

نتائج:

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال** <u>محتوى</u> **في مجموعة تعريفها**.

ج. اللاشتقاقية واللاستمرارية:

<u>إذا</u> كانت f **قابلة للاشتقاق** على مجال I، <u>فإنّــها</u> **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح**.

<u>إشتقاق دَالة مركبة:</u>

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

9 الإستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f **مستمرة على I** فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).**

نتائـــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي دّوال مستمرة.**

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تُقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.

▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** و**رتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** $\boldsymbol{\alpha}$ في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** $\boldsymbol{\alpha}$ في المجال $[a;b]$.

طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

الحالة العامة $(k \in \mathbb{R})$	**الحالة الخاصة** $(k = 0)$
1/ نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = k$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، **وذلك بعد** حسابهما.	**1/** نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = 0$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{\boldsymbol{f(a)\times f(b) < 0}}$، **وذلك بعد** حسابهما.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة f **مستمرة** و**رتيبة تماماً** على مجال **مفتوح** أو **مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:

المعادلة من الشكل $f(x) = m$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

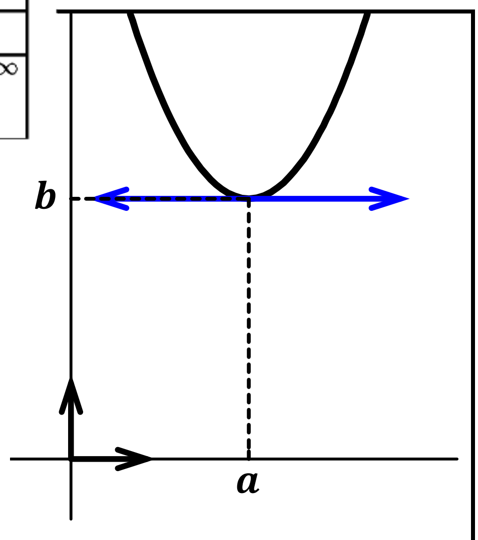
المعادلة من الشكل $f(x) = ax + \boxed{m}$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة مائلة** مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y = ax + \boxed{b}$.

المعادلة من الشكل $f(x) = mx + b$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة دورانية** حول النقطة $A(0;b)$.

المعادلة من الشكل $f(x) = f(m)$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

11 إضافات:

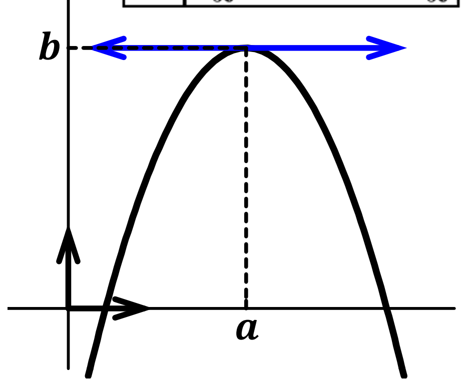
x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$



(الشكل 01)

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f'(a) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$-\infty$



(الشكل 02)

12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f)، قد يُطلب منّا أنْ **نستنتج منحنياً آخر** (C_h) **-مثلا- لدّالة** h؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

الصيغة	الطـــــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>**حيث:**</u> $\boxed{h(x) = \lvert f(x)\rvert}$.	▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \geq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \leq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل**.
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>**حيث:**</u> $\boxed{h(x) = f(\lvert x\rvert)}$. <u>**ملاحظة:**</u> عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية**.	▪ إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ <u>أي</u> $\boxed{x \in D_f \cap [0; +\infty[}$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** <u>لأنّ</u> h **زوجية**.
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>حيث:</u> $\boxed{h(x) = f(-\lvert x\rvert)}$. <u>**ملاحظة:**</u> عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية**.	▪ إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ <u>أي</u> $\boxed{x \in D_f \cap]-\infty; 0]}$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** <u>لأنّ</u> h **زوجية**.
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>حيث:</u> $\boxed{h(x) = -f(x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>حيث:</u> $\boxed{h(x) = f(-x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور التراتيب.**
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>حيث:</u> $h(x) = -f(-x)$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.**
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>التي تحقق:</u> $\boxed{h(x) = f(x+b) + k}$.	▪ نستنتج (C_h) من (C_f) **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}$. (<u>أي</u> (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ k \end{pmatrix}$)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>التي تحقق:</u> $\boxed{h(x) = f(x) + k}$.	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b = 0}$. ▪ (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.
الصيغة التاسعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h <u>التي تحقق:</u> $\boxed{h(x) = f(x+b)}$.	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{k = 0}$. ▪ (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.

الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = kf(x)}$؛ $k \in \mathbb{R}^*$.	▪ نحصل على نقطة من (C_h) ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد k؛ حيث M نقطة من (C_f) فاصلتها x.

13 قابلية إشتقاق دّالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

تكون f **قابلة للاشتقاق** عند x_0 إذا وفقط إذا كانت $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$ أو $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$،

حيث $\boxed{f'(x_0) = l \in \mathbb{R}}$ يسمى **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**. وتفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المنحنى (C_f) يقبل **مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **معامل توجيهه** $\boxed{f'(x_0)}$، ومعادلته من الشكل:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)

f قابلة للاشتقاق عند x_0

معنـــــــــاه

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$$

أو

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$$

l **يسمى العدد المشتق للدّالة f عند x_0**، ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

نكتب:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانيا (أو هندسيا) **معامل توجيه مماس المنحنى** (C_f) **عند النقطة $A(x_0; y_0)$**، حيث $y_0 = f(x_0)$.

بصيغة أخرى: يُمثل بيانيا (أو هندسيا) **معامل توجيه مماس المنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة x_0**.

القراءة البيانية للعدد المشتق:

يُمكن إيجاده بيانيا بأخذ نقطتين A و B من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$.

إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **مُوازيا لمحور الفواصل** فإنّ **معامل توجيهه معدوم** أيّ $f'(x_0) = 0$ وتكون معادلته من الشكل $y = f(x_0)$.

14 نقطة زاوية:

إذا كان: $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2}$، حيث l_1 و l_2 **عددان حقيقيان**.

فإنّ **f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار** وعددّها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و **f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين** وعددّها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

في حالة $(l_1 \neq l_2)$، نقول أنّ **f غير قابلة للاشتقاق عند x_0**.

ويكون **التفسير الهندسي** هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0: **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2}$

ملاحظة 02: المنحنى (C_f) يقبل **نصفي مماسين** عند **نقطة الزاوية** معادلاتهما:

$$\boxed{\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}} \text{ وَ } \boxed{\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}.$$

تنبيه: تبقى **النقطة الزاوية موجودة** حتى لو كانت **إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً** والأخرى ∞.

15 نقطة الإنعطاف:

بصفة عامة، لتعيين **نقطة الانعطاف**؛ نقوم بما يلي:

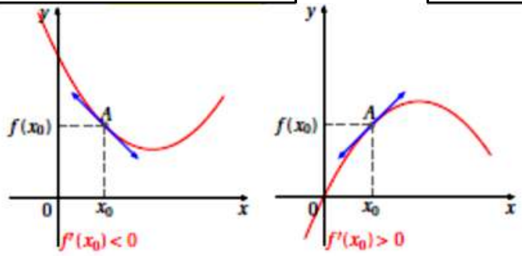
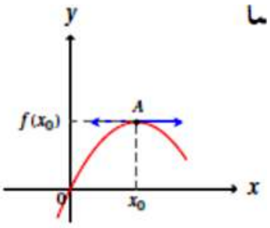
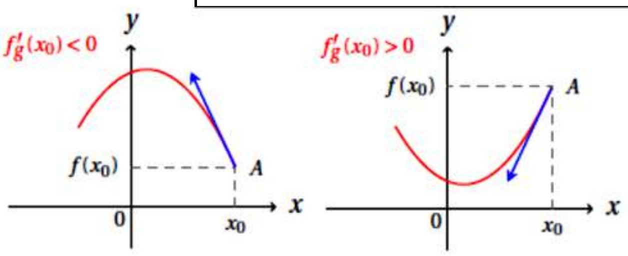
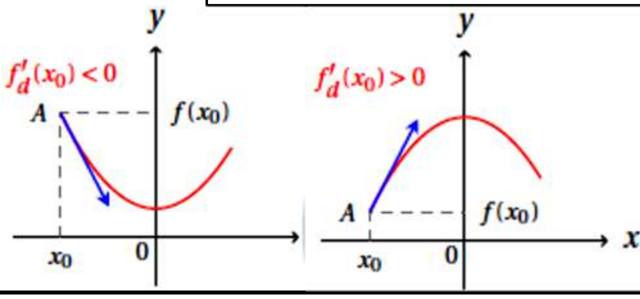
- **نحسب المشتق الثاني $f''(x)$، وندرس إشارته**، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة x_0 من D_f، **مُغيّراً إشارته**، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.
- **حالة خاصة:**

في بعض الحالات، يُمكن تعيين **نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأوّل** $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f، **ولم يُغيّر إشارته**، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **ملاحظة:**

في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعيين **نقطة الانعطاف** بالكيفية التالية:
يُطلب منّا أن **ندرس وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة إلى المماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، فإذا وجدنا أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس)** نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=l}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=l}$، و**معادلته:** $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=0}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=0}$ و**معادلته:** $\boxed{y=f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\<}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليسار وعددها المشتق هو $\boxed{f_g{}'(x_0)=l_1}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_g{}'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\>}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليمين وعددها المشتق هو $\boxed{f_d{}'(x_0)=l_2}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_d{}'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$l_1\neq l_2$	الدّالة f **غير قابلة للاشتقاق** عند x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f).