Solution Examen EMD PL 2022/2023

Exercice 1

1) Les variables de décision et leurs coûts

- x1 : nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 1
  cx1: 20 €, donc le profit est 20-5=15€
- x2 : nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 2
  cx2: 18 €, €, donc le profit est 18-5=13€
- x2 : nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 3
  cx3: 16 €, €, donc le profit est 16-5=11€
- x4 : nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 4
  cx4: 14 €, le profit est 14-5=9€
- x5: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 1
  cx5=200 €
- x6: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 2
  cx6=200 €
- x7: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 3
  cx7=200 €
- x8: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 4
  cx8=200 €
- x9: le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 1
  cx9=200 €
- x10: le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 2
  cx10=200 €
- x11 : le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 3
  cx11=200 €
- x12: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 1
  cx12=100 €
- x13: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 2
  cx13=100 €
- x14: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 3
  cx14=100 €
- x15: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 2
  cx15=200 €
- x16: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 3
  cx16=200 €
- x17: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 4
  cx17=200 €

2) Les contraintes d'optimisation

- $50x5 - x1 \geq 0$
- $50x6 - x2 \geq 0$
- $50x7 - x3 \geq 0$
- $50x8 - x4 \geq 0$
- $3x9 - x12 \geq 0$
- $3x10 - x13 \geq 0$
- $3x11 - x14 \geq 0$
- $x5 + x9 \leq 40$
- $40 + x12 - x6 - x10 - x15 = 0$
- $40 + x12 + x13 - x7 - x14 - x16 = 0$
- $40 + x12 + x13 + x14 - x8 - x17 = 0$
- $x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14 \ \geq 0$

3) PL

$$\boldsymbol{Max\ Z} = 15x1 + 13x2 + 11x3 + 9x4 - 200x5 - 200x6 - 200x7 - 200x8 - 200x9 - 200x10 - 200x11 - 200x15 - 200x16 - 200x17 - 100x12 - 100x13 - 100x14$$ **(2 Pts)**

Sujet à:

$x1 + x2 + x3 + x4 <= 20000$ **(0.25 Pt)**

$50x5 - x1 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$50x6 - x2 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$50x7 - x3 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$50x8 - x4 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$3x9 - x12 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$3x10 - x13 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$3x11 - x14 \geq 0$ **(0.25 Pt)**

$x5 + x9 \leq 40$ **(0.25 Pt)**

$40 + x12 - x6 - x10 - x15 = 0$ **(0.25 Pt)**

$40 + x12 + x13 - x7 - x14 - x16 = 0$ **(0.25 Pt)**

$40 + x12 + x13 + x14 - x8 - x17 = 0$ **(0.25 Pt)**

$x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17 \geq 0$

Exercice 2

1. **Type** : Programme d'optimisation non linéaire (PNL) **(0.5 Pt)**
2. **Nombre de variables de décision** (NBVD) = n+m **(0.5 Pt)**
3. **Nombre de contraintes fonctionnelles** (NBCF) = 2m **(0.5 Pt)**
4. **Degré de liberté** (DL) = n+ m –m =n **(0.5 Pt)**
5. **PL équivalent** : **(1 Pt)**

$$\boldsymbol{Max\ Z} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} log|c_i|\, x_i$$

Sujet à :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_{i1}, i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} \geq b_{i2}, i = 1,2, \dots, m$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, n$

$x_j \in \mathbb{R}, \quad j = n+1, n+2, \dots, n+m$

6. **Mise sous forme standard du PL résultant** : **(1 Pt)**

$$\boldsymbol{Max\ Z} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} log|c_i|\,(x_i^+ - x_i^-)$$

Sujet à :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i}^+ - x_{n+i}^- = b_{i1}, i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j + x_{n+i}^+ - x_{n+i}^- + e_k = -b_{i2}, i = 1,2, \dots, m$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, n,$

$x_{n+i}^+, x_{n+i}^- \geq 0, \quad i = 1,2, \dots, m$

$e_k \geq 0\,, k = 1,2, \dots, m$

7. **Dual du PL : (1 Pt)**

$$\mathbf{Min}\ W = \sum_{i=1}^{m} b_{i1}\, y_i - \sum_{i=1}^{m} b_{i2}\, y_{n+i}$$

$Sujet$ à :

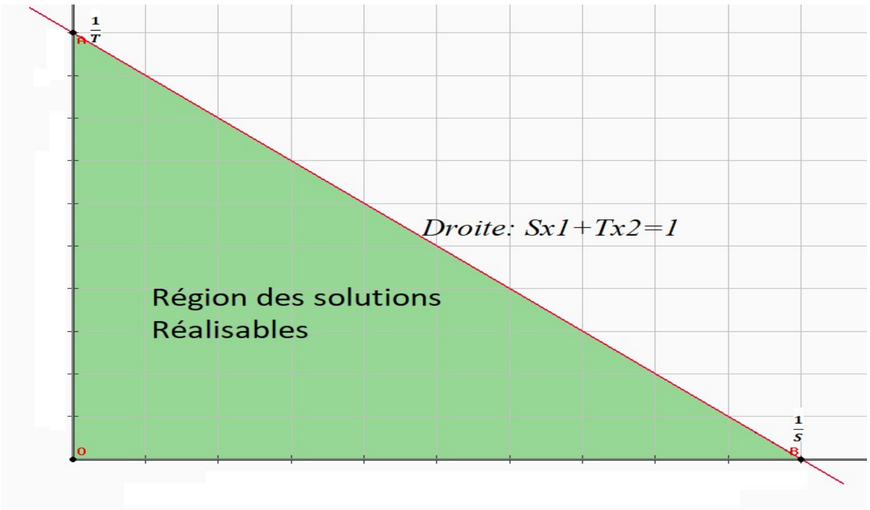
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}(y_k - y_{n+k}) \geq c_j, j = 1,2,\dots,n$$

$$n\sum_{k=1}^{m}(y_k - y_{n+k}) = log|c_i|, i = 1,2,\dots,m$$

$$y_k \in \mathbb{R},\ y_{n+k} \geq 0, \qquad k = 1,2,\dots,m$$

<u>Exercice 3</u>

<u>1)</u>



- PL n'a aucune solution réalisable $\Rightarrow$ la région réalisable définie par le triangle OAB est vide, i.e., T et S vérifient l'inégalité, $Sx1 + Tx2 > 1$, par exemple, $S = \frac{k_1}{x1}, T = \frac{k_2}{x2}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, x1 \neq 0, x2 \neq 0, k_1 + k_2 > 1$. **(1 Pt)**
- PL a une solution optimale $\Rightarrow$ la région réalisable définie par le triangle OAB est bornée, i.e., $\frac{1}{S} > 0\ et\ \frac{1}{T} > 0$, donc $S > 0\ et\ T > 0$. **(1 Pt)**
- PL a une fonction objectif non majorée $\Rightarrow$ la région réalisable définie par le triangle OAB est non bornée, i.e., $S \leq 0\ ou\ T \leq 0$. **(1 Pt)**

2)

Mise du PL sous forme standard

$\mathbf{Min}\ \mathbf{z} = x1 + x2$

Sujet à :

$x1 - x2 + x3 = 1$

$-x1 + 2x2 + x4 = 2$

$x1, x2, x3, x4 \geq 0$

Tableau 0 (01 Pt)							
	c_j	**1**	**1**	**0**	**0**		
C_B	**Variable de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	**Solution de base X_B=B^{-1}.b**	**Quotients**
1	x_1	1	0	2	1	4	4/2=2
1	x_2	0	1	1	1	3	3/1=3
	c_j-z_j	0	0	-3	-2	Z=7	

x_1: var sortante

←Min

x_3: variable entrante

Tableau 1 (1 Pt)								
C_B	c_j	**1**	**1**	**0**	**0**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**	**Quotients**	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4			
0	x_3	1/2	0	1	1/2	2	2÷1/2=4	
1	x_2	-1/2	1	0	1/2	1	1÷1/2=2	←Min
	c_j-z_j	3/2	0	0	-1/2	Z=1		

x_2: var sortante

x_4: variable entrante

Tableau 2 (1 Pt)						
C_B	c_j	**1**	**1**	**0**	**0**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	-1	1	0	1
0	x_4	-1	2	0	1	2
	c_j-z_j	1	1	0	0	Z=0

- La solution optimale est $X^* = (x1^*, x2^*)^T = (0,0)^T$, Z^*=0.

Exercice 4

- **Tableau (1 Pt)**

	Chantier A	Chantier B	Chantier C	Fournitures
Usine 1	4	3	8	700
Usine 2	7	5	9	500
Usine 3	4	5	5	300
Demandes	500	500	500	**Total : 1500**

- **Solution Initiale réalisable avec la méthode Nord-Ouest (1 Pt)**

	Chantier A	Chantier B	Chantier C	Fournitures
Usine 1	500	200		700
Usine 2		300	200	500
Usine 3			300	300
Demandes	500	500	500	**Total : 1500**

Donc, la solution initiale réalisable est x11=500, x12=200, x22=300, x23=200, x33=300, x13=x21=x31=x32=0

Le coût correspondant à cette solution est $Z = 4 \times 500 + 3 \times 200 + 5 \times 300 + 200 \times 9 = 7400$

- **Solution optimale avec la méthode du simplexe**
  - **On calcule les coûts duaux :** $c_{ij} = u_i + v_j$

$u1 + v1 = 4 \Longrightarrow v1 = 4$

$u1 + v2 = 3 \Longrightarrow v2 = 3$

$u2 + v2 = 5 \Longrightarrow u2 = 2$

$u2 + v3 = 9 \Longrightarrow v3 = 7$

$u3 + v3 = 5 \Longrightarrow u3 = -2$

  - Pour toutes les cases hors-bases {(1,3), (2,1), (3,1), (3,2)}, on évalue la quantité : $\Delta z = c_{ij} - u_i - v_j$

    $\Delta z_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 8 - 0 - 7 = 1$

    $\Delta z_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 7 - 2 - 4 = 1$

$\Delta z_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 4 - (-2) - 4 = 2$
$\Delta z_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 - (-2) - 3 = 4$

- Tous les $\Delta z \geq 0 \Rightarrow$ La solution initiale est optimale

	Chantier A		**Chantier B**		**Chantier C**		**Fournitures**	u_i
Usine 1	500	4	200	3	(1)	8	700	*u1=0*
Usine 2	(1)	7	300	5	200	9	500	*u2=2*
Usine 3	(2)	4	(4)	5	300	5	300	*u3=-2*
Demandes	500		500		500		**Total : 1500**	
v_i	*v1=4*		*v2=3*		*v3=7*			

(2 Pts)