المرجح في المستوي ①

❖ مرجح نقطتين

* G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$

- ○ α و β عددان حقيقيان
- ○ تسمى الثنائية (A,α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ $\Leftarrow$ G منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=1$)

مبرهنات:

- ▪ G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
- ▪ G منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$

خوأص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ فإن النقط A , B و G على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

إنشاء مرجح نقطتين:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* G مرجح النقط A , B و C المرفقة بالمعاملات α , β و γ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- ○ α , β و γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

* إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ و النقط A , B و C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$)

مبرهنة:

- ▪ G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

خواص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

طريقة 1:

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
2) نرسم الشعاع $\overrightarrow{AG}$ محصلة مجموع الشعاعين $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}$

طريقة 2:

1) ننشيء I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha+\gamma\neq 0$
2) نكتب $\overrightarrow{GI}$ بدلالة $\overrightarrow{BI}$ و ننشيء G

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	إذا كان	فإن مجموعة النقط هي	
❶	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ حيث $k' > 0$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	دائرة
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = AB$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = AB$ (لأن AB طول موجب ثابت)	
	$(MG)\perp(MH)$	دائرة قطرها GH و مركزها منتصف $[GH]$	
❷	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ حيث $k' < 0$	مجموعة خالية	ϕ
❸	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = 0$	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	نقطة
❹	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$	مستقيم محور القطعة $[GH]$	مستقيم
❺	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| \leq k'$	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	جزء من المستوي
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| > k'$	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| < \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$	نصف المستوي في جهة النقطة G و حده محور $[GH]$	

✳**ملاحظة1:** لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M ب B في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة

✳**ملاحظة2:** لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

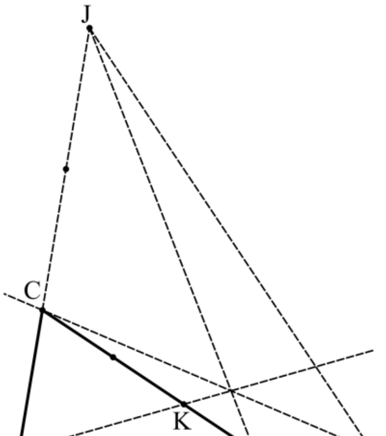
❖ اثبات تلاقي مستقيمات

مثال: ABC مثلث و النقط I , J و K معرفة كما يلي:

- I نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B
- النقطة J تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- النقطة K تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I , J و K مع التبرير.
2) أثبت أن كل نقطة من النقط I , J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A , B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.
3) أثبت أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة.

الحل:



1) الإنشاء مع التبرير:

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
- $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow -2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه I مرجح الجملة: $\{A(1), B(-3)\}$

* بنفس الطريقة نجد: J مرجح : $\{A(2), C(-3)\}$ و K مرجح : $\{B(2), C(1)\}$

3) إثبات أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة:

ليكن G مرجح $\{(A,2); (B,-6); (C,-3)\}$, G موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

G مرجح $\{(I,-4); (C,-3)\}$ و منه $G \in (IC)$

G مرجح $\{(J,-1); (B,-6)\}$ و منه $G \in (JB)$

G مرجح $\{(K,-9); (A,2)\}$ و منه $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في النقطة G

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{GI} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{IC}$ و منه $G \in (IC)$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في G

❖ مستقيم اولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.