موضوع الرياضيات لشعبة العلوم التجريبية في بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2011

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المــدّة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

أ - حسابية. ب - هندسية. جـ - لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ - $+\infty$ ب - $-\frac{1}{2}$ جـ - $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$.

أ - $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب - $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ - $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستوي $(\mathscr{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(\mathscr{Q})$ المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$.

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$.
2. أ - تحقّق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$.

ب - بيّن أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطيّ له.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{Q})$.

ب - أثبت أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متعامدان.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

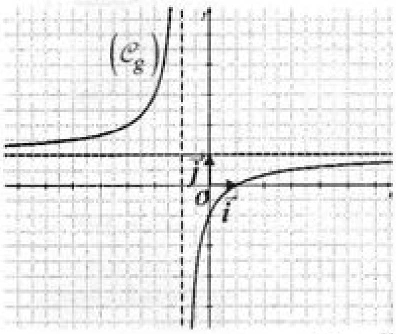
3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و $\left(\mathcal{C}_g\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل) ، **بقراءة بيانية:**

أ - شكل جدول تغيرات الدالة g.

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ - عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و $\left(\mathcal{C}_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء I) السؤال جـ - ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ - تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب - اكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

جـ - عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$.

1. أ - علّم النقط A ، B و C.

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب z .

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $|z - z_0| = |z - z_1|$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ - بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د - استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة $M\left(2+t;1-4t;7-t\right)$ حيث t عدد حقيقي ؛ ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h\left(t\right)=AM$

أ - اكتب عبارة $h\left(t\right)$ بدلالة t.

ب - بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

جـ - استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right)=e^x-ex-1$.

$\left(\mathcal{C}_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

ب - احسب $f'\left(x\right)$ ثمّ ادرس إشارتها.

جـ - شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ بجوار $(-\infty)$.

ب - أكتب معادلة للمستقيم $\left(T\right)$ مماس المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ - بيّن أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;\,1,76[$ حلا وحيدا α.

د - ارسم المستقيمين (Δ) و $\left(T\right)$ ثم المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ على المجال $]-\infty;2]$.

3. أ - احسب بدلالة α ، المساحة $A\left(\alpha\right)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب - أثبت أنّ : $A\left(\alpha\right)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات).

التصحيح الرسمي لموضوع الرياضيات لشعبة علوم تجريبية بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية لموضوع امتحان: ...شهادة البكالوريا... .... دورة: ..2011.

اختبار مادة:...الرياضيات... شعبة: ..علـوم تجريبية..المدة: ..03 ساعات ونصف.......

الإجابة النموذجية

عدد الصفحات **4**

عناصر الإجابة الموضوع الأول	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
التمرين الأول (3 نقاط)		3 نقاط
1. الإجابة الصحيحة هي (ب -) لأن $V_{n+1} = 3V_n$	$0,75+0,25$	
2. الإجابة الصحيحة هي (جـ -) لأن $U_n = -\frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$	$0,75+0,25$	
3. الإجابة الصحيحة هي (جـ -) لأن $S_n = V_0+V_1+...+V_n = -\frac{1}{2}\,\frac{3^{n+1}-1}{2}$	$0,75+0,25$	
التمرين الثاني (5 نقاط)		5 نقاط
1. المعادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ هي : $-2x+y+5z-1=0$	1	
2. أ - التحقّق أنّ إحداثيات $B(-1;4;-1)$ تحقق معادلة كل من $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$	0,5	
ب - $\vec{n}$ و $\vec{n}'(1;2;0)$ غير متوازيين و منه $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ)	0,5	
تمثيله الوسيطي: $t\in\mathbb{R}\begin{cases}x=7-2t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$	0,5	
3. أ - المسافة بين C و $(\mathscr{P})$: $d_1=\frac{3\sqrt{30}}{5}$	0,5	
- المسافة بين C و $(\mathscr{Q})$: $d_2=\frac{6\sqrt{5}}{5}$	0,5	
ب- $\vec{n}.\vec{n}'=0$ و منه $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متعامدان.	1	
جـ - استنتاج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ): $d(C;(\Delta))=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=3\sqrt{2}$.	0,5	
التمرين الثالث (5 نقاط)		5 نقاط
1. أ - الشكل الجبري للعدد المركب: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$	0.75	
ب - طويلة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له: $\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$	0.5 x 2	
ـ طبيعة المثلث ABC: المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.	0,5	
2. أ - طبيعة T محدّدا عناصره المميّزة: T هو الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{2}$.	0,5	
ب - استنتاج صورة النقطة B بالتحويل T: $T(B)=C$.	0,5	

تابع عناصر الإجابة للموضوع الأول	العلامة مجزأة	المجموع
3. أ. $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ و منه A، C، D في استقامية.	0,5	
ب. تعيين نسبة التحاكي h: $K=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{3}{2}$	0,5	
جـ- لدينا $z_D-z_A=a(z_B-z_A)$ و منه $a=\frac{3}{2}\mathrm{i}$ عناصر التشابه S هي المركز A والنسبة $\frac{3}{2}$ والزاوية $\frac{\pi}{2}$.	0,75	
التمرين الرابع (7 نقاط)		7 نقاط
I) أ- جدول تغيرات الدالة g. $\begin{array}{cccccc} x & -\infty & & -1 & & +\infty \\ g'(x) & & + & \Vert & + & \\ g(x) & 1 & \nearrow & +\infty \Vert -\infty & \nearrow & 1 \end{array}$	0,5	
ب- $g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.	0,5	
جـ- $0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$.	0,5	
II) 1. حساب النهايتين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	1	
$x=1$ و $y=1$ معادلتا مستقيمين مقاربين لــ C_f	0,5	
2. أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$	0,5	
ب- $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ ، $f'(x)>0$ لأن $x>1$	0,5+1	
جـ- جدول تغيرات الدالة f: $\begin{array}{cccc} x & 1 & & +\infty \\ f'(x) & & + & \\ f(x) & -\infty & \nearrow & 1 \end{array}$	0,5	
3. أ- $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$ على المجال $]1;+\infty[$:	0,5	
ب- نضع $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ و منه $h'(x)=\ln(x-\alpha)$	0,5	
جـ- التحقق: $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ، $F(x)=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$	0,5	

عناصر الإجابة للموضوع الثاني	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التمرين الأول (4 نقاط)		
1. أ - (v_n) هندسية أساسها α لأن : $v_{n+1}=\alpha\, v_n$	1	
ب - عبارة v_n بدلالة n و α: $v_n=\left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right)\alpha^n$.	0,5	
ـ استنتاج عبارة u_n بدلالة n و α: $u_n=\left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right)\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$	0,5	4 نقاط
جـ - تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا كان $\alpha\in]0;1[$	0,5	
2. نضع $\alpha=\frac{3}{2}$: ـ حساب بدلالة n ، المجموع S_n: $S_n=16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$	0,75	
ـ حساب بدلالة n ، المجموع T_n: $T_n=16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-2n-18$	0,75	
التمرين الثاني (4 نقاط)		
1. أ - تعليم النقط A ، B و C:	0,75	
ب - طبيعة الرباعي $OABC$: متوازي أضلاع. التعليل: $\frac{z_B-z_C}{z_A}=1$ أي $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$	0,75	
جـ - لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$: $z_\Omega=\frac{3}{2}+i$	0,5	4 نقاط
2. لدينا : $M\Omega=3$ ، (E) الدائرة التي مركزها Ω و نصف قطرها 3 + الإنشاء	0,75	
3. أ - $\Delta'=(2i)^2$ وعليه $z_0=3-2i$ و $z_1=3+2i$ أو العكس.	0,75	
ب - $\|z-z_0\|=\|z-z_1\|$ معناه $AM=BM$؛ إذن المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$ أي محور الفواصل.	0,5	

<table>
<tr><td colspan="2">العلامة</td><td rowspan="2">عناصر الإجابة للموضوع الثاني</td></tr>
<tr><td>المجموع</td><td>مجزأة</td></tr>
<tr><td rowspan="8">5 نقاط</td><td></td><td>التمرين الثالث (5 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1. أ - التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-4\lambda \\ z = 7-\lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب - C تنتمي إلى (Δ) لأنه بالتعويض بإحداثيات C نجد $\lambda = 1$ أو $\overrightarrow{BC}=\vec{u}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>جـ - $\overrightarrow{AB}\,(2;0;2)$ $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>د - $d(A,(\Delta)) = AB = 2\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>2. أ - عبارة $h(t)$ بدلالة t: $h(t) = AM = \sqrt{8+18t^2}$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب - تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$:</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>جـ - AM أصغر ما يمكن عندما يكون $h'(t)=0$ أي $t=0$
القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي $h(0)=2\sqrt{2}$ ومنه $h(0) = d(A,(\Delta))$.</td></tr>
<tr><td rowspan="13">7 نقاط</td><td></td><td>التمرين الرابع: (07 نقاط)</td></tr>
<tr><td>0,5 x 2</td><td>1. أ - حساب النهايتين: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب - حساب $f'(x)$: $f'(x) = e^x - e$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>دراسة إشارة $f'(x)$: $-\quad 1 \quad +$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>جـ - جدول تغيرات الدالة f:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>2. أ - $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-ex-1)] = 0$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب - معادلة (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0: $y = (1-e)x$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>جـ - f مستمرة و متزايدة تماما على $[1,75;1,76]$ $f(1,75) = -0,0024$ $f(1,76) = 0,028$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>د - رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2[$.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3. أ - حساب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$: $A(\alpha) = \left(-e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right) ua$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب - من $f(\alpha) = 0$ نجد $e^\alpha = e\alpha + 1$ و بالتعويض نجد أنّ :
$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$</td></tr>
</table>