1.4 Série de TD n°1- graphes non-orientés

Exercice 1

Étant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2	-	4,5

1. Représentez cette situation par un graphe G.
2. Donnez un sommet pendant et un sommet isolé de G.
3. Vérifiez qu'il existe au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis. Pouvez-vous justifier ?

Exercice 2

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est dite *graphique* s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite.
Les suites suivantes $(3, 3, 2, 1, 0)$ et $(3, 3, 2, 2, 0)$ sont-elles graphiques ? Justifiez. Si oui, tracez les graphes correspondants (graphes simples).

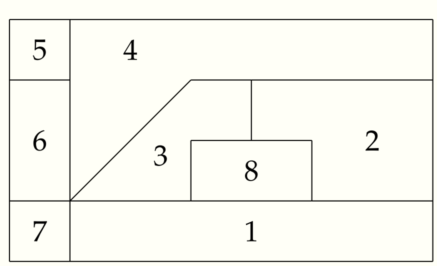
Exercice 3

Trois pays envoient, chacun, 2 espions à une conférence. Chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez le nombre d'arêtes.

Exercice 4

Huit pays sont représentés avec leurs frontières communes selon la figure suivante :



Deux pays sont considérés voisins s'ils ont une frontière commune. Représentez cette situation par un graphe simple.

Exercice 5

Dans une administration, on voudrait programmer 4 conférences auxquelles participent 7 responsables de service. Chaque responsable peut participer à plusieurs conférences comme l'indique le tableau suivant :

Participant	Les conférences	Participant	Les conférences
R1	C1,C2,C3	R5	C1,C3
R2	C2,C4	R6	C1,C3
R3	C2,C4	R7	C2,C4
R4	C1,C2		

Donnez le graphe G des conférences qui ne peuvent avoir lieu au même moment ainsi que le graphe des conférences qui peuvent avoir lieu au même moment.

Exercice 6

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?

Exercice 7

Dans un atelier, 5 ouvriers peuvent effectuer de 1 à 4 tâches selon le tableau suivant :

Ouvrier	Tâches
1	1,2
2	2,4
3	2,3
4	2,3
5	3,4

1. Représentez les possibilités d'affectation des ouvriers aux différentes tâches par un graphe biparti.
2. Donnez le graphe permettant à chaque ouvrier d'effectuer toutes les tâches.

Exercice 8

On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré 3 appelés graphe 3-réguliers (graphe simple).

1. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets et 7 sommets.
2. Qu'en déduisez-vous ?
3. Calculez le nombre d'arêtes d'un graphe 3-régulier à n sommets. Concluez.

Exercice 9

Dans un archipel, les îles sont reliées les unes aux autres par des ponts. Sur chaque île, il y a nombre pair de ponts. De plus, il est toujours possible de partir depuis n'importe quelle île vers n'importe quelle autre île.
Un jour, il y a eu des travaux sur un des ponts, mais on a constaté que la circulation entre les îles est toujours possibles.
Modélisez cette situation avec la théorie des graphes et expliquez le dernier constat.

Exercice 10

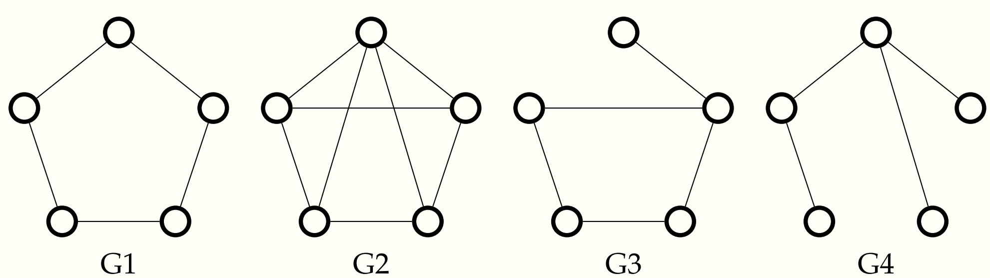
Donner le graphe planaire des graphes K_4 et $K_{2,3}$. Vérifiez pour chacun d'eux la formule de planarité.
Vérifiez aussi la planarité du graphe de l'exercice 4 puis construisez son graphe dual.

Exercice 11

Soient 3 villas V1, V2 et V3 que l'on veut relier par des conduites à une usine de production d'eau (D) à une usine de production de gaz (G) et à une usine de production d'électricité (E). Est-il possible de relier ces connexions sans que deux conduites ne se croisent en dehors de leur extrémité ?

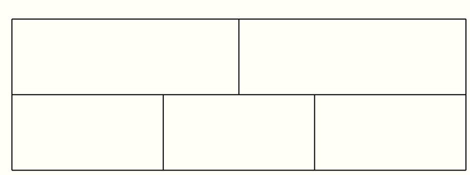
Exercice 12

Parmi les graphes suivants dites quels sont ceux qui sont hamiltoniens, eulériens.



Exercice 13

Soit le schéma suivant :



Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui passe une seule fois par chacun des 16 segments du schéma ?

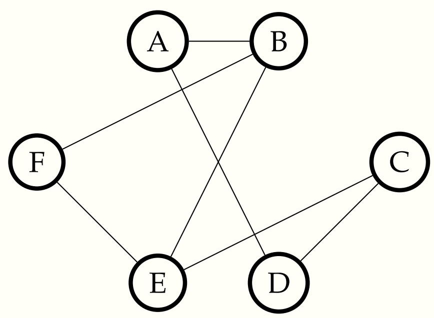
Exercice 14

On appelle codage de Gray un codage binaire des entiers dans lequel tout entier ne diffère que d'un bit de son successeur. Il n'y a pas alors de correspondance directe entre un entier et sa représentation.

1. Construisez un graphe où les sommets représentent les codages possibles et les arêtes relient les sommets se différenciant d'un seul bit. On considère ici trois bits.
2. Si un cycle hamiltonien existe dans ce graphe, quelle est sa signification ?
3. Quelle est la nature du graphe obtenu ?

Exercice 15

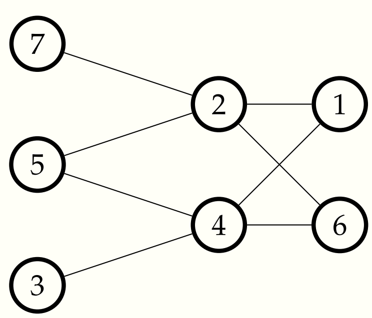
Six personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer, côte à côte, deux personnes incompatibles.

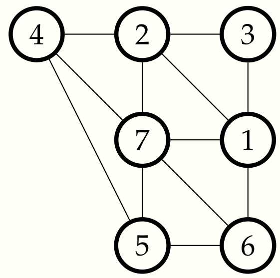
Exercice 16

Décrivez le graphe suivant par sa matrice d'adjacence puis par sa matrice d'incidence.



Exercice 17

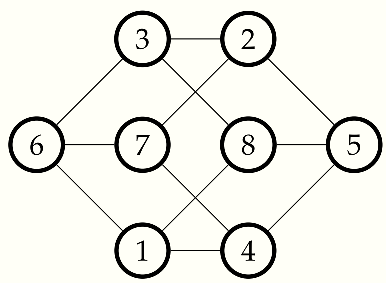
Soit le graphe suivant :



1. Donnez un encadrement du nombre chromatique du graphe.
2. Appliquez l'algorithme de Welsh et Powell pour colorer ce graphe.
3. Est-ce que le résultat est compatible avec la nature de ce graphe ?

Exercice 18

Soit le graphe suivant :



1. Donnez un encadrement du nombre chromatique.
2. Montez que le graphe est biparti. Déduisez alors son nombre chromatique.
3. Étant donné que tous les sommets ont le même degré, on applique l'algorithme de Welsh et Powell en utilisant un ordre correspondant au numéro des sommets (indiqué sur la figure). Quel résultat obtenez-vous ? Commentez.

Exercice 19

On dispose de 6 types de poissons. Malheureusement, certains poissons ne peuvent pas être mis dans le même aquarium, soit parce qu'ils s'attaqueraient, soit parce qu'ils ont besoin de conditions spéciales (température, ...). Le tableau suivant résume les incompatibilités entre eux :

Le poisson	A	B	C	D	E	F
Ne peut être avec	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Quel est le nombre minimal d'aquariums pour faire vivre tous ces poissons ?

Exercice 20

Soit $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ un ensemble de 5 travaux et $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ un ensemble de 5 machines. Chaque travail nécessite un certain nombre de machines comme suit :

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
m_1, m_3, m_5	m_1, m_2, m_4	m_2, m_3, m_5	m_2, m_4	m_5

Le temps nécessaire à l'exécution de chaque travail est le même, mais deux travaux différents ne peuvent être exécutés simultanément que s'ils utilisent des machines différentes.

1. Modélisez le problème sous forme d'un graphe.
2. Donnez la liste des travaux pouvant être exécutés simultanément.
3. Donnez le temps minimum nécessaire pour réaliser l'ensemble des travaux.