Chapitre 4

Problèmes des flots

4.1 Introduction

Le problème de flot dans un réseau de transport peut correspondre à un problème d'acheminement de tonnages disponibles sur des bateaux, des camions, des wagons ou à des canalisations, des voies de transmission, etc. vers une destination ; c'est-à-dire tous les problèmes qui mettent en jeu un flux physique de matière (information, produit, électricité, eau, gaz, etc.) se modélisent par des flots.

Un exemple de problème de flots peut être le suivant : une société hydro-électrique possède des canalisations de calibres différents permettant d'acheminer l'eau d'un barrage vers une ville. Quelle est la quantité d'eau maximale qui peut être acheminée par unité de temps et comment répartir cette charge à travers le réseau de transport ?

4.2 Définitions

4.2.1 Notion de réseau de transport

Un réseau de transport est un graphe orienté et sans circuit où chaque arc u est associé à une quantité positive $C(u)$ indiquant la capacité de l'arc à transporter des objets. Un tel graphe doit respecter aussi les conditions suivantes :

1. Il existe un seul sommet S qui n'a pas de prédécesseurs, tous les autres en ont au moins un. Ce sommet est appelé l'entrée du réseau ou la **source**.
2. Il existe également un sommet P qui n'a pas de successeur, tous les autres en ont au moins un. Ce sommet est appelé la sortie du réseau ou le **puits**.

La figure 4.1 montre un exemple d'un réseau de transport. Le sommet S représente la source du réseau, le sommet P est le puits. La valeur associée à l'arc (S, A), qui est de 2, indique la capacité maximale de cet arc à transporter des objets par unité de temps.

Il existe une variante du problème de flot où chaque arc u est plutôt associé à deux capacités : une minimale et l'autre maximale. Lorsque la capacité minimale n'est pas précisée, elle est considérée comme étant nulle (égale à 0). À noter que les deux variantes seront traitées par le même algorithme avec une différence près (le point initial de l'exécution). Sauf mention contraire, dans ce qui suit, on considère les problèmes de flots à borne minimale nulle.

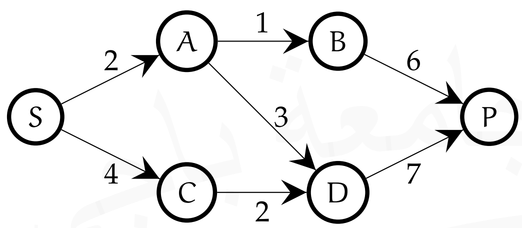
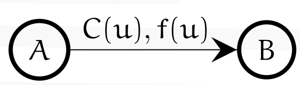


Figure 4.1 : exemple d'un réseau de transport

4.2.2 Flot

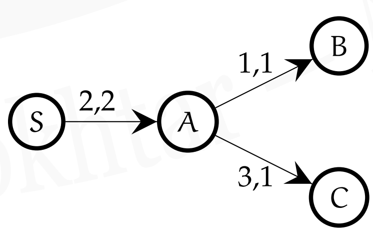
Dans un réseau de transport, un flot f est une seconde valuation qui associe à chaque arc u une quantité $f(u)$ représentant la quantité de flots (flux) qui passe par cet arc en provenance de la source et en destination du puits. On retiendra dans ce qui suit la représentation suivante :



Un flot doit respecter la règle de Kirchoff : la quantité totale de flot qui entre dans un sommet est égale à la quantité totale de flot qui en sort (flot conservatif). Pour un sommet x, nous avons :

$$\sum_{u=(x,y)} f(u) = \sum_{u=(y,x)} f(u)$$

La figure suivante montre un exemple de la conservation du flot :



4.2.3 Flot compatible

Un flot est compatible dans un réseau si pour tout arc u on a $0 \leqslant f(u) \leqslant C(u)$, autrement dit, pour chaque arc, le flot qui le traverse ne doit pas dépasser la capacité de l'arc. Si le problème définit des bornes inférieures pour les arcs, alors on remplace la contrainte $0 \leqslant f(u)$ par $\text{borne}_{inf} \leqslant f(u)$. Un arc u est dit *saturé* si $f(u) = C(u)$.

La figure 4.2 montre un exemple d'un flot compatible pour le graphe 4.1. Les arcs saturés sont : (S, A), (A, B) et (C, D).

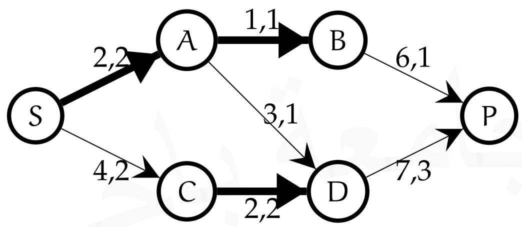
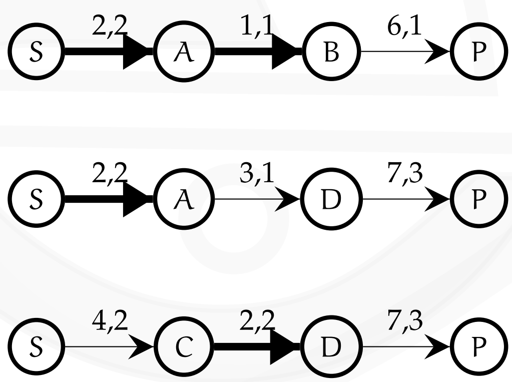


Figure 4.2 : exemple d'un flot compatible

4.2.4 Flot complet

Un flot f est *complet* si pour tout chemin entre la source et le puits il y a au moins un arc saturé. Dans l'exemple de la figure 4.2, il y a trois chemins partant de la source S au puits P :



Les arcs en gras montrent les arcs saturés. Les trois chemins contiennent des arcs saturés, le flot est donc complet.

4.2.5 Flot maximal

Le problème du flot maximal consiste à trouver la quantité maximale de flot qui peut circuler depuis la source vers le puits en tenant compte des capacités des arcs du réseau de transport et de la quantité disponible à la source.

Il existe deux algorithmes permettant de calculer le flot maximal : recherche des chaînes augmentantes dans le réseau et l'approche basée sur le graphe des écarts. Ce cours présente uniquement le premier algorithme.

4.3 Algorithme de Ford-Fulkerson (chaîne augmentante)

4.3.1 Principe

On part d'un flot compatible, ensuite, on cherche une chaîne reliant la source au puits tel que son flot peut être augmenté. Si on n'en trouve pas, le problème est résolu, sinon on augmente le flot sur cette chaîne, puis on cherche une nouvelle chaîne augmentante et ainsi de suite.

4.3.2 Chaîne augmentante

Une chaîne *augmentante* est une chaîne permettant d'augmenter le flot d'un réseau de transport. Une chaîne est une séquence de sommets commençant par le sommet et se terminant par le puits telle que deux sommets successifs sont reliés par un arc au sens direct ou au sens opposé. Elle est dite *augmentante* si les arcs au sens direct ne sont pas saturés ($f(u) < C(u)$) alors que les arcs au sens opposé ont un flot strictement positif ($f(u) > 0$).

Un chaîne augmentante peut augmenter le flot par la quantité :

$$\min\left(\min_{u \text{ est direct}} C(u) - f(u), \min_{u \text{ est indirect}} f(u)\right) \tag{4.1}$$

Considérons l'exemple de la chaîne augmentante suivante :

$$S \xrightarrow{5,2} B \xrightarrow{9,7} C \xleftarrow{3,1} D \xrightarrow{5,0} P$$

La chaîne est clairement augmentante. Elle peut alors augmenter le flot par $\min(5-2, 9-7, 1, 5-0) = 1$.

Lorsqu'on augmente le flot d'une quantité t, alors on met à jour le flot de chaque arc comme suit :

- Pour un arc au sens direct : $f(u) \leftarrow f(u) + t$
- Pour un arc au sens indirect : $f(u) \leftarrow f(u) - t$

Pour la chaîne précédente, le flot devient :

$$S \xrightarrow{5,3} B \xrightarrow{9,8} C \xleftarrow{3,0} D \xrightarrow{5,1} P$$

Ainsi, cette chaîne n'est plus augmentante.

4.3.3 Algorithme de construction

L'algorithme de Ford-Fulkerson consiste à partir d'un flot compatible trivial à trouver. Si la borne inférieure des capacités est 0, alors un flot compatible trivial est 0 pour tous les arcs. Si, en revanche, les bornes inférieures ne sont pas nulles, la recherche d'un flot est plus laborieuse, nous ne l'abordons pas dans ce cours. L'algorithme suivant considère alors uniquement les réseaux de transport avec une borne inférieure égale à 0.

Algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver le flot maximal d'un réseau de transport $R = (X, E, C)$

```
1  pour chaque arc u faire
       // le flot compatible est un flot nul
2      mettre f(u) = 0
3  Rechercher une chaîne augmentante ch par un algorithme de marquage
4  si ch existe alors
5      mettre à jour le flot de ch selon l'équation (4.1)
6      aller à 3
7  sinon
8      fin de l'algorithme
```

L'algorithme de marquage est une procédure permettant de rechercher une chaîne augmentante à partir de la source. On procède comme suit :

Algorithme de marquage pour trouver une chaîne augmentante dans un réseau de transport $R = (X, E, C)$

```
1  marquer la source
2  pour chaque sommet marqué x et arc u = (x, y) faire
       // arc au sens direct
3      si f(u) < C(u) alors
4          marquer y
5  pour chaque sommet marqué x et arc u = (y, x) faire
       // arc au sens indirect
6      si f(u) > 0 alors
7          marquer y
8  si il y a d'autres possibilités de marquage alors
9      aller à 2
10 si le puits est marqué alors
11     une chaîne augmentante existe
12 sinon
13     aucune chaîne augmentante n'existe
```

Soit à construire le flot maximal du réseau de transport de la figure 4.3 dans lequel le flot compatible initial est déjà présent.

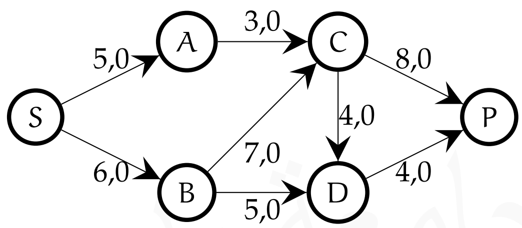
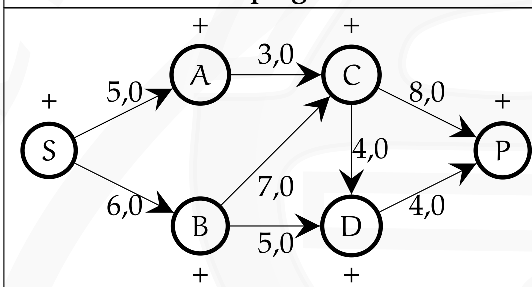
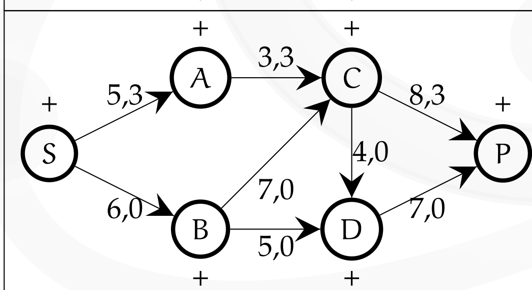
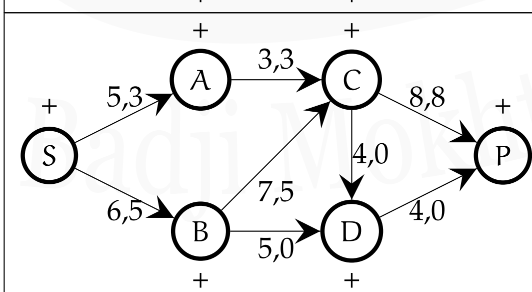
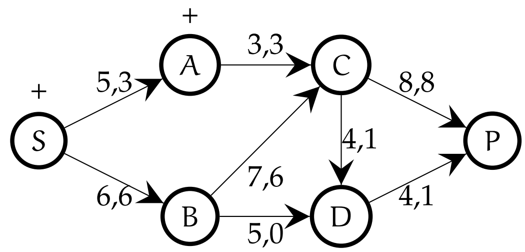


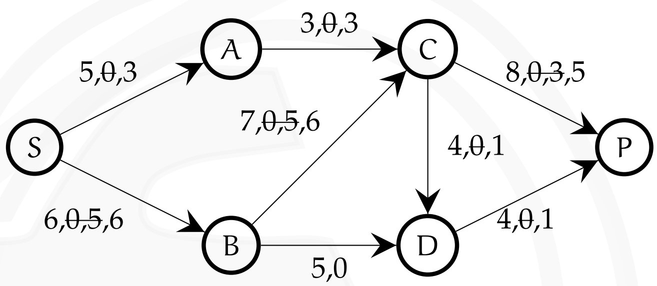
Figure 4.3 : un exemple d'initialisation du flot compatible

Remarque : pour simplifier la construction des flots maximaux, on commence de préférence par les chaînes augmentantes sans arcs indirects.

Réseau avec marquage	Chaîne augmentante	Flot à rajouter
	S, A, C, P	3
	S, B, C, P	5
	S, B, C, D, P	1

	Aucune chaîne augmentante, fin de l'algorithme	-

Le flot maximal est égal à 9 (la somme des flots sortant de la source ou la somme des flots entrant au puits). En pratique, si l'on ne veut pas dessiner le graphe plusieurs fois, on se contente de travailler selon le modèle suivant :



Évidemment, on aurait pu choisir des chaînes augmentantes différentes et obtenir des flots différents pour les arcs. Cependant, le flot maximal du réseau sera toujours le même.

4.4 Coupe et coupe minimale

4.4.1 Notion de coupe

Soit G un réseau de transport ayant S comme source et P comme puits. On appelle *coupe* toute partition des sommets de G en deux sous-ensembles X et Y tels que $S \in X$ et $P \in Y$. On peut également définir une coupe par l'ensemble des arcs qui relient les deux sous-ensembles X et Y. En d'autres termes, une coupe est l'ensemble d'arcs (x, y) tels que $x \in X$ et $y \in Y$.

La figure 4.4 montre un exemple d'une coupe. L'ensemble X contient la source S et les sommets A et C, et l'ensemble Y contient le puits P et les sommets B et D. On peut définir cette coupe aussi

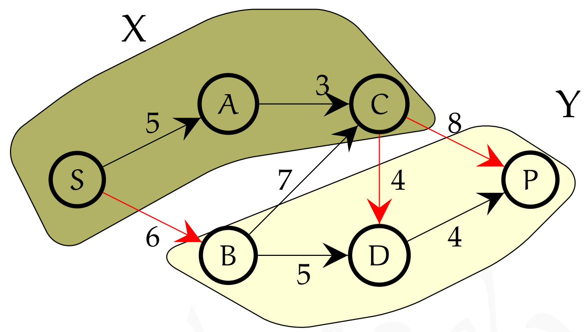


Figure 4.4 : exemple d'une coupe

par l'ensemble des arêtes en rouge : (S, B), (C, D) et (C, P).

4.4.2 Capacité d'une coupe et coupe minimale

On appelle capacité d'une coupe la somme des capacités des arcs qui la définissent. Par exemple, le calcul de capacité de la coupe définie dans la figure 4.4 fait appel aux capacités des arcs (S, B), (C, D) et (C, P). On obtient alors une capacité de 18.

Parmi toutes les coupes possibles, on s'intéresse à la *coupe minimale*, c'est-à-dire la coupe dont la capacité est minimale. Un théorème important permet de relier la capacité de la coupe minimale au flot maximal d'un réseau de transport.

Théorème 9

(de Ford-Fulkerson) Dans un réseau de transport, la capacité de la coupe minimale est égale à son flot maximal.

La construction de la coupe minimale peut se faire à partir de la dernière itération de construction du flot maximal. En effet, il suffit de prendre les sommets marqués et les sommets non marqués comme une partition du graphe. La coupe définie par cette partition a la capacité minimale. La figure 4.5 donne la coupe minimale obtenue, elle a une capacité de 9 (la somme des capacités des arcs en rouge).

Un deuxième exemple permet de montrer l'intérêt du calcul de flots. Un serveur A est connecté à une machine J par un réseau en passant pas les nœuds B, C, D, E, F, G, H et I. Les vitesses de connexion entre les nœuds (en Mbits/s) sont données ci-dessous :

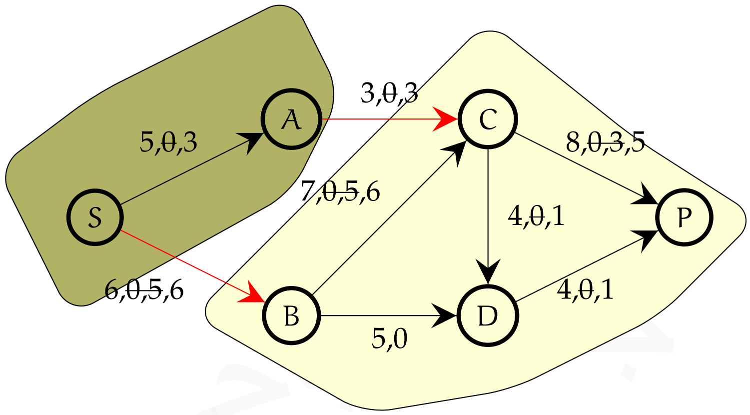


Figure 4.5 : construction de la coupe minimale pour le réseau de la figure 4.4

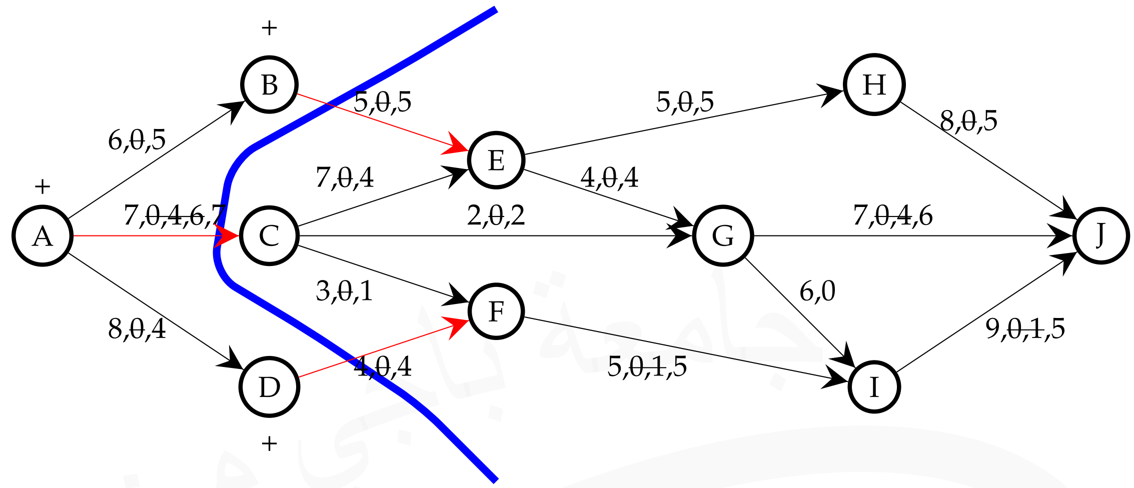
	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	6	7	8						
B				5					
C				7	3	2			
D					4				
E						4	5		
F								5	
G								6	7
H									8
I									9

Un utilisateur de la machine J télécharge un très grand fichier du serveur A. On veut trouver le routage qui maximise le débit (le flot). On veillera alors à :

1. Préciser la source et le puits.
2. Utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson (chaîne augmentante) pour déterminer le flot maximal.
3. Préciser la coupe de capacité minimale et la valeur de celle-ci.

Les réponses aux questions précédentes sont :

1. La source est A car elle n'a pas de prédécesseurs. Le puits est J car elle n'a pas de successeurs.
2. L'application de l'algorithme donne le graphe suivant à la dernière itération.



Le flot à cette itération est donc 5+7+4=16 (Mbits/s). À la dernière itération, le puits ne peut pas être marqué, le flot est donc maximal.

3. La coupe sépare les sommets marqués (A, B et D) des autres sommets (courbe en bleu). Elle correspond au flot maximal.