Solution série 4 du TD logique mathématique

Exercice 1 Solution :
Premièrement, il faut spécifier le vocabulaire utilisé (l'univers du discours). Dans notre cas, on va utiliser le vocabulaire suivant :
Les constantes :
log : c'est la constante qui représente la logique.
Les variables :
x et y.
Les prédicats unaires (d'arité 1) :
Etud(x) : signifie que "x" est un étudiant.
Mat(y) : signifie que "y" est une matière.
Les prédicats binaires :
aime(x,y) : signifie que "x" aime "y".
bnote(x,y) : signifie que "x" a eu une bonne note en "y".
Meilleur(x,y) : signifie que "x" est meilleur que "y".
Maintenant on va modéliser les phrases :
1- $\forall x(Etud(x) \longrightarrow aime(x, log))$
2- $\forall x \exists y((etud(x) \wedge Mat(y)) \longrightarrow \neg aime(x, y))$
3- $\forall x \forall y((Etud(x) \wedge bnote(x, log) \wedge Etud(y)) \longrightarrow Meilleur(x, y))$

Exercice 2 Solution :
1- Les prédicats sont :
homme(x) et mortel(x).

2- les phrases en logique des prédicats sont :
a- $\forall x(homme(x) \longrightarrow mortel(x))$.
b- mortel(Socrate).
c- homme(Socrate).

3-Oui on peut déduire l'énoncé "b" à partir de "a" et "c".
Preuve :
Intuitivement, "Socrate" est une instance de "x" et comme "Socrate" est un homme (homme(Socrate)= vrai) et $\forall x(homme(x) \longrightarrow mortel(x)) = vrai$ donc "Socrate" est mortel c'est à dire mortel(Socrate) = vrai.
On peut aussi démontrer ça en utilisant la théorie de la preuve c'est à dire il faut prouver que :
$\forall x(homme(x) \longrightarrow mortel(x)), homme(Socrate) \vdash mortel(Socrate)$.
La preuve est comme suit :
1- $\vdash \forall x(homme(x) \longrightarrow mortel(x))$ hyp1
2- $\vdash homme(Socrate)$ hyp2
3- $\vdash \forall x(homme(x) \longrightarrow mortel(x)) \longrightarrow (homme(Socrate) \longrightarrow mortel(Socrate))$ sch$\forall$
4-$\vdash homme(Socrate) \longrightarrow mortel(Socrate)$ mp 1,3
5- $\vdash mortel(Socrate)$ mp 2,4

Exercice 3 Solution :

1- $\forall x(grippe(x) \longrightarrow prendre(x, Tamiflu))$
2- $\forall x((fivre(x) \wedge tousse(x)) \longrightarrow grippe(x))$
3- $\forall x \forall t((temp(x,t) \wedge sup(t,38)) \longrightarrow fivre(x))$
4- $tousse(Mohamed) \wedge \exists t(temp(Mohamed,t) \wedge sup(t,38))$
5- $prendre(Mohamed, Tamiflu)$

Exercice 4 Solution :

Pour répondre à cette question, il faut faire les arbres syntaxiques de chaque formule.
Après la numérotation des variables on trouve :
$F_1 : \forall x_4 \exists y_3 (\forall y_1 P(x_4,y_1) \rightarrow \exists x_2 Q(x_2,y_3)) \Rightarrow F_1 : \forall 4 \exists 3(\forall 1 P(4,1) \rightarrow \exists 2 Q(2,3))$
$F_2 : \forall v_4 \exists z_3 (\forall u_1 P(z_3,u_1) \rightarrow \exists u_2 Q(u_2,v_4)) \Rightarrow F_2 : \forall 4 \exists 3(\forall 1 P(3,1) \rightarrow \exists 2 Q(2,4))$
$F_4 : \forall z_4 \exists x_3 (\forall x_1 P(z_4,x_1) \rightarrow \exists z_2 Q(z_2,x_3)) \Rightarrow F_4 : \forall 4 \exists 3(\forall 1 P(4,1) \rightarrow \exists 2 Q(2,3))$
Selon les résultats, on remarque que F_1 et F_3 sont congrues.

Exercice 5 Solution :

-1 Faux, **2-** Faux, **3-** Vrai, **4-** Faux, **5-** Vrai, **6-** Vrai, **7-** Vrai, **8-** Faux.
Pour la justification exemple pour la première Q(c1) = Vrai donc $\neg Q(c1)$ = Faux, Q(c2) = Vrai donc $\neg Q(c2)$ = Faux et Q(c3) = Vrai donc $\neg Q(c3)$ = Faux. $I(\forall x \neg Q(x)) = I(\neg Q(c1) \wedge \neg Q(c2) \wedge \neg Q(c3)) = F \wedge F \wedge F =$ F. On fait la même chose pour les autres formules.

Exercice 6 Solution :

a) La table de vérité de la première formule $\forall x(P(x) \longrightarrow \exists x Q(x))$ sachant que le domaine D = $\{1,2\}$.

- On va représenter le prédicat P(x) par la fonction f(x),
- Le prédicat Q(x) va être représenté par la fonction g(x).

La table de vérité pour P(x) est comme suit :

x P(x)	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

La table de vérité pour Q(x) est comme suit :

x Q(x)	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

Comme il n'y a pas de variables libres dans la formule, donc la table de vérité globale est la suivante :

Interprétation	P(x)	Q(x)	Formule
I_1	f_1	g_1	V
I_2	f_1	g_2	V
I_3	f_1	g_3	V
I_4	f_1	g_4	F
I_5	f_2	g_1	V
I_6	f_2	g_2	V
I_7	f_2	g_3	V
I_8	f_2	g_4	F
I_9	f_3	g_1	V
I_{10}	f_3	g_2	V
I_{11}	f_3	g_3	V
I_{12}	f_3	g_4	F
I_{13}	f_4	g_1	V
I_{14}	f_4	g_2	V
I_{15}	f_4	g_3	V
I_{16}	f_4	g_4	V

Pour donner les valeurs de vérités de chaque interprétation il faut suivre la méthode suivante :

I_1 (V) $\forall x\{et^{x=1(V)f_1(1)(V)\rightarrow\exists x(V)\{ou^{x=1g_1(1)(V)}_{x=2g_1(2)(V)}}_{x=2(V)f_1(2)(V)\rightarrow\exists x(V)\{ou^{x=1g_1(1)(V)}_{x=2g_1(2)(V)}}$

newline
I_2 (V) $\forall x\{et^{x=1(V)f_1(1)(V)\rightarrow\exists x(V)\{ou^{x=1g_2(1)(V)}_{x=2g_2(2)(F)}}_{x=2(V)f_1(2)(V)\rightarrow\exists x(V)\{ou^{x=1g_2(1)(V)}_{x=2g_2(2)(F)}}$

newline
I_4 (F) $\forall x\{et^{x=1(F)f_1(1)(V)\rightarrow\exists x(F)\{ou^{x=1g_4(1)(F)}_{x=2g_4(2)(F)}}_{x=2(F)f_1(2)(V)\rightarrow\exists x(F)\{ou^{x=1g_4(1)(F)}_{x=2g_4(2)(F)}}$

newline
I_8 (F) $\forall x\{et^{x=1(F)f_2(1)(V)\rightarrow\exists x(F)\{ou^{x=1g_4(1)(F)}_{x=2g_4(2)(F)}}_{x=2(V)f_2(2)(F)\rightarrow\exists x(F)\{ou^{x=1g_4(1)(F)}_{x=2g_4(2)(F)}}$

b) La table de vérité de la deuxième formule $\forall x(P(x,y)\wedge\exists xP(x))$.
Dans ce cas, on a deux prédicats et une variable libre y.

- On va représenter le prédicat P(x) par la fonction f(x),
- Le prédicat P(x,y) va être représenté par la fonction g(x).

La table de vérité pour P(x) est comme suit :

x P(x)	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

La table de vérité pour P(x,y) est comme suit :

x	y	$g_1(x,y)$	$g_2(x,y)$	$g_3(x,y)$	$g_4(x,y)$	$g_5(x,y)$	$g_6(x,y)$	$g_7(x,y)$	$g_8(x,y)$	$g_9(x,y)$
1	1	V	V	V	V	V	V	V	V	F
1	2	V	V	V	V	F	F	F	F	V
2	1	V	V	F	F	V	V	F	F	V
2	2	V	F	V	F	V	F	V	F	V

$g_{10}(x,y)$	$g_{11}(x,y)$	$g_{12}(x,y)$	$g_{13}(x,y)$	$g_{14}(x,y)$	$g_{15}(x,y)$	$g_{16}(x,y)$
F	F	F	F	F	F	F
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F

La table de vérité globale est comme suit :

Interprétation	P(x)	P(x,y)	y	Formule
I_1	f_1	g_1	1	V
I_2	f_1	g_1	2	.
I_3	f_1	g_2	1	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	f_1	g_{16}	1	.
.	f_1	g_{16}	2	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
I_{98}	f_4	g_1	2	F
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Pour donner les valeurs de vérités de chaque interprétation il faut suivre la méthode suivante :

$$I_1 \text{ (V) } \forall x\{et^{x=1(V) g_1(1,1)(V) \wedge \exists x(V)\{ou^{x=1 f_1(1)(V)}_{x=2 f_1(2)(V)}}_{x=2(V) g_1(2,1)(V) \wedge \exists x(V)\{ou^{x=1 f_1(1)(V)}_{x=2 f_1(2)(V)}}$$

$$I_{98} \text{ (F) } \forall x\{et^{x=1(F) g_1(1,2)(V) \wedge \exists x(F)\{ou^{x=1 f_4(1)(F)}_{x=2 f_4(2)(F)}}_{x=2(F) g_1(2,2)(V) \wedge \exists x(F)\{ou^{x=1 f_4(1)(F)}_{x=2 f_4(2)(F)}}$$

Exercice 7 Solution :

a)

1) $\forall x \forall y A(x,y) \vdash A(x,y)$

1$\vdash \forall x \forall y A(x,y)$ hyp1

2$\vdash \forall x \forall y A(x,y) \longrightarrow \forall y A(x,y)$ sch$\forall$

3$\vdash \forall y A(x,y)$ mp 1,2
4$\vdash \forall y A(x,y) \longrightarrow A(x,y)$ sch$\forall$
5$\vdash A(x,y)$ mp 3,4

2) $\forall x(P(x) \longrightarrow Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$
1$\vdash \forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$ hyp1
2$\vdash \forall x P(x)$ hyp2
3$\vdash \forall x(P(x) \longrightarrow Q(x)) \longrightarrow (P(x) \longrightarrow Q(x))$ sch$\forall$
4$\vdash P(x) \longrightarrow Q(x)$ mp 1,3
5$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow P(x)$ sch$\forall$
6$\vdash P(x)$ mp 2,5
7$\vdash Q(x)$ mp 4,6
8$\vdash Q(x) \longrightarrow (\forall x P(x) \longrightarrow Q(x))$ sch 1a
9$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow Q(x)$ mp 7,8
10$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow \forall x Q(x)$ règle$\forall$ depuis 9
11$\vdash \forall x Q(x)$ mp 2,10

3) $P(a), \forall x(P(x) \longrightarrow Q(x)) \vdash Q(a)$
1$\vdash P(a)$ hyp1
2$\vdash \forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$ hyp2
3$\vdash \forall x(P(x) \longrightarrow Q(x)) \longrightarrow (P(a) \longrightarrow Q(a))$ sch$\forall$
4$\vdash P(a) \longrightarrow Q(a)$ mp 2,3
5$\vdash Q(a)$ mp 1,4

4) $\forall x S(x) \wedge \forall x R(x) \vdash \exists x(S(x) \wedge R(x))$
1 $\vdash \forall x S(x) \wedge \forall x R(x)$ Hyp1
2 $\vdash \forall x S(x) \wedge \forall x R(x) \rightarrow \forall x S(x)$ sch 3a on a remplacé le A par $\forall x S(x)$ et le B par $\forall x R(x)$
3 $\vdash \forall x S(x)$ mp 1,2
4 $\vdash \forall x S(x) \wedge \forall x R(x) \rightarrow \forall x R(x)$ sch 3b on a remplacé le A par $\forall x S(x)$ et le B par $\forall x R(x)$
5 $\vdash \forall x R(x)$ mp 1,4
6 $\vdash \forall x S(x) \rightarrow S(x)$ sch $\forall$
7 $\vdash S(x)$ mp 3,6
8 $\vdash \forall x R(x) \rightarrow R(x)$ sch $\forall$
9 $\vdash R(x)$ mp 5,8
10 $\vdash S(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x) \wedge R(x))$ sch 2 on a remplacé le A par $S(x)$ et le B par $R(x)$
11 $\vdash R(x) \rightarrow S(x) \wedge R(x)$ mp 7,10
12 $\vdash S(x) \wedge R(x)$ mp 9,11
13 $\vdash (S(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge R(x))$ sch $\exists$
14 $\vdash \exists x(S(x) \wedge R(x))$ mp 12,13

b)
$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow \exists x P(x)$
1$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow P(x)$ sch$\forall$
2$\vdash (\forall x P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow ((\forall x P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow \exists x P(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)))$ sch 1b, on remplacé A par $\forall x P(x)$, B par P(x) et C par $\exists x P(x)$
3$\vdash (\forall x P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow \exists x P(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$ mp 1,2

4$\vdash P(x) \longrightarrow \exists x P(x)$ sch$\exists$
5$\vdash (P(x) \rightarrow \exists x P(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow \exists x P(x)))$ sch 1a on a remplacé le A par $(P(x) \rightarrow \exists x P(x))$ et le B par $\forall x P(x)$
6$\vdash (\forall x P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow \exists x P(x)))$ mp 4,5
7$\vdash \forall x P(x) \longrightarrow \exists x P(x)$ mp 3,6