

السلسلة رقم 01 – الاحتمالات

➤ التمرين 01:

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، مكتوب على كل منها سؤال واحد:

- ثلاثة أسئلة في الاحتمالات مرقمة بـ: 1 ، 2 و 3 .
 - أربعة أسئلة في الاشتقاقية مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 3 و 4 .
 - وسؤالين في الدوال مرقمين بـ: 1 و 2 .
- نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

- A: " سحب سؤال في الاحتمالات "
 - B: " سحب سؤال في الدوال "
 - C: " سحب سؤال في الاشتقاقية يحمل رقما زوجيا "
- (1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال A ، B و C على الترتيب.

(2) أحسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن الـ 1.

(3) نعتبر المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ- برر أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$.

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضيائي.

ت- استنتج قيمة $E(2023+2024X)$.

➤ التمرين 02:

كيس به 7 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس. منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس.

I.

(1) أحسب احتمال الحادثة A: " سحب كريتين مختلفين في اللون ".

(2) أحسب احتمال الحادثة B: " سحب كريتين من نفس اللون ".

II.

نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب α ($\alpha(DA)$) عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري) فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على 100DA و إذا سحب كريتين مختلفين في اللون يتحصل على 50DA ،

وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه، وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

(1) برر أن قيم المتغير العشوائي هي: $\{-\alpha; 50-\alpha; 100-\alpha\}$. ثم عرف قانون احتماله.

(2) أ- بين أن الأمل الرياضيائي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

(3) ب- جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

➤ التمرين 03:

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس. كل من الكريات الاثني عشر تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ،

3 ، 4 . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس نرسم بـ: p_i إلى احتمال سحب كرية رقمها i حيث: $p_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_2 = \frac{1}{6}$ ،

$$p_3 = \frac{1}{4} ، p_4 = \frac{1}{4} .$$

(1) وزع الكريات الاثني عشر حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

(2) أحسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C حيث:

• A: " سحب كرية تحمل رقما فرديا "

• B: " سحب كرية تحمل رقما أوليا "

• C: " سحب كرية رقمها حل للمعادلة $x^2 = 2^x$ "

(3) نعتبر X المتغير العشوائي يرفق بكل سحب لكرية الرقم الذي تحمله

- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضيائي.

➤ التمرين 04:

- (1) كيس به 7 كريات متماثلة منها ثلاثة سوداء تحمل الأرقام: 0 ، 3 و 5 و ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 3 و 7 و كرية خضراء تحمل الرقم 3، نسحب عشوائيا على التوالي و بدون ارجاع كريتان من الكيس .
أ- عين بواسطة مخطط عدد عناصر مجموعة الإمكانات Ω .
ب- أحسب احتمال الحوادث التالية:
- الحادثة A : " سحب كريتان مختلفان في اللون " .
 - الحادثة B : " سحب كريتان تحملان نفس الرقم " .
 - الحادثة C : " سحب كرية حمراء على الأكثر " .
 - الحادثة D : " سحب كرية سوداء على الأقل " .
 - الحادثة E : " سحب كريتان مجموع رقميهما مضاعف لـ 3 " .
 - الحادثة F : " سحب كريتان لهما نفس اللون " .
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب " عدد الكريات السوداء المسحوبة " .
أ- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .
ب- أحسب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف للمتغير العشوائي X .
- (3) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب " القيمة المطلقة للفرق بين رقمي الكريتان المسحوبتان " .
أ- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي Y ، ثم عرف قانون احتماله .
ب- أحسب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف للمتغير العشوائي Y .

➤ التمرين 05:

- نرمي زهر نرد غير مزيف ذو خمس أوجه مرقم من 1 إلى 5، المرة الأولى نسجل الرقم α ثم نرميه مرة ثانية و نسجل الرقم β .
(1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:
- A : " الرقمان α و β يحققان المساواة $\beta = \alpha$ " .
 - B : " الرقمان α و β يحققان المتباينة $|\beta - \alpha| \leq 1$ " .
- (2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بالعدد $|\beta - \alpha|$.
- عين القيم الممكنة لـ X ، ثم أكتب قانون احتماله .
- (3) نكتب الآن بالرقمين α و β المعادلة: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ (E) و نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل رميتين عدد حلول المعادلة (E) .
- عين القيم الممكنة لـ Y ، ثم أكتب قانون احتماله .

➤ التمرين 06: (شجرة الاحتمالات)

- I- اقترح أستاذ على تلاميذ استجواب متكون من سؤالين، واحتمال أن يجيب التلميذ إجابة صحيحة هو $\frac{1}{2}$ و احتمال أن تكون الإجابة خاطئة يساوي احتمال عدم الإجابة عن السؤال.
(1) مثل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات.
(2) احسب احتمال الحوادث التالية:
- A : " أن يجيب التلميذ على السؤالين " .
 - B : " ألا يجيب التلميذ على السؤال الثاني فقط " .
 - C : " يجيب التلميذ إجابة واحدة صحيحة على الأكثر " .
- II- يتحصل التلميذ على (+2) لكل إجابة صحيحة و على (-1) لكل إجابة خاطئة، وفي حالة عدم الإجابة يتحصل على (0).
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق لكل مخرج مجموع النقاط المتحصل عليها. وإذا كان $X < 0$ يحصل التلميذ على 0.
- (1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .
 - (2) عرف قانون الاحتمال X .
 - (3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ماذا تنتج؟

اللاعب يدفع $a(DA)$ ثم يسحب كرتين:

إذا سحب كرتين بيضاوين يربح $100DA$

ومنه: $X = 100 - \alpha$

إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يربح $50DA$

ومنه: $X = 50 - \alpha$

وإذا سحب سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه

ومنه: $X = -\alpha$

وعليه قيم المتغير العشوائي هي: $\{100 - \alpha; 50 - \alpha; -\alpha\}$

- تعريف قانون احتمال X :

x_i	$100 - \alpha$	$50 - \alpha$	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

3 تبيين أن $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$

$$\begin{aligned} E(X) &= (100 - \alpha) \frac{1}{7} + (50 - \alpha) \frac{4}{7} + (-\alpha) \frac{2}{7} \\ &= \frac{100 - \alpha + 200 - 4\alpha - 2\alpha}{7} \\ &= \frac{300 - 7\alpha}{7} = -\alpha + \frac{300}{7} \end{aligned}$$

- إيجاد أكبر قيمة ممكنة لـ α :

تكون اللعبة في صالح اللاعب لما: $E(X) > 0$

$$-\alpha + \frac{300}{7} > 0$$

ومنه: $\alpha < 42.85$

وعليه: $\alpha = 42DA$

التمرين 03

1 توزيع الكريات الاثني عشر حسب الأرقام 1، 2، 3، 4:

$$p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \text{معناه: يوجد 4 كرات تحمل الرقم 1}$$

$$p_2 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12} \quad \text{معناه: يوجد 2 كرات تحمل الرقم 2}$$

$$p_3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \text{معناه: يوجد 3 كرات تحمل الرقم 3}$$

$$p_4 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \text{معناه: يوجد 3 كرات تحمل الرقم 4}$$

2 حساب احتمال كل من الحوادث A ، B و C :

$$p(A) = \frac{7}{12}$$

$$p(B) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$p(C) = \frac{2}{12}$$

3 تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$

الاحتمالات

المستوى الثانية شعبة علوم

التمرين 01

1 حساب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$:

$$p(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad p(B) = \frac{2}{9} \quad p(C) = \frac{2}{9}$$

2 حساب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن ال 1:

$$p(D) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3 التبرير أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$:

لدينا أسئلة الاحتمالات مرقمة من 1 إلى 3

وأسئلة الاشتقاق مرقمة من 1 إلى 4

وأسئلة الدوال مرقمة من 1 إلى 2

إذن مجموعة قيم X هي: $\{1; 2; 3; 4\}$

أ- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- حساب $E(X)$:

$$E(X) = 1 \frac{3}{9} + 2 \frac{3}{9} + 3 \frac{2}{9} + 4 \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \approx 2.1$$

ب- استنتاج قيمة $E(2024X + 1445)$:

$$\begin{aligned} E(2023 + 2024X) &= 2024E(X) + 2023 \\ &= 2024 \frac{19}{9} + 2023 = \frac{56663}{9} \end{aligned}$$

التمرين 02

1 حساب احتمال الحدث A و B

	B	B	B	V	V	V	V
B		BB	BB	VB	VB	VB	VB
B			BB	VB	VB	VB	VB
B				VB	VB	VB	VB
V					VV	VV	VV
V						VV	VV
V							VV
V							

$$P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

2

أ- تبرير أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100 - \alpha; 50 - \alpha; -\alpha\}$:

$$\begin{aligned} \blacksquare V(X) &= \sum_{i=1}^3 (x_i)^2 p_i - (E(X))^2 \\ &= \left[(0)^2 \left(\frac{2}{7}\right) + (1)^2 \left(\frac{4}{7}\right) + (2)^2 \left(\frac{1}{7}\right) \right] - \left(\frac{6}{7}\right)^2 \\ &= \frac{2}{7} \\ \blacksquare \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

- حساب $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} + 4 \cdot \frac{3}{12} \\ &= \frac{4 + 4 + 9 + 12}{12} = \frac{29}{12} \end{aligned}$$

■ التمرين 04 :

1

أ- تعيين بواسطة مخطط عدد عناصر Ω :

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0		$B_3 B_0$	$B_5 B_0$	$R_1 B_0$	$R_3 B_0$	$R_7 B_0$	$G_3 B_0$
B_3	$B_0 B_3$		$B_5 B_3$	$R_1 B_3$	$R_3 B_3$	$R_7 B_3$	$G_3 B_3$
B_5	$B_0 B_5$	$B_3 B_5$		$R_1 B_5$	$R_3 B_5$	$R_7 B_5$	$G_3 B_5$
R_1	$B_0 R_1$	$B_3 R_1$	$B_5 R_1$		$R_3 R_1$	$R_7 R_1$	$G_3 R_1$
R_3	$B_0 R_3$	$B_3 R_3$	$B_5 R_3$	$R_1 R_3$		$R_7 R_3$	$G_3 R_3$
R_7	$B_0 R_7$	$B_3 R_7$	$B_5 R_7$	$R_1 R_7$	$R_3 R_7$		$G_3 R_7$
G_3	$B_0 G_3$	$B_3 G_3$	$B_5 G_3$	$R_1 G_3$	$R_3 G_3$	$R_7 G_3$	

ومنه: عدد امكانيات هاته التجربة هو 42

ب- حساب احتمال الحواث التالية:

$$\begin{aligned} \blacksquare P(B) &= \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \\ \blacksquare P(D) &= \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \\ \blacksquare P(F) &= \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(A) &= \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \\ \blacksquare P(C) &= \frac{36}{42} = \frac{6}{7} \\ \blacksquare P(E) &= \frac{16}{42} = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

2

أ- تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0	/	$B_3 B_0$	$B_5 B_0$	$R_1 B_0$	$R_3 B_0$	$R_7 B_0$	$G_3 B_0$
B_3	$B_0 B_3$	/	$B_5 B_3$	$R_1 B_3$	$R_3 B_3$	$R_7 B_3$	$G_3 B_3$
B_5	$B_0 B_5$	$B_3 B_5$	/	$R_1 B_5$	$R_3 B_5$	$R_7 B_5$	$G_3 B_5$
R_1	$B_0 R_1$	$B_3 R_1$	$B_5 R_1$	/	$R_3 R_1$	$R_7 R_1$	$G_3 R_1$
R_3	$B_0 R_3$	$B_3 R_3$	$B_5 R_3$	$R_1 R_3$	/	$R_7 R_3$	$G_3 R_3$
R_7	$B_0 R_7$	$B_3 R_7$	$B_5 R_7$	$R_1 R_7$	$R_3 R_7$	/	$G_3 R_7$
G_3	$B_0 G_3$	$B_3 G_3$	$B_5 G_3$	$R_1 G_3$	$R_3 G_3$	$R_7 G_3$	/

ومنه:

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7} = \frac{12}{42}$	$\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$	$\frac{1}{7} = \frac{6}{42}$

ب- حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير العشوائي X :

$$\begin{aligned} \blacksquare E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_i = (0) \left(\frac{2}{7}\right) + (1) \left(\frac{4}{7}\right) + (2) \left(\frac{1}{7}\right) \\ &\approx 0.85 \end{aligned}$$

أ- تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي Y :

$$Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

- قانون احتمال Y :

	B_0	B_3	B_5	R_1	R_3	R_7	G_3
B_0		3	5	1	3	7	3
B_3	3		2	2	0	4	0
B_5	5	2		4	2	2	2
R_1	1	2	4		2	6	2
R_3	3	0	2	2		4	0
R_7	7	4	2	6	4		4
G_3	3	0	2	2	0	4	

ومنه:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(Y = y_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{2}{42}$

ب- حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف للمتغير العشوائي Y :

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= \sum_{i=1}^8 y_i p_i = \frac{(0)1}{7} + \frac{(1)1}{21} + \dots + \frac{(6)1}{21} + \frac{(7)1}{21} \\ &= \frac{58}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare V(Y) &= \sum_{i=1}^8 (y_i)^2 p_i - (E(Y))^2 \\ &= \left[(0)^2 \left(\frac{1}{7}\right) + (1)^2 \left(\frac{1}{21}\right) + \dots + (7)^2 \left(\frac{1}{21}\right) \right] - \left(\frac{58}{21}\right)^2 \\ &= \frac{1466}{441} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{3.32} \approx 1.82$$

■ التمرين 05 :

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5
1	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)
2	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)
3	(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)
4	(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)
5	(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)

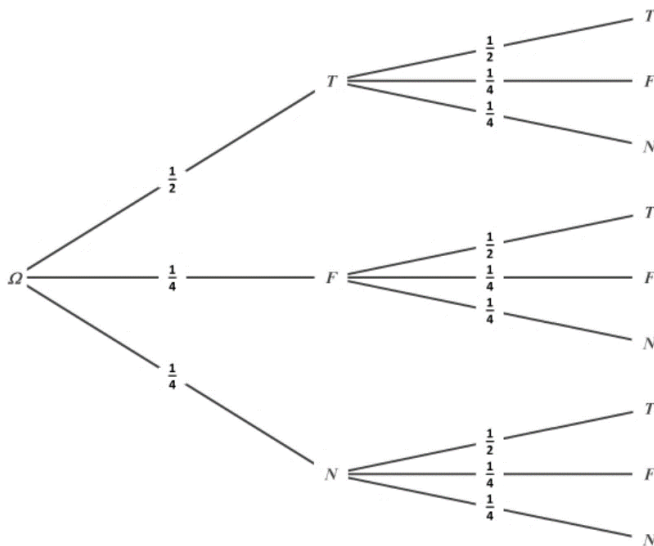
مجموع الإمكانيات هو 25

4 حساب احتمال الحدثين التاليين:

• A : "الرقان α و β يحققان المساواة $\alpha - \beta = \beta$ " :

لدينا: $\alpha - \beta = \beta$ معناه $\alpha = 2\beta$

الإمكانيات التي تحقق المساواة " $\alpha = 2\beta$ " هي (4; 2) ، (2; 1) ،



② حساب احتمال الحواث التالية:

- $P(A) = P(T \cap T) = \frac{11}{22} = \frac{1}{4}$
- $P(B) = P(T \cap N) + P(F \cap N) + P(N \cap N)$
 $= \frac{11}{24} + \frac{11}{44} + \frac{11}{44} = \frac{1}{4}$
- $P(C) = P(T \cap T) + P(T \cap F) + P(T \cap N) + P(F \cap T) + P(N \cap T)$
 $= \frac{11}{22} + \frac{11}{24} + \frac{11}{24} + \frac{11}{42} + \frac{11}{42} = \frac{3}{4}$

(II)

① القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$$

② تعريف قانون الاحتمال X :

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

③ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

• لدينا $E(X) > 0$ ومنه: نستنتج أن احتمال تحصيل التلميذ على نقاط جيدة كبير

تذكر تلميذك العزيز أن: جكور التعليم مبررة... لكن ثمارها حلوة بالتوفيق جميعا

$$p(A) = \frac{2}{25}$$

• $B: \alpha$ و β يحققان المتباينة $|\alpha - \beta| \leq 1$:

نملا الجدول بـ $|\alpha - \beta|$ ثم نلاحظ القيم التي تحقق $|\alpha - \beta| \leq 1$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4
2	1	0	1	2	3
3	2	1	0	1	2
4	3	2	1	0	1
5	4	3	2	1	0

$$p(B) = \frac{13}{25}$$

⑤ تعيين القيم الممكنة لـ X ، ثم كتابة قانون احتماله:

قيم المتغير العشوائي X هي: $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

⑥ تعيين القيم الممكنة لـ Y ، ثم كتابة قانون احتماله:

$$\Delta = \alpha^2 - 4\beta$$

لدينا: $\Delta > 0$ للمعادلة حلين،

لدينا: $\Delta = 0$ للمعادلة حل وحيد،

لدينا: $\Delta < 0$ المعادلة لا تقبل حولا

ومنه قيم Y هي: $Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

نملا الجدول السابق بقيم $\alpha^2 - 4\beta$:

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5
1	-3	0	5	12	21
2	-7	-4	1	8	17
3	-11	-3	-3	4	13
4	-15	-12	-7	0	9
5	-19	-16	-11	-4	5

ومنه

x_i	0	1	2
$p(Y = x_i)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{10}{25}$

■ التمرين 06:

(I)

① تمثيل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات:

نحسب أولا احتمال الإجابة الخاطئة:

نضع x احتمال الإجابة الخاطئة أو عدم الإجابة على السؤال

$$\sum p_i = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{2} + x + x = 1 \quad \text{معناه:}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{ومنه:}$$

نضع: T : إجابة صحيحة، F : إجابة خاطئة، N : عدم الإجابة