Solution série 3 du TD logique mathématique

Exercice 1 Solution :

1)

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux

2)

1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Faux
5. Faux
6. Vrai

3)

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux
6. Vrai

Exercice 2 Solution :

1) Vrai, 2) Faux, 3) Faux, 4) Vrai, 5) Vrai.

Exercice 3 Solution :

1) La table de vérité de $\neg(p \wedge q)$ est comme suit :

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2) La table de vérité de $\neg p \vee \neg q$ est comme suit :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

3) La table de vérité de $\neg(p \vee q)$ est comme suit :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

4) La table de vérité de $\neg p \wedge \neg q$ est comme suit :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

5) La table de vérité de $p \vee (p \wedge q)$ est comme suit :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

6) La table de vérité de $p \wedge (p \vee q)$ est comme suit :

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

7) La table de vérité de p est comme suit :

p
V
F

Les équivalences sont :
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Exercice 4 Solution :
1) $\neg p \equiv$ Il ne fait pas froid.
2) $p \wedge q \equiv$ Il fait froid et il pleut.
3) $p \vee q \equiv$ Il fait froid ou il pleut.
4) $q \vee \neg p \equiv$ Il pleut ou il ne fait pas froid.
5) $\neg p \wedge \neg q$ Il ne fait pas froid et il ne pleut pas.

6) $\neg\neg q$ Ce n'est pas vrai qu'il ne pleut pas (ou bien on peut mettre "il pleut").

Exercice 5 Solution :
1. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
Univers du discours : M = ce moteur est bruyant ; C = ce moteur consomme beaucoup.
$(\neg M \wedge C)$
2. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean viennent.
Univers du discours : P = Pierre viendra ; M = Marie vient ; J = Jean vient.
$\neg((M \vee J) \rightarrow P)$ si on interprète la phrase comme ça : Il n'est pas vrai que (Pierre viendra si Marie ou Jean viennent) ou bien $(M \vee J) \rightarrow \neg P$ si on interprete la phrase comme ça : (Il n'est pas vrai que Pierre viendra) si (Marie ou Jean viennent). Des conditions de vérité différentes
3. Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
Univers du discours : J = Jean est stupide ; M = Jean est méchant.
$J \wedge M$
4. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
Univers du discours : A = je vais à la plage à pied ; B = je vais au cinéma à pied ; C = je vais à la plage en voiture ; D = je vais au cinéma en voiture.
$((A \vee B) \vee (C \vee D))$
5. Pierre n'a ni frère ni sœur, mais il a un cousin.
Univers du discours : P = Pierre a un frère ; Q = Pierre a une sœur ; R = Pierre a un cousin.
$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge R$
6. S'il pleut et qu'il y a du soleil, alors il y a un arc-en-ciel.
Univers du discours : P = il pleut ; S = il y a du soleil ; A = il y a un arc-en-ciel.
$(P \wedge S) \rightarrow A$
7. Jean n'ira au cinéma que s'il a terminé ses devoirs.
Univers du discours : C = Jean ira au cinéma ; D = Jean a terminé ses devoirs.
$(\neg D \rightarrow \neg C)$

Exercice 6 Solution :
1) Premièrement, il faut introduire les variables propositionnelles.
"A" : pour " Ahmed commande un dessert ".
"L" : pour " Ali commande un dessert ".
"M" : pour " Mostafa commande un dessert ".

Maintenant, on va transformer les phrases en logique propositionnelle.

1. La phrase 1 donne : $A \longrightarrow L$,
2. La phrase 2 donne : $(L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)$,
3. La phrase 3 donne : $A \vee M$,
4. La phrase 4 donne : $M \longrightarrow A$.

2) Pour voir réellement qui a commandé un dessert, on fait la table de vérité de la formule globale "F_1" composée à partir de la conjonction de toutes les affirmations précédentes

dans le but de voir tous les modèles possibles.
La formule globale "F_1" $= (A \longrightarrow L) \wedge ((L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)) \wedge (A \vee M) \wedge (M \longrightarrow A)$.
La table de vérité est alors comme suit :

Interprétations	A	L	M	$A \to L$	$(L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)$	$A \vee M$	$M \to A$	F_1
I_1	V	V	V	V	F	V	V	F
I_2	V	V	F	V	V	V	V	V
I_3	V	F	V	F	V	V	V	F
I_4	V	F	F	F	F	V	V	F
I_5	F	V	V	V	F	V	F	F
I_6	F	V	F	V	V	F	V	F
I_7	F	F	V	V	V	V	F	F
I_2	F	F	F	V	F	F	V	F

La seule interprétation qui rend vraie la formule "F_1" est l'interprétation I_2 dans laquelle Ahmed et Ali commandent un dessert mais pas Mostafa. Car les valeurs de vérité des propositions A et L sont vraies mais la proposition M = faux (dans la ligne deux de la table de vérité).
3) Si on relâche l'une des contraintes précédentes, alors il y' aura toujours un deuxième modèle qui apparait et dans ce cas on pourra pas conclure (pour conclure, il faut toujours avoir un seul modèle pour la formule F_1).

Exercice 7 Solution :
1) La table de vérité de la formule $(p|q)$ est comme suit :

p	q	$(p\|q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2) La table de vérité de la formule $((p|q)|(p|q))$ est comme suit :

p	q	$(p\|q)$	$((p\|q)\|(p\|q))$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

On retrouve la table de vérité de $p \wedge q$
3) Le connecteur $\neg$: $\neg p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv (p|p)$
On peut donner sa table de vérité :

p	$(p\|p)$
V	F
F	V

- Le connecteur $\vee$: $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p|\neg q) \equiv (p|p)|(q|q)$.

- Le connecteur $\longrightarrow$: $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv p|\neg q \equiv p|(q|q)$.

Exercice 8 Solution :

a) La table de vérité de la formule $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$ est comme suit :

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee R$	$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La formule est valide.

b)La table de vérité de la formule $P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$ est comme suit :

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

La formule est valide.

c)La table de vérité de la formule $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ est comme suit :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

La formule est invérifiable.

d) La table de vérité de la formule $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$ est comme suit :

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \vee R$	$(Q \vee R) \wedge P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F

La formule est vérifiable.

e) La table de vérité de la formule $((P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow P$ est comme suit :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow R$	$((P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow P$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

La formule est vérifiable.

Exercice 9 Solution :
a) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$.

$(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$
$\equiv (A \wedge (C \vee \neg A)) \vee (B \wedge (C \vee \neg A)) \vee (C \wedge (C \vee \neg A))$ La distributivité.
$\equiv ((A \wedge C) \vee (A \wedge \neg A)) \vee ((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((C \wedge C) \vee (C \wedge \neg A))$ La distributivité.
$\equiv (A \wedge C) \vee ((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)) \vee (C \vee (C \wedge \neg A))$ On a enlevé $(A \wedge \neg A)$ = Faux selon la règle d'insatisfiabilité.
$\equiv (A \wedge C) \vee ((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)) \vee C$ On a remplacé $(C \vee (C \wedge \neg A))$ par C selon l'absorption.
$\equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A) \vee C$
b) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$.

$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
$\equiv (A \wedge (C \vee D)) \vee (B \wedge (C \vee D))$ La distributivité.
$\equiv ((A \wedge C) \vee (A \wedge D)) \vee ((B \wedge C) \vee (B \wedge D))$ La distributivité.
$\equiv (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$

c) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$.

$\neg((A \vee B) \rightarrow C)$
$\equiv \neg(\neg(A \vee B) \vee C)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (A \vee B) \wedge \neg C$ On a distribué le $\neg$.
$\equiv \neg C \wedge (A \vee B)$ La commutativité du $\wedge$.
$\equiv (\neg C \wedge A) \vee (\neg C \wedge B)$ La distributivité.

Exercice 10 Solution :
a) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$.

$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
$\equiv \neg(A \vee B) \vee (C \wedge D)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge D)$ Loi de Morgan.
$\equiv (\neg A \vee (C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee (C \wedge D))$ La distributivité.

$\equiv ((\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee D)) \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D))$ La distributivité.
$\equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D)$

b) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$.

$(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$
$\equiv (A \vee (\neg B \wedge ((C \vee \neg D) \wedge (C \vee E))))$ La distributivité.
$\equiv ((A \vee \neg B) \wedge (A \vee ((C \vee \neg D) \wedge (C \vee E))))$ La distributivité.
$\equiv ((A \vee \neg B) \wedge ((A \vee C \vee \neg D) \wedge (A \vee C \vee E)))$ La distributivité.
$\equiv (A \vee \neg B) \wedge (A \vee C \vee \neg D) \wedge (A \vee C \vee E)$

c) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$.

$A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$
$\equiv (A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \wedge ((B \wedge \neg C) \rightarrow A)$ La transformation de $\leftrightarrow$ en double $\rightarrow$.
$\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg (B \wedge \neg C) \vee A)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge ((\neg B \vee C) \vee A)$ Loi de Morgan.
$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \wedge ((\neg B \vee C) \vee A)$ La distributivité.
$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C \vee A)$.

Exercice 11 Solution :
a) $\vdash A \leftrightarrow A$
1$\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ sche 1a, remplacer le B par A
2$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ she 1b, remplacer le B par $A \rightarrow A$ et le C par A
3$\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ mp 1,2
4$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ sche 1a, remplacer le B par $A \rightarrow A$
5$\vdash A \rightarrow A$ mp 3,4
6$\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow A))$ sch 9, remplacer le B par A
7$\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow A)$ mp 5,6
8$\vdash A \leftrightarrow A$ mp 5,7

b) $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$
1$\vdash (\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ sch 1d, remplacer le A par $\neg B$, le B par $(\neg A \rightarrow \neg B)$ et le C par $B \rightarrow A$
2$\vdash \neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ sch 1a, remplacer le A par $\neg B$ et le B par $\neg A$
3$\vdash ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ mp 1,2
4$\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ sch 8
5$\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ mp 3,4

Exercice 12 Solution :
a) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C$
1$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ hyp 1
2$\vdash A \wedge B$ hyp 2
3$\vdash A \wedge B \rightarrow A$ sch 3a
4$\vdash A$ mp 2,3

5$\vdash B \to C$ mp 4,1
6$\vdash A \wedge B \to B$ sch 3b
7$\vdash B$ mp 2,6
8$\vdash C$ mp 7,5

b) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
1$\vdash A \to (B \to C)$ hyp 1
2$\vdash B$ hyp 2
3$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ sch 1b
4$\vdash B \to (A \to B)$ sch 1a, remplacer le A par B et le B par A
5$\vdash (A \to B)$ mp 2,4
6$\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to C)$ mp 5,3
7$\vdash A \to C$ mp 1,6

c) $A, B \wedge C, A \wedge C \to E \vdash E$
1$\vdash A$ hyp 1
2$\vdash B \wedge C$ hyp 2
3$\vdash A \wedge C \to E$ hyp 3
4$\vdash A \to (C \to A \wedge C)$ sch 2, remplacer le B par C
5$\vdash C \to A \wedge C$ mp 1,4
6$\vdash B \wedge C \to C$ sch 3b, remplacer le A par B et le B par B
7$\vdash C$ mp 2,6
8$\vdash A \wedge C$ mp 7,5
9$\vdash E$ mp 8,3

d) $E, E \to (A \wedge D), D \vee F \to G \vdash G$
1$\vdash E$ hyp 1
2$\vdash E \to (A \wedge D)$ hyp 2
3$\vdash D \vee F \to G$ hyp 3
4$\vdash A \wedge D$ mp 1,3
5$\vdash A \wedge D \to D$ sch 3b, remplacer le B par D
6$\vdash D$ mp 4,5
7$\vdash D \to d \vee F$ sch 4a, remplacer le A par D et le B par F
8$\vdash D \vee F$ mp 6,7
9$\vdash G$ mp 8,3

e) $\neg A \to C, (\neg C \to A) \to ((C \to A) \to A) \vdash (\neg A \to \neg C) \to A$
1 $\vdash \neg A \to C$ Hyp1
2 $\vdash (\neg C \to A) \to ((C \to A) \to A)$ Hyp2
3 $\vdash (\neg A \to C) \to (\neg C \to A)$ sch 8 on a remplacé le B par $\neg C$
4 $\vdash \neg C \to A$ mp 1,3
5 $\vdash (C \to A) \to A$ mp 2,4
6 $\vdash ((\neg A \to \neg C) \to (C \to A)) \to ((C \to A) \to A) \to ((\neg A \to \neg C) \to A))$ sch 1d on a remplacé le A par $\neg A \to \neg C$, B par $C \to A$ et C par A
7 $\vdash (\neg A \to \neg C) \to (C \to A)$ sch 8 on a remplacé B par C
8 $\vdash ((C \to A) \to A) \to ((\neg A \to \neg C) \to A))$ mp 6,7
9 $\vdash (\neg A \to \neg C) \to A$ mp 5,8