Chapitre 5

Chapitre 5 : La logique des prédicats du premier ordre

5.1 Introduction

La logique des prédicats a pour but de généraliser la logique des proposition. On peut considérer un prédicat comme un énoncé général où apparaissent des variables. Par exemple : "L'amphi X est grand" "Si X est père de Y et de Z alors Y et Z sont frères".

Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à laquelle on pourra associer une interprétation (vrai, faux). Ainsi, X = A1, dans le premier exemple donne "L'amphi A1 est grand". Un prédicat représente donc une classe de propositions.

Par l'introduction de quantificateurs on peut représenter le fait qu'un énoncé est vrai pour toutes les valeurs possibles des variables ou qu'il existe au moins une valeur des variables qui rend l'énoncé vrai. Par exemple : "quelque soit X si X est un homme alors X est mortel". Les variables pouvant prendre leur valeur dans des ensembles infinis, les quantificateurs permettent donc d'énoncer des faits correspondant à une infinité de propositions.

5.2 Langage

5.2.1 L'alphabet

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué de :

- Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés p, q, r, ..., homme, mortel, père,....
- Un ensemble dénombrable de variables d'objets (ou variables d'individu), notées x, y, z, x_1, x_2,.....
- Un ensemble dénombrable de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées f, g,...., père-de,....
- Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- Les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ainsi que les parenthèses de la logique propositionnelle.

Notation.

Les fonctions à 0 arguments sont appelées constantes (souvent notées a, b, ..., Socrate,...).
Les prédicats à 0 arguments ne sont rien d'autre que des variables propositionnelles.

Exemple : Écrire en langage formel de la logique du premier ordre les assertions suivantes :

Tous les chats, sont noirs : $\forall x(Chat(x) \rightarrow Noir(x))$
Certains chats sont noirs : $\exists x(Chat(x) \wedge Noir(x))$
Aucun chat, n'est noir : $\forall x \neg(Chat(x) \wedge Noir(x))$
Dans le domaine des entiers naturels, pour tout entier naturel, il existe un nombre premier qui lui est supérieur : $\forall x \exists y(Pre(y) \wedge Sup(y, x))$

5.2.2 Définitions

Un terme : l'ensemble des termes est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

- Toute variable est un terme,
- f$(t_1, ..., t_n)$ est un terme si f est une fonction à n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes.

Formule atomique : Si P est un prédicat à n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes alors P$(t_1, ..., t_n)$ est une formule atomique. Quand n = 0, la formule atomique est une proposition.

Formule bien formées : Une formule atomique est une fbf.
Si P et Q sont des fbfs, et x une variable, alors : $\neg P$, $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q, (\forall x)P, et (\exists x)P$ sont des fbfs.
La priorité entre les connectives est la même que dans la logique propositionnelle ; Quand aux quantificateurs "$\forall$" et "$\exists$", ils ont la même priorité que "$\neg$".

Littéral : Si L est une formule atomique, (L) et $(\neg L)$ sont appelés des littéraux. L et $\neg L$ sont dits littéraux complémentaires.

5.2.3 La portée d'un quantificateur

Une variable est **liée** dans une formule si et seulement si elle est dans la portée d'un quantificateur. Dans les fbfs $(\forall x)$P, et $(\exists x)$P, P est la **portée** des quantificateurs.

Une variable qui n'est pas liée dans une formule est dite **libre** . Une variable peut donc être libre et liée dans la même formule.

Dans la fbf : $(P(x) \vee \forall x Q(x))$, x est libre dans P(x), mais elle est liée dans Q(x).

Une fbf **fermée** est une fbf qui ne contient pas de variables libres (elle contient seulement des constantes ou des variables quantifiées universellement ou existentiellement), sinon elle est **ouverte**.

Si P est une fbf et t un terme, t est dit libre pour x dans P, si et seulement si lorsqu'on remplace une occurrence libre de x par t aucune variable de t ne devient liée. Dans la suite, on ne considère que les formules sans variable libre.

La fermeture d'une fbf P, est définie comme la fbf fermée obtenue à partir de P, en la préfixant avec des quantificateurs universels portant sur les variables libres dans P.

Exemple : La fermeture de : $P(x, y, z) \rightarrow (\exists y)Q(x, y, z)$ est
$\forall x \forall y \forall z(P(x, y, z) \rightarrow (\exists y)Q(x, y, z))$

5.2.4 Les formules congrues

Considérons la formule : $\forall x(P(x) \land \exists x Q(x,z) \rightarrow \exists y R(x,y)) \lor Q(z,x)$ (1)

Dans la partie $\exists x Q(x,z)$, chaque x est lié par $\exists x$, ce qu'on peut indiquer en attachant un indice 1 à chacun des x pour montrer qu'ils vont ensemble. On fera de même pour les autres variables. En mettant les indices on doit toujours partir de l'intérieur, en procédant selon l'ordre suivi dans la construction de la formule. Par souci de normalité, on choisira de commencer la numérotation à chaque étape par le quantificateur le plus à gauche. Soit la formule (1) :

1- $\forall x(P(x) \land \exists x Q(x,z) \rightarrow \exists y R(x,y)) \lor Q(z,x)$
2- $\forall x_3(P(x_3) \land \exists x_1 Q(x_1,z) \rightarrow \exists y_2 R(x_3,y_2)) \lor Q(z,x)$

les occurrences demeurées sans indices sont libres. En effaçant les variables liées, on obtient :

3-$\forall 3(P(3) \land \exists 1 Q(1,z) \rightarrow \exists 2 R(3,2)) \lor Q(z,x)$

Soit la formule (2) :

1- $\forall y(P(y) \land \exists x Q(x,z) \rightarrow \exists z R(y,z)) \lor Q(z,x)$
2- $\forall y_3(P(y_3) \land \exists x_1 Q(x_1,z) \rightarrow \exists z_2 R(y_3,z_2)) \lor Q(z,x)$
3- $\forall 3(P(3) \land \exists 1 Q(1,z) \rightarrow \exists 2 R(3,2)) \lor Q(z,x)$

Ceci montre que les formules (1) et (2) sont **congrues**.

5.2.5 La substitution et l'instantiation

L'opération de substitution consiste à remplacer certaines variables libres d'une formule libre F par des termes.

Si F est une formule où $x_1, x_2, \ldots.., x_n$ sont des variables libres, et σ la substitution $(t_1/x_1, \ldots..., t_n/x_n)$, F$\sigma$ dénote la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de x_i dans F par t_i tel que i = 1 à n.

Exemple : F = $Q(x,y_1) \leftrightarrow \forall x(R(x,z_1) \lor S(x,y_1))$
$\sigma = (z_8/x, g(a,b)/y_1)$

Fσ = $Q(z_8, g(a,b)) \leftrightarrow \forall x(R(x, z_1) \vee S(x, g(a,b)))$

On dira qu'une substitution instancie x si elle remplace x par un terme où n'apparait aucune variable. Ainsi, la substitution $(z_8/x, g(a,b)/y_1)$ instancie y_1 mais pas x.

5.3 La méthode déductive : Théorie de la preuve

De la même manière que pour la logique propositionnelle, nous donnons les axiomes et les règles d'inférence de la logique du premier ordre.

5.3.1 Les axiomes

Nous gardons les schémas d'axiomes de la logique propositionnelle, auxquels on a rajouté :

- Le schéma universel : $\forall x P(x) \to P(a)$
- Le schéma existentiel : $P(a) \to \exists x P(x)$

5.3.2 Les règles d'inférence

Modus Ponens : P,$P \to Q \vdash Q$

La règle universelle : Elle permet de passer de la forme $C \to A(x)$ à la forme $C \to \forall x A(x)$

La règle existentielle : Elle permet de passer de la forme $A(x) \to C$ à la forme $\exists x A(x) \to C$ C ne contenant pas d'occurrence libre de x.

Théorème de déduction : Si E est un ensemble de fbf fermées et P et Q sont des fbf fermées : Si E, P $\vdash$ Q, alors E $\vdash P \to Q$ (E, P désigne E $\cup\{P\}$)

Exemple : Établir la déduction suivante : $\forall y(R \to P(y)) \vdash R \to \forall x P(x)$

1- $\forall y(R \to P(y))$	Hyp
2- $\forall y(R \to P(y)) \to (R \to P(y))$	sh $\forall$
3-$R \to P(y)$	m.p 1,2

4- $R \rightarrow \forall y P(y)$ règle $\forall$
5- $(R \rightarrow \forall y P(y)) \rightarrow ((R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))) \rightarrow (R \rightarrow \forall x P(x)))$ sh.1b
6- $(R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))) \rightarrow (R \rightarrow \forall x P(x))$ m.p 4,5
7- $\forall y P(y) \rightarrow P(x)$ sh.$\forall$
8- $\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)$ règle$\forall$
9- $(\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)) \rightarrow (R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)))$ sh.1a
10- $R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))$ m.p 8,9
11- $R \rightarrow \forall x P(x)$ m.p 6,10

5.4 L'approche sémantique

Nous gardons la même démarche que celle adoptée dans la présentation de la logique propositionnelle. Après avoir répondu à la question si une formule F est démontrable ou pas (en utilisant l'approche déductive), on se pose maintenant la question de savoir si une fbf F est valide ou non. On ne pourra pas procéder comme pour la logique propositionnelle, et l'un des problèmes de la logique du premier ordre va consister à trouver les procédures permettant d'établir qu'une formule est invérifiable.

5.4.1 Notion d'interprétation

Dans la logique propositionnelle, on a noté que l'interprétation d'une formule consiste à affecter des valeurs de vérité vrai ou faux à chacun des atomes et à évaluer l'ensemble en fonction des tables de vérité des différents connecteurs. Dans la logique du premier ordre, une interprétation I d'une formule P est définie par :

- Un ensemble non vide D appelé le domaine de l'interprétation,
- Une correspondance entre les constantes et les éléments de D,
- Une correspondance entre chaque fonction n-aire et une application de $D^n \longrightarrow D$,
- Une correspondance entre chaque prédicat n-aire et une application de $D^n \longrightarrow \{V, F\}$.

Interprétation des variables : A chaque variable, on fait correspondre un élément de D.

Interprétation des termes :

- Les variables sont interprétées comme ci-dessus,
- A chaque constante, on fait correspondre un élément de D,
- Si $t'_1, t'_2, ..., t'_n$ sont les interprétations des termes $t_1, t_2, ..., t_n$ et f' l'interprétation de f, alors l'élément $f'(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ de D est l'interprétation du terme $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Interprétation des formules dans $\{Vrai, Faux\}$:

- Si la formule $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ est un atome, sa valeur de vérité est celle de $P'(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ où P' est l'application associée à P et t'_i est l'interprétation du terme t_i,

- Si la formule est de la forme $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$, alors la valeur de vérité de la formule est donnée par la table de vérité des différentes connectives,

- Si la formule est de la forme $\exists xP$, la valeur de vérité de cette formule est "vrai" s'il existe un élément d de D tel que P est vrai relativement aux interprétations des variables, des termes et formules, à condition de remplacer la variable x par d. Dans les autres cas, la valeur de vérité est "faux",

- Si la formule est de la forme $\forall xP$, alors la valeur de vérité de cette formule est "vrai", si pour tout élément d de D, P a la valeur "vrai" par rapport à I, à condition de remplacer x par d (notation P(x/d)), sinon la valeur de vérité est "faux".

La valeur de vérité d'une formule fermée ne dépend pas de l'interprétation des variables. On peut donc parler de la valeur d'une formule fermée, relativement à une interprétation.

Contrairement à ce qui se passe pour la logique propositionnelle, il y a en général un nombre infini d'interprétations pour une formule de la logique des prédicats du premier ordre; Il n'y a donc pas d'équivalent à la notion de table de vérité.

Exemple : Soit la formule $F = \forall x(\exists xP(x) \rightarrow P(x)) \wedge P(y)$, à interpréter sur le domaine D $= \{1, 2\}$.

On cherche d'abord à connaitre les variables libres et les variables liées. Ainsi, on a :
$\forall x_2(\exists x_1 P(x_1) \rightarrow P(x_2)) \wedge P(y)$, la variable y est libre dans la formule, on donne donc les interprétations relatives à x :

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

La table de vérité est :

P(x)	y	$\forall x(\exists x P(x) \rightarrow P(x)) \wedge P(y)$
f_1	1	V
f_1	2	
f_2	1	
f_2	2	
f_3	1	F
f_3	2	
f_4	1	
f_4	2	

Le calcul de la valeur de vérité de la première ligne est le suivant :

$$\forall x \quad v \left\{ \begin{array}{l} x=1 \quad v \quad \exists x \quad v \left\{ \begin{array}{ll} f_1(1) & v \\ ou & \\ f_1(2) & v \end{array} \right. \qquad \rightarrow f_1(1) \quad v \\ et \\ x=2 \quad v \quad \exists x \quad v \left\{ \begin{array}{ll} f_1(1) & v \\ ou & \\ f_1(2) & v \end{array} \right. \qquad \rightarrow f_1(2) \quad v \end{array} \right\} \wedge f_1(1) \quad v$$

5.4.2 Notion de validité et notion de modèle

Soient F une fbf fermée, et $S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ un ensemble fini de fbf fermées. F et S appartenant au calcul des prédicats du premier ordre.

Définition 1 : F est **vérifiable** si et seulement si, il existe une interprétation I telle que la valeur de vérité de F relativement à I est "vrai".

Si F est vrai pour l'interprétation I, on dit que I est un modèle pour F, et que I vérifie F. S est **vérifiable** s'il existe une interprétation I qui est un modèle pour chaque formule de S. Donc : I est modèle pour S, si et seulement si, I est un modèle pour $P_1 \wedge P_2 \wedge .... \wedge P_n$ sinon S est **invérifiable**.

Définition 2 : F est **valide** , si et seulement si, chaque interprétation I pour F vérifie F. S est valide si chacune de ses interprétations est un modèle pour S.

Définition 3 : F est dite **conséquence valide** de S, si pour toute interprétation I , I est un modèle de S implique que I est un modèle pour F.

F est une **conséquence logique** de S, si et seulement si, $P_1 \wedge P_2 \wedge .... \wedge P_n \rightarrow F$ est valide.

Théorème 2 : F est une conséquence valide de S, si et seulement si , $S \cup \{\neg F\}$ est invérifiable.

5.5 L'équivalence entre les deux approches

A l'instar de la logique propositionnelle, nous concluons le chapitre par l'équivalence entre l'approche déductive et l'approche sémantique.

La sureté et la complétude : La logique du premier ordre est sure, si une fbf est démontrable, alors elle est valide

$$\vdash P \rightarrow \models P$$

La logique du premier ordre est complète. Une fbf P est un théorème si et seulement si, elle est valide (théorème de complétude établit par Godel)

$$\models P \leftrightarrow \vdash P$$

La complétude de la logique des prédicats est intéressante, puisqu'on peut montrer la validité d'une fbf en utilisant la théorie de la preuve.

La décidabilité : La logique des prédicats est **semi-décidable**, car il existe une procédure de preuve qui permet d'établir qu'une fbf est un théorème (en appliquant des règles d'inférences aux axiomes et aux théorèmes). Pour les fbf qui ne sont pas des théorèmes ces procédures ne donnent pas de réponses en un nombre fini de pas.

5.6 Exercices

Exercice 1 Modélisez les phrases suivantes en logique des prédicats, précisez le vocabulaire utilisé.

- Tous les étudiants aiment la logique.
- Tous les étudiants n'aiment pas une matière.
- Les étudiants qui ont une bonne note en logique sont les meilleurs.

Exercice 2 Soient les phrases suivantes :
a- Tous les hommes sont mortels.
b- Socrate est un mortel.
c- Socrate est un homme.

- Identifier les prédicats.
- Exprimer dans la logique des prédicats a, b, c.
- peut on déduire l'énoncé b à partir de a et c ? justifier.

Exercice 3 Soient les énoncés suivants :

1. Les personnes qui ont la grippe A doivent prendre du Tamiflu.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe A.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38 ont de la fièvre.
4. Mohamed tousse et a une température supérieure à 38.
5. Mohamed doit prendre du Tamiflu.

Modélisez en logique du premier ordre les énoncés ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :

- grippe (x) : x a la grippe A.
- prendre (x,y) : x doit prendre y.
- fievre (x) : x a de la fièvre.
- tousse (x) : x tousse.
- temp (x, t) : x a la température t.
- sup (x, y) : x est supérieur à y.

utilisez aussi les constantes suivantes : 38, Mohamed, Tamiflu.

Exercice 4 Établir la table de vérité des formules suivantes : (sachant que le domaine d'interprétation est D = $\{1, 2\}$)
a- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$.
b- $\forall x(P(x, y) \land \exists x P(x))$.

Exercice 5
a- Établir les déductions suivantes :
- $\forall x \forall y A(x, y) \vdash A(x, y)$.
- $\forall x (P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$.
- $P(a), \forall x (P(x) \to Q(x)) \vdash Q(a)$.

b- Démontrer : $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

5.7 Note bibliographique

Les définitions du chapitre 2 ont été extraites du livre de Jean Yves Girard traduit de l'anglais par Julien Basch et Patrice Blanchard [Gir99]. Le chapitre 3 reprend quelques notes du cours "logique formelle" fait par Mme Kempf [Kem07], du livre de salem "introduction à la logique formelle" [Sal91] et du livre de Gérard Chazal [Cha96] avec quelques exercice de la série de TD de Mme Bahi [Bah06].

Les définitions des chapitres 4 et 5 ont été extraites des livres " Mathematical logic and formalized theories" [L.R74], "logique mathématique" [KCD03] et "Éléments de logique mathématique théorie des modèles " [KK67].