Chapitre 4

Chapitre 4 : La logique propositionnelle

4.1 Introduction

Dans le cadre de la logique classique, une proposition est un énoncé déclaratif (une assertion) auquel nous pouvons assigner la valeur "vrai" ou "faux", mais pas les deux : on appelle ça la logique propositionnelle.

Dans le cadre de la logique propositionnelle, deux approches de résolution sont possibles : la première est une approche déductive, parfois appelée théorie de la preuve, qui permet de décider si oui ou non une formule est démontrable, la seconde est une approche sémantique, parfois appelée théorie des modèles, elle fait appel à la notion d'interprétation d'une formule.

Dans ce chapitre, nous allons présenter ces deux approches et nous clôturons le chapitre par la notion de complétude qui établit l'équivalence entre les deux approches.

4.2 Langage

4.2.1 Alphabet

Définition 1 : L'alphabet de la logique propositionnelle est constitué de :

– Un ensemble dénombrable de variables propositionnelles (ou formules atomiques , ou encore atomes).

On entend par proposition atomique (formule atomique), un énoncé indécomposable, par exemple : il pleut, la route est mouillée, ce chat est blanc, ..., plus abstraitement : P, Q,..... . Ainsi, nous utilisons P, Q, R, P_1, P_2,....., pour les variables propositionnelles.

– les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ et les parenthèses.

La négation $\neg A$: "non A" (c'est à dire A n'est pas le cas), le connecteur de la négation est un connecteur unaire. Si on prend la proposition A = "ce chat est blanc" , la négation de A n'est pas "ce chat est noir", mais tout simplement "ce chat n'est pas blanc".

La conjonction A $\wedge$ B : "A et B", ce connecteur est binaire.

La disjonction A $\vee$ B : "A ou B", ce connecteur est binaire.

L'implication A $\rightarrow$ B : "Si A alors B", ce connecteur est binaire

L'équivalence A $\leftrightarrow$ B : "A ssi B", ce connecteur est binaire.

– Les séparateurs ou bien les parenthèses (et).

4.2.2 Les formules bien formées

Définition 2 : l'ensemble des formules ou formules bien formées (fbf) de la logique propositionnelle est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet tel que :

- Si A est une formule atomique alors A est une formule bien formée,
- $\neg A$ est une formule bien formée si A est une formule bien formée,
- (A $\wedge$ B) est une formule bien formée si A et B sont des formules bien formées,
- (A $\vee$ B) est une formule bien formée si A et B sont des formules bien formées,
- (A $\rightarrow$ B) est une formule bien formée si A et B sont des formules bien formées,
- (A $\leftrightarrow$ B) est une formule bien formée si A et B sont des formules bien formées.

Pour éviter les ambiguïtés et minimiser l'emploi des parenthèses, on introduit une priorité entre les connecteurs. Après les parenthèses le connecteur de la négation a la plus forte priorité, la conjonction, la disjonction, l'implication et enfin l'équivalence.

Exemple : En mettant les parenthèses, déterminer l'ordre de priorité des connecteurs de la formule suivante :
$P \wedge \neg Q \vee R \to S \leftrightarrow X \vee Y$

Solution : $P \wedge \neg Q \vee R \to S \leftrightarrow X \vee Y = (((P \wedge \neg(Q)) \vee R) \to S) \leftrightarrow (X \vee Y)$

4.3 Théorie de la preuve

Nous allons maintenant nous intéresser à la méthode déductive qui permet de décider si une fbf est un théorème ou non. Notons, qu'un axiome est une fbf posée comme étant un théorème sans démonstration, et qu'un théorème est une fbf démontrable à partir des axiomes en utilisant les règles d'inférence ; tout le problème de la déduction consiste à engendrer des théorèmes à partir d'autres théorèmes (dont les axiomes) ; ceci se fait par des règles d'inférence.

4.3.1 Les axiomes

Ils sont obtenus à partir des schémas d'axiomes suivants, en remplaçant A,B et C par n'importe quelle fbf.

Voici les schémas d'axiomes de la logique propositionnelle :
- **1a.** $(A \to (B \to A))$
- **1b.** $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
- **1c.** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- **1d.** $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- **2.** $A \to (B \to A \wedge B)$
- **3a.** $A \wedge B \to A$
- **3b.** $A \wedge B \to B$
- **4a.** $A \to A \vee B$
- **4b.** $B \to A \vee B$
- **5.** $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
- **6.** $B \to ((B \to C) \to C)$
- **7.** $A \to A$
- **8.** $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
- **9.** $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$

4.3.2 Règle d'inférence

Dans la logique propositionnelle, il y a une seule règle d'inférence appelée **modus-ponens**.

Si P,
et P $\rightarrow$ Q,
On conclut Q

Si on note $\vdash Q$ cela indique que la formule Q est un théorème.

4.3.3 Notion de démonstration

Une fbf Q est un théorème, si et seulement si, il existe une démonstration dont la dernière formule est Q.

La notion de démonstration (ou dérivation, ou preuve) peut être étendue à une " démonstration à partir des hypothèses ". Ainsi prouver qu'une proposition P est un théorème, revient à chercher une démonstration dont la dernière fbf est P.

Exemple 1 : Soit à démontrer que $A \rightarrow A$ est un théorème.
Solution :
1. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ sh 1a
2. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ sh 1b
remplacer le B par $A \rightarrow A$ et le C par A
3. $\vdash ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ m.p 1,2
4. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ sh 1a remplacer le B par $A \rightarrow A$
5. $\vdash A \rightarrow A$ m.p 3,4

Exemple 2 : Établir la déduction suivante :

$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$
Solution :

1. $\vdash$ B 2 ème Hyp
2. $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ sh.1a
3. $\vdash A \rightarrow B$ m.p 1,2
4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ sh.1b

5. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to C)$ m.p 3,4
6. $\vdash A \to (B \to C)$ 1 ère Hyp
7. $\vdash A \to C$ m.p 5,6

4.3.4 Théorème de déduction

Définition 3 : Si P est une fbf, et E un ensemble de fbf, on dit que P est une conséquence de E ou P est déductible à partir de E tel que les éléments de E sont appelés les hypothèses ou prémisses de la démonstration. Nous noterons "P est une conséquence de E" par $E \vdash P$.
Si E $= \{E_1, E_2, ..., E_n\}$, alors, la notation est : $E_1, E_2, ..., E_n \vdash P$. Cela permet d'énoncer le théorème de déduction.

Théorème de la déduction : Si E est un ensemble de fbf et P et Q sont des fbf :
Si $E, P \vdash Q$ alors $E \vdash P \to Q$ (E,P désigne E $\cup\{P\}$ ($\cup$ c'est l'union ensembliste)).

Dans le cas où E $= \emptyset$, cela nous donnerait : Si $P \vdash Q$ alors $\vdash P \to Q$.
Un cas particulier intéressant du théorème de la déduction est le suivant :
Si $E_1, E_2, ..., E_n \vdash P$ alors $E_1, E_2, ..., E_{n-1} \vdash (E_n \to P)$.

4.4 Théorie des modèles

Dans l'approche déductive du calcul propositionnel on s'est intéressé à la notion de théorème démontrable, en utilisant des axiomes et des règles d'inférence. La deuxième approche historiquement postérieure est basée sur la notion de validité et d'invérifiabilité d'une fbf. L'objectif est de pouvoir assigner à une fbf des valeurs de vérité.

La théorie des modèles ou l'aspect sémantique fait appel à la notion d'interprétation. L'interprétation d'une fbf consiste à donner des règles permettant de lui affecter une valeur de vérité vrai ou faux (que nous noterons V ou F).

pour une formule de la logique propositionnelle, cela consistera à affecter des valeurs de vérité vrai ou faux à chacun des atomes de la formule, et à évaluer l'ensemble de la formule en fonction des tables de vérité, nous disposons ainsi d'une procédure mécanique pour calculer la valeur de vérité de n'importe quelle fbf. Une telle méthode suppose que l'on connaisse la façon dont les connectives transmettent les valeurs de vérité.

4.4.1 Notion d'interprétation et notion de modèle

Définition 4 : Une interprétation I (ou une valuation) est une application de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble des valeurs de vérité $\{V, F\}$.

Une formule contenant n atomes aura 2^n interprétations. Dans le calcul propositionnel, le nombre d'interprétations est donc toujours fini.

on peut noter une interprétation I d'une fbf A ayant n composants par $I = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ où V_i tel que i $\in \{1, .., n\}$ représente un atome ou sa négation.

Définition 5 : Une interprétation donnée I peut être étendue à l'ensemble des formules par :

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Exemple : Donnez la table de vérité de la formule suivante : $P \vee (Q \rightarrow R)$

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \vee (Q \rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Définition 6 : Quand une interprétation I vérifie une fbf F, on dit que I est un modèle de la formule F.

Définition 7 : Si E est un ensemble de fbf $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$,I est un *modèle* de E, si et seulement si I est un modèle pour toutes les formules de E. Donc : I est un modèle de E $\leftrightarrow$ I est un modèle pour $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$.

Définition 8 (conséquence logique) : Une formule A est une *conséquence logique* de $A_1, A_2, ..., A_n$ noté $A_1, A_2, ..., A_n \models A$ ssi tout modèle de $A_1, A_2, ..., A_n$ est un modèle de A.

4.4.2 Notion de validité

Définition 9 : Une fbf est dite *valide* (ou tautologique) ssi elle est vraie pour toute ses interprétations , indépendamment de la valeur de vérité des atomes qui la composent ; Autrement dit, c'est la combinaison des connectives qui en fait une tautologie.

Définition 10 : Une fbf est dite *vérifiable* s'il existe au moins une interprétation I pour laquelle la formule est vraie. De même, nous dirons qu'un ensemble E de fbf est vérifiable, si et seulement si, il existe une interprétation I qui est un modèle de E.

Définition 11 : Une fbf est dite *invérifiable* si et seulement si elle est fausse pour toutes ses interprétations.

Théorème 1 : Une fbf Q est une conséquence valide de P (ou découle logiquement de P), si et seulement si toute interprétation vérifiant P, vérifie aussi Q.
$P \models Q$ sera la notation pour Q est une conséquence valide de P.

4.5 Équivalence de deux formules et formes normales

Théorème 2 : Deux fbf P et Q sont dites équivalente (ou P est équivalent à Q) si et seulement si, les valeurs de vérité de P et Q sont les mêmes pour toute interprétation de P et Q.

Exemple : Les formules P et Q sont équivalentes
P = $A \vee B$ et Q = $B \vee A$
En outre, si l'ensemble des symboles propositionnels de P et Q, ne sont pas les mêmes, il parait inapproprié d'utiliser cette formule, nous dirons alors pour établir l'équivalence :
deux fbf P et Q sont équivalentes si et seulement si on a à la fois $P \models Q$, et $Q \models P$. Cela revient à dire $P \equiv Q$ est valide ($P \equiv Q$ est une abréviation de P est équivalent à Q).

Théorème 3 : Pour toutes formules P, Q, R les paires de formules suivantes sont équivalentes :

- **Idempotence :** $(P \vee P) \equiv P$ et $(P \wedge P) \equiv P$.
- **Commutativité :** $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$ et $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$.
- **Associativité :** $((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee (Q \vee R))$ et $((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge (Q \wedge R))$.
- **Absorption :** $(P \vee (P \wedge R)) \equiv P$ et $(P \wedge (P \vee R)) \equiv P$.
- **Distributivité :** $(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ et $(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.
- **Complémentarité :** $\neg\neg P \equiv P$.
- **Lois de Morgan :** $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$ et $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$.
- **Tautologie :** $(F \vee G) \equiv F$ si F est une tautologie
  $(F \wedge G) \equiv G$ si F est une tautologie.
- **insatisfiabilité :** $(F \vee G) \equiv G$ si F est invérifiable
  $(F \wedge G) \equiv F$ si F est invérifiable.

Ce théorème utilisé en conjonction avec le théorème 2 , nous permet de simplifier les formules.

Exemple : Soit F = $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$, simplifiez la formule F.

1. $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C))$
2. $\equiv ((A \vee (\neg B \vee \neg A)) \wedge (C \vee (D \vee C))$ 2 ème loi de Morgan
3. $\equiv ((A \vee (\neg A \vee \neg B)) \wedge (C \vee (D \vee C))$ commutativité du $\vee$
4. $\equiv ((A \vee \neg A) \vee \neg B) \wedge (C \vee (D \vee C))$ associativité du $\vee$
5. $\equiv (A \vee \neg A) \wedge (C \vee (D \vee C))$ 1 ère tautologie.
6. $\equiv (C \vee (D \vee C))$ 2 ème tautologie.
7. $\equiv (C \vee (C \vee D))$ commutativité du $\vee$
8. $\equiv (C \vee C) \vee D)$ associativité du $\vee$
9. $\equiv (C \vee D)$ idempotence.

Définition 12 : Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.

Définition 13 : Une conjonction de littéraux est une formule composée de littéraux reliés par l'opérateur $\wedge$.

Définition 14 : Une disjonction de littéraux est une formule composée de littéraux reliés par la connective $\vee$.

Définition 15 : Une formule est dite sous **forme normale conjonctive** si et seulement si, c'est une conjonction de disjonction de littéraux.

Définition 16 : Une formule est dite sous **forme normale disjonctive** si et seulement si, c'est une disjonction de conjonction de littéraux.

Théorème 4 : Pour toute formule du calcul propositionnel, on peut trouver au moins une formule équivalente sous forme normale conjonctive, et une autre sous forme normale disjonctive. Il existe une procédure de transformation qui pour toute formule f, transforme cette formule sous une forme normale conjonctive ou disjonctive.

Cette procédure consiste à :
- Éliminer respectivement les connectives logiques $\leftrightarrow$ puis $\rightarrow$ en utilisant les lois :
  $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
  $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- Réduire la portée de la négation par l'application répétitives des lois de complémentarité et de Morgan.
- Utiliser les lois de distributivité, et les équivalences entre formules.

Exemple : Soit à trouver la FNC (forme normale conjonctive) de la formule suivante : $\neg((A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D))$.

Solution :

1. $\neg((A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D))$
2. $\equiv (\neg(A \wedge B) \wedge \neg(C \wedge \neg D))$ — 1 ère loi de Morgan
3. $\equiv ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D))$ — elle est sous forme normale conjonctive.

4.6 Équivalence entre les deux approches

En conclusion, nous donnons quelques résultats qui ont été établis pour la logique propositionnelle, notamment les équivalences entre l'approche déductive et l'approche sémantique.

- **La sureté de la logique propositionnelle :** la logique propositionnelle est sure on dit aussi correcte, dans le sens où, si une formule P et démontrable (approche déductive) alors elle est valide (approche sémantique).
  Si $\vdash P$ alors $\models P$.
- **La complétude de la logique propositionnelle :** la logique propositionnelle est complète, c'est-à-dire si une fbf est valide, alors c'est un théorème.
  Si $\models P$ alors $\vdash P$.
- **La décidabilité de la logique propositionnelle :** la logique propositionnelle et décidable. Il existe un algorithme permettant de décider en un nombre fini de pas, pour toute formule d'entrée, si cette formule

est ou n'est pas un théorème : un tel algorithme est une procédure de décision.

- **La cohérence de la logique propositionnelle :** la logique propositionnelle est cohérente ; Pour toute fbf P, on ne peut pas déduire à la fois P et $\neg P$.

4.7 Exercices

Exercice 1

1. Soit A la proposition suivante : « Tous les hommes sont barbus ». Cochez les formulations correctes de la proposition $\neg A$.

☐ « Tous les hommes ne sont pas barbus.»
☐ « Aucun homme n'est barbu.»
☐ « Il existe un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il existe au moins un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il n'existe qu'un seul homme qui n'est pas barbu.»

2. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. Dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \wedge B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « 1+1 = 2».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « 3 * 8 = 32» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

3. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \vee B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « 1+1 = 2».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « 3 * 8 = 32» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

Exercice 2 Les expressions suivantes sont elles des formules bien formées ?
1. $p \wedge \neg q$, 2. $p \vee \vee r$, 3. $(p \vee (\neg p))$, 4. $(p \vee \neg p)$.

Exercice 3 Donnez les tables de vérités des formules suivantes. puis indiquez les équivalences entre ces formules.
1. $\neg(p \wedge q)$, 2. $\neg p \vee \neg q$, 3. $\neg(p \vee q)$, 4. $\neg p \wedge \neg q$, 5. $p \vee (p \wedge q)$, 6. $p \wedge (p \vee q)$, 7. p

Exercice 4 Soient p et q deux variables propositionnelles signifiant respectivement « il fait froid » et « il pleut ». Écrire une phrase simple correspondant à chacun des énoncés suivants :
1. $\neg p$, 2. $p \wedge q$, 3. $p \vee q$, 4. $q \vee \neg p$, 5. $\neg p \wedge \neg q$, 6. $\neg\neg q$

Exercice 5 Soient p : « Eric lit Match » , q : « Eric lit l'Express » et r : « Eric lit les Echos ».
Donnez une formule logique pour chacune des phrases suivantes :
1. Eric lit Match ou l'Express, mais ne lit pas les Echos ».
2. Eric lit Match et l'Express, ou il ne lit ni Match ni les Echos.
3. Ce n'est pas vrai qu'eric lit Match mais pas les Echos.
4. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit les Echos ou l'Express mais pas Match.

Exercice 6 Énigme.Trois collègues Ahmed, Ali et mostafa déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Ahmed commande un dessert, Ali en commande un aussi,
2. Chaque jour, soit Mostafa, soit Ali, mais pas les deux, commandent un dessert,
3. Ahmed ou Mostafa, ou les deux, commandent chaque jour un dessert,
4. Si Mostafa commande un dessert, Ahmed fait de même.

Questions :

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles.
2. Que peut on déduire sur qui commande un dessert ?

3. Est ce qu'on peut arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 7 Connecteur de Sheffer. On définit le connecteur de Sheffeur noté | (barre de Sheffer) qui est le NAND par p| q $\equiv \neg(p \wedge q)$.

1. Donner la table de vérité de la formule (p | q).
2. Donner la table de vérité de la formule ((p | q)|(p | q)).
3. Exprimer les connecteurs $\neg$, $\vee$ et $\rightarrow$ en utilisant la barre de Sheffer.

Exercice 8 Établir les tables de vérité des formules suivantes et dites si elles sont valides, vérifiables ou invérifiables :

a. $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$
b. $P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$
c. $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
d. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$
e. $((P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow P$

Exercice 9 Trouvez les formes normales disjonctives :
a. $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$
b. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
c. $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$

Exercice 10 Trouvez les formes normales conjonctives :
a. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
b. $(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$
c. $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$

Exercice 11 Démontrez que les formules suivantes sont des théorèmes :
a. $\vdash A \leftrightarrow A$, sachant qu'il ne faut pas prendre $A \rightarrow A$ comme axiome.
b. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$

Exercice 12 Établir les déductions suivantes :
a. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C$
b. $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$

c. $A, B \wedge C, A \wedge C \to E \vdash E$

d. $E, E \to (A \wedge D), D \vee F \to G \vdash G$

Les axiomes de la logique propositionnelle sont :

- **1a.** $(A \to (B \to A))$
- **1b.** $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
- **1c.** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- **1d.** $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- **2.** $A \to (B \to A \wedge B)$
- **3a.** $A \wedge B \to A$
- **3b.** $A \wedge B \to B$
- **4a.** $A \to A \vee B$
- **4b.** $B \to A \vee B$
- **5.** $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
- **6.** $B \to ((B \to C) \to C)$
- **7.** $A \to A$
- **8.** $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
- **9.** $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$