

## امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : رياضيات

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :  
الموضوع الأول

تمرين 1: (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين

لاحقتيهما  $\sqrt{3} - i$  و  $\sqrt{3} + 3i$  على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للنشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $O$  و يحول  $A$  إلى  $B$

ثم عيّن زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي:  $A_0 = A$  ومن أجل كل عدد

طبيعي  $n$ ،  $A_{n+1} = S(A_n)$ . نرسم إلى لاحقة  $A_n$  بالرمز  $z_n$ .

(أ) أنشئ في المستوي المركب النقط  $A_0$  و  $A_1$  و  $A_2$ .

(ب) برهن أن:  $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

(ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  التي تنتمي من أجلها النقطة  $A_n$  إلى المستقيم  $(OA_1)$ .

3. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = A_0A_1$  و  $u_n = A_nA_{n+1}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

(أ) بيّن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تحديد حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

(ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) احسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

تمرين 2: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

لتكن النقط  $A(0, 2, 1)$ ،  $B(-1, 1, -3)$ ،  $C(1, 0, -1)$ .

1. أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة  $S$  التي مركزها  $C$  وتشمل النقطة  $A$ .

2. ليكن المستقيم  $(D)$  المعروف بالتمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد حقيقي.}$$

(أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D)

(ب) احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

(ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) و سطح الكرة S؟

### تمرين 3: (5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  حيث:  $3x - 21y = 78$

(1) أ- بين أن (E) تقبل حلولاً في  $\mathbb{Z}^2$ .

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلاً للمعادلة (E) فإن  $x \equiv 5[7]$  استنتج حلول المعادلة (E).

(2) أ- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي  $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $5^n$  على 7.

ب- عين الثنائيات  $(x, y)$  من  $\mathbb{N}^2$  التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق  $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

### تمرين 4: (6 نقاط)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بالعلاقة:  $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى  $f$  في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(الوحدة على المحورين 2cm).

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  وفسر النتيجة هندسياً.

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

- باستعمال منحنى دالة "الجزر التربيعي"، أنشئ المنحنى (C).

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته:  $y = x$ .

(2) نعرف المتتالية  $(U_n)$  على المجموعة  $\mathbb{N}$  كالآتي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (C)، مثل الحدود  $U_0, U_1, U_2$  على محور الفواصل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  وتقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $2 \leq U_n \leq 5$  و  $U_{n+1} > U_n$ .

ب- استنتج أن  $(U_n)$  متقاربة. احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

### تمرين 1: (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P(z)$  المعروف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

(1) بين أنه إذا كان  $a$  جذرا لكثير الحدود  $P(z)$  فإن  $\frac{1}{a}$  جذر له أيضا.

(2) تحقق أن  $1+i$  جذر لكثير الحدود  $P(z)$ .

(3) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .

(4) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(5) لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  النقاط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس

$(O; \vec{u}, \vec{v})$  والتي لاحقاتها على الترتيب:  $1+i$  و  $-1+i$  و  $-\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$  و  $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

حيث  $m$  عدد حقيقي. عيّن  $m$  حتى يكون الرباعي  $ABCD$  مربعا.

### تمرين 2: (4 نقاط)

$(U_n)$  المتتالية المعرفة بحدّها الأول  $U_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1 - احسب  $U_1$  و  $U_2$  و  $U_3$ .

2 -  $(V_n)$  المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن  $(V_n)$  متتالية ثابتة.

- استنتج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$ .

- احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ .

3 -  $(W_n)$  المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع  $S$  حيث :  $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$

### تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$

المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين:

$$\text{على الترتيب .} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 - بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوي.
- 2 -  $M$  نقطة كيفية من  $(\Delta)$  و  $N$  نقطة كيفية من  $(\Delta')$  .  
 أ) عين إحداثيات النقطتين  $M$  و  $N$  بحيث يكون المستقيم  $(MN)$  عموديا على كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .  
 ب) احسب الطول  $MN$  .
- 3 - عين معادلة للمستوي  $(P)$  الذي يشمل المستقيم  $(\Delta)$  و يوازي المستقيم  $(\Delta')$  .
- 4 - احسب المسافة بين نقطة كيفية من  $(\Delta')$  و المستوي  $(P)$  . ماذا تلاحظ ؟

#### تمرين 4: (7 نقاط)

I)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$  و  $C_f$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

- 1 - ادرس تغيرات الدالة  $f$  .
- 2 - بين أن  $C_f$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  و اكتب معادلة لمماس  $C_f$  عند النقطة  $\omega$  .  
 - اثبت أن  $\omega$  مركز تناظر للمنحنى  $C_f$  .
- 3 - احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  .  
 - استنتج أن  $C_f$  يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .
- 4 - بين أن  $C_f$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  من المجال  $]-2,77; -2,76[$  .  
 - احسب  $f(1)$  و  $f(-1)$  ( تُدور النتائج إلى  $10^{-2}$  ) ثم ارسم  $C_f$  ومستقيمي المقاربين .
- II)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$  .  $C_g$  منحنى الدالة  $g$  .

- 1 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $g(x) = f(-x)$  .  
 - استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول  $C_f$  إلى  $C_g$  .
- 2 - أنشئ في نفس المعلم السابق  $C_g$  ( دون دراسة الدالة  $g$  ) .

# الإجابة النموذجية وسلم التقييم

الموضوع الأول

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
05	0.5	تمارين 1: (5 نقاط) 1. المعادلة المركبة للتشابه $S$ هي : $z' = \sqrt{3}iz$	أعداد مركبة تحويلات نقطية
	0.25×2	عناصر $S$ : المركز $O$ ، النسبة $k = \sqrt{3}$ ، الزاوية $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$	
	0.25×3	2- أ) إنشاء النقط $A_0$ و $A_1$ و $A_2$	
	0.5	ب) إثبات أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$	
	0.5	نستعمل البرهان بالتراجع أو العلاقة $z_{n+1} = \sqrt{3}iz_n$ $n \in \mathbb{N}$	
	0.25×2+0.5	ج) تعيين الأعداد الطبيعية $n$ حتى تكون النقطة $A_n$ من المستقيم $(OA_1)$ نجد $n = 2k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$	
	0.5	3. أ) $(U_n)$ متتالية هندسية حذها الأول $U_0 = 4$ وأساسها $q = \sqrt{3}$	
	0.5	ب) عبارة $(U_n)$ بدلالة $n$ هي $U_n = 4(\sqrt{3})^n$	
05	0.5	ج) حساب المجموع : $S_n = \frac{4}{\sqrt{3}-1} [(\sqrt{3})^{n+1} - 1]$	نسبة فضائية
	0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$	
	0.75	تمارين 2: (4 نقاط) 1. معادلة سطح الكرة $S$ هي $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$	نسبة فضائية
	0.75	2. أ) معادلة المستوي $(P)$ هي $x - 2y - 2z - 3 = 0$	



العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
04	0.75 0.75 0.5+0.5	<p>ب) <math>B(-1,1,-3)</math> هي نقطة تقاطع <math>(D)</math> و <math>(P)</math></p> <p>منه <math>d(C;(D)) = BC = 3</math></p> <p>ج) نستنتج أن <math>(D)</math> مماس لسطح الكرة <math>S</math></p>	
05	0.25 0.75 0.75 0.25×6 0.5+0.25 0.5+0.5	<p><b>تمرين 3: (5 نقاط)</b></p> <p>1. أ) المعادلة <math>(E)</math> تقبل حلا في <math>\mathbb{Z}^2</math> لأن <math>PGCD(3,21)=3</math> والعدد 78 يقبل القسمة على 3</p> <p>ب) إثبات أنه إذا كانت الثنائية <math>(x,y)</math> من <math>\mathbb{Z}^2</math> حلا للمعادلة <math>(E)</math> فإن <math>x \equiv 5[7]</math></p> <p>استنتاج حلول <math>(E)</math>: <math>(x,y) = (5+7k, -3+k)</math> مع <math>k \in \mathbb{Z}</math></p> <p>2. أ) دراسة بواقي قسمة العدد <math>5^n</math> على 7</p> <p><math>5^{6m+3} \equiv 6[7]</math> ، <math>5^{6m+2} \equiv 4[7]</math> ، <math>5^{6m+1} \equiv 5[7]</math> ، <math>5^{6m} \equiv 1[7]</math></p> <p><math>m \in \mathbb{N}</math> ، <math>5^{6m+5} \equiv 3[7]</math> ، <math>5^{6m+4} \equiv 2[7]</math></p> <p>ب) تعيين الثنائيات <math>(x,y)</math> من <math>\mathbb{N}^2</math></p> <p>* نعلم أن حلول <math>(E)</math> هي : <math>(x,y) = (5+7k, -3+k)</math> وحيث أن <math>(x,y) \in \mathbb{N}^2</math> فإن <math>k \geq 3</math></p> <p>بوضع <math>k' = k - 3</math> مع <math>k \geq 3</math> نجد <math>k = k' + 3</math> مع <math>k' \in \mathbb{N}</math> ومنه <math>(x,y) = (26+7k', k')</math></p> <p>نعوض <math>x</math> و <math>y</math> في <math>5^x + 5^y \equiv 3[7]</math> فنجد <math>5^{k'+1} \equiv 3[7]</math></p> <p>* وباستخدام بواقي قسمة <math>5^n</math> على 7 نجد <math>k' = 6m + 4</math> مع <math>m \in \mathbb{N}</math> منه <math>(x,y) = (42m + 54, 6m + 4)</math></p>	الموافقات
	0.25 0.25 2×0.25+0.5 0.25+0.5 0.25×4	<p><b>تمرين 4: (6 نقاط)</b></p> <p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty</math></p> <p>تفسير النتيجة: يوجد نصف مماس يوازي محور الترتيب</p> <p>* دراسة تغيرات الدالة <math>f</math> حيث:</p> <p>* <math>f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}</math> - إشارة <math>f'(x)</math> واتجاه التغير - جدول التغيرات</p> <p>* إنشاء المنحنى <math>(C)</math> والمستقيم <math>(D)</math></p> <p>2. أ- تمثيل الحدود <math>U_0, U_1, U_2</math> على محور الفواصل باستعمال</p> <p>المستقيم <math>(D)</math> والمنحنى <math>(C)</math></p>	الدوال العددية المتتاليات العددية

العلامة		عناصر الإجابة	معايير الموضوع
المجموع	مجزأة		
06	0.5	ب- التخمين: المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	
	0.75	3. أ- البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي $n$ أن : $2 \leq U_n \leq 5$	
	0.75	البرهان بالتراجع أن : $U_{n+1} > U_n$ ( يمكن استعمال العلاقة $U_{n+1} = f(U_n)$ )	
	0.25	ب- استنتاج أن $(U_n)$ متقاربة:	
	0.5	حسب جوابي السؤالين أ و ب من 3 فإن $(U_n)$ محدودة من الأعلى ومتزايدة تماماً وبالتالي فهي متقاربة وهو ما يؤكد صحة المخرنة السابقة * حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 5$	
		انتهى	

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع
المجموع	مجزأة		
		<b>تمرين 1: (5 نقاط)</b>	الأعداد المركبة
0.5	0.5	(1) بيان أنه إذا كان $P(a) = 0$ فإن $P\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ (0 ليس جذرا لـ $P(z)$ ).....	
0.5	0.5	(2) $P(1+i) = 0$ .....	
	0.25	(3) حلول المعادلة : $1+i$ حل إذا مقلوبه $\frac{1-i}{2}$ حل كذلك .....	
2	0.75	الحلان الآخران هما حلا المعادلة : $2z^2 + (3-i)z + 2 = 0$ .....	
1.5	1	..... $\Delta = -8 - 6i = (1-3i)^2$ ، $z = \frac{-1-i}{2}$ أو $z = -1+i$ .....	
	0.25×2 0.5×2+	(4) الشكل الأسى للحلول .....	المتتاليات العددية
0.5	0.5	(5) $ABCD$ مربع من أجل $m = 2$ .....	
		<b>تمرين 2: (4 نقاط)</b>	
0.75	0.75	(1) $U_1 = \frac{7}{3}$ و $U_2 = \frac{23}{9}$ و $U_3 = \frac{73}{27}$ .....	
	1+0.25	(2) - البرهان بالتراجع .....	
2.25	0.5	..... $U_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .....	
	0.5	..... $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$ .....	
1	2×0.5	(3) المجموع $S = \frac{n(n+1)}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3$ .....	



المادة الموضوع	عناصر الإجابة		العلامة	
	مجزأة	المجموع		
الهندسة الفضائية	<b>تمرين 3: (4 نقاط)</b>			
	0.5	0.5	1- $(\Delta)$ و $(\Delta')$ ليسا من نفس المستوي	
	0.25	0.25	2- أ) $(MN) \perp (\Delta)$ يكافئ $3\alpha + \lambda + 6 = 0$	
	0.25	0.25	$(MN) \perp (\Delta')$ يكافئ $8\alpha + 21\lambda + 46 = 0$	
	1.5	2×0.25	$\alpha = -\frac{16}{11}$ و $\lambda = -\frac{18}{11}$	
	2×0.25	2×0.25	$N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right)$ و $M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$	
	0.25	0.25	ب) $MN = \frac{5\sqrt{110}}{11}$	
	1	1	3- معادلة المستوي $(P)$ هي $7x + 6y + 5z - 23 = 0$	
	1.75	0.5	4- المسافة: $d = \frac{ 42 + 7\alpha + 6 - 12\alpha + 25 + 5\alpha - 23 }{\sqrt{49 + 36 + 25}} = \frac{5\sqrt{110}}{11}$	
	0.25	0.25	نلاحظ أن: $d = MN$	
دراسة الدوال العددية (الأسية)	<b>تمرين 4: (7 نقاط)</b>			
	2	0.25×2	1- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
	0.5+0.5	0.5	- المشتق وإشارته	
	1	0.25×2	- جدول التغيرات	
	0.5	0.5	2- $(0,1)$ نقطة إنعطاف و معادلة المماس $y=1$	
	0.25×2	0.25×2	- إثبات أن $\omega$ مركز تناظر للمنحنى	
	1	0.25×2	3- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$	
	0.25×2	0.25×2	- استنتاج معادلي المستقيمين المقاربين	
	2	0.5+0.5	4- للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x_0$ من المجال $[-2.77; -2.76]$	
	0.25×2	0.25×2	$f(1) \approx 1.08$ ; $f(-1) = 0.92$	
	1	0.5	- رسم $C_f$	
	0.25+0.25	0.25+0.25	1-II $g(x) = f(-x)$ و $C_g$ هو نظير $C_f$ بالنسبة لحامل محور الترتيب	
	0.5	0.5	2) إنشاء $C_g$	