الاحتمالات

I. مصطلحات

1) **تجربة عشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات Ω:** هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل:
(الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة أو **مجموعة المخارج)**

3) **الحادثة A:** هي مجموعة جزئية من Ω

1.3) **الحادثة الأولية:** هي حادثة تحتوي على عنصر وحيد

2.3) **الحادثة المستحيلة ϕ:** هي الحادثة الخالية

3.3) **الحادثة العكسية $\overline{A}$:** هي الحادثة التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A

* لتكن B حادثة أخرى من Ω:

4) $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B

5) $A \cup B$: هي العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين A و B بدون تكرار

6) A و B **غير متلائمتين** $\Leftarrow$ $A \cap B = \phi$

7) A و B **حادثتان مستقلتان:** احتمال الحادثة A لا يؤثر في احتمال الحادثة B و العكس.

II. قانون الاحتمال

لتكن $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots \dots \dots, e_n\}$ حيث e_i هو المخرج رقم i مع $i \in \mathbb{N}^*$

1) **قانون الاحتمال P_i:** هو احتمال تحقق المخرج e_i

2) **احتمال الحادثة A:** يرمز له ب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A

3) خواص:

- $0 \leq P_i \leq 1$ و $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ أي $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$
- $P(\Omega) = 1$ و $P(\phi) = 0$

III. تساوي الاحتمال

1) **تجربة متساوية الاحتمال:** هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال

2) **مصطلحات تساوي الاحتمال:**

"زهر نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود متوازنة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس" ...

✳ملاحظة مهمة جدا: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا (و يمكن للمجموعة الشاملة Ω أن تتغير من سؤال لآخر في نفس التمرين)

3) **نتائج:**

في حالة تساوي الاحتمال يكون قانون الاحتمال متساوي التوزيع حيث:

- كل مخرج e_i له احتمال $P_i = \frac{1}{n}$
- $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

IV. خواص الاحتمالات:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت A و B <u>حادثتين غير متلائمتين</u> فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- إذا كانت $A \subset B$ فإن: $P(A) \leq P(B)$
- اذا كانت A و B <u>حادثتان مستقلتان</u> فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

V. تعاريف لقانون الاحتمال:

❶ <u>الأمل E</u>: $E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

❷ <u>التباين V</u>: $V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i$ أو $V = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$

❸ <u>الانحراف المعياري σ</u>: $\sigma = \sqrt{V}$

✱ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا <u>عناصر Ω</u> هي <u>قيم الطبع</u> و <u>قيم P_i</u> هي <u>التواترات</u>

VI. المتغير العشوائي X

1. المتغير العشوائي X هو دالة عددية معرفة على Ω
2. عموما نرمز ب "I" لمجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

VII. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو احتمال تحقق المخرج X_i من I و نرمز له ب P_i أو $P(X = x_i)$

VIII. تعاريف للمتغير العشوائي X:

❶ <u>الأمل الرياضياتي E</u>: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i$

❷ <u>التباين V</u>: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X))^2 P_i$ أو $V(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 P_i - (E(X))^2$

❸ <u>الانحراف المعياري σ</u>: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

مصطلحات

① نسمّي تجربةً عشوائيّةً كلَّ تجربة لايُمكنُ الجزمُ بنتيجتها رغم معرفة مجموعة إمكانياتها الكلية.

② نسمّي مجموعة الإمكانيات المجموعةَ الشّاملة و نرمز لها بـ $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ حيث يُسمىّ كلُّ عنصر e_i منها مخرجاً.

③ كلّ مجموعة جزئية A من Ω تُسمّى حادِثةً و نرمز لعدد عناصرها بـ $Card(A)$.

④ إذا كان $Card(A) = 1$ فإنّ A تُسمّى حادثةً أوليّة.

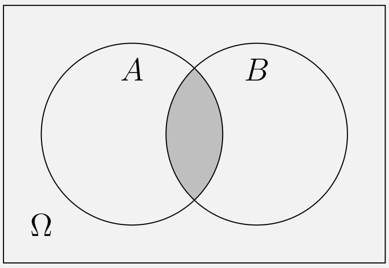
⑤ نُسمّي Ω الحادثة الأكيدة ، ونُسمّي $\emptyset$ (المجموعة الخالية) الحادثةَ المُستحيلة.

⑥ الحادثة " A و B " هي المجموعة التي تضمُّ العناصرَ المُشتركة بين A و B ، و نرمزُ لها بـ $A \cap B$.

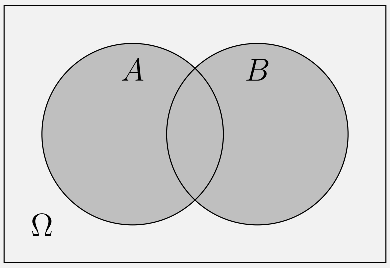
⑦ إذا كان $A \cap B = \emptyset$ نقول عن A و B أنّهما غير متلائمتين.

⑧ الحادثة " A أو B " هي المجموعة التي تضمُّ كلّا من عناصر A و B ، و نرمزُ لها بـ $A \cup B$.

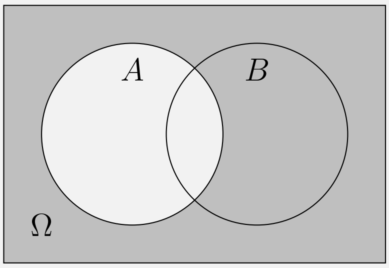
⑨ نرمزُ للحادثة العكسية لـ A بـ $\overline{A}$ وهي المجموعة التي تضمُّ جميع عناصر Ω ماعدا عناصر A .



$A \cap B$



$A \cup B$



$\overline{A} = \Omega - A$

❶ نعرّف قانون احتمال تجربة عشوائية ، عندما نُرفق بكلّ مخرج e_i الحقيقي الموجب p_i ويُسمّى احتمال تحقق المخرج e_i :

e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_n
p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

مع $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

❷ احتمال الحادثة A هو العدد الحقيقي الموجب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمال حوادثها الأوليّة ، فمثلا ، إذا كانت: $A = \{e_3, e_5, e_{11}\}$ فإنّ: $P(A) = p_3 + p_5 + p_{11}$.

❸ نقول عن تجربة أنّها متساوية الاحتمال إذا كان : $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n$.

❹ يُشارُ إلى تساوي الاحتمال بعبارات مثل : زهرة نرد أصلية أو غير مزيّفة ، قطعة نقود متوازنة ، كريّات لايُفرق بينها عند اللمس ... إلخ.

❺ إذا كانت التجربة متساوية الاحتمال فإنّ:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد الطرق الملائمة لـ} A}{\text{عدد الطرق الكلية}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

خواص الاحتمالات

لتكن A و B حادثتين كيفيّتين : ❶ $0 \leq P(A) \leq 1$ ❷ $P(\Omega) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$

❸ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ❹ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

❺ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ❻ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

المتغيّر العشوائي

① نسمّي متغيّرا عشوائيا كلّ دالة معرّفة من Ω نحو $\mathbb{R}$.

② نرمز لمجموعة القيم التي يأخذها متغيّر عشوائي X بالمجموعة : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

③ نعرّف قانون احتمال متغير عشوائي ، عندما نُرفق بكلّ عدد حقيقي x_i الحقيقي الموجب $p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

مع $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

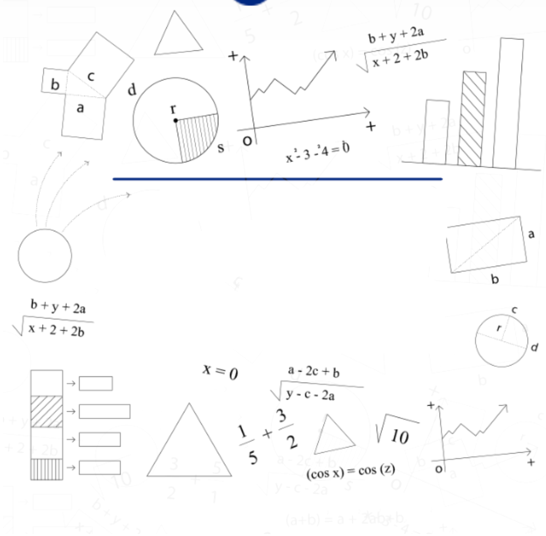
④

الأمل الرياضياتي $E(X)$	التباين $V(X)$	الانحراف المعياري $\sigma(X)$
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = E(X^2) - (E(X))^2$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

⑤ في ميدان الألعاب : ❶ الربح المحتمل = المبلغ المتحصل عليه - المبلغ المدفوع

❷

إذا كان	فإنّ اللعبة
$E(X) > 0$	في صالح اللاعب
$E(X) < 0$	ليست في صالح اللاعب
$E(X) = 0$	عادلة



سنة **ثانية** ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

ملخص في

الإحتمالات

مصطلحات وتعاريف

- **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة
- **مجموعة الإمكانيات Ω:** هي مجموعة الإمكانيات في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل (الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة، مجموعة المخارج)
- **الحادثة:** هي جزء من المجموعة Ω
  - **الحادثة الأولية (البسيطة):** تحتوي على عنصر وحيد.
  - **الحادثة الأكيدة:** هي الحادثة التي تحتوي على جميع عناصر Ω
  - **الحادثة المستحيلة $\emptyset$:** هي المجموعة الخالية
  - **الحادثة العكسية $\overline{A}$:** هي الحادثة التي تحوي جميع عناصر Ω ما عدا عناصر المجموعة A

قانون الاحتمال

- **احتمال حادثة:** $P(A)$ هو احتمال الحصول الحادثة A حيث:

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} \\ 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$$

حيث:

$Card(A)$ هو عدد عناصر المجموعة A ، $Card(\Omega)$ هو عدد عناصر المجموعة Ω

- $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ أي: $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$
- احتمال الحادثة الأكيدة هو 1 أي $P(\Omega) = 1$
- احتمال الحادثة المستحيلة هو 0 أي $P(\emptyset) = 0$

خواص الاحتمال

- **لتكن A و B حادثتان من Ω:**
- $A \cup B$: هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B
- $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B (بدون تكرار)
- A و B **غير متلائمتين** معناه $A \cap B = \emptyset$
- A و B **حادثتان مستقلتان** معناه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كان $A \cap \overline{A} = \emptyset$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$ فإنّ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإنّ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كان $A \subset B$ فإنّ $P(A) \leq P(B)$

تساوي الاحتمال

- **تجربة متساوية الإحتمال:** هي تجربة عشوائية حيث **كل الحوادث لها نفس الاحتمال**
- **مصطلحات تساوي الإحتمال:** "زهرة نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود غير مزيفة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس"
- **ملاحظة مهمة:** لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار **تساوي الاحتمال** بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا.

المتغير العشوائي X

- **المتغير العشوائي X:** هو دالة معرفة على I حيث $I = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ والتي ترفق بكل قيمة x_i العدد الحقيقي الموجب $P(X = x_i)$، ونعرفه بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	$\dots$	P_n

- **الأمل الرياضياتي: $E(X)$**

$$\boxed{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i}$$

- **التباين: $V(X)$**

$$\boxed{V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 P_i - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i - E(X)\right)^2}$$

- **الانحراف المعياري: $\sigma(X)$**

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(x)}}$$