6. Exercices de TD

Exercice 1

Déterminez l'alphabet de chacun des langages suivants :

- Les nombres binaires ;
- Les nombres entiers éventuellement munis d'un signe ;
- Les nombres réels en C ;
- Les identifiants en C ;
- Le langage C ;

Exercice 2

Trouvez les langages correspondant aux définitions suivantes :

- Tous les mots sur $\{a, b, c\}$ de longueur 2 ne contenant pas un c ;
- Tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant au maximum deux a ou bien un b ;
- Tous les mots sur $\{a, b\}$ contenant plus de a que de b ;
- Le langage L défini comme suit : $\varepsilon \in L$, si $u \in L$ alors $auab \in L$

Exercice 3

- Calculez $\varepsilon \sqcup\!\sqcup a$, $abca \sqcup\!\sqcup d$, $abca \sqcup\!\sqcup a$, $a^n \sqcup\!\sqcup b$.
- Calculez $\{a^n | n \geqslant 0\} \sqcup\!\sqcup a$, $\{a^n b^n | n \geqslant 0\} \sqcup\!\sqcup a$.

Exercice 4

On note par $Pref(L)$ l'ensemble suivant : $\{u | \exists w \in L : u$ est préfixe de $w\}$. Calculez $Pref(L)$ dans chacun des cas suivants : $L = \{ab, abc, \varepsilon\}$, $L = \{a^m b^n | m, n \geqslant 0\}$, $L = \{a^n b^n | n \geqslant 0\}$.
On note par $Suf(L)$ l'ensemble suivant : $\{u | \exists w \in L : u$ est suffixe de $w\}$. Calculez $Suf(L)$ pour les langages précédents.

Exercice 5

Définissez la fermeture de Kleene (L^*) pour chacun des langages suivants :

- $L = \{\varepsilon\}$;
- $L = \{a\}$;
- $L = \{a, ab\}$;
- $L = \{aa, ab, ba, bb\}$;

Exercice 6

Soit X un alphabet, trouvez les mots $w \in X^*$ qui vérifient :

— $w^2 = w^3$;

— $\exists v \in X^* : w^3 = v^2$;

Exercice 7

Donnez, sans démonstration, les langages générés par les grammaires suivantes. Dites, à chaque fois, de quel type s'agit-il ? (pour trouver la forme des mots, on commence d'abord par générer quelques mots à partir de la grammaire) :

— $G = (\{a\}, \{S\}, S, \{S \to aS|\varepsilon\})$;

— $G = (\{a\}, \{S\}, S, \{S \to aSa|\varepsilon\})$;

— $G = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \to aSa|bSb|\varepsilon\})$;

Exercice 8

Précisez le type de chacune des grammaires suivantes ainsi que les types des langages qui en dérivent :

— $G = (\{a, b\}, \{S, T\}, S, \{S \to aabS|aT, T \to bS|\varepsilon\})$;

— $G = (\{a, b, c\}, \{S, T, U\}, S, \{S \to bSTa|aTb, T \to abS|cU, U \to S|\varepsilon\})$;

— $G = (\{x, +, *\}, \{S\}, S, \{S \to S + S|S * S|x\})$;

— $G = (\{0, 1, 2\}, \{S, T, C, Z, U\}, S, \{S \to TZ, T \to 0U1, T \to 01, U \to 0U1C|01C, C1 \to 1C, CZ \to Z2, 1Z \to 12\})$

— $G = (\{0, 1, 2\}, \{S, C, Z, T\}, S, \{S \to TZ, T \to 0T1C|\varepsilon, C1 \to 1C, CZ \to Z2, 1Z \to 1\})$;

— $G = (\{a, b, c\}, \{S, T\}, S, \{S \to Ta|Sa, T \to Tb|Sb|\varepsilon\})$

Exercice 9

Donnez les grammaires qui génèrent les langages suivants :

— Les nombres binaires ;

— Les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent le facteur a

Exercice 10

— Montrez par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers s'écrivant de la forme $1.0^{2n}.1$ est multiple de 11 (attention il s'agit de la forme des entiers).

— Montrez par induction que tout entier palindrome de longueur paire est un multiple de 11.

Exercice 11

Soient G et G' deux grammaires qui génèrent respectivement les langages L et L'. Donnez les construction qui permettent de trouver les grammaires de :

— $L.L'$;

— $L + L'$;

— L^* ;

Appliquez vos constructions proposées pour déduire la grammaire du langage $(\{a^m b^n | m, n \geqslant 0\} + \{c^m | m \geqslant 0\})^*$.