

Logique mathématique

Série de TD N°04 : La logique des prédicats

Exercice 1 Modélisez les phrases suivantes en logique des prédicats, précisez le vocabulaire utilisé.

- Tous les étudiants aiment la logique.
- Tous les étudiants n'aiment pas une matière.
- Les étudiants qui ont une bonne note en logique sont les meilleurs.

Exercice 2 Soient les phrases suivantes :

- a- Tous les hommes sont mortels.
- b- Socrate est un mortel.
- c- Socrate est un homme.

- Identifier les prédicats.
- Exprimer dans la logique des prédicats a, b, c.
- peut on déduire l'énoncé b à partir de a et c ? justifier.

Exercice 3 Soient les énoncés suivants :

1. Les personnes qui ont la grippe A doivent prendre du Tamiflu.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe A.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38 ont de la fièvre.
4. Mohamed tousse et a une température supérieure à 38.
5. Mohamed doit prendre du Tamiflu.

Modélisez en logique du premier ordre les énoncés ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :

- grippe (x) : x a la grippe A.
- prendre (x,y) : x doit prendre y.
- fièvre (x) : x a de la fièvre.
- tousse (x) : x tousse.
- temp (x, t) : x a la température t.
- sup (x, y) : x est supérieur à y.

utilisez aussi les constantes suivantes : 38, Mohamed, Tamiflu.

Exercice 4 Parmi les formules ci-dessous, quelles sont les formules congrues ? Justifier la réponse (en appliquant la méthode des arbres syntaxiques).

- $F_1 : \forall x \exists y (\forall y P(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, y))$.
- $F_2 : \forall v \exists z (\forall u P(z, u) \rightarrow \exists u Q(u, v))$.
- $F_3 : \forall z \exists x (\forall x P(z, x) \rightarrow \exists z Q(z, x))$.

Exercice 5 Dites si les formules suivantes sont vraies ou fausses, sachant que l'ensemble du domaine $D = \{c1, c2, c3\}$, les sous ensembles du domaines sont :

- $R = \emptyset$,
- $P = \{c1, c3\}$,
- $Q = \{c1, c2, c3\}$.

et les interprétations des constantes sont :

$I(a) = c1$.

Les formules sont :

1. $\forall x \neg Q(x)$, **2.** $\forall x P(x)$, **3.** $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, **4.** $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$, **5.** $\exists x (Q(x) \wedge \neg P(x))$,
6. $\exists x (\neg Q(x) \rightarrow P(x))$, **7.** $\forall x Q(x) \rightarrow \neg (\exists x R(x))$, **8.** $P(a) \rightarrow R(a)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 6 Établir la table de vérité des formules suivantes : (sachant que le domaine d'interprétation est $D = \{1, 2\}$)

a- $\forall x (P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$.

b- $\forall x (P(x, y) \wedge \exists x P(x))$.

Exercice 7

a- Établir les déductions suivantes :

- $\forall x \forall y A(x, y) \vdash A(x, y)$.
- $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$.
- $P(a), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(a)$.
- $\forall x S(x) \wedge \forall x R(x) \vdash \exists x (S(x) \wedge R(x))$.

b- Démontrer que : $\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.