الأستاذ قرايرية سمير

ثانوية سعدي الصديق تبسة

التحضير الجيد لبكالوريا 2021

كل ما يحتاجه تلميذ البكالوريا في الدوال العددية

1) تذكير : إشارة ثنائي الحد $(ax+b)$ حيث $a \neq 0$

$ax+b=0$ أي : $ax=-b$ أي : $x=\dfrac{-b}{a}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
الإشارة	مخالف لإشارة a	موافق لإشارة a

2) حلول معادلة من الدرجة الثانية و تحليلها إلى جداء عاملين

$ax^2+bx+c=0$ حيث $(a \neq 0)$ ، نحسب المميز $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في $\mathbb{R}$	لا تقبل حل	حل مضاعف $x_0=\dfrac{-b}{2a}$	حلين هما : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
تحليل ax^2+bx+c	لا تقبل تحليل	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

إشارة ax^2+bx+c حيث $(a \neq 0)$

إذا كان	فإن الإشارة كمايلي
$\Delta<0$	(الجدول 1)
$\Delta=0$	(الجدول 2)
$\Delta>0$	$x_1<x_2$ (الجدول 3)

الجدول 1 ($\Delta<0$):

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a

الجدول 2 ($\Delta=0$):

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	موافق لإشارة a

الجدول 3 ($\Delta>0$) ، $x_1<x_2$:

x	$-\infty$ $\qquad$ x_1	x_2	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	مخالف لإشارة a	موافق لإشارة a

3) النهايات

نهاية مجموع دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	$-\infty$

نهاية جداء دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	ح.ع.ت

نهاية حاصل قسمة دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	ح.ع.ت	ح.ع.ت	ح.ع.ت

تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات " عدم التعيين "

و تتمثل في : $-\infty+\infty$ ، $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $\dfrac{0}{0}$ ، $0\times\infty$

ملاحظة :

1) نهاية كثير الحدود لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية الحد ذو الأعلى درجة .

2) نهاية كسر ناطق لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية نسبة أعلى درجة في البسط على أعلى درجة في المقام .

4) المستقيمات المقاربة

النهاية	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=a$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$	المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$

المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

ملاحظة : إذا كانت الدّالة f تكتب من الشكل : $f(x) = ax + b + g(x)$ و كانت $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار ∞ .

5) الإشتقاق

الدالة المشتقة	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة
$x \to 0$	$\mathbb{R}$	$x \to a \ / a \in \mathbb{R}$
$x \to a$	$\mathbb{R}$	$x \to ax + b$
$x \to n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$x \to x^n \ / \ n \in \mathbb{N}$
$x \to -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x}$
$x \to -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x^n} \ / \ (n \in \mathbb{N})$
$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ = \left]0;+\infty\right[$	$x \to \sqrt{x}$
$x \to \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \to \sin x$
$x \to -\sin x$	$\mathbb{R}$	$x \to \cos x$
$U' + V'$		$U + V$
$\lambda.U'$		$\lambda.U \ / \ (\lambda \in \mathbb{R})$
$U'V + UV'$		$U.V$
$-\dfrac{U'}{U^2}$		$\dfrac{1}{U}$
$\dfrac{U'V - UV'}{V^2}$		$\dfrac{U}{V}$
$x \to au'(ax+b)$		$x \to u(ax+b)$ حيث $a \neq 0$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad ، \quad \sqrt{u}\,' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad ، \quad (u \circ v)'(x) = v'\left[u(x)\right] \times u'(x)$$

6) الوضع النسبي بين المنحنى و المستقيم المقارب المائل

لدراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$ و نميز الحالات التالية :

الوضع النسبي	إشارة الفرق
C_f تحت (Δ)	$f(x)-(ax+b)<0$
C_f فوق (Δ)	$f(x)-(ax+b)>0$
C_f يقطع (Δ)	$f(x)-(ax+b)=0$

7) تقاطع المنحنى C_f مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x)=0$

8) تقاطع المنحنى C_f مع محور التراتيب يعني حساب $f(0)$

9) مركز التناظر

$w(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى C_f يعني :

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ بشرط $x\in D_f$ و $(2\alpha-x)\in D_f$

أو بالقانون $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$ بشرط $x\in D_f$ ، $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$

✓ المسألة العكسية : يطلب منا مثلا إثبات أن : $f(-6-x)+f(x)=4$

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة : $\begin{cases}2\alpha=-6\\2\beta=4\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\end{cases}$ و منه نقول أن النقطة $A(-3;2)$ مركز تناظر للمنحنى C_f .

10) محور تناظر : المستقيم $(D):x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى C_f يعني :

$f(2\alpha-x)=f(x)$ بشرط $x\in D_f$ و $(2\alpha-x)\in D_f$

أو بالقانون : $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$ بشرط $x\in D_f$ ، $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$

✓ المسألة العكسية يطلب منا مثلا إثبات أن : $f(-8-x)=f(x)$

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة : أي $2\alpha=-8$ و منه $\alpha=-4$

و منه نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=-4$ محور تناظر للمنحنى C_f

11) الدّالة الزوجية و الدّالة الفردية

مجال مجموعة التعريف متناظر بالنسبة للصفر أي $x\in D_f$ فإن $(-x)\in D_f$

الدّالة الزوجية تحقق $f(-x)=f(x)$ و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

الدّالة الفردية تحقق $f(-x)=-f(x)$ و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ .

12) نقطة الإنعطاف

نقول أن C_f يقبل النقطة $A(x_0;f(x_0))$ كنقطة إنعطاف إذا تحقق أحد الشروط التالية :

أ) المشتق الثاني $f''(x)$ ينعدم عند x_0 و يغير إشارته عندها .

ب) المشتق الأول $f'(x)$ ينعدم عند x_0 و لا يغير إشارته عندها .

ج) المماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ يخترق المنحنى C_f .

13) مبرهنة القيم المتوسطة (الحالة الخاصة)

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $f(\alpha)=0$ حيث : $\alpha\in]a;b[$

مبرهنة القيم المتوسطة (الحالة العامة)

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و كان k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيد α يحقق $f(\alpha)=k$ حيث :

$\alpha\in]a;b[$

14) العدد المشتق و تفسيره الهندسي

	النهاية	قابلية الاشتقاق	التفسير الهندسي
1	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\neq 0$	f قابلة للإشتقاق عند x_0	C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه l
2	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f قابلة للإشتقاق عند x_0	C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور الفواصل (أفقي)
3	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$	f غير قابلة للإشتقاق عند x_0	C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته $x=x_0$
4	$\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ و $l_1\neq l_2$	f قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0. لكن غير قابلة للإشتقاق عند x_0	C_f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة زاوية.
5	$\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ بحيث النهايتين معا $+\infty$ أو $-\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0 و غير قابلة للإشتقاق عند x_0	C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته $x=x_0$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى C_f

6	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث إحدى النهايتين $-\infty$ و الأخرى $+\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0 و غير قابلة للإشتقاق عند	C_f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيين لحامل محور التراتيب (عموديان) معادلتيهما $x = x_0$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة رجوع للمنحنى C_f

ملاحظة: صيغة أخرى لقانون قابلية الإشتقاق : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

15) المماس (السؤال و طريقة الإجابة عليه)

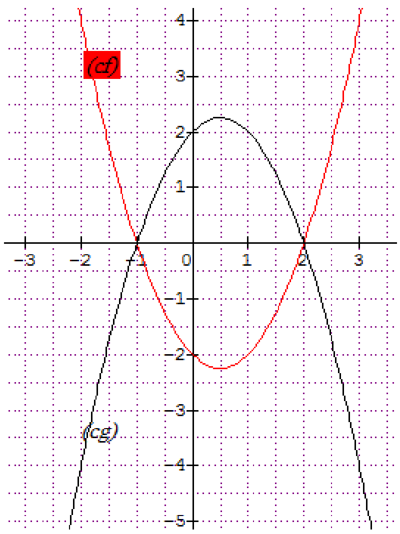
	السؤال	كيفية البحث عن الفاصلة x بكتابة معادلة المماس
1	أكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب القانون : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ نعوض x بقيمتها المعطاة
2	أكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الترتيبة y_0	نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
3	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f ميله أو (معامل توجيهه) يساوي a	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
4	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
5	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0) = \dfrac{-1}{a}$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
6	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يشمل النقطة $M(\alpha;\beta)$	نحل المعادلة : $\beta = f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ عند إيجاد x_0 نطبقالقانون كما في (1) .

إستنتاج منحنى من منحنى بياني اخر

الحالة الاولى $g(x)=-f(x)$

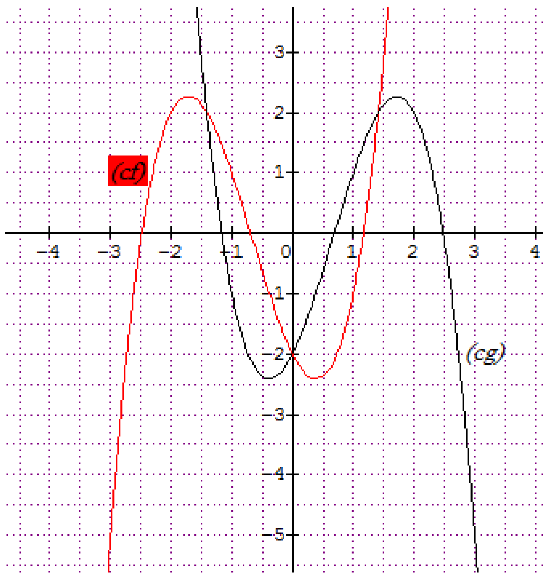
C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

مثال:



الحالة الثانية $g(x)=f(-x)$

C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



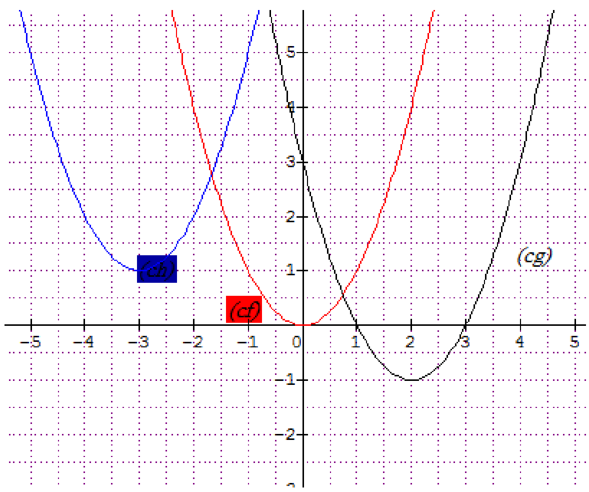
الحالة الثالثة $g(x)=f(x+a)+b$

C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$

مثال: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=(x-2)^2-1$ ،

$h(x)=(x+3)^2+1$

C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

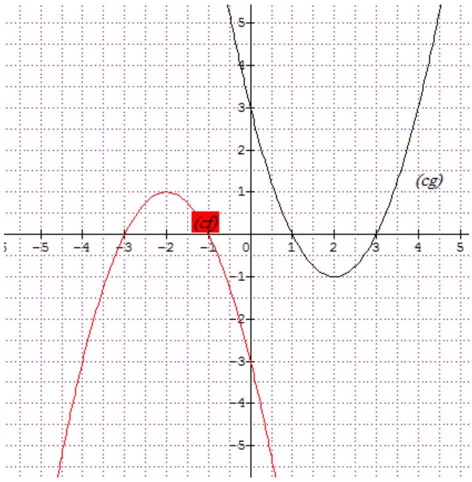


C_h هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

الحالة الرابعة $g(x) = -f(-x)$

C_g هو نظير C_f بالنسبة للمبدأ

مثال:

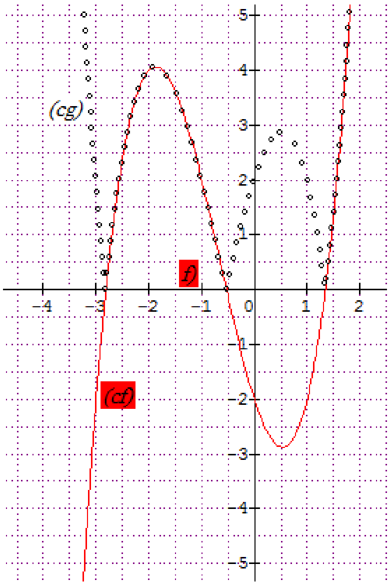


الحالة الخامسة $g(x) = |f(x)|$

✓ C_g ينطبق على C_f لما $f(x) \geq 0$ أي" C_f يقع فوق محور الفواصل "

✓ C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x) \leq 0$ أي" C_f يقع تحت محور الفواصل "

مثال:



الحالة السادسة $g(x) = f\left(|x|\right)$

عادة ما يطلب إثبات أن الدّالة g دالة زوجية

لما $x \geq 0$ أي في المجال الموجب يكون : C_g منطبق على C_f

لما $x \leq 0$ أي في المجال السالب يكون : C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب