<u>TD 1:</u>
Introduction à l'optimisation, Formalisation de problèmes sous forme d'un programme linéaire (PL).
Formes matricielle, canonique et standard d'un PL.

<u>Rappel :</u>

A) Un problème d'optimisation peut être de type:

- Linéaire (Programme linéaire ou PL): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont continues;
- Non Linéaire (Programme non linéaire ou PNL): la fonction objectif ou les contraintes sont non linéaires, et les variables de décision sont continues;
- Linéaire en nombres entiers (Programme Linéaire en Nombres Entiers PLNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont entières.
- Non Linéaire en nombres entiers (Programme Non Linéaire en Nombres Entiers PNLNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont entières.
- Linéaire mixte en nombres entiers (PLMNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Les variables de décision sont scalaires; certaines d'entre elles sont des entiers tandis que d'autres sont des variables continues.
- Non Linéaire mixte en nombres entiers (PNLMNE): est un PNL impliquant des variables de décision entières et continues.
- Stochastique (appelée aussi optimisation sous incertitudes ou PS) la fonction objectif ou les contraintes dépendent de variables aléatoires, de sorte que l'optimum est trouvé dans un certain sens "attendu" ou probabiliste. Elle implique souvent les types d'optimisation ci-dessus comme sous-catégories.
- Commande Optimale (CO): détermination d'une commande d'un *système dynamique* sur une période de temps qui minimise ou (maximise) un critère de performance (i.e., une fonction objectif), éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système.

B) Le degré de liberté d'un problème d'optimisation est le nombre de variables de décision qui peuvent être changées afin d'obtenir la valeur optimale de la fonction objectif, i.e., c'est le nombre de variables de décisions moins le nombre de contraintes d'optimisation avec égalité.

<u>Exercice 1:</u>

Pour chaque problème d'optimisation ci-dessous, indiquez son degré de liberté et son type (PL, PNL, PLNE, PNLNE, PLMNE et PNLMEN):

1.

$max\ f(x, y) = 3x + 4y$

sujet à :

$x + 4y - z \leq 10$

$y + z \geq 6$

$x - y \leq 3$

2.

$min\ f(x, y) = 3.x^2 + 4.sin(y.z)$

sujet à:

$x + 4y \leq 10$

$y + z = 6 + \pi$

$x - y \leq 3$

$z \in \{0, \pi/2, \pi\}$

3.

$min\ 4.35.x^2.y_1 + 1.74.x.z.y_2 - 2.5.k.y_3$

sujet à:

$x - z + k \leq 10$

$y_1 + y_2 \leq 1$

$y_2 \leq y_3$

$x \leq 8$

$k \leq 7$

$x, k \geq 0$

$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$

4.

$$\min \quad \sigma^2_{R_B} = \int_0^1 (R_B - \overline{R_B})^2 dF$$

$$\text{s.t.} \quad \overline{\mathrm{R_B}} = \int_\theta^1 R_B(\theta, x, u) dF$$

$$C_A = \frac{C_{A_i}}{1 + k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT} \cdot \tau}$$

$$C_B = \frac{C_{B_i} + k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT} \cdot \tau \cdot C_A}{1 + k_B^0 \cdot e^{-E_B/RT} \cdot \tau}$$

$$-r_A = k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT}$$

$$-r_B = k_B^0 \cdot e^{-E_B/RT} - k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT}$$

$$Q = F\rho C_p \cdot (T - T_i) + V \cdot (r_A H_{RA} + r_B H_{RB})$$

$$\tau = V/F$$

$$R_B = r_b \cdot V$$

où θ désigne les variables de commande correspondant aux degrés de liberté, x sont les variables d'état égales au nombre de contraintes d'égalité, et u représente les incertitudes associées.

<u>Solution 1:</u>

Problème	Degré de liberté	Type
1	3	PL
2	2	PNL
3	6	PNLMNE
4	$\|\theta\|$: nombre variables de commande	CO stochastique

<u>Exercice 2:</u>

Indiquez si le problème ci-dessous est un PNL ou un LP. Selon vous, quelles sont les méthodes les plus efficaces pour résoudre ce problème ?

$$\begin{aligned} \max\ & f(x,y,z,m) = x - 3y + 1.25z - 2\cdot\log(m) \\ \text{s.t.}\ & m\cdot\exp(y) \geq 10 \\ & \log(m) - x + 4z \geq 6 \\ & x - 3y \leq 9 \end{aligned}$$

Solution 2:

1. PNL
2. Méthodes:
   - Optimisation numérique

Exercice3:

Une compagnie d'alimentation dispose de 2000 Kg de café africain, 3000 Kg de café brésilien et 500 KG de café colombien. En utilisant ces trois produits la compagnie procède à des mélanges pour obtenir deux types de café à commercialiser. Le plan de production est représenté par le tableau suivant :

	Café type1	Café type2
Café africain	0.6	0.4
Café brésilien	0.3	0.4
Café colombien	0.1	0.2

Le 1er type est vendu à 140 DA et le 2^{ième} à 170 DA le Kg. Donner le modèle de programmation linéaire correspondant à ce problème de manière à ce que la compagnie réalise un maximal de bénéfice.

Solution 3:

- Q1 représente la quantité à produire du café de type 1
- Q2 représente la quantité à produire pour du café de type 2

Le PL est :

Max Z=140×Q1 +170×Q2
Sujet à:
$0.6\times Q1 + 0.4\times Q2 \leq 2000$
$0.3\times Q1 + 0.4\times Q2 \leq 3000$
$0.1\times Q1 + 0.2\times Q2 \leq 500$
$Q1,\ Q2 \geq 0$

Exercice 4:

Une association culturelle organise une exposition, pendant cette exposition des tasses de café au lait et des tasses de chocolat au lait sont vendues pour apporter une aide aux orphelins. Un sponsor a permis de procurer 40 litres de lait, 2 kg de sucre et assez de café et de chocolat pour faire au plus 150 tasses de chaque boisson. On prévoit de servir 2 morceaux de sucre par tasse en moyenne; chaque paquet de sucre contient 120 morceaux et le poids du paquet indiqué sur la boite est de 500 g ; il faut 1/4 de litre de lait pour une tasse de chocolat et 1/12 de litre de lait pour une tasse de café. Le trésorier du club propose de vendre 50 DA chaque tasse de chocolat au lait et 40 DA chaque tasse de café au lait.

-Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Solution 4:

- X représente le nombre de tasses de café au lait à préparer
- Y représente le nombre de tasses de chocolat au lait à préparer

Le PL est :

Max Z=40X + 50Y
Sujet à:
$2X+ 2Y \leq 480$
$\frac{1}{12}X + \frac{1}{4}Y \leq 40$
$X \leq 150$
$Y \leq 150$
$X, Y \geq 0$

Exercice 5:

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose deux types d'ordinateurs : le T1 et le T2. Chacun d'eux comporte un processeur - le même - mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus précisément, le T1 comporte 2 barrettes alors que le T2 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. L'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour T1 est de 3 minutes alors que pour le T2 elle n'est que d'une minute ; on ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir. Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 400 DA sur le T1et de 800DA sur le T2.

Le problème est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Solution 5:

- *X1* représente le nombre de d'ordinateurs de type 1 à fabriquer
- *X2* représente le nombre d'ordinateurs de type 2 à fabriquer

Le PL est :

Max Z=400×X1 +800×X2
Sujet à:
$X1 + X2 \leq 10\,000$
$2 \times X1 + 6 \times X2 \leq 48\,000$
$3 \times X1 + X2 \leq 24\,000$
$X1, X2 \geq 0$

Exercice 6:

Une usine produit sur deux chaînes des appareils électroniques. En raison des différences importantes dans les procédés de fabrication, les temps nécessaires aux machines outil fabrication (FAB) et finition réglage (FIR) pour traiter un appareil diffèrent sensiblement sur chaque chaine.

L'élaboration d'un appareil sur la chaîne 1 nécessite 3 heures de FAB et 1 heure de FIR pour un prix de vente unitaire de 25 DA tandis que la 2ième chaine produit avec 1 heure de FAB et 2 heures de FIR et pour un prix de vente unitaire de 20 DA.

La machine FAB est disponible 60 heures par mois et la machine FIR 70 heures. La demande étant de 100 appareils par mois au moins. L'usine veut déterminer le plan de production de gain maximal.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

- Mettre le PL obtenu sous forme matricielle.

Solution 6:

1)

- *X1* représente le nombre d'appareils à produire sur la première chaîne
- *X2* représente le nombre d'appareils à produire sur la deuxième chaîne

Le PL est :

Max $Z=25\times X1+20\times X2$

Sujet à:

$3\times X1 + X2 \leq 60$

$X1 + 2\times X2 \leq 70$

$X1 + X2 \geq 100$

$X1, X2 \geq 0$

2) Mise sous forme matricielle

La contrainte $X1 + X2 \geq 100 \Leftrightarrow -X1 - X2 \leq -100$

Max $Z=25\times X_1+20\times X_2$

Sujet à:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$X1, X2 \geq 0$

Exercice 7 (5 points)

Une entreprise a obtenu un marché pour construire et fournir 2 0 000 postes de radio dans un délai de 4 semaines. Le client est prêt à payer 20 € (resp. 18, 16 et 14) pour un poste fourni à la fin de la première (resp. seconde, troisième et quatrième) semaine. Puisque l'entreprise ne dispose que de 40 ouvriers permanents et que chaque ouvrier ne peut monter que 50 postes par semaine, il est clair qu'elle ne peut satisfaire son carnet de commande. Elle est donc amenée à recruter des ouvriers temporaires et les instruire.

Un ouvrier expérimenté est, soit un ouvrier permanent, soit un ouvrier temporaire ayant subi une semaine d'instruction. N'importe quel ouvrier expérimenté peut soit passer à la chaîne de montage (commencer à monter des postes), soit instruire trois ouvriers fraîchement recrutés. Après une semaine d'instruction, chaque ouvrier temporaire recruté peut soit passer à la chaîne de montage, soit instruire trois autres ouvriers recrutés.

Actuellement, l'entreprise n'a aucun autre contrat, de sorte que certains ouvriers peuvent éventuellement être inactifs une fois la commande satisfaite. Tous les ouvriers, qu'ils soient temporaires ou permanents, qu'ils soient actifs ou non, doivent être payés jusqu'à la fin de la quatrième semaine. Le salaire hebdomadaire d'un ouvrier expérimenté, actif ou non, est de 200 €, et celui d'un stagiaire en instruction est de 100 €. En dehors des salaires, le coût de production d'un poste est de 5 €. Voici la politique adoptée par la compagnie :

✓ ***Semaine 1*** : 10 ouvriers sont affectés au montage, 30 à l'instruction de 90 stagiaires recrutés. L'entreprise dépense 8 000 € en salaires pour les ouvriers 9 000 € pour les stagiaires. Elle produit 500 postes et obtient un bénéfice net de 7 500 €. La perte nette de l'entreprise durant cette semaine est de 9 500 €.

✓ ***Semaine 2*** : 120 ouvriers sont affectés au montage, 10 à l'instruction de 30 stagiaires qu'on vient de recruter. L'entreprise dépense 26 000 € pour les ouvriers et 3 000 € pour les stagiaires. Elle produit 6 000 postes pour 78 000 €. Le profit net de l'entreprise durant cette semaine est donc de 49 000 €.

✓ ***Semaine 3*** : 160 ouvriers affectés au montage. L'entreprise dépense 32 000 € pour les ouvriers et 9 000 € pour les stagiaires. Elle produit 8 000 postes pour un profit de 88 000 €. Soit un profit net de 56 000 €.

✓ ***Semaine 4*** : 110 ouvriers sont affectés au montage et 5 0 ouvriers sont inactifs. L'entreprise dépense 32 000 € en salaires. Elle produit 5 500 postes pour un profit de 49 500 €. Le profit net durant cette semaine est donc de 17 500 €. Au total, le profit net de l'entreprise durant ces quatre semaines est 1 13 000€. Écrire un PL qui exprime l'objectif de maximiser le profit.

- Écrire un PL qui exprime l'objectif de maximiser le profit.

Solution 7:

1) Les variables de décision et leurs coûts

- $x1$: nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 1
  $cx1$: 20 €, donc le profit est 20-5=15€
- $x2$: nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 2
  $cx2$: 18 €, €, donc le profit est 18-5=13€
- $x2$: nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 3
  $cx3$: 16 €, €, donc le profit est 16-5=11€
- $x4$: nombre de postes radio construits et fournis durant la semaine 4
  $cx4$: 14 €, le profit est 14-5=9€
- $x5$: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 1
  $cx5$=200 €
- $x6$: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 2
  $cx6$=200 €
- $x7$: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 3
  $cx7$=200 €
- $x8$: le nombre d'ouvriers expérimentés affectés au montage durant la semaine 4
  $cx8$=200 €
- $x9$: le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 1
  $cx9$=200 €
- $x10$: le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 2
  $cx10$=200 €
- $x11$: le nombre d'ouvriers expérimentés instructeurs durant la semaine 3
  $cx11$=200 €
- $x12$: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 1
  $cx12$=100 €
- $x13$: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 2
  $cx13$=100 €
- $x14$: le nombre de stagiaires instruits durant la semaine 3
  $cx14$=100 €
- $x15$: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 2
  $cx15$=200 €
- $x16$: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 3
  $cx16$=200 €
- $x17$: le nombre d'ouvriers expérimentés inactifs durant la semaine 4
  $cx17$=200 €

2) Les contraintes d'optimisation

- $50x5 - x1 \geq 0$
- $50x6 - x2 \geq 0$
- $50x7 - x3 \geq 0$
- $50x8 - x4 \geq 03x9 - x12 \geq 0$
- $3x10 - x13 \geq 0$
- $3x11 - x14 \geq 0$
- $x5 + x9 \leq 40$
- $40 + x12 - x6 - x10 - x15 = 0$
- $40 + x12 + x13 - x7 - x14 - x16 = 0$
- $40 + x12 + x13 + x14 - x8 - x17 = 0$

3) PL

$\boldsymbol{Max\ Z} = 15x1 + 13x2 + 11x3 + 9x4 - 200x5 - 200x6 - 200x7 - 200x8 - 200x9 - 200x10 - 200x11 - 200x15 - 200x16 - 200x17 - 100x12 - 100x13 - 100x14$

***Sujet* à**:

$x1 + x2 + x3 + x4 <= 20000$
$50x5 - x1 \geq 0$
$50x6 - x2 \geq 0$
$50x7 - x3 \geq 0$
$50x8 - x4 \geq 0$
$3x9 - x12 \geq 0$
$3x10 - x13 \geq 0$
$3x11 - x14 \geq 0$
$x5 + x9 \leq 40$
$40 + x12 - x6 - x10 - x15 = 0$
$40 + x12 + x13 - x7 - x14 - x16 = 0$
$40 + x12 + x13 + x14 - x8 - x17 = 0$
$x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17 \geq 0$

Exercice 8:

Considérons le PL P:

$$P \begin{cases} \max z = c^t x \\ Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que soit $x = 0$ est une solution optimale de P, soit la fonction objectif z n'a pas de majorant.

Solution 8:

Pour montrer que soit $x = 0$ est une solution optimale de P, soit la fonction objectif z n'a pas de majorant, nous allons examiner deux cas :

1. $x = 0$ est une solution triviale optimale de P :
   - Si $x = 0$, alors clairement $Ax = 0$ car tout produit entre une matrice A et un vecteur nul donne un vecteur nul.

- Puisque x est un vecteur nul, la fonction objectif $\max z = c^t x$ est également nulle.
- Dans ce cas, la solution $x = 0$ est optimale car la fonction objectif est majorée (elle vaut 0) tout en satisfaisant les contraintes $Ax = 0$ et $x \geq 0$.

2. La fonction objectif z n'a pas de majorant :
   - Les solutions possibles d'un système linéaire homogène de la forme $Ax = 0$, où A est une matrice et x est un vecteur inconnu, sont appelées solutions triviales (i.e., $x = 0$) et solutions non triviales. Les solutions non triviales sont toutes les autres solutions qui ne sont pas la solution triviale ($x = 0$).
   - Ces solutions non triviales existent si et seulement si la matrice A est singulière (i.e., non inversible), c'est-à-dire que son déterminant est égale à zéro (i.e., $|A| = 0$).
   - Lorsque la matrice A est singulière, cela signifie que le système linéaire a une infinité de solutions non triviales. Cela implique que la région de solutions réalisables de P est non bornée, donc la fonction objectif $max\, z = c^t x$ n'est pas majorée.

     Exemple

     Soit le PL P:

     $$P\begin{cases}\max z = 6x1 + 7x2\\ 18x1 - 9x2 = 0\\ -4x1 + 2x2 = 0\\ x1, x2 \geq 0\end{cases}$$

     $$A = \begin{bmatrix}18 & -9\\ -4 & 2\end{bmatrix}, |A| = 18 \times 2 - (-9) \times (-4) = 0$$
   - Le système $Ax = 0$, admet une infinité de solutions *($x2 = 2x1$)* par exemple, *$x=(x1, x2)=(0, 0)$, $x'=(1, 2)$, $x''=(2, 4)$,…,* avec *$z(x'') > z(x') > z(x)$,* donc *z n'est pas majorée.*

Exercice 9

Soit le PL:

Max *$z = x1 + x2$*

$Sx1 + Tx2 \leq 1$

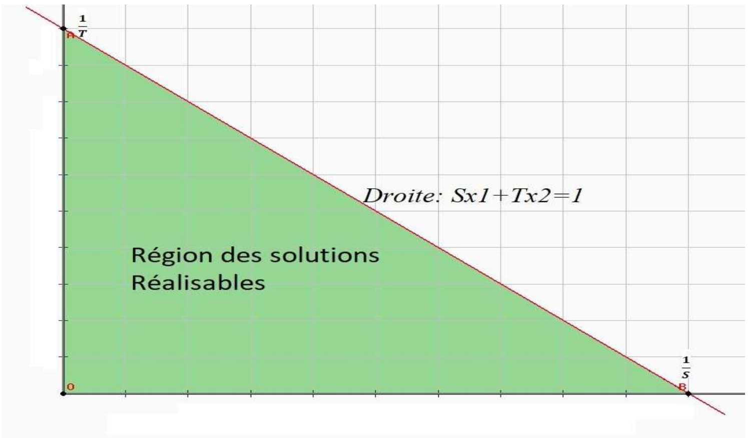
$x1, x2 \geq 0$

Donner des conditions sur les paramètres S, T $\in \mathbb{R}$ telles que:
- Le PL n'a aucune solution réalisable;
- Le PL a une solution optimale;
- Le PL a une fonction objectif non majorée.

Solution exercice 9 :

- La figure ci-dessous montre les régions réalisable et non réalisable du PL.
- PL n'a aucune solution réalisable $\Rightarrow$ la région réalisable définie par le triangle OAB est vide, i.e., T et S vérifient l'inégalité, *$Sx1 + Tx2 > 1$*, par exemple, $S = \frac{K_1}{x1}$, $T = \frac{K_2}{x2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}, x1 \neq 0,\ \ x2 \neq 0, k_1 + \ k_2 > 1$.

- PL a une solution optimale ⇒ la région réalisable définie par le triangle OAB est bornée, i.e., $\frac{1}{S} > 0$ et $\frac{1}{T} > 0$, donc $S > 0$ et $T > 0$.
- PL a une fonction objectif non majorée ⇒ la région réalisable définie par le triangle OAB est non bornée, i.e., $S \leq 0$ ou $T \leq 0$.



Exercice 10 :

Soient deux problèmes d'optimisation, appelés respectivement P et Q

$$max_{x\in D} f(x) \text{ et } max_{x\in E} f(x)$$

où , $E \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $D \subset E$ et si x^* est une solution optimale de Q avec $x^* \in D$ alors x^* est une solution optimale de P.

Solution exercice 10 :

- x^* est une solution optimale de Q avec $x^* \in D \subset E$ ⇔ $\forall x \in E\ f(x) \leq f(x*)$
- Supposons que x* n'est pas une solution optimale de P ⇔ $\exists y \in D\ f(x*) < f(y)$, donc x* n'est une solution optimale de Q, car $D \subset E$, ce qui contredit la proposition que x^* est solution optimale de Q.

Exercice 11:

Reformuler sous forme canonique les programmes linéaires suivants:

1- Min Z= 2x1 – x2

Sc
$$\begin{cases} 2x1 - 3x2 = -2 \\ |4x1 - x2| \leq 3 \\ x1, x2 \geq 0 \end{cases}$$

2- Max Z= x1 – 2x2 -x4

Sc
$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 + 2x4 = 3 \\ 2x1 - x2 + 5x3 = -6 \\ 3x1 + 2x2 - 3x4 \geq 2 \\ x1 \in R, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 11:

1)

- L'équation *2x1 - 3x2 = -2* est transformée en une inégalité de signe ≥ en ajoutant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent*, *e1*) à son membre gauche, i.e., *2x1 - 3x2 + e1 ≥ -2, e1≥ 0;*
- En utilisant l'une des propriétés suivantes de la fonction valeur absolue
  1. $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b \Leftrightarrow -x \leq b$ et $x \leq b$;
  2. $|x| = s - t,\ s \geq 0$ et $t \geq 0; s + t \leq b.$

  La deuxième contrainte $|4x1 - x2| \leq 3$ est transformée en une inégalité de signe ≥ comme suit:

  1. $|4x1 - x2| \leq 3 \ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x1 - x2 \geq -3 \\ \text{et} \\ -4x1 + x2 \geq -3 \end{cases};$
  2. Posons $4x1 - x2 = s - t, s \geq 0, t \geq 0$ alors $|4x1 - x2| \leq 3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4x1 - x2 - s + t + e2 \geq 0,\ e2 \geq 0 \\ \text{et} \\ -s - t \geq -3 \end{cases}.$
- Le PL sous forme canonique résultant prend l'une des formes suivantes:
  -

Min Z=2x1 - x2
Sujet à:
$2x1 - 3x2 + e1 \geq -2$
$4x1 - x2 \geq -3$
$-4x1 + x2 \geq -3$
$x1, x2, e1 \geq 0$

-

Min Z=2x1 − x2
Sujet à :
$2x1 - 3x2 + e1 \geq -2$
$-t - s \geq -3$
$4x1 - x2 - s + t + e2 \geq 0$
$x1, x2, e1, e2, s, t \geq 0$

2)

- La variable *x1* $\in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $x1 = x1^{+} - x1^{-}, x1^{+} \geq 0$ et $x1^{-} \geq 0$;
- L'équation *x1 +x2 + x3 +2x4 = 3* est transformée en une inégalité de signe ≤ en retranchant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent e1*) à son membre gauche, i.e., $x1^{+} - x1^{-}$ *+ x2 + x3 +2x4 − e1 ≤ 3, e1≥ 0;*
- L'équation 2*x1 -x2 + 5x3* = -6*,* est transformée en une inégalité de signe ≤ en retranchant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent*, *e2*) à son membre gauche, i.e., $2x1^{+} - 2x1^{-} - x2 + 5x3 - e2 \leq -6, e2 \geq 0$*;*
- L'équation 3*x1 +2x2* − *3x4* ≥ 2 est transformée en une inégalité de signe ≤ en la multipliant par -1 gauche, i.e., $-3x1^{+} + 3x1^{-} - 2x2 + 4x3 \leq -2$;

- Le PL sous forme canonique résultant aura la forme suivante:

$\boldsymbol{Max\ Z = x1^{+} - x1^{-} - 2x2 - x4}$
Sujet à:
$x1^{+} - x1^{-} + x2 + x3 + 2x4 - e1 \leq 3$
$2x1^{+} - 2x1^{-} - x2 + 5x3 - e2 \leq -6$
$-3x1^{+} + 3x1^{-} - 2x2 + 4x3 \leq -2$
$x1^{+}, x1^{-}, x2, x3, x4, e1, e2 \geq 0$

Exercice 12:

Donner la forme standard du programme linéaire suivant :

Max Z= 2x1 – 3x2

$$\text{Sc} \begin{cases} 2x1 + x2 \leq K \quad (K \in \mathbb{R}) \\ |4x1 + 3x2| \leq 3 \\ x1 + 3x2 \geq 4 \\ x1 \geq 0\ ,\ x2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solution 12:

- La variable $K \in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $K = K^{+} - K^{-}, K^{+} \geq 0$ et $K^{-} \geq 0$;
- La variable $x2 \in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $x2 = x2^{+} - x2^{-}, x2^{+} \geq 0$ et $x2^{-} \geq 0$;
- La première contrainte est transformée en égalité en ajoutant une *variable d'écart* positive à son membre gauche: $2x1 + x2^{+} - x2^{-} - K^{+} + K^{-} + e1 = 0$;
- La deuxième contrainte $|4x1 - x2| \leq 3$ est transformée en une égalité comme suit:
$$|4x1 + 3x2| \leq 3 \iff \begin{cases} 4x1 + 3x2^{+} - 3x2^{-} + e2 = 3, \\ \qquad \text{et} \qquad\qquad e2 \geq 0; \\ -4x1 - 3x2^{+} + 3x2^{-} + e2 = 3, \end{cases}$$
- La troisième contrainte est transformée en égalité en retranchant une *variable d'excédent* positive à son membre gauche $x1 + 3x2^{+} - 3x2^{-} - e3 = 4$;
- Le PL sous forme canonique résultant prend l'une des formes suivantes:

Min Z=2x1 - $\boldsymbol{3x2^{+} + 3x2^{-}}$
Sujet à:
$2x1 + x2^{+} - x2^{-} - K^{+} + K^{-} + e1 = 0$
$4x1 + 3x2^{+} - 3x2^{-} + e2 = 3$
$-4x1 - 3x2^{+} + 3x2^{-} + e2 = 3$
$x1 + 3x2^{+} - 3x2^{-} - e3 = 4$
$x1, x2^{+}, x2^{-}, K^{+}, K^{-}, e1, e2, e3 \geq 0$