

Algèbre 1

Logique Mathématique

SEMESTER 1

2021/2022

Date: Octobre 2021

Time:
(reading time)

Exercice 1. Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse

- (a) $2 + 3 = 5$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}, n + 2 = 4$
- (c) $\exists n \in \mathbb{N} \quad n + 2 = 3$
- (d) Cet exercice est difficile
- (e) $x \in \mathbb{N}$

Exercice 2. Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif. Donner la table de vérité

Exercice 3. Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?

- (a) $(P \implies Q) \wedge (\bar{P} \implies Q)$
- (b) $\overline{P \wedge (\bar{Q} \wedge R)} \Leftrightarrow Q$ (devoir)
- (c) $((P \vee Q) \implies R) \Leftrightarrow (P \implies R) \wedge (Q \implies R)$ (devoir)

Exercice 4. Soient les quatres propositions suivantes

- a- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- b- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- c- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$ (devoir)

Ces propositions sont elles vraies ou fausses? Donner leur négation

Exercice 5.

1. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que

(a) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

(b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel

2. Montrer par récurrence (devoir)

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n.$

3. En utilisant le raisonnement par la contraposée démontrer que si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair. (devoir)

Corrigé de la série 1
Logique mathématique

Exercice 1. Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse

- (a) $2 + 3 = 5$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n + 2 = 4$
- (c) $\exists n \in \mathbb{N} \quad n + 2 = 3$
- (d) Cet exercice est difficile
- (e) $x \in \mathbb{N}$

Solution

- a. Cette expression est une proposition vraie
- b. Cette expression est une proposition fausse, car pour $n = 1 \in \mathbb{N}$, on a $n + 2 = 3 \neq 4$.
- c. Cette expression est une proposition vraie, car il existe un élément $n = 1 \in \mathbb{N}$, tel que $n + 2 = 3$.
- d. Cette expression n'est pas une proposition, car on peut pas lui attribué une valeur de vérité.
- e. Cette expression n'est pas une proposition, car nous ne savons la nature de l'élément x , donc on peut pas lui attribué une valeur de vérité.

Exercice 2. Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique **OU** informatique mais pas les deux simultanément. C'est le **OU 'exclusif** (\vee). Donner la table de vérité.

Solution Voici la table de vérité du " ou exclusif " est différent de la table de la disjonction " \vee " car dans cas particulier, On remarque que le " ou exclusif " est vrai que si les deux assertions P et Q sont différentes. Donc, on peut choisir les deux en même temps.

P	Q	$P \vee Q$
1	0	1
0	1	1
1	1	0
0	0	0

Exercice 3. Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?

- (a) $(P \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)$
- (b) $\overline{P \wedge (\overline{Q} \wedge R)} \Leftrightarrow Q$
- (c) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Solution

a. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$

P	Q	\bar{P}	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0

b. $\overline{P \wedge (\bar{Q} \wedge R)} \Leftrightarrow Q$ (Devoir pour les étudiants)

c. $\underbrace{((P \vee Q) \Rightarrow R)}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)}_{(2)}$

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	(1)	(2)	$(1) \Leftrightarrow (2)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Exercice 4. Soient les quatres propositions suivantes

a- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

b- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

c- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$

Ces propositions sont elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

Solution

a. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

L'assertion (a) est fausse : Est-ce- qu'on peut trouver un réel x pour que pour tout réel y leur somme soit toujours positive ? c'est pas toujours vraie, car il suffit de prendre par exemple $y = -(x + 1)$. On obtiendra $x + y = x - x - 1 = -1 < 0$.

La négation de l'assertion (a) est: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; \quad x + y \leq 0$, qui est une assertion vraie

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0.$

L'assertion (b) est vraie : en effet, pour tout réel x il existe un y qui dépend de x . Prenons par exemple $y = -x + 1$ implique que $x + y = x - x + 1 = 1 > 0$.

La négation de l'assertion (b) est: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$, qui est une assertion fausse

c. L'assertion (c) est fausse. Il suffit de trouver un x et un y qui ne vérifie pas (c). Par exemple $x < 0$ et $y < 0$.

La négation de cette assertion est: $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$ qui est une assertion vraie.

d. Devoir pour les étudiants

Exercice 5. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que

(a) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

(b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel

2. Monter par récurrence

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$.

3. En utilisant le raisonnement par la contraposée démontrer que si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Solution. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que

(a) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel : alors où $a, b > 0$ (sont des nombres entiers positifs). Maintenant, Il est possible de simplifier la fraction jusqu'à ce que a, b soient premiers entre eux (c'est-à-dire la fraction ne puisse plus être simplifiée). tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow 2b^2 = a^2,$$

alors, on déduit que a^2 est pair, d'où a est pair aussi (voir l'exemple du cours), c'est à dire : \exists un entier positif k tel que

$$a^2 = 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2.$$

Alors, b^2 est pair, d'où b est pair. Par conséquent, il est possible de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit l'hypothèse que a, b sont premiers entre eux.

1. (b) Devoir.

2. Monter par récurrence

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1- Vérifions si cette proposition est vraie pour $n = 1$ et 2.

Pour $n = 1$, on a : $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$, vraie

Pour $n = 2$, on a : $\frac{2(2+1)(4+1)}{6} = 1 + 2^2 = 5$, vraie.

2- Supposons que cette est vraie pour n , c'est à dire ($P(n)$ est vraie). Et montrons que la proposition ($P(n+1)$ est vraie).

3- D'après 2, on a

$$P(n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

alors,

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{P(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right] = (n+1) \left[\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = P(n+1). \end{aligned}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$. Devoir.

3. En utilisant le raisonnement par la contraposé démontrons que si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair. C'est à dire : $\underbrace{(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8}_{P} \Rightarrow$

Maintenant, on doit utiliser la contraposé

$\underbrace{n \text{ est impair: alors } \exists \text{ un entier } k \text{ tel que } n = 2k + 1}_{\bar{Q}} \Rightarrow \underbrace{(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8}_{P} \text{ : alors, } \exists$

Supposons que , n est impair, alors \exists un entier k tel que $n = 2k + 1$, d'où $n^2 = (2k + 1)^2$.

Alors,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k. \end{aligned}$$

Maintenant, nous avons deux cas: k est pair ou k est impair.

1- Si on suppose que k est pair, alors, il existe un k' telque $k = 2k'$, d'où

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4k^2 + 4k \\ &= 4(2k')^2 + 4(2k') \\ &= 8k'^2 + 8k' = 8(k'^2 + k') = 8p. \end{aligned}$$

2- Si k est impair, alors, il existe un k'' tel que $k = 2k'' + 1$, on a:

$$\begin{aligned}n^2 - 1 &= 4(2k'' + 1)^2 + 4(2k'' + 1) \\&= 4(2k'')^2 + 4(2k'') + 4 + 4(2k'') + 4 \\&= 8k''^2 + 8k'' + 8k'' + 8 \\&= 8(k''^2 + 2k'' + 1) = 8p'.\end{aligned}$$

D'où $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.