الاشتقاقية

I]. تعاريف

1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0)=l$ و نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=l$

2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l}$ أو $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l}$ حيث $(h=x-x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty}$

✱ **العدد المشتق:** يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز له $\boxed{f'(x_0)}$ أي $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)}$

✱ **نسبة التزايد:** يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و x_0+h و نرمز له ب $g(h)$

✱قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

3) الدالة المشتقة لدالة f

- f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f
- مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها f' حيث $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

II]. التفسير الهندسي للعدد المشتق

1) معادلة المماس عند نقطة:

مماس المنحني C_f عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a,n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a+h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشرى (h قيمة قريبة من 0) $\boxed{f(a+h)=f'(a)h+f(a)}$

✱ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a+h$ مباشرة في معادلة المماس

III]. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n\times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

VI]. عمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u+v)$	$u'+v'$
$(u\times v)$	$u'.v+v'.u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu'\times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov]\times v'$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

تطبيقات الاشتقاقية

❶ تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

❷ معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

❸ نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I و لا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

❹ حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a, b] \Longleftarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a, b] \Longleftarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

❺ الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $k \geq f(x) \Longleftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى **(Majorant)**
- $k \leq f(x) \Longleftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل **(Minorant)**

✻ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Longleftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو **Majorant**

f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Longleftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو **Minorant**

❻ نظرية القيم المتوسطة

f مستمرة و رتيبة على المجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ $\Longleftarrow$ $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[a, b]$

❼ المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - C_f فوق $C_g \Longleftarrow f(x) > g(x)$
  - C_f تحت $C_g \Longleftarrow f(x) < g(x)$
  - C_f تقطع $C_g \Longleftarrow f(x) = g(x)$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a	x_0	b
إشارة $f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي بين C_f و C_g	C_f تحت C_g	C_f يقطع C_g	C_f فوق C_g