Logique mathématique
Série de TD N°02 : Les systèmes formels

Exercice 1
1. Définissez un système formel de telle sorte qu'on puisse produire les théorèmes kst, kstst, ksststst,........ à partir d'un axiome k.

2. Définissez un système formel de telle sorte que l'on puisse produire les théorèmes ca, caba, cababa, cabababa, cababababa,..., etc.L'axiome est c.

3. Définissez un systeme formel de telle sorte que l'on puisse produire les théorèmes b, ba, baa, baaa, baaaa,...,etc. L'axiome est b.

Exercice 2 Soit le système MIU qui comprend :
- L'alphabet S = $\{M, I, U\}$
- L'axiome A = $\{MI\}$
- les règles :
  - R_1 : si une chaine se termine par un I on peut ajouter un U à la fin,
  - R_2 : si on a une chaine Mx on peut former Mxx (où x est une chaine quelconque),
  - R_3 : on peut remplacer III par un U dans une chaine,
  - R_4 : on peut supprimer toute paire UU.

1. Prouver que MUIUI est un théorème.
2. UM est-il un théorème ?
3. MU est-il un théorème ?

Exercice 3 Soit le système formel p-q
S= $\{p, /, q\}$ A= $\{pq\}$ R =
- a- $x \to /x/$
- b- $xpy \to xp/y/$ (x et y sont des mots du système)

Peut-on dériver les chaines suivante : $//p/q///$;$/p//q/$;$//////p///q/////////$?

Exercice 4 Soit un système formel composé :
d'un alphabet $\{A, B, C, D\}$,
Des axiomes D, DD,
des règles de production :
- a- ajouter C à la fin d'une chaîne quelconque.
- b- ajouter un A au début et à la fin d'une chaîne quelconque.
- c- remplacer un C par un B dans une chaîne.

Parmi les chaînes suivantes, lesquelles sont des théorèmes ? Donner les preuves
DC, DCCC, DCCA, AAADAAA, AAADAAAA, AADCCCABBA.

Exercice 5 Soit le système formel S (Σ, A, W, R) tel que :

- Σ : c'est l'ensemble de l'alphabet tel que $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- A : c'est l'ensemble des axiomes qui ont la forme suivantes A $= \{a^{2i+1}bc^{2i-1} | i \geq 1\}$,
- W : représente l'ensemble des fbfs générées à partir des axiomes et des fbfs déjà générées,
- R : c'est l'ensemble des règles tel que R $= \{r_1 : (a^k bc^m, a^p bc^n) \longrightarrow a^{k+n} bc^{m+p}\}$

Q1 : Est ce que les formules suivantes sont des théorèmes $a^4bc^4, a^5bc^5, a^6bc^6$?

Q2 : Donner les différentes formes possibles de théorèmes.