المتتاليات العددية

I]. تعاريف و رموز

المتتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n العدد $u(n)$ حيث:

نرمز للمتتالية بالرمز u_n بدلا من $u(n)$ حيث u_n هي صورة n بالمتتالية u

يسمى u_n أيضا الحد العام للمتتالية u او الحد الذي دليله n

إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq p}$

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$

u_1 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$

u_p هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$

يسمى n دليل المتتالية u أو دليل الحد u_n

p هو دليل الحد الأول للمتتالية u

$(n-p+1)$ هي رتبة الحد u_n

حساب الحد الذي رتبته m أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

II]. طرق توليد متتالية عددية

- المتتاليات العددية
  - متتالية معرفة بحدها العام
    - $u_n = f(n)$
    - متتالية حسابية: $u_n = u_p + (n-p)r$
    - متتالية هندسية: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
  - متتالية معرفة بعلاقة تراجعية: $u_{n+1} = f(u_n)$

III]. اتجاه تغير متتالية عددية

عموما:

إذا كانت	فإن
$u_{n+1} > u_n$	u متزايدة
$u_{n+1} < u_n$	u متناقصة
$u_{n+1} = u_n$	u ثابتة

طريقة ❶: ندرس إشارة الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كانت	فإن
$u_{n+1} - u_n > 0$	u متزايدة
$u_{n+1} - u_n < 0$	u متناقصة
$u_{n+1} - u_n = 0$	u ثابتة

طريقة ❷: ندرس تغيرات f إذا كانت المتتالية من الشكل: $\boxed{u_n = f(n)}$

طريقة ❸: نحسب النسبة $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ و نقارنها مع 1

إذا كانت	فإن
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	u متزايدة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	u متناقصة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	u ثابتة

IV]. المتتالية الحسابية

① تعريف

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

✪ إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن:

$$u_n = u_0 + nr$$

✓ إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

✱**ملاحظة:**

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

$$S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ❶: نحسب الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = \boxed{r}$ حيث r

عدد ثابت خالي من n فإن u_n حسابية

طريقة ❷: نكتب u_n على الشكل

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

⑤ الوسط الحسابي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية

$\boxed{a + b = 2c}$ أي $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$

V]. المتتالية الهندسية

① تعريف

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

q هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو v_0 فإن:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

✓ إذا كان الحد الأول هو v_1 فإن:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

✱**ملاحظة:**

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$$

$$S_n = \text{الحد الأول}\left(\frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}\right)$$

$$S_n = v_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1 - q^{n}}{1-q}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ❶: نحسب النسبة $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$

إذا كان: $\boxed{q} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ حيث q

عدد ثابت خالي من n فإن v_n هندسية

طريقة ❷: نكتب v_n على الشكل

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

⑤ الوسط الهندسي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$\boxed{a \times b = c^2}$ أي $u_{n+1} \times u_{n-1} = u_n{}^2$

VI]. المتتالية الثابتة

① **تعريف:** هي المتتالية التي جميع حدودها متساوية أي $u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n$

② **البرهان أن المتتالية ثابتة**

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

- يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$
- أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

VIII]. تقارب وتباعد متتالية

u_n متقاربة $\Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

u_n متباعدة $\Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

✳ **مبرهنة:** إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)}$

IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

❶ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases}$$

❷ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases}$$

❸ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases}$$

X]. نهاية متتالية هندسية

	إذا كان		النهاية	التقارب
❶	$q > 1$	و $v_0 > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	متباعدة
❷		و $v_0 < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	
❸	$-1 < q < 1$		$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	متقاربة
❹	$q \leq -1$		غير موجودة	متباعدة

XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة وغير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم n الفرق $u_{n+1} - u_n$

③ نستنتج أن u_n غير رتيبة