Chapitre 4

Méthodes du Simplexe

4.1. Introduction

Nous avons présenté une première méthode de résolution d'un programme linéaire, soit la méthode graphique. Cette méthode permet d'optimiser un modèle contenant deux variables de décision, Mais la plupart des problèmes présentent un nombre important de variables de décision, Il nous faut donc une méthode d'optimisation d'un modèle de programmation linéaire qui peut s'appliquer efficacement peu importe le nombre de variables dans le modèle. Pour ce faire, on utilise l'Algorithme du simplexe.

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig à partir de 1947 (l'algorithme permet de minimiser ou maximiser une fonction objective, qui est elle aussi linéaire).

4.2. Principe (algorithme du simplexe)

4.2.1 Définitions

Soit le modèle de programme linéaire suivant (forme standard) qui comporte n variables (variables de décision et variables d'écart) et ***m*** contraintes fonctionnelles :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max (Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{S.C:} \\
\left\{
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+ & \ldots & +a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
\right. \\
x_j \geq 0,\ j=1, \ldots, n,\ b_i \geq 0,\ i=1, \ldots, m
\end{array}
$$

Ce modèle s'écrit, sous forme matricielle :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max(Min) } Z = CX \\
\text{S.C :} \\
\quad AX = b \\
\quad X \geq 0
\end{array}
$$

Avec :

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_j & \ldots & a_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad C=(c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n) \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

a. Une **Solution de Base** au système d'équations ***AX=b*** s'obtient en donnant zéro à ***(n-m)*** variables et en résolvant le système pour les ***m*** variables restantes. Les ***(n-m)*** variables qui sont annulées sont dites variables hors base alors que les ***m*** variables restantes sont appelées variables de base. Donc, un programme linéaire admet au plus : $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Solutions de base.

Où : $n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$

b. Une **Solution de Base Réalisable** : est une solution de base qui satisfait les contraintes de non-négativité.

c. Deux Solutions de base réalisables dites **Adjacentes** si ces deux solutions ont «***m-1***» variables de base communes.

4.2.2 Exemple

Soit le programme linéaire suivant :

Programme linéaire	**Forme Standard**	**Variables**
$Max\ Z= 2x_1+ 3x_2$ $S.C:$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$Max\ Z=2x_1+ 3x_2 +0x_3 + 0x_4$ $S.C:$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$	$m=2$ contraintes fonctionnelles $n=4$ variables (décision(x_1,x_2) et d'écart(x_3,x_4)). Le nombre de variables de base $Vb=m= 2$. Le nombre de variables hors base $Vhb=n-m=2$. Le nombre de solutions de base $=C_{n=4}^{m=2} = 6$

Le nombre de solutions de base (SB) est égal à 6 qui sont :

- SB1 : Vb $=\{x_1,x_2\}$, Vhb$=\{x_3,x_4\}$ tel que $x_3=x_4=0$ donc $x_1=2$, $x_2=2$
  La solution de base SB1 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(2,2,0,0)^t$
- SB2 : Vb $=\{x_1,x_3\}$, Vhb$=\{x_2,x_4\}$ tel que $x_2=x_4=0$ donc $x_1=-4$, $x_3=-10$
  La solution de base SB2 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(-4,0,-10,0)^t$
- SB3 : Vb $=\{x_1,x_4\}$, Vhb$=\{x_2,x_3\}$ tel que $x_2=x_3=0$ donc $x_1=2/3$, $x_4=14/3$
  La solution de base SB3 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(2/3,2,0,14/3)^t$
- SB4 : Vb $=\{x_2,x_3\}$, Vhb$=\{x_1,x_4\}$ tel que $x_1=x_4=0$ donc $x_2=4/3$, $x_3=14/3$
  La solution de base SB4 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(0,4/3,14/3,0)^t$
- SB5 : Vb $=\{x_2,x_4\}$, Vhb$=\{x_1,x_3\}$ tel que $x_1=x_3=0$ donc $x_2=-1$, $x_4=-7$
  La solution de base SB5 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(0,-1,0,-7)^t$
- SB6 : Vb $=\{x_3,x_4\}$, Vhb$=\{x_1,x_2\}$ tel que $x_1=x_2=0$ donc $x_3=2$, $x_4=-4$
  La solution de base SB6 est : $(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(0,0,2,-4)^t$

Les solutions de base SB3, SB1 et SB4 sont réalisables.
Les solutions de base SB2, SB5 et SB6 ne sont pas réalisables.

4.2.3 Principe (algorithme du simplexe)

La recherche d'une solution optimale à l'aide de l'algorithme du simplexe peut se résumer comme suit :

A. Déterminer une première solution de base réalisable ; cette solution « initiale » sert de départ au cheminement vers la solution optimale (si elle existe).

B. Si la solution n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable adjacente qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (maximisation ou minimisation).

C. On répète cette procédure itérative de l'étape précédente **B** jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objective. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

Cet algorithme opère sur un problème mis sous forme standard : toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives ; cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelles variables appelées variables d'écart.

4.3.Méthode Matricielle (algébrique)

Soit le programme linéaire suivant écrit sous forme matricielle :

$$\begin{array}{l} Max(Min)\ Z = CX \\ S.C: \\ \quad AX = b \\ \quad X \geq 0 \end{array}$$

Où $\boldsymbol{C}$ est un vecteur de dimension $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{A}$ est une matrice de dimension $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de dimension $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{X}$ est un vecteur de dimension $\boldsymbol{n}$ (variables de décision et d'écart).

On peut construire à partir de la matrice $\boldsymbol{A}$, deux sous matrices, $\boldsymbol{A=(N,B)}$ où $\boldsymbol{B}$ est une matrice de base carrée $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{N}$ est une matrice hors base de dimension $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{(n-m)}$, de même, le vecteur $\boldsymbol{X}$ est décomposé comme suit : $X = \begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix}$ Où $X_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$ et $X_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$

Et le vecteur $\boldsymbol{C}$ est décomposé comme suit :

$c = [c_N, c_B]$ Où $C_B = [c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_m}]$ et $C_N = [c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}]$

4.3.1 Détermination d'une première solution de base réalisable

L'expression $\boldsymbol{AX=b}$ peut alors s'écrire : $AX = (N, B)\begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow \quad AX = N \cdot X_N + B \cdot X_B = b$

Une solution de base au système d'équations $\boldsymbol{AX=b}$ s'obtient en égalant $\boldsymbol{(n-m)}$ variables de décision à zéro, on pose $\boldsymbol{X_N=0}$, alors $\boldsymbol{AX=B.X_B=b}$ et si le $\boldsymbol{det(B)\neq 0}$, on obtient la solution de base cherchée : $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$ Tel que $\boldsymbol{X_B = B^{-1}.b}$ et $\boldsymbol{X_N=0}$ est réalisable si $\boldsymbol{X_B \geq 0}$.

Pour illustrer la démarche à suivre, nous considérons le programme linéaire précédent dont sa forme standard :

Max $Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$
S.C :
$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & & =2 \\ -x_1 & +3x_2 & & +x_4 & =4 \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Le système comporte 4 variables (2 variables de décision et 2 variables d'écart) (***n=4***) et deux équations (***m=2***). Une solution de base s'obtient en posant ***n-m=4-2=2*** variables de décision à zéro. On obtient facilement une solution de base de départ en annulant les variables x_1 et x_2. On aura alors, ***Vb={*** x_3, x_4 ***}*** et ***Vhb={*** x_1, x_2 ***}***.

Si nous utilisons la notation matricielle, le système initial ***AX=b*** s'écrit : ***AX=N.X_N+B.X_B =b*** Avec $B=[a_3, a_4]$, $N=[a_1, a_2]$ et $A=[a_1, a_2, a_3, a_4]$ Où a_i est une vectrice colonne composé des coefficients de la variable x_i dans toutes les contraintes fonctionnelles.

Nous avons donc :

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix} \quad X_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}, \quad X_N=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \quad c_B=[c_3,c_4]=[0,0], c_N=[c_1,c_2]=[2,3]$$

Donc la solution de base de départ est :

$$X_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}.b=b=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad Z=c_B.X_B=[0,0].\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=0 \qquad \text{SBRdépart est : } X=(0,0,2,4)^t$$

4.3.2 Amélioration de la solution de départ

Reprenons l'équation $AX=N.X_N+B.X_B=b$ et la Multiplions par l'inverse de *B,* on obtient :

$$B^{-1}.NX_N+B^{-1}.B.X_B=B^{-1}.b \Leftrightarrow B^{-1}.NX_N+X_B=B^{-1}.b \quad \text{tel que } B^{-1}.B=I$$

Pour l'exemple précédent : $X_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$ et $X_N=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

Pour obtenir une solution de base réalisable adjacente à la solution de départ, il faut qu'une variable qui est actuellement dans la base soit remplacé par une variable qui est actuellement hors de la base. Ainsi, pour déterminer une solution de base réalisable meilleure que la solution de départ, il faut :

a) Déterminer la variable entrante (variable hors de la base qui doit devenir une variable de base).
b) Déterminer la variable sortante (variable de la base qui doit devenir une variable hors de base).

Pour définir un critère de choix de la variable entrante qui deviendra une variable de base, nous employons l'expression de la fonction objective Z.

Nous savons que : $B^{-1}.NX_N+X_B=B^{-1}.b$ *alors* $X_B=B^{-1}.b-B^{-1}.N.X_N$

d'où $c=(c_B,c_N)$ *et* $X=\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}$

Donc $Z=cX=c_N.X_N+c_B.X_B=c_N.X_N+c_B(B^{-1}.b-B^{-1}.N.X_N)=c_B.B^{-1}.b+(c_N-c_B.B^{-1}.N).X_N$

Où $B^{-1}.N=\sum_{j\in E_N} B^{-1}a_j$

N est constitué de vecteurs hors base a_j, dont les indices de ces vecteurs variables hors base x_j, identifions cet ensemble d'indices par E_N et notant $Z_0=c_B.B^{-1}.b$

On a donc
$$Z = Z_0 + \sum_{j\in E_N} \left(c_j - c_B B^{-1} a_j\right) x_j$$
$$Z = Z_0 + \sum_{j\in E_N} \left(c_j - z_j\right) x_j$$

Où $z_j = c_B.B^{-1}.a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base x_j.

Notons par $\mu_j = B^{-1}a_j$ (ces vecteurs μ_j seront les nouveaux éléments sous les variables x_j dans le tableau du simplexe) ; dans le tableau de départ les μ_j sont les a_j associés aux contraintes originales du modèle.

Selon la solution de base de départ de l'exemple précédent, on a :

$Z = Z_0 + (c_1 - z_1).x_1 + (c_2 - z_2).x_2$ ou $E_N = \{1,2\}$ et $c_N = (c_1, c_2) = (2, 3)$

Avec $c_B = (c_3, c_4) = (0, 0)$ et $Z_0 = c_B.B^{-1}b = 0$.

$z_1 = c_B.B^{-1}.a_1 = c_B.\mu_1$

Avec $\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad z_1 = c_B.\mu_1 = (0,0).\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

De même, pour $z_2 = c_B.B^{-1}.a_2 = c_B.\mu_2$

Avec $\mu_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad z_2 = c_B.\mu_2 = (0,0).\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$

Alors $Z = Z_0 + (c_1 - z_1).x_1 + (c_2 - z_2).x_2 = 0 + (2-0).x_1 + (3-0).x_2 = Z = 2x_1 + 3x_2$

Comme une seule variable peut devenir une variable de base, on devrait choisir x_2 puisque cette dernière permet d'augmenter (cas de maximisation) la valeur de la fonction objective de 3 par unité de x_2 (au lieu de 2 pour la variable x_1).

Donnons maintenant le critère pour introduire une variable dans la base :

> Calculer, pour chaque variable hors de la base, la quantité $c_j - z_j$
>
> **Cas Max :** La variable x_r est introduite dans la base si ($c_r - z_r$) correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les « $c_j - z_j$ » positifs :
>
> $$c_r - z_r = \underset{j\in E_N}{\mathrm{Max}} \left\{ c_j - z_j / c_j - z_j > 0 \right\}$$
>
> **Cas Min :** La variable x_r est introduite dans la base si ($c_r - z_r$) correspond à la valeur algébrique la plus petite parmi tous les « $c_j - z_j$ » négatifs :
>
> $$c_r - z_r = \underset{j\in E_N}{\mathrm{Min}} \left\{ c_j - z_j / c_j - z_j < 0 \right\}$$

Le vecteur a_r entrant dans la base et dont on veut déterminer la valeur x_r. La solution de base X_B sera modifiée selon l'expression :

$X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N = B^{-1}.b - B^{-1}.\ a_r.x_r = \bar{b} - \mu_r.x_r$ Où $\bar{b} = B^{-1}.b$ et $\mu_r = B^{-1}.a_r$

Il faut que $X_{B_i} \geq 0, i = 1, ..., m$ pour que la nouvelle solution de base soit réalisable, c.-à-d.

$$\boxed{\begin{array}{l} X_{B_1} = \bar{b}_1 - \mu_{1r}.x_r \geq 0 \\ \quad \ldots \\ X_{Bk} = \bar{b}_k - \mu_{kr}.x_r \geq 0 \\ \quad \ldots \\ X_{Bm} = \bar{b}_m - \mu_{mr}.x_r \geq 0 \end{array}}$$

D'après les expressions précédentes, il s'agit de diviser chaque valeur $\boldsymbol{b_i}$ de la solution de base par $\boldsymbol{\mu_{ir}>0}$ et de retenir la valeur minimum de ces quotients; supposons que ce minimum s'obtient à $\boldsymbol{i=k}$. le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

$$\boxed{x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1\leq i\leq m}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\}}$$

La quantité $\dfrac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = x_r$ est la nouvelle valeur de la variable de base à $\boldsymbol{i=k}$.

Détermination des nouvelles valeurs des variables de base :

$$X_{B_i} = \bar{b}_i - \mu_{ir}.x_r, \quad i=1,\ldots,m.$$

On obtient alors les nouvelles valeurs pour les variables de base :

$$X_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{\mu_{ir}}{\mu_{kr}}.\bar{b}_k, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$$

Toutes les autres variables $\boldsymbol{x_j}$ hors base sont nulles.

On notera que $x_k = x_{B_k} = \bar{b}_k - \mu_{kr}.x_r = \bar{b}_k - \dfrac{\mu_{kr}}{\mu_{kr}}.\bar{b}_k = 0$ variable sortante.

La nouvelle valeur de la fonction objectif, en considérant que la variable entrante est $\boldsymbol{x_r}$ la variable sortante est $\boldsymbol{x_k}$ et que le pivot est $\boldsymbol{\mu_{kr}}$ On a :

Nouvelle valeur de *Z*= Ancienne valeur de *Z* + $\boldsymbol{(c_r - z_r).x_r}$

De la même façon, les $\boldsymbol{z_j}$ sont ajustés comme suit, à partir de la ligne pivot :

Nouvelles valeurs des $\boldsymbol{z_j}$= Anciennes valeurs des $\boldsymbol{z_j}$ + $(c_r - z_r).\dfrac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$

L'algorithme du simplexe doit se terminer en un nombre fini d'itérations.

Critères d'optimalité :

Max : Une solution de base réalisable est optimale lorsque, pour les variables hors de la base $\forall j \in E_N : c_j - z_j \leq 0$.

Min : Une solution de base réalisable est optimale lorsque, pour les variables hors de la base $\forall j \in E_N : c_j - z_j \geq 0$.

Solution optimale unique : La solution de base réalisable est optimale et unique si :

$\forall j \in E_N : c_j - z_j < 0$ dans le cas d'une Max.

$\forall j \in E_N : c_j - z_j > 0$ dans le cas d'une Min.

Solutions optimales multiples : Il existe une infinité de solutions optimales si pour au moins une variable x_j hors base, $c_j - z_j = 0$.

Absence de Solutions optimales : Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour Z si, pour une variable hors base, disons $\boldsymbol{x_j}$, $c_j - z_j > 0$ (**Max**) et que $\mu_j \leq 0$ (tous les $\mu_{ij} \leq 0$). Dans ce cas $Z \rightarrow \infty$. Pour une **Min**, on a $c_j - z_j < 0$ pour une variable hors de la base $\boldsymbol{x_j}$, et $\mu_j \leq 0$.

Pennons l'exemple précédent cas Max : On a $Max\ \{c_1\text{-}z_1=2,\ c_2\text{-}z_2=3\}=3$

La solution de départ n'est pas optimale (le critère d'optimalité n'est pas vérifié $c_j - z_j \le 0$)

Le vecteur $\boldsymbol{a_2}$ sera introduit dans la base et la variable entrante a la base est $\boldsymbol{x_2}$.

Recherche de la variable sortante :

La solution de départ sera modifiée selon l'expression suivante : $X_B=B^{-1}.b - B^{-1}.a_2.x_2= \bar{b} - \mu_2.x_2$

On aura donc : $X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.x_2$

On obtient alors : $x_3 = 2 -(-2)\ x_2$

$x_4 = 4 -(3)\ x_2$

Critère pour déterminer la variable sortante : $\dfrac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1\le i\le 2}{\mathrm{Min}} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = Min\left\{ \dfrac{4}{3} \right\} = \dfrac{4}{3}$

Le minimum s'obtient à $i=2$ de base $\boldsymbol{B= [a_3, a_4]}$, le vecteur de la 2ème colonne ($i=2$) $\boldsymbol{a_4}$ de B sera le vecteur sortant, qui correspond à la variable sortante $\boldsymbol{x_4}$.

La nouvelle base est donc : B= $[a_3, a_2]$.

La nouvelle solution de base est, avec $x_2=4/3,\ x_1=0$ est

$x_3 = 2 -(-2)\ x_2 = 2-(-2)\ 4/3 = 14/3$

$x_4 = 4 -3\ x_2 = 4-3.4/3=0$

La 2ème solution de base SBR est : $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(0,4/3,14/3,0)^t$

Avec la nouvelle valeur de la fonction objective est alors : $Z= Z_0 + (c_2 - z_2).x_2 = 0+ (3).(4/3) = 4$.

Peut-on améliorer à nouveau la valeur numérique de la fonction objective ?

Il faut examiner les valeurs $c_j\text{-}z_j$ pour les variables hors base qui sont dans ce cas $E_N=\{x_1 ,x_4\}$

$$c_1 - z_1 = c_1 - c_B B^{-1}.a_1 = c_1 - c_B\mu_1$$
$$c_4 - z_4 = c_4 - c_B B^{-1}.a_4 = c_4 - c_B\mu_4$$

Avec $B = [a_3, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\det(B) = 3 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

$c_1 - z_1 = 2-(-1)=3$ et $c_4 - z_4=0-(1)=-1$

La solution de base précédente n'est pas optimale(le critère d'optimalité n'est pas vérifié $c_j - z_j \le 0$)

Le vecteur $\boldsymbol{a_1}$ sera introduit dans la base et la variable entrante a la base est $\boldsymbol{x_1}$.

Recherche de la variable sortante :

La solution de départ sera modifiée selon l'expression suivante : $X_B=B^{-1}.b - B^{-1}.a_1.x_1= \bar{b} - \mu_1.x_1$

On aura donc : $X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.x_1$

On obtient alors : $x_3 = (14/3) - (7/3)x_1$

$x_2 = 4 - (-1/3)x_1$

Critère pour déterminer la variable sortante : $\dfrac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1\le i\le 2}{\mathrm{Min}} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = Min\{2\} = 2$

Le minimum s'obtient à $i=1$ de base $\boldsymbol{B= [a_3, a_2]}$, le vecteur de la 1ère colonne ($i=1$) $\boldsymbol{a_3}$ de B sera le vecteur sortant, qui correspond à la variable sortante $\boldsymbol{x_3}$.

La nouvelle base est donc : B= $[a_1, a_2]$.

La nouvelle solution de base est, avec x_1=2, x_4=0 est $\begin{array}{l} x_3 = (14/3) - (7/3)(2) = 0 \\ x_2 = (4/3) - (-1/3)(2) = 2 \end{array}$

La 3ème solution de base SBR est : $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^t = (2,2,0,0)^t$

Avec la nouvelle valeur de la fonction objective est alors : $Z= Z_0 + (c_1 - z_1).x_1 = 4 + 3.2 = 10$.

Peut-on améliorer à nouveau la valeur numérique de la fonction objective ?

Il faut examiner les valeurs c_j-z_j pour les variables hors base qui sont dans ce cas $E_N=\{x_3, x_4\}$

$c_3 - z_3 = c_3 - c_B B^{-1}.a_3 = c_3 - c_B\mu_3$ et $c_4 - z_4 = c_4 - c_B B^{-1}.a_4 = c_4 - c_B\mu_4$

Avec $B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\det(B) = 7 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 \\ 1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$

$c_3 - z_3 = 0-(9/7)=-9/7$ et $c_4 - z_4=0-(13/7)=-13/7$

La solution de base est optimale (le critère d'optimalité est vérifié ; $\forall\, j \in E_N : c_j - z_j \leq 0$)

Donc, la solution optimale du programme linéaire est :

$$B = [a_1, a_2],\quad X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } Z = 10$$

4.3.3 Algorithme du Simplexe (Forme matricielle)

Entrée : PL où toutes les contraintes fonctionnelles sont de la forme ≤.

Sortie : Solution optimale du PL (unique, multiple, infinie ou pas de solution).

<u>Début</u>

Etape 1 : Initialisations.

- Ecrire le PL dans la forme standard (en rajoutant les variables d'écart).
- Déterminer solution de base de départ en prenant comme matrice de base celle composé de vecteurs associés aux variables d'écart ; $AX=B.X_B + N.X_N = b$, Poser $X_N = 0$ et déterminer la solution de base qui est : $\boxed{X_B = B^{-1}.b = \bar{b}}$ et $\boxed{Z = c_B.X_B}$
- Pour chaque variable hors base x_j Calculer c_j-z_j avec $z_j = c_B\mu_j = c_B B^{-1} a_j$.

Etape 2 : Recherche de la solution optimale.

<u>Tant Que</u> [($\exists\, j \in E_N : c_j - z_j > 0$) pour Max / ($\exists\, j \in E_N : c_j - z_j < 0$) pour Min] **<u>Faire</u>**

// c_j-z_j pour les variables hors base.

Déterminer la variable entrante x_r selon le critère :

Max$\{c_j - z_j / c_j - z_j > 0\} = c_r - z_r$ $\forall\, j \in E_N$ pour Max / Min$\{c_j - z_j / c_j - z_j < 0\} = c_r - z_r$ $\forall\, j \in E_N$ pour Min

<u>Si</u> ($\mu_r = B^{-1} a_r \leq 0$) **<u>Alors</u>** **Stop,** <u>pas de solution optimale dont la valeur de Z est finie</u>

<u>Sinon</u> Déterminer la nouvelle solution de base comme suit :

- $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_r.x_r = \bar{b} - \mu_r.x_r$ qui détermine la variable sortante x_k selon le critère :

$$\boxed{x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Min}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\}}$$

- $Z' = Z + (c_r - z_r)x_r$

<u>FSi</u>

Pour la nouvelle base et pour chaque variable hors base x_j calculer c_j-z_j .

<u>FTQue</u>

<u>Si</u> [($\forall\, j \in E_N : c_j - z_j < 0$) pour Max / ($\forall\, j \in E_N : c_j - z_j > 0$) pour Min **Alors**

Stop, <u>la solution de base actuelle est optimale et unique</u>

<u>Sinon</u> **Stop,** <u>la solution de base actuelle est optimale et multiple</u> **<u>FSi</u>**

<u>Fin</u>

4.4.Méthode des Tableaux

On peut structurer toutes les informations de la méthode algébrique dans un tableau du simplexe où les expressions matricielles peuvent être représentées comme suit :

		c_j	c_1	c_2	……	c_n	*Solution de base* $X_B=B^{-1}.b=\overline{b}$
	c_B	***Variables de base***	x_1	x_2	……	x_n	
Ligne 1	c_{B1}	X_{B1}	μ_{11}	μ_{12}	……	μ_{1n}	*Valeur de* X_{B1}
	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Ligne m	c_{Bm}	X_{Bm}	μ_{m1}	μ_{m2}	……	μ_{mn}	*Valeur de* X_{Bm}
Ligne m+1	c_j- z_j		c_1- z_1	c_2- z_2	……	c_n- z_n	*Valeur de Z*

Où $c_{B1}, c_{B2}, \dots, c_{Bm}$: sont les coefficients économiques de variables de base.

$X_{B1}, X_{B2}, \dots, X_{Bm}$: sont les variables de base.

Les lignes de *1* à *m* sont les éléments du tableau.

μ_{ij} éléments du tableau obtenu après chaque opération de pivotage.

La ligne *m+1* est la ligne du tableau c_j-z_j dont celles associées au variable de base sont nulles.

Pour déterminer, à chaque itération, la solution de base et les différents éléments du tableau (les μ_{ij}, Z et les c_j-z_j, nous nous servons les différentes expressions algébriques qui ont été obtenues par la méthode matricielle. Cette procédure de calcul s'appelle opération de pivotage**.**

Supposons que $\mathbf{x_r}$ devient une variable de base (variable entrante) et que $\mathbf{x_k}$ devient une variable hors base (variable sortante), l'opération de pivotage consiste à :

1- Diviser les éléments de la ligne k par le pivot $\boldsymbol{\mu_{kr}}$:

$\boxed{\widehat{\mu}_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}, j = 1,2,\dots,n}$ $\boxed{\widehat{X}_{B_k} = \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}}$ $\widehat{X}_{Bk}$: Est la valeur de la variable entrante $\mathbf{x_r}$

2- Pour les lignes i=1,2, …, m, i≠k du tableau, ajuster les valeurs de la ligne i en additionnant à cette ligne, $-\mu_{ir}$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne **k**.

$\boxed{\widehat{\mu}_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{ir}\widehat{\mu}_{kj} = \mu_{ij} - \mu_{ir}\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}},\ \text{avec}\ \widehat{\mu}_{kr} = 1}$ $\widehat{\mu}_{ij}$: Nouvelles valeurs de la ligne i du tableau.

$\boxed{\text{à}\ \ j = r, \widehat{\mu}_{ir} = 0, \quad \text{pour}\ \ i = 1,2,\dots,m,\ \ i{\neq}k \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_{kr} = 1}$ // $\mathbf{a_r}$: devient un vecteur de base

$\boxed{\widehat{X}_{B_i} = X_{B_i} - \mu_{ir}\frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}} = \overline{b}_i - \mu_{ir}\frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}}$ //$\widehat{X}_{Bi}$: Nouvelles valeurs de variable de base (de la solution).

3- Effectuer une mise à jour de la ligne c_j-z_j en additionnant à cette ligne $-(c_r$-$z_r)$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne k, μ_{kj}/μ_{kr}

$$\boxed{c_j - \widehat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}(c_r - z_r)}$$

On notera que pour les variables de base c_j-z_j=0. $j \in E_B$.

4- la mise à jour de Z s'obtient de :

$$\boxed{\widehat{Z} = Z + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}(c_r - z_r)}$$

Les tableaux suivant 1 et 2 illustrent ces différents éléments avant et après l'opération de pivotage :

Tableau 1 : (*avant l'opération de pivotage*)

	c_B	c_j	c_1		c_j		c_r		c_n	Solution de base $X_B=B^{-1}.b=\bar{b}$
		Variables de base	x_1	…	x_j	…	x_r	…	x_n	
1	c_{B1}	X_{B1}	μ_{11}	…	μ_{1j}	…	μ_{1r}	…	μ_{1n}	$\bar{b}_1$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	c_{Bi}	X_{Bi}	μ_{i1}	…	μ_{ij}	…	μ_{ir}	…	μ_{in}	$\bar{b}_i$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
k	c_{Bk}	X_{Bk}	μ_{k1}	…	μ_{kj}	…	$\boxed{\mu_{kr}}$	…	μ_{kn}	$\bar{b}_k$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
m	c_{Bm}	X_{Bm}	μ_{m1}	…	μ_{mj}	…	μ_{mr}	…	μ_{mn}	$\bar{b}_m$
m+1	c_j-z_j		c_1-z_1	…	c_j-z_j	…	c_r-z_r	…	c_n-z_n	Z

Les calculs des éléments $\bar{b}_i$, μ_{ij}, Z et cj-zj s'obtiennent rapidement selon la règle du rectangle :

$$\textbf{Nouvelle valeur = Ancienne valeur} - \frac{\textbf{Produit des éléments dans les coins opposés}}{\textbf{le pivot}}$$

Tableau 2 : (*après l'opération de pivotage*)

	c_B	c_j	c_1	…	c_j	…	c_r	…	c_n	Solution de base $X_B=B^{-1}.b=\bar{b}$
		Variables de base	x_1	…	x_j	…	x_r	…	x_n	
1	c_{B1}	X_{B1}	$\mu_{11}-\mu_{1r}\frac{\mu_{k1}}{\mu_{kr}}$	…	$\mu_{1j}-\mu_{1r}\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$	…	0	…	$\mu_{1n}-\mu_{1r}\frac{\mu_{kn}}{\mu_{kr}}$	$\hat{X}_{B1}=\bar{b}_1-\frac{\mu_{1r}.\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	c_{Bi}	X_{Bi}	$\mu_{i1}-\mu_{ir}\frac{\mu_{k1}}{\mu_{kr}}$	…	$\mu_{ij}-\mu_{ir}\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$	…	0	…	$\mu_{in}-\mu_{ir}\frac{\mu_{kn}}{\mu_{kr}}$	$\hat{X}_{Bi}=\bar{b}_i-\frac{\mu_{ir}.\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
k	c_{Bk}	X_r	$\frac{\mu_{k1}}{\mu_{kr}}$	…	$\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$	…	$\boxed{1}$	…	$\frac{\mu_{kn}}{\mu_{kr}}$	$\hat{X}_{Bi}=\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
m	c_{Bm}	X_{Bm}	$\mu_{m1}-\mu_{mr}\frac{\mu_{k1}}{\mu_{kr}}$	…	$\mu_{mj}-\mu_{mr}\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$	…	0	…	$\mu_{mn}-\mu_{mr}\frac{\mu_{kn}}{\mu_{kr}}$	$\hat{X}_{Bm}=\bar{b}_m-\frac{\mu_{mr}.\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$
m+1	c_j-z_j		$c_1-z_1-\frac{\mu_{k1}}{\mu_{kr}}(c_r-z_r)$	…	$c_j-z_j-\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}(c_r-z_r)$	…	0	…	$c_n-z_n-\frac{\mu_{kn}}{\mu_{kr}}(c_r-z_r)$	$\hat{Z}=Z+\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}.(c_r-z_r)$

Exemple

On veut déterminer la solution optimale au modèle de programmation linéaire précédent en appliquant l'algorithme du simplexe à l'aide de tableaux.

$$\begin{aligned} &\mathit{Max}\ Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4 \\ &\mathit{S.C:} \\ &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases} \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

La solution de base réalisable de départ est mise dans le tableau du simplexe suivant :

	c_B	c_j	2	3	0	0	Solution de base
		Var-base	x_1	x_2	x_3	x_4	$X_B=B^{-1}.b$
Ligne 1	0	x_3	3	-2	1	0	2
Ligne 2	0	x_4	-1	3	0	1	4
Ligne 3		$c_j- z_j$	2	3	0	0	Z=0

La ligne 3 du tableau précédent nous indique que la solution de départ n'est pas optimale puisque : $\exists\ j\in E_N : (c_j-z_j)>0$.

La valeur de (c_j-z_j) de $\boldsymbol{x_2}$ des variables hors base est la plus grande valeur positive de (c_j-z_j), on va faire entrer $\boldsymbol{x_2}$ en base. Déterminons maintenant la variable sortante :

c_B	c_j	2	3	0	0	Solution de base	Quotients
	Var-base	x_1	x_2	x_3	x_4	$X_B=B^{-1}.b$	
0	x_3	3	-2	1	0	2	----
0	x_4	-1	3	0	1	4	4/3 ← **Min**
	$c_j- z_j$	2	3	0	0	Z=0	

x_4: var Sortante (ligne 2)

X_2: variable entrante

Le minimum s'obtient à ligne 2, donc la variable sortante est : $\boldsymbol{x_4}$

Le pivot sera donc l'élément $\mu_{kr} = \mu_{22} = 3$.

La variable $\boldsymbol{x_2}$ remplacera la variable $\boldsymbol{x_4}$ dans la base, donc les nouveaux éléments sous $\boldsymbol{x_2}$ seront $\mu_{21}=0$ et $\mu_{22}=1$. Les éléments sous $\boldsymbol{x_3}$ inchangées.

Nous commençons, maintenant, à appliquer les opérations de pivotage sur le tableau précédent :

c_B	c_j	2	3	0	0	Solution de base	
	Var-base	x_1	x_2	x_3	x_4	$X_B=B^{-1}.b$	
0	x_3	7/3	0	1	2/3	14/3	$L'_1=L_1+2L'_2$
3	x_2	-1/3	1	0	1/3	4/3	$L'_2=L_2/3$
	$c_j- z_j$	3	0	0	-1	Z=4	$L'_3=L_3-3L'_2$

Ceci complète les transformations sur les équations ; la solution de base réalisable pour ce tableau du simplexe est :$X_B=[x_3, x_2]^t=[14/3,4/3]^t$, $x_1=x_4=0$ et $Z= Z_0+(c_2 - z_2).x_2 = 0 + 3.4/3 =4$

La ligne 3 du tableau précédent nous indique que la solution améliorer n'est pas optimale puisque : $\exists\ j\in E_N : (c_j-z_j)>0$.

La valeur de (c_j-z_j) de $\boldsymbol{x_1}$ des variables hors base est la plus grande valeur positive de (c_j-z_j), on va faire entrer $\boldsymbol{x_1}$ en base. Déterminons maintenant la variable sortante :

c_B	c_j	2	3	0	0	Solution de base	Quotients
	Var-base	x_1	x_2	x_3	x_4	$X_B=B^{-1}.b$	
0	x_3	7/3	0	1	2/3	14/3	2 ← **Min**
3	x_2	-1/3	1	0	1/3	4/3	-----
	$c_j- z_j$	3	0	0	-1	Z=4	

x_3: var Sortante (ligne 1)

x_1: variable entrante

Le minimum s'obtient à la ligne 1, donc la variable sortante est : $\boldsymbol{x_3}$

Le pivot sera donc l'élément $\mu_{kr} = \mu_{11} = 7/3$.

La variable x_1 remplacera la variable x_3 dans la base, donc les nouveaux éléments sous x_1 seront μ_{11}=1 et μ_{12}=0. Les éléments sous x_2 inchangées.

Nous commençons, maintenant, à appliquer les opérations de pivotage sur le tableau précédent :

c_B	c_j	2	3	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	
	Var-base	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_1	1	0	3/7	2/7	2	$L'_1=3/7L_1$
3	x_2	0	1	1/7	3/7	2	$L'_2=L_2+1/3L'_1$
c_j- z_j		0	0	$\frac{-9}{7}$	$\frac{-13}{7}$	Z=10	$L'_3=L_3-3L'_1$

Ceci complète les transformations sur les équations ; la solution de base réalisable pour ce tableau du simplexe est :$X_B=[x_1, x_2]^t=[2,2]^t$, $x_3=x_4=0$ et $Z= Z_0+(c_1-z_1).x_1 = 4+3.2 = 10$

La solution est optimale puisque $\forall j \in E_N$: c_j-z_j<0; pour les variables hors base.

Algorithme du Simplexe (Forme Tableaux)

Entrée : PL où toutes les contraintes fonctionnelles sont de la forme ≤.

Sortie : Solution optimale du PL (unique, multiple ou infinie).

<u>Début</u>

Etape 1 :

• Ecrire le PL dans la forme standard (en rajoutant les variables d'écart).

• Déterminer solution de base de départ en prenant comme matrice de base celle composé de vecteurs associés aux variables d'écart.

• Mettre la solution de départ dans le tableau du simplexe.

Etape 2 : Recherche de la solution optimale

<u>Tant Que</u> (le tableau n'est optimal) **<u>Faire</u>**

//tableau est optimal si Max $\forall j \in E_N$: c_j-$z_j \leq 0$ ou si Min $\forall j \in E_N$: c_j-$z_j \geq 0$

Déterminer la variable entrante $\mathbf{x_r}$ de la ligne (c_j-z_j) du tableau selon le critère :

$$\text{Si Max Alors } \underset{j\in E_N}{\text{Max}}\left\{ c_j - z_j / c_j - z_j > 0 \right\} = c_r - z_r \ // \ \text{Si Min alors } \underset{j\in E_N}{\text{Min}}\left\{ c_j - z_j / c_j - z_j < 0 \right\} = c_r - z_r$$

<u>Si</u> ($\mu_r \leq 0$) **<u>Alors</u>** // μ_r : colonne associée à la variable entrante x_r

Stop, <u>La solution optimale n'a pas de valeur finie de Z ($Z \to \infty$).</u>

<u>Sinon</u> Déterminer du tableau du simplexe la variable sortante x_k selon le critère :

$$\frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1\leq i\leq m}{\text{Min}}\left\{ \frac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\}$$

Appliquer l'opération de pivotage au tour du pivot μ_{kr}.(changement de base)

<u>FSi</u>

<u>FTQue</u>

<u>Si</u> **[**($\forall j \in E_N$: c_j-z_j<0)pour Max |($\forall j \in E_N$: c_j-z_j>0)pour Min**]** **Alors**

Stop, <u>la solution de base actuelle est optimale et unique</u>

<u>Sinon</u> **Stop,** <u>la solution de base actuelle est optimale et multiple</u> **<u>FSi</u>**

<u>Fin</u>

4.5.Méthode des 2 phases et Méthode des pénalités (Big M)

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, l'algorithme du simplexe débute avec une solution de base réalisable. Il a été facile d'obtenir cette solution de base de départ, puisque toutes les contraintes fonctionnelles sont considérées du type « ≤ ». En effet, on obtient facilement une solution de base réalisable de départ à un système d'équations (contraintes fonctionnelles) $AX \leq b$ avec $b \geq 0$ et $X \geq 0$, en ajoutant les variables d'écart, ces variables sont prise comme variables de base pour obtenir le premier tableau du simplexe (solution de départ).

D'autre part, nous savons qu'un modèle de programmation linéaire peut comporter également des contraintes du type « ≥ » ou du type « = ». Pour déterminer la solution optimale (si elle existe) par l'algorithme du simplexe, nous devons écrire le modèle dans sa forme standard en ajoutant (additionner ou soustraire selon le cas) les variables d'écart appropriées. La solution de base de départ ne sera pas toutefois obtenue aussi facilement dans le cas d'un système de contraintes mixtes.

Il faudra alors avoir recours à l'ajout d'autres variables appelées **variables artificielles** pour obtenir une solution de départ (mais artificielle) et appliquer par la suite l'algorithme du simplexe en deux phases appelé **Méthode en deux phases** ou encore utiliser **la Méthode des pénalités (Big M).**

4.5.1. Exemple (variables artificielles)

Soit le modèle de programmation linéaire :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\
\text{S.C :} \\
\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \geq 1 \end{array} \right. \\
x_j \geq 0 \quad j=1,2
\end{array}
$$

Ecrivons le modèle dans sa forme standard ; on doit additionner une variable d'écart dans les contraintes de type « ≤ » et soustraire une variable d'écart dans les contraintes de types « ≥ ». On obtient :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{S.C :} \\
\left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & = 2 \\ x_1 & & & & -x_5 & = 1 \end{array} \right. \\
x_j \geq 0,\ j=1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Nous remarquons que les variables x_4 et x_5 sont négatifs. Donc, on ne peut pas déterminer une solution de base réalisable de départ. Afin d'obtenir des valeurs positives, nous devons ajouter d'autres variables « x_6 et x_7 » aux contraintes de type « ≥ » ou « = » appelées variables artificielles. Le système d'équations précédent devient :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\
\text{S.C} \\
\left\{ \begin{array}{llllllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & +x_6 & & = 2 \\ x_1 & & & & -x_5 & & +x_7 & = 1 \end{array} \right. \\
x_j \geq 0,\ j=1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Pour le nouveau système d'équations, une solution de base a 3 variables de base et (n-m=7-3=4) variables hors base, soient les deux variables de décision $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ et les variables d'écart qui ont été soustraites ($\boldsymbol{x_4}$ et $\boldsymbol{x_5}$).

La solution de base est alors :

$$
X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Maintenant, nous pouvons appliquer l'algorithme du simplexe (la solution de départ est réalisable) ; mais attention, nous avons modifié de façon importante le problème original en ajoutant les variables artificielles. Pour obtenir une solution réalisable de base au problème original, il faut que les variables artificielles soient réduites à zéro.

Comme nous l'avons déjà mentionné, deux méthodes sont employées pour éliminer éventuellement les variables artificielles de la base soit la méthode en deux phases et la méthode des pénalités (Big M).

4.5.2. Méthode des 2 phases

Comme son nom l'indique, la méthode en deux phases consiste à segmenter l'algorithme du simplexe en deux étapes. La première étape, dite **Phase I** consiste à éliminer les variables artificielles de la base (ou au moins à les rendre nulles). Si tel est le cas, la **Phase II** débute avec le dernier tableau (dernière solution) de la phase I ; l'algorithme se poursuit en examinant des solutions réalisables de base au problème original selon les critères usuels de l'algorithme du simplexe.

Algorithme du Simplexe (Méthode en deux phases)

Entrée : PL avec des contraintes fonctionnelles mixtes.
Sortie : Solution optimale du PL (unique, multiple, infinie ou n'existe pas).
Début

Phase I : obtention de la solution de départ du PL original si elle existe

● Introduire les variables artificielles nécessaires dans le système de contraintes (chaque variable artificielle est ajoutée à une contrainte du type « ≥ » ou du type « = »).

● Appliquer l'algorithme du simplexe au nouveau système de contraintes (avec les variables artificielles) tout en minimisant la fonction objective suivante :

$$\boxed{\text{Min }(Z') = \sum_{i=1}^{r} x_{ai} = x_{a1} + x_{a2} + \cdots + x_{ar}}$$

//où x_{ai} : variable artificielle, r est le nombre de variables artificielles.

Si (le critère d'optimalité est satisfait) et (Z'>0) **Alors**

STOP Le programme linéaire n'admet pas de solutions réalisables (il y a au moins une variable artificielle dans la base à une valeur strictement positive). **FSi**

Si (Z'=0) **Alors**

Le programme linéaire admet des solutions réalisables ; la phase I est terminée (il n'est pas nécessaire de satisfaire au critère d'optimalité).

Aller à **la phase II**. **FSi**

Phase II : Déterminer une solution optimale finie au problème original.

Si (toutes les variables artificielles sont hors de la base (dernier tableau de la phase I))

Alors Eliminer les colonnes associées aux variables artificielles du dernier tableau de la phase I et Commencer la phase II avec le nouveau tableau réduit.

Sinon

Si (Z'=0 de la phase I) et (∃ variables artificielles nulles dans la base)) **Alors**

● Eliminer les colonnes associées aux variables artificielles hors de la base du dernier tableau de la phase I.

> • Modifier la fonction objective originale en rajoutant les variables artificielles non éliminées avec des coefficients nuls.
>
> • Commencer la phase II avec le nouveau tableau réduit et la nouvelle fonction objectif.
>
> **FSi**
>
> **FSi**
>
> **Fin**

Exemple

Soit le modèle de programmation linéaire suivant :

Où, x_1, x_2 : sont les variables de décision,

x_3, x_4, x_5 : sont les variables d'écart.

x_6, x_7 : sont les variables artificielles.

Résolution du PL par la méthode en deux phases

Max $Z = x_1 + 2x_2$

S.C

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_5 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 7$

Phase I :

La fonction objective à minimiser est la somme des variables artificielles et qui est :

Min $Z' = x_6 + x_7$

c	c_j	0	0	0	0	0	1	1	X_B	Quotients
B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	x_3	1	1	1	0	0	0	0	5	5/1=5
1	x_6	1	2	0	-1	0	1	0	2	2/1=2
1	x_7	1	0	0	0	-1	0	1	1	1/1=1
$c_j - z'_j$		-2	-2	0	1	1	0	0	Z'=3	

x_7

x_1

c	c_j	0	0	0	0	0	1	1	X_B	Quotients
B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	x_3	0	1	1	0	1	0	-1	4	4/1=5
1	x_6	0	2	0	-1	1	1	-1	1	1/2
0	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	1	---
$c_j - z'_j$		0	-2	0	1	-1	0	2	Z'=1	

x_6

x_2

c	c_j	0	0	0	0	0	1	1	X_B
B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_3	0	0	1	1/2	1/2	-½	-½	7/2
0	x_2	0	1	0	-½	1/2	1/2	-½	1/2
0	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	1
$c_j - z'_j$		0	0	0	0	0	1	1	Z'=0

Bien que Z'=0 et le critère d'optimalité est satisfait, alors la phase I est terminée et le programme linéaire original admet des solutions réalisables.

Débutons la phase II en optimisant cette fois la fonction objectif du modèle original et en éliminant du dernier tableau Phase I, les deux colonnes associées aux variables artificielles x_6 et x_7.

Phase II : la fonction à optimiser est celle du programme linéaire original qui est :

Max Z= $x_1+2x_2+0x_3+0x_4+0x_5$

	c_B	c_j	1	2	0	0	0	X_B	Quotients
		Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	x_3	0	0	1	1/2	1/2	7/2	7
	2	x_2	0	1	0	-½	1/2	1/2	---
	1	x_1	1	0	0	0	-1	1	---
	$c_j - z_j$		0	0	0	1	0	Z=2	
						x_4			

c_B	c_j	1	2	0	0	0	X_B
	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	0	0	2	1	1	7
2	x_2	0	1	1	0	1	4
1	x_1	1	0	0	0	-1	1
$c_j - z_j$		0	0	-2	0	-1	Z=9

Le critère d'optimalité est satisfait ($\forall j \in E_N$ $c_j-z_j \leq 0$), donc la solution de base obtenue de la « phase II » est la solution optimale du programme linéaire original. Cette solution optimale est unique puisque $\forall j \in E_N$ $c_j-z_j<0$.

$X_B=(x_4,x_2,x_1)^t=(7,4,1)^t$, $X_N=(x_3,x_5)^t=(0,0)^t$ et $Z=9$

4.5.3. Méthode des pénalités (Big M)

Une autre méthode qui est utilisée pour éliminer les variables artificielles de la base est la **méthode des pénalités** ou la **méthode Big M** ; elle consiste essentiellement à appliquer l'algorithme du simplexe en optimisant la fonction objective dont les variables artificielles auront été fortement pénalisées, rendant ces variables peu intéressantes sur le plan économique, comme variable de base.

Algorithme du Simplexe (Big M)

Entrée : PL avec des contraintes fonctionnelles mixtes.
Sortie : Solution optimale du PL (unique, multiple, infinie ou n'existe pas).
Début

- Ecrire le PL dans sa forme standard.
- Introduire les variables artificielles nécessaires.
- Réécrire la fonction objective en ajoutant, aux termes associés aux variables de décision et d'écart, les variables artificielles en leur affectant une pénalité soit :

  (-M), dans le cas d'une maximisation.
  (+M), dans le cas d'une minimisation.

  Où : M>0 et arbitrairement grand.
- Appliquer l'algorithme du simplexe avec le nouveau tableau et nouvelle fonction objectif.

<u>**Si**</u> (le critère d'optimalité est satisfait) et (∃ des variables artificielles dans la base>0) <u>**Alors**</u>
STOP Le programme linéaire n'admet pas de solutions réalisables.
<u>**FSi**</u>
<u>**Si**</u> (le critère d'optimalité est satisfait) et (toutes les variables artificielles sont nulles) <u>**Alors**</u>
Le programme linéaire admet une solution optimale finie « unique ou multiple ».
<u>**FSi**</u>
<u>**Si**</u> (∃ variable entrante) et (∄ variable sortante) et (toutes les variables artificielles sont nulles)
<u>**Alors**</u> Le programme linéaire n'admet pas de solution optimale finie.
<u>**FSi**</u>
<u>**Si**</u> (∃ variable entrante) et (∄ variable sortante) et (∃ variables artificielles dans la base et >0)
<u>**Alors**</u> Le programme linéaire n'admet pas de solutions réalisables.
<u>**FSi**</u>
<u>**Fin**</u>

Exemple

Soit le modèle de programmation linéaire suivant :

Où, x_1, x_2 : sont les variables de décision,
x_3, x_4, x_5 : sont les variables d'écart.
x_6, x_7 : sont les variables artificielles.

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$
S.C
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_5 + x_7 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 7$$

Résolution du PL par la méthode Big M

Donc la fonction objective à optimiser est :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

La solution de base de départ est celle qui a comme variables de base les variables d'écart qui ont été additionnées et les variables artificielles.

c_B	c_j	1	2	0	0	0	-M	-M	X_B	Quotients
	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	X_3	1	1	1	0	0	0	0	5	5/1=5
-M	X_6	1	2	0	-1	0	1	0	2	2/2=1
-M	X_7	1	0	0	0	-1	0	1	1	---
$c_j - z'_j$		1+2M	2+2M	0	-M	-M	0	0	Z=-3M	

x_6

x_2

c_B	c_j	1	2	0	0	0	-M	-M	X_B	Quotients
	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	X_3	1/2	0	1	1/2	0	-1/2	0	4	8
2	X_2	1/2	1	0	-1/2	0	1/2	0	1	2
-M	X_7	1	0	0	0	-1	0	1	1	1
$c_j - z'_j$		M	0	0	1	-M	-1-M	0	Z=2-M	

x_7

x_1

c_B	c_j / Base	1 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	-M / x_6	-M / x_7	X_B	Quotients
0	X_3	0	0	1	1/2	1/2	-1/2	-1/2	7/2	7
2	X_2	0	1	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1/2	---
1	X_1	1	0	0	0	-1	0	1	1	---
c_j- z'_j		0	0	0	1	0	-1-M	-M	Z=2	

$\boxed{x_3}$ $\boxed{x_4}$

c_B	c_j / Base	1 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	-M / x_6	-M / x_7	X_B	
0	X_4	0	0	2	1	1	-1	-1	7	
2	X_2	0	1	1	0	1	0	-1	4	
1	X_1	1	0	0	0	-1	0	1	1	
c_j- z'_j		0	0	-2	0	-1	-M	-M+1	Z=9	

Nous remarquons que le tableau est optimal ($\forall j \in E_N$ c_j-$z_j \leq 0$) et toutes les variables artificielles sont hors de la base, donc la solution de ce tableau est la solution optimale du programme linéaire original. Cette solution optimale est unique puisque $\forall j \in E_N$ c_j-$z_j<0$.

$X_B=(x_4,x_2,x_1)^t=(7,4,1)^t$, $X_N=(x_3,x_5)^t=(0,0)^t$ et $Z=9$