النهايات والاستمرارية

1- نهايات دوال مألوفة

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \lvert x\rvert = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} \lvert x\rvert = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} [ax+b] = +\infty (a>0)$	$\lim_{x\to-\infty} [ax+b] = -\infty (a>0)$
$\lim_{x\to+\infty} [ax+b] = -\infty (a<0)$	$\lim_{x\to-\infty} [ax+b] = +\infty (a<0)$

2- التفسير الهندسي للنهايات

النهاية	تفسيرها الهندسي
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$	$(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = a$ بجوار $\pm\infty$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$	$(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\ (\mp\infty)$	$(\mathbf{C_f})$ قد يقبل مستقيم مقارب مائل له معادلة من الشكل $y = ax + b$ بجوار $\pm\infty$

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathbf{C_f})$ بجوار $\pm\infty$

3- العمليات على النهايات

فيما يلي يمثل a عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

أ- نهاية مجموع دالتين

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح.ع.ت

ب- نهاية جداء دالتين

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l \neq 0$	∞	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	∞	∞	0
$\lim_{x\to a} (f\times g)(x)$	$l\times l'$	∞	∞	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة الجداء

ج- نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	∞	0	l'	∞	0
$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	ح.ع.ت	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة حاصل قسمة

4- بعض طرق إزالة حالات عدم التعيين

1- الاختزال 2- التحليل 3- المرافق 4- العدد المشتق

5- المقارنة 6- الحصر .

5- الاستمرارية

تعريف:

- f مستمرة عند قيمة x_0 معناه $f(x_0)$ معرفة و $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$
- f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ معناه f مستمرة عند كل قيمة x_0 من هذا المجال .

6- تطبيقات مبرهنة القيم الوسطى

حالة 1:

- f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$
- k عدد حقيقي محصور تماما بين $f(a)$ و $f(b)$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع مستقيم معادلته $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a, b[$

حالة 2:

- f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$
- $f(a) \times f(b) < 0$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a, b[$

ملاحظة:

إذا كان المجال غير محدود مثلا $[a, +\infty[$ فإننا نكتب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ بدلا من الصورة $f(b)$ أي :

$$f(a) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$