الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي — دورة : جوان 2009

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $\left(\overline{z}+3\right)^2-2\left(\overline{z}+3\right)+2=0$

حيث $\overline{z}$ مرافق z.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

النقط A، B، M لواحقها $(1-i)$، $(1+i)$، z على الترتيب.

أ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z-1+i|=|z-1-i|$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. أ) عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسّم 2009

u_0 و a عددان طبيعيان غير معدومين، (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدّها الأوّل u_0 بحيث $u_1^2+u_2+35a^2=2009$.

ب) احسب a و u_0.

2. نضع $a=7$ و $u_0=2$ ، احسب u_n بدلالة n

3. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ) عبّر عن S_n بدلالة n

ب) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n=800$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثمّ استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

2. ادرس تغيّرات الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$.

3. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$.

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$.

4. بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α بحيث $-1{,}7<\alpha<-1{,}6$

5. ارسم $(\mathscr{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$

6. بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات :

$y=x+2$ و $x=0$ و $x=\alpha$

بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$

التمرين الرّابع: (05 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ) مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية: $t\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases}$

P مستو معرّف بالمعادلة $x+3y+z+1=0$

عيّن في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

1	A_1: النقطة $A(1,1,2)$ تنتمي إلى (Δ)	B_1: النقطة $B(-1,0,2)$ تنتمي إلى (Δ)	C_1: النقطة $C\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ تنتمي إلى (Δ)
2	A_2: $\vec{u}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه (Δ)	B_2: $\vec{u'}(1,3,1)$ شعاع توجيه (Δ)	C_2: $\vec{u''}(3,1,0)$ شعاع توجيه (Δ)
3	A_3: (Δ) محتوى في P	B_3: (Δ) يقطع P	C_3: (Δ) يوازي P
4	A_4: المستوي Q_1 ذو المعادلة $x+3y+z-3=0$ يعامد P	B_4: المستوي Q_2 ذو المعادلة $2x-y+\frac{1}{2}z=0$ يعامد P	C_4: المستوي Q_3 ذو المعادلة $x-y+2z+5=0$ يعامد P
5	A_5: المسافة بين النقطة $D(1,1,1)$ والمستوي P هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$	B_5: المسافة بين النقطة $O(0,0,0)$ والمستوي P هي $\frac{\sqrt{11}}{11}$	C_5: المسافة بين النقطة $(1,3,0)$ والمستوي P هي $\sqrt{11}$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

مرين الأوّل: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0$ ....(1)
2. ليكن العدد المركب z_1 حيث $z_1=3-3i$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

أ) اكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب) احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث $z_1\times z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللاحقات $3+3i$ ، $3-3i$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α

ب) عيّن مجموعة النقط G_α لمّا يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

تمرين الثاني: (05 نقاط)

1. نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,1,2)$ ، $B(-1,0,-2)$ $C(-1,0,-6)$

بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز P يطلب تعيين معادلة له.

2. لتكن S مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

3. G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عيّن إحداثيات G ثمّ تأكد أنها تنتمي إلى S.

ب) اكتب معادلة المستوي Q الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G.

تمرين الثالث: (07 نقاط)

1. g دالة معرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x+\ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$.

2. لتكن f دالة معرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ) بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1,+\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f
د) شكل جدول تغيّرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين؟
هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث $(\mathcal{C}_f)$ يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. نعتبر الدّالة h المعرّفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f(e^x)$ و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ) شكل جدول تغيّرات الدّالة h.
ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى $(\mathcal{C}_h)$ عند النقطة التي فاصلتها 1.
ج) ارسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_h)$ في نفس المعلم السابق.

التمرين الرّابع: (04 نقاط)

1. حل المعادلة التفاضلية: $y'=(\ln 2)y$
2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0)=1$ ، عيّن عبارة $f(x)$
3. n عدد طبيعي.
أ) ادرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$.
4. أ) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$.
ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.

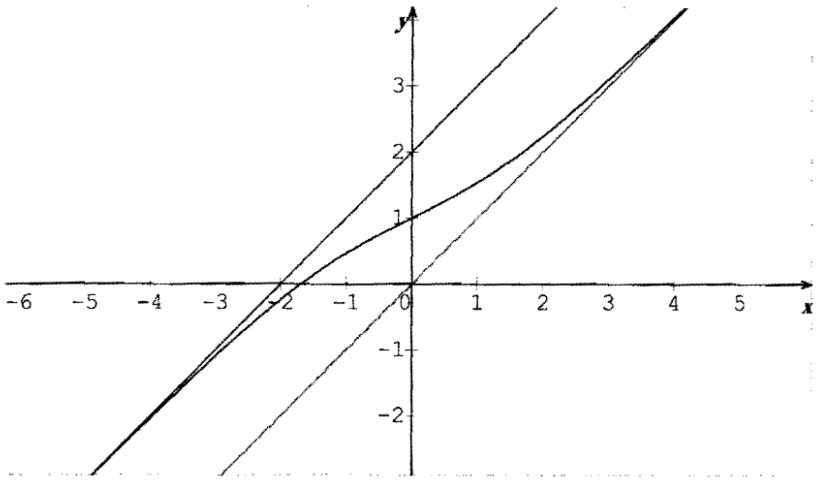
الإجابة النموذجية وسلم التنقيط لامتحان شهادة البكالوريا دورة 2009

المادة : رياضيات الشعبة: تقني رياضي

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	مجزأة	المجموع
	الموضوع الأول		
الأعداد المركبة	**التمرين الأول** : (04 نقط)		04
	1) أ) $\Delta' = i^2$ ، $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 1-i$	1	
	ب) $z' = -2-i$ ، $z'' = -2+i$	1	
	2) أ) (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و شعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{i},\vec{v}) = \frac{5\pi}{4}$.....	1	
	ب) (E) هي محور قطعة المستقيم $[AB]$	1	
المتتاليات	**التمرين الثاني** :(04نقط)		04
	1) أ- 2009=49×41 الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009 هي 1و7..........	0.5	
	ب- حساب $a;u_0$:		
	$u_0^2.a^2 + u_0.a^2 + 35a^2 = 2009$	0.5	
	$u_0^2 + u_0 + 35 = \frac{2009}{a^2}$ و منه $a=7$ او $a=1$ ، $a=1$ مرفوض	0.75	
	$a = 7; u_0 = 2$	0.25	
	2) عبارة u_n بدلالة العدد n	0.75	
	3) أ- عبارة S_n بدلالة n	0.75	
	ب- $n=3$	0.5	
	التمرين الثالث (07 نقاط)		
	1) $f(x) + f(-x) = 2$ و $\omega(0;1)$ مركز تناظر..	0.5+0.5	

166

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
		2) تغيرات الدالة :	الدوال العددية
	0.5+0.25	حساب النهاية و $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^{x}+1)^{2}}$	
	0.25+0.5	جدول التغيرات و إشارة المشتق :..	
	0.5	3) تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب عند $+\infty$	
	0.5	حساب و استنتاج المستقيم المقارب عند $-\infty$	
		4) تبيان أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α : $-1.7<\alpha<-1.6$	
	0.25×4	إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة..	
	0.5	5) رسم المنحنى	
07			
	0.5	6)تبيان أن $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$	
		7)حساب المساحة :	
	0.5+0.25	$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}(y-f(x))dx=\left[2x+2\ln(e^{-x}+1)\right]_{\alpha}^{0}$	
	0.5	$A(\alpha)=2\left[\ln 2-\ln(e^{\alpha}+1)\right]=2\ln(-\alpha)$	
	0.25	حصر العدد $A(\alpha)$	
		التمرين الرابع (05نقط)	الهندسة الفضائية
	0.25×2+0.5	$A_1;C_1$ (1 مع التعليل	
05	4×0.25	2) A_2 مع التعليل (تعيين شعاع توجيه (Δ))..	
	2 ×0.25 + 0.5	3) C_3 مع التعليل ($\vec{n}\perp\vec{u}$ و $2t-1+3(-t+2)+t+1+1=0$ مستحيلة الحل)....	
	1	4) C_4مع التعليل	
	0.5×2	5)بإستعمال المسافة بين نقطة و مستوى .... كل الإجابات صحيحة .	

167

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط لامتحان شهادة البكالوريا دورة 2009

المادة : رياضيات الشعبة: تقني رياضي

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	الموضوع الثاني		
	التمرين الأول: (04 نقط)		
	1. حلا المعادلة : $\Delta=(6i)^2$ ، $z_1=3-3i$ ، $z_2=3+3i$	0,25×3	
	2. أ) $z_1=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	0,5	
	ب) $\lvert z_3\rvert=\sqrt{2}$ ، $Arg(z_3)=\frac{\pi}{3}$	0,5×2	
	$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0,25×2	
	3. أ) $\alpha\in\mathbb{R}^*$	0,25	
	ب) $G_\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\alpha\sqrt{6}-12}{2\alpha}\right)$	0,25	
	مجموعة النقط G_α هي المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ما عدا النقطة $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	0,75	04
	التمرين الثاني: (05 نقط)		
	1. المجموعة المعطاة مميّزة بالمعادلة: $2x+y+4z=0$ وهي مستو p	1	
	الشعاع الناظم على p هو $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}(-2;-1;-4)$	0,25×2	
	بالحساب نجد $\overrightarrow{AB}=-\vec{n}$ ومنه p عمودي على (AB)	0,25×2	
	2. معادلة S هي $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$	0,5	
	منه S سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,1)$ونصف قطرها $R=3$	0,25×2	
	3. أ) $G(1,1,-2)$	0,5	
	$G\in S$ لأن إحداثيات G تحقق معادلة S	0,5	05

168

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
	ب) لتكن M نقطة من المستوي Q الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G إذن $\overrightarrow{G\Omega}\overrightarrow{GM}=0$ ومنه نجد $z+2=0$	0,5×2	
الدوال العددية	**التمرين الثالث: (07 نقط)** أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	0.25	07
	ب) $g'(x)=2+\frac{1}{x}$ ، $g'(x)>0$ منه g متزايدة تماما على $[1;+\infty[$	0.25×3	
	ج) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $g(1)=2$ و g متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ إذن $g(x)\geqslant 2$ و.هـ.م	0.25	
	2. أ) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$	0,5	
	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ نستنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى معادلته $y=0$	0.5+0.25	
	ج) $f'(x)=\dfrac{12-12\ln x}{(2x+\ln x)^2}$	0,5	
	$f'(x)\geqslant 0$ على المجال $[1;e]$ منه f متزايدة تماما على $[1;e]$	0,25	
	$f'(x)<0$ على المجال $]e;+\infty[$ منه f متناقصة تماما على $]e;+\infty[$	0,25	
	د) جدول التغيرات	0,5	
	تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين إذا وفقط إذا كان $k\in\,]0;f(e)[$	0.5	
	هـ) معادلة (Δ_1)	0,5	
	3- أ- جدول تغيراتها الدالة h: $\begin{array}{c\|ccc} x & 1 & & +\infty \\ \hline h(x) & \frac{6}{2e+1} & \searrow & 0 \end{array}$	0,5	
	ب- معادلة المماس (Δ_2)	0,5	
	ج- رسم (Δ_1) ،(Δ_2) ، $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_h)$	01	
المعادلات التفاضلية والموافقات	**التمرين الرابع: (04 نقط)** حلول المعادلة هي $y=ke^{x(\ln 2)}$	0,5	04
	1. عبارة $f(x)$ هي $f(x)=e^{x(\ln 2)}$	0,5	
	3.أ) $2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$	0,25×3	
	ب) $f(2009)-4\equiv 0[7]$	0,75	
	4. أ) $S_n=2^{n+1}-1$	0,75	
	ب) $S_n\equiv 0[7]$ تكافئ $2^{n+1}\equiv 1[7]$ ومنه $n=3k+2$	0,25+0,5	