Logique mathématique
Série de TD N°03 : La logique propositionnelle

Exercice 1
1. Soit A la proposition suivante : « Tous les hommes sont barbus ». Cochez les formulations correctes de la proposition $\neg A$.

☐ « Tous les hommes ne sont pas barbus.»
☐ « Aucun homme n'est barbu.»
☐ « Il existe un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il existe au moins un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il n'existe qu'un seul homme qui n'est pas barbu.»

2. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. Dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \wedge B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « 1+1 = 2».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « 3 * 8 = 32» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

3. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \vee B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « 1+1 = 2».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « 3 * 8 = 32» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

Exercice 2 Les expressions suivantes sont elles des formules bien formées ?
1. $(p \wedge \neg q)$, 2. $p \vee \vee r$, 3. $(p \vee (\neg p))$, 4. $(p \vee \neg p)$, 5. $((p \leftrightarrow (q \vee (\neg r \wedge s))) \wedge (\neg p \rightarrow r))$.

Exercice 3 Donnez les tables de vérités des formules suivantes. puis indiquez les équivalences entre ces formules.
1. $\neg(p \wedge q)$, 2. $\neg p \vee \neg q$, 3. $\neg(p \vee q)$, 4. $\neg p \wedge \neg q$, 5. $p \vee (p \wedge q)$, 6. $p \wedge (p \vee q)$, 7. p

Exercice 4 Soient p et q deux variables propositionnelles signifiant respectivement « il fait froid » et « il pleut ». Écrire une phrase simple correspondant à chacun des énoncés suivants :
1. $\neg p$, 2. $p \wedge q$, 3. $p \vee q$, 4. $q \vee \neg p$, 5. $\neg p \wedge \neg q$, 6. $\neg\neg q$

Exercice 5 Traduisez les phrases suivantes en logique propositionnelle en précisant l'univers du discours pour chaque phrase.
1. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
2. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean viennent.
3. Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
4. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
5. Pierre n'a ni frère ni sœur, mais il a un cousin.
6. S'il pleut et qu'il y a du soleil, alors il y a un arc-en-ciel.
7. Jean n'ira au cinéma que s'il a terminé ses devoirs.

Exercice 6 Énigme.Trois collègues Ahmed, Ali et mostafa déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Ahmed commande un dessert, Ali en commande un aussi,
2. Chaque jour, soit Mostafa, soit Ali, mais pas les deux, commandent un dessert,
3. Ahmed ou Mostafa, ou les deux, commandent chaque jour un dessert,
4. Si Mostafa commande un dessert, Ahmed fait de même.

Questions :

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles.
2. Que peut on déduire sur qui commande un dessert ?
3. Est ce qu'on peut arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 7 Connecteur de Sheffer. On définit le connecteur de Sheffeur noté | (barre de Sheffer) qui est le NAND par p| q $\equiv \neg(p \wedge q)$.
1. Donner la table de vérité de la formule (p | q).
2. Donner la table de vérité de la formule ((p | q)|(p | q)).
3. Exprimer les connecteurs $\neg$, $\vee$ et $\rightarrow$ en utilisant la barre de Sheffer.

Exercice 8 Établir les tables de vérité des formules suivantes et dites si elles sont valides, vérifiables ou invérifiables :

a. $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$
b. $P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$
c. $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
d. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$
e. $((P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow P$

Exercice 9 trouvez les formes normales disjonctives :
a. $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$
b. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
c. $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$

Exercice 10 Trouvez les formes normales conjonctives :
a. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
b. $(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$
c. $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$

Exercice 11 Démontrez que :
a. $\vdash A \leftrightarrow A$, sachant qu'il ne faut pas prendre $A \rightarrow A$ comme axiome.
b. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Exercice 12 Établir les déductions suivantes :
a. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C$
b. $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$
c. $A, B \wedge C, A \wedge C \rightarrow E \vdash E$
d. $E, E \rightarrow (A \wedge D), D \vee F \rightarrow G \vdash G$
e. $\neg A \rightarrow C, (\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash (\neg A \rightarrow \neg C) \rightarrow A$.

Les axiomes de la logique propositionnelle sont :

- **1a.** $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- **1b.** $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **1c.** $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **1d.** $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **2.** $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
- **3a.** $A \wedge B \rightarrow A$
- **3b.** $A \wedge B \rightarrow B$
- **4a.** $A \rightarrow A \vee B$
- **4b.** $B \rightarrow A \vee B$
- **5.** $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
- **6.** $B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)$
- **7.** $A \rightarrow A$
- **8.** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **9.** $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$