Université Badji Mokhtar,
Département M.I

Annaba, le 02/12/2021

Série sur les structures algèbriques

Exercice 1. Une loi $*$ est définie sur $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ par le tableau suivant:

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

1. La loi $*$ est-elle **interne**?
2. La loi $*$ admet-elle un **élément neutre**?
3. Chaque élément admet-il un **symétrique**?

Exercice 2. Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:

$$f_1 = x, \quad f_2 = \frac{1}{x}, \quad f_3 = -x, \quad f_4 = -\frac{1}{x}.$$

Montrer que (G, o) est un groupe **abélien (commutatif)** avec $G = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\}$. On désigne par "$o$" la loi de composition des fonctions

Exercice 3. Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = x + y + x^2y^2.$$

1. Vérifier que $*$ est **commutative**.
2. La loi $*$ est-elle **associative** ?
3. Montrer que $\mathbb{R}$ admet **un neutre** pour $*$ et calculer ce **neutre**.
4. Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 * x = 0 \quad \text{et} \quad 1 * x = 1.$$

Execrice 4. Soit $(G, \star)$ un groupe et $Z = \{x \in G \text{ tel que } \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$. Montrer que H est un **sous groupe** de G.

Exercice 5. On considère sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne donnée par : $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R},\ *)$ est un **groupe abélien.**
2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par:

$$h(x) = 3x \quad \text{et} \quad h(x) = 3x + \tfrac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles **des morphismes de groupes?**

Université Badji Mokhtar,
Département M.I

Annaba, le 02/12/2021

Série sur les structures algèbriques

Exercice 1. Une loi $*$ est définie sur $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ par le tableau suivant:

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

1. La loi $*$ est-elle **interne**?

2. La loi $*$ admet-elle un **élément neutre**?

3. Chaque élément admet-il un **symétrique**?

Solution 1.

1. Oui la loi est interne, car la composition de n'importe quels deux éléments reste toujours dans A.

3. Le neutre c'est 0

2 On dit qu'une LCI admet un élément symétrique si

$$\forall x \in A,\ \exists x' \in A \text{ tel que } x * x' = x' * x = e = 0.$$

Or, pour l'élément $x = 1$, il n'existe pas d'élément dans A tel que $1 * x' = x' * 1 = 0$.

Exercice 2. Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1 = x,\quad f_2 = \frac{1}{x},\quad f_3 = -x,\quad f_4 = -\frac{1}{x}.$$

Montrer que (G, o) est un groupe **abélien (commutatif)** avec $G = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\}$.

Solution 2. Calculons d'abord le résultat des différentes compositions

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_1 &= f_1,\ \ f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = f_2,\ \ f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1 = f_3,\ \ f_1 \circ f_4 = f_4 \circ\ f_1 = f_4, \\ f_2 \circ f_2 &= f_1,\ \ f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_4,\ \ f_2 \circ f_4 = f_4 \circ f_2 = f_3,\ \ f_3 \circ f_3 = f_1, \\ f_3 \circ f_4 &= f_4 \circ f_3 = f_2,\ \ f_4 \circ f_4 = f_1. \end{aligned}$$

Donc, on remarque que la loi est interne.

1. Elle est clairement associative.

2. f_1 est élément neutre pour cette loi (d'après le tableau).

3. Chaque élément admet un inverse qui est lui-même.

4. Cette loi est commutative. On déduit donc, que (G, o) est groupe abélien.

Exercice 3. Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x * y = x + y + x^2 y^2.$$

1. Vérifier que $*$ est **commutative.**
2. La loi $*$ est-elle **associative** ?
3. Montrer que $\mathbb{R}$ admet **un neutre** pour $*$ et calculer ce **neutre.**
4. Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 * x = 0 \quad \text{et} \quad 1 * x = 1.$$

Solution 3.

1. La commutativité
Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors $x * y = x + y + x^2 y^2 = y + x + y^2 x^2$ (car le produit dans $\mathbb{R}$ est commutatif)

2. L'associativité
n'est pas associative car pour : $x = 1$, $y = 2$ et $z = -1$ on a:

$$\begin{aligned} (1 * 2) * -1 &= (1 * 2) + (-1) + (1 * 2)^2 (-1)^2 \\ &= \left[1 + 2 + 1^2.2^2\right] + (-1) + \left[1 + 2 + 1^2.2^2\right]^2 (-1)^2 \\ &= 7 - 1 + 49 = 55. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 * (2 * -1) &= 1 * \left[2 + (-1) + 2^2 (-1)^2\right] \\ &= 1 * 5 \\ &= 1 + 5 + 1^2.5^2 = 31. \end{aligned}$$

3. L'élément neutre
Comme la loi est commutative, il suffit de chercher l'existence de $e \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x * e = x$. Alors,

$$x * e = x + e + x^2 e^2 = x$$

d'où

$$e\left(1 + x^2 e\right) = 0$$

ona donc,

$$e = 0 \text{ ou } e = -\frac{1}{x^2},$$

ça d'une part, d'autre part on a $x * 0 = x$. Maintenant, comme l'élément neutre est unique, on déduit que le neutre pour cette loi est 0.

4. Résolution des deux équations:

$$1 * x = 0 \Leftrightarrow 1 + x + 1^2.x^2 = 1 + x + x^2 = 0$$

Cette équation n'admet de solution dans $\mathbb{R}$.

Execrice 4. Soit $(G, \star)$ un groupe et $Z = \{x \in G \text{ tel que } \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$. Montrer que H est un **sous groupe** de G.

Solution 4.

a. Z n'est pas vide car $e \in Z$, effectivement ona

$$e * x = x * e = x.$$

b. Soit x_1, x_2 dans Z, alors, pour tout $y \in G$, on a

$$\begin{aligned}(x_1 * x_2) * y &= x_1 * (x_2 * y) = x_1 * (y * x_2) = (x_1 * y) * x_2 = (y * x_1) * x_2 \\ &= y * (x_1 * x_2).\end{aligned}$$

D'où $x_1 * x_2 \in Z$.

3. Enfin, soit $x \in Z$, alors pour tout $y \in G$, on a

$$x * y = y * x \Rightarrow x^{-1} * x * y = x^{-1} * y * x \Rightarrow e * y = x^{-1} * y * x$$

alors,

$$y = x^{-1} * y * x \Rightarrow y * x^{-1} = x^{-1} * y * x * x^{-1}$$

d'où

$$y * x^{-1} = x^{-1} * y$$

Ainsi, on arrive à $x^{-1} \in Z$. De 1, 2 et 3 on déduit que Z est un sous groupe.

Exercice 5. On considère sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne donnée par : $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R},\ *)$ est un **groupe abélien.**

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par:

$$h(x) = 3x \quad \text{et} \quad h(x) = 3x + \tfrac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles **des morphismes de groupes?**

Solution 5. **1.** Montrons que $(\mathbb{R},\ *)$ est un **groupe abélien**

a. La commutativité
Soit $a,\ b \in \mathbb{R}$, alors $a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a$, d'où la loi $*$ est commutative.

b. L'associativité

Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= \left(a+b+\frac{1}{6}\right)*c = a+b+\frac{1}{6}+c+\frac{1}{6}\\ &= a+b+c+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

et

$$a*(b*c) = a*\left(b+c+\frac{1}{6}\right) = a+b+c+\frac{1}{3}.$$

D'où l'associativité.

c. L'existance de l'élément neutre

De la même manière la loi $*$ est commuatative, donc on cherche l'élément neutre d'un seul coté. Alors,

$$\exists\ e \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{R} \text{ on a } e*a = a$$

c'est à dire

$$e+a+\frac{1}{6} = a$$

d'où

$$e = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}.$$

d. Pour l'élément symétrique on doit vérifier que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists a' \in \mathbb{R} \text{ tel que } a*a' = e = -\frac{1}{6}$$

Alors,

$$a*a' = a+a'+\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

d'où

$$a' = -\frac{1}{3} - a \in \mathbb{R}.$$

On déduit donc, que $(\mathbb{R},\ *)$ est un groupe abélien.

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R},*)$ vers $(\mathbb{R},+)$ par:

$$g(x) = 3x \quad \text{et} \quad h(x) = 3x+\tfrac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles **des morphismes de groupes**?

a. On dit que g est un morphisme de groupes si et seulement si

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}:\ g(x*y) = g(x)+g(y).$$

Alors,

$$\begin{aligned}g(x*y) &= 3(x*y) = 3\left(x+y+\frac{1}{6}\right)\\ &= 3x+3y+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Or,

$$g(x) + g(y) = 3x + 3y$$

Donc, g n'est pas un morphisme de groupe.

b. Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} h(x * y) &= 3(x * y) + \frac{1}{2} \\ &= 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = 3(x + y) + 1. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= 3x + \frac{1}{2} + 3y + \frac{1}{2} \\ &= 3(x + y) + 1 = h(x * y). \end{aligned}$$

Alors, h est un morphisme de groupe.