Solution Série TD N° 3

Rappel de l'algorithme de la méthode simplexe algébrique

Entrée : PL où toutes les contraintes fonctionnelles sont de la forme $\leq$.
Sortie : Solution optimale du PL (unique, multiple, infinie ou pas de solution).
Début

Etape 1 : Initialisations.

- Ecrire le PL dans la forme standard (en rajoutant les variables d'écart).
- Déterminer solution de base de départ en prenant comme matrice de base celle composé de vecteurs associés aux variables d'écart ; $AX=B.X_B + N.X_N=b$, Poser $X_N = 0$ et déterminer la solution de base qui est : $\boxed{X_B = B^{-1}.b=\bar{b}}$ et $\boxed{Z=c_B.X_B}$
- Pour chaque variable hors base x_j Calculer c_j-z_j avec $z_j=c_B\mu_j=c_BB^{-1}a_j$.

Etape 2 : Recherche de la solution optimale.

Tant Que [($\exists$ j$\in E_N$: c_j-z_j>0) pour Max / ($\exists$ j$\in E_N$: c_j-z_j<0) pour Min] **Faire**

// c_j-z_j pour les variables hors base.

Déterminer la variable entrante x_r selon le critère :

Max{ c_j-z_j/ c_j-z_j >0}=c_r-z_r $\forall$ j$\in E_N$ pour Max / Min{ c_j-z_j/ c_j-z_j <0}= c_r-z_r $\forall$ j$\in E_N$ pour Min

Si ($\mu_r = B^{-1}a_r \leq 0$) **Alors** **Stop,** pas de solution optimale dont la valeur de Z est finie

Sinon Déterminer la nouvelle solution de base comme suit :

- $X_B=B^{-1}.b - B^{-1}.a_r.x_r= \bar{b}$ -$\mu_r.x_r$ qui détermine la variable sortante x_k selon le critère :

$$\boxed{x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \underset{1\leq i\leq m}{\text{Min}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\}}$$

- $Z'=Z+(c_r-z_r)x_r$

FSi

Pour la nouvelle base et pour chaque variable hors base x_j calculer c_j-z_j .

FTQue

Si [($\forall$ j$\in E_N$: c_j-z_j<0) pour Max / ($\forall$ j$\in E_N$: c_j-z_j>0) pour Min **Alors**
Stop, la solution de base actuelle est optimale et unique

Sinon **Stop,** la solution de base actuelle est optimale et multiple **FSi**

Fin

Exercice 1

1.

$$\begin{array}{llll}
\max & 3x_1 & +2x_2 & \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq 5 \\
 & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq 0
\end{array}$$

A) Résolution du PL avec la méthode simplexe algébrique

Étape 1: Initialisation

- **Mise du PL sous forme standard (en rajoutant les variables d'écart)**
  $\boldsymbol{Max}\ Z = 3x_1 + 2x_2$
  Sujet à:
  $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$
  $x_1 - x_2 + x_4 = 1$

$x_1 + x_2 + x_5 = 3$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

dont l'écriture matricielle est:

$\boldsymbol{Max}\; Z = 3x_1 + 2x_2$
<u>Sujet</u> <u>à</u>:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Détermination d'une solution de base**
  - On choisit comme matrice de base (B) celle composée de vecteurs associés aux variables d'écart:
    $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, c_B = [0,0,0], c_N = [3,2]$
  - On pose $X_N = 0$
  - $X_B = B^{-1}.b = \bar{b}$ et $Z = c_B.X_B$
    $X_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
    $Z = [0,0,0]. \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$
  - Pour chaque variable hors base $j \in E_N = \{1,2\}$, on calcule $c_j - z_j$ avec $z_j = c_B.\mu_j, \mu_j = B^{-1}.a_j$ et a_j est la colonne j de la matrice A.
    $c_1 - z_1 = 3 - [0,0,0]. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$
    $c_2 - z_2 = 2 - [0,0,0]. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

Étape 2: Recherche de la solution optimale

- On teste si la solution de base actuelle est optimale, c.à.d. $(\forall j \in E_N : c_j - z_j \leq 0)$.
  La solution de base actuelle n'est pas optimale car $c_1 - z_1 > 0$ et $c_2 - z_2 > 0$.
- On Détermine la variable entrante x_r selon le critère:
  $r = \underset{\forall j \in E_N}{arg\ max}\{c_j - z_j | c_j - z_j > 0\}$
  $r = \underset{\forall j \in E_N}{arg\ max}\{c_1 - z_1 = 3, c_2 - z_2 = 2\} = 3,$
  où *arg max* représente l'indice de la variable pour laquelle la valeur de la fonction concernée atteint son maximum, c.à.d. arg max $f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | \forall x' \in X, f(x) \geq f(x')\}$
  *D*onc la variable entrante est x_1.
- On teste l'inexistence d'une solution optimale dont la valeur de Z est finie, c.à.d. Si $(\mu_r = B^{-1}.a_r \leq 0)$.
  Cette condition n'est pas vérifiée car $\mu_1 = B^{-1}.a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$

- On détermine alors la nouvelle solution de base comme suit:
  $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_r.x_r = \overline{b} - \mu_r.x_r$ qui détermine la variable sortante x_k selon le critère:
  $$x_k = X_{B_s} = \frac{\overline{b}_s}{\mu_{sr}}, s = \underset{1\le i\le m}{arg\ min}\left\{\frac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\},$$
  où *arg min* représente l'indice de la variable pour laquelle la valeur de la fonction concernée atteint son minimum, c.à.d. $\arg\min f \overset{\text{def}}{=} \{x \in X | \forall x' \in X, f(x) \le f(x')\}$

  On modifie la solution de départ selon l'expression:

  $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_1.x_1 = \overline{b} - \mu_1.x_1$

  On aura donc: $X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . x_1$

  On obtient alors :
  $x_3 = 5 - 2x_1$
  $x_4 = 1 - x_1$,
  $x_5 = 3 - x_1$
  $$s = \underset{1\le i\le m}{arg\ min}\left\{\frac{5}{2}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 2$$
  $$x_4 = X_{B_2} = \frac{\overline{b}_2}{\mu_{2r}}$$
  Le minimum s'obtient à *i=2*, de base $B = [a_3, a_4, a_5]$, le vecteur de la 2ème colonne (*i=2*) $a_4$de B sera le vecteur sortant, qui correspondant à la variable sortante x_4.

- La nouvelle base est donc: $B = [a_3, a_1, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, c_B = [0,2,0]$.

- La nouvelle solution de base est avec $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5 - 2.1 = 3$, $x_4 = 0, x_5 = 3 - 1 = 2$

- La 2ème solution de base réalisable SBR est $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (1,0,3,0,2)^t$

  Avec la nouvelle valeur de la fonction objective est alors : $Z = Z0 + (c_1 - z_1).x_1 = 0 + 3.1 = 3$.

Peut-on améliorer à nouveau la valeur numérique de la fonction objective ?

- Il faut examiner les valeurs c_j-z_j pour les variables hors base qui sont dans ce cas $E_N=\{x_2 ,x_4\}$
  $c_2 - z_2 = c_2 - c_B.B^{-1}.a_2 = c_2 - c_B.\mu_2$
  $c_4 - z_4 = c_4 - c_B.B^{-1}.a_4 = c_4 - c_B.\mu_4$
  Avec $B = [a_3, a_1, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $det(B) = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
  $$c_2 - z_2 = 2 - [0,3,0]. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - [0,3,0]. \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$
  $$c_4 - z_4 = 0 - [0,3,0]. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - [0,3,0]. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3$$

La solution de base précédente n'est pas optimale car le critère d'optimalité n'est pas vérifié pas vérifié, on a $c_2 - z_2 > 0$.

- La variable entrante dans la base est x_2 car:

  $r = \underset{\forall j \in E_N}{arg\ max}\{c_j - z_j | c_j - z_j > 0\} = 2$

  Donc le vecteur **a_2** sera introduit dans la base.

- Recherche de la variable sortante:

  On modifie la solution de départ selon l'expression:

  $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_2.x_2 = \bar{b} - \mu_2.x_2$

  On aura donc: $X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} . x_2$

  On obtient alors :

  $x_3 = 3 - 3x_2$
  $x_1 = 1 + x_2$
  $x_5 = 2 - 2x_2$

  $s = arg \underset{1 \le i \le 3}{min} \left\{\frac{3}{3}, \frac{2}{2}\right\} = \{1, 3\}$

  $x_3 = X_{B_1} = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{1r}}$

  $x_5 = X_{B_3} = \frac{\bar{b}_3}{\mu_{3r}}$

  Le minimum s'obtient à (*i=1* ou *i=3*), de base $B = [a_3, a_1, a_5]$, le vecteur de la 1ère colonne (*i=1*) a_3 ou de la 3ème colonne (*i=3*) $a_5$de B sera le vecteur sortant, qui correspondant à la variable sortante x_3 ou x_5, on choisit x_5.

- La nouvelle base est donc: $B = [a_3, a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, c_B = [0,3,2]$.
- La nouvelle solution de base est avec $x_1 = 1 + 1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3 - 3.1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$
- La 3ème solution de base réalisable SBR est $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (2,1,0,0,0)^t$
  Avec la nouvelle valeur de la fonction objective est alors : *Z= Z0 + (c_2 – z_2).x_2 =3 + 5.1 =8.*

Peut-on améliorer à nouveau la valeur numérique de la fonction objective ?

- Il faut examiner les valeurs c_j-z_j pour les variables hors base qui sont dans ce cas $E_N=\{x_4 ,x_5\}$
  $c_4 - z_4 = c_4 - c_B.B^{-1}.a_4 = c_4 - c_B.\mu_4$
  $c_5 - z_5 = c_5 - c_B.B^{-1}.a_5 = c_5 - c_B.\mu_5$
  Avec $B = [a_3, a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

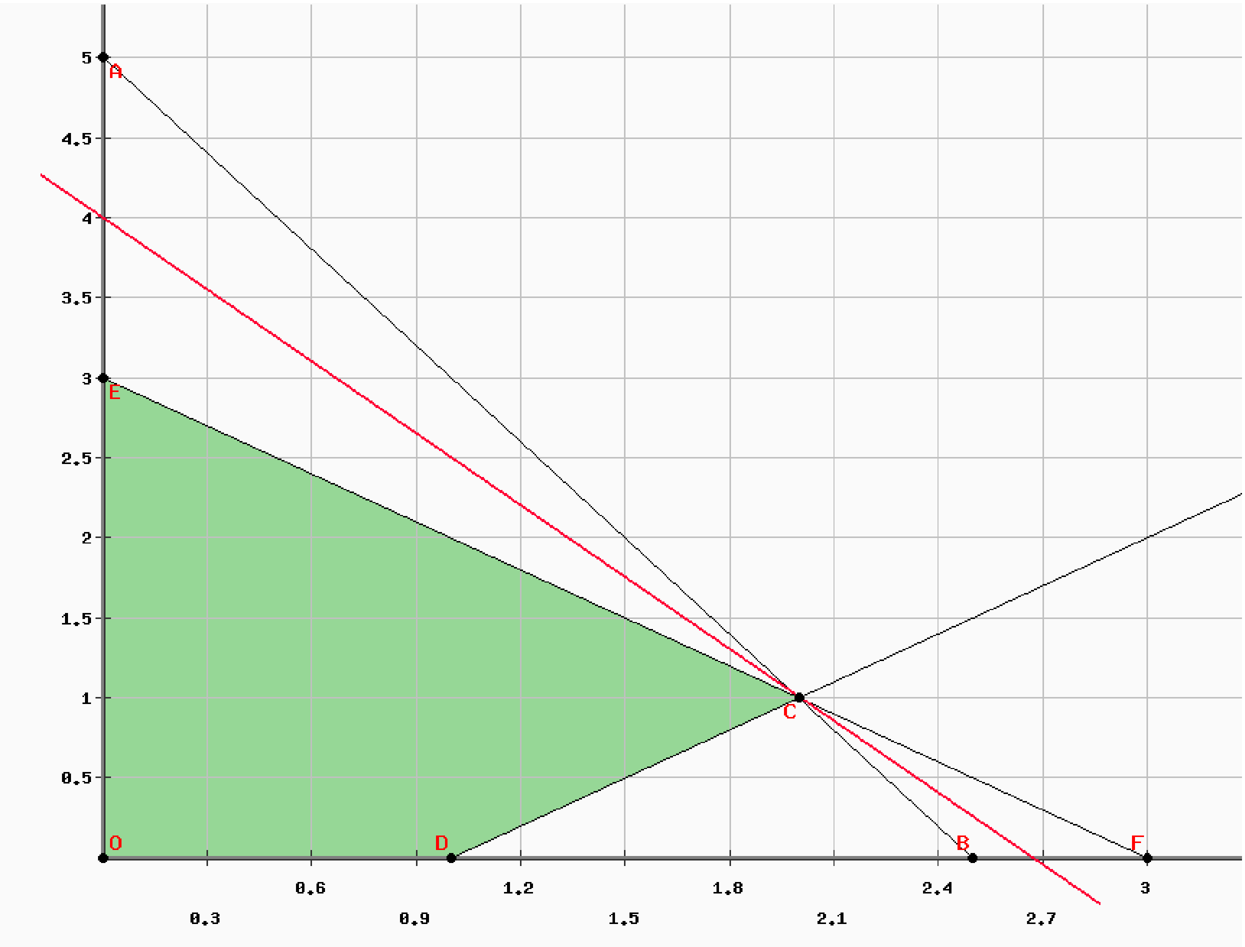
  $det(B) = 2 \neq 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$c_4 - z_4 = 0 - [0,3,2].\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - [0,3,2].\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - [0,3,2].\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - [0,3,2].\begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}$$

La solution de base actuelle est optimale et unique (le critère d'optimalité est vérifié, c.à.d. $\forall j \in E_N : c_j - z_j < 0$).
Donc la solution optimale unique est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)^t = (2,1,0,0,0)^t$ et la valeur de la fonction objectif $Z=8$.

B) Illustration Graphique



Point	Coordonée X (X1)	Coordonée Y (X2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	5	10
B	2.5	0	7.5
C	2	1	8
D	1	0	3
E	0	3	6
F	3	0	9

2.

$$
\begin{array}{llll}
\min & 2x_1 & -x_2 & \\
 & x_1 & -3x_2 & \geq -3 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \geq -2 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\
 & 3x_1 & -2x_2 & \leq 6
\end{array}
$$

A) Résolution du PL avec la méthode simplexe algébrique

Étape 1: Initialisation

- **Mise du PL sous forme standard (en rajoutant les variables d'écart)**
  $\boldsymbol{Min}\ Z = 2x_1 - x_2$
  <u>Sujet</u> <u>à:</u>
  $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$
  $-2x_1 - x_2 + x_4 = 2$
  $2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6$
  $3x_1 - 2x_2 + x_6 = 6$
  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
  dont l'écriture matricielle est:

  $\boldsymbol{Min}\ Z = 2x_1 - x_2$
  <u>Sujet</u> <u>à:</u>

$$
\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

  La matrice $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Détermination d'une solution de base**
  - On choisit comme matrice de base (B) celle composée de vecteurs associés aux variables d'écart:
    $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, c_B = [0,0,0,0], c_N = [2, -1]$
  - On pose $X_N = 0$
  - $X_B = B^{-1}.b = \bar{b}$ et $Z = c_B.X_B$
    $X_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$
    $Z = [0,0,0,0]. \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$
  - Pour chaque variable hors base $j \in E_N = \{1,2\}$, on calcule $c_j - z_j$ avec $z_j = c_B.\mu_j, \mu_j = B^{-1}.a_j$ et a_j est la colonne j de la matrice A.

$$c_1 - z_1 = 2 - [0,0,0,0].\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix} = 3$$

$$c_2 - z_2 = -1 - [0,0,0,0].\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{bmatrix} = -1$$

Étape 2: Recherche de la solution optimale

- On teste si la solution de base actuelle est optimale, c.à.d. ($\forall j \in E_N: c_j - z_j \geq 0$).
  La solution de base actuelle n'est pas optimale car $c_2 - z_2 < 0$.
- On Détermine la variable entrante x_r selon le critère:
  $r = \underset{\forall j \in E_N}{arg\ min}\{c_j - z_j | c_j - z_j < 0\}$
  $r = \underset{\forall j \in E_N}{arg\ min}\{c_2 - z_2 = -1\} = 2$
  *D*onc la variable entrante est x_2.
- On teste l'inexistence d'une solution optimale dont la valeur de Z est finie, c.à.d.
  Si ($\mu_r = B^{-1}.a_r \leq 0$).
  Cette condition n'est pas vérifiée car $\mu_2 = B^{-1}.a_2 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{bmatrix} =$
  $\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{bmatrix} \gtrless 0$
- On détermine alors la nouvelle solution de base comme suit:
  $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_r.x_r = \overline{b} - \mu_r.x_r$ qui détermine la variable sortante x_k selon le critère:
  $x_k = X_{B_s} = \dfrac{\overline{b}_s}{\mu_{sr}}, s = \underset{1 \leq i \leq m}{arg\ min}\left\{\dfrac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\}$
  On modifie la solution de départ selon l'expression:
  $X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.a_2.x_2 = \overline{b} - \mu_2.x_2$
  On aura donc: $X_B = \begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}3\\2\\6\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{bmatrix}.x_2$
  On obtient alors :
  $x_3 = 3 - 3x_2$
  $x_4 = 2 + x_2$
  $x_5 = 6 - 3x_2$'
  $x_6 = 6 + 2x_2$
  $s = arg \underset{1 \leq i \leq m}{min}\left\{\dfrac{3}{3}, \dfrac{6}{3}\right\} = 1$
  $x_3 = X_{B_1} = \dfrac{\overline{b}_1}{\mu_{1r}}$
  Le minimum s'obtient à *i=1*, de base $B = [a_3, a_4, a_5, a_6]$, le vecteur de la 1ère colonne (*i=1*) a_3 de B sera le vecteur sortant, qui correspondant à la variable sortante x_3.

- La nouvelle base est donc: $B = [a_2, a_4, a_5, a_6]$.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_B = [-1,0,0,0].$$

- La nouvelle solution de base est avec $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 2 + 1 = 3, x_5 = 6 - 3.1 = 3, x_6 = 6 + 2.1 = 8$
- La 2ème solution de base réalisable SBR est $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t = (0,1,0,3,3,8)^t$

  Avec la nouvelle valeur de la fonction objective est alors :

  $Z = Z0 + (c_2 - z_2).x_2 = 0 + -1.1 = -1.$

Peut-on améliorer à nouveau la valeur numérique de la fonction objective ?

- Il faut examiner les valeurs c_j-z_j pour les variables hors base qui sont dans ce cas $E_N=\{x_1, x_3\}$

  $c_1 - z_1 = c_1 - c_B . B^{-1} . a_1 = c_1 - c_B . \mu_1$

  $c_3 - z_3 = c_3 - c_B . B^{-1} . a_3 = c_3 - c_B . \mu_3$

  Avec $B = [a_2, a_4, a_5, a_6] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, det(B) = 3 \neq 0$

  $$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

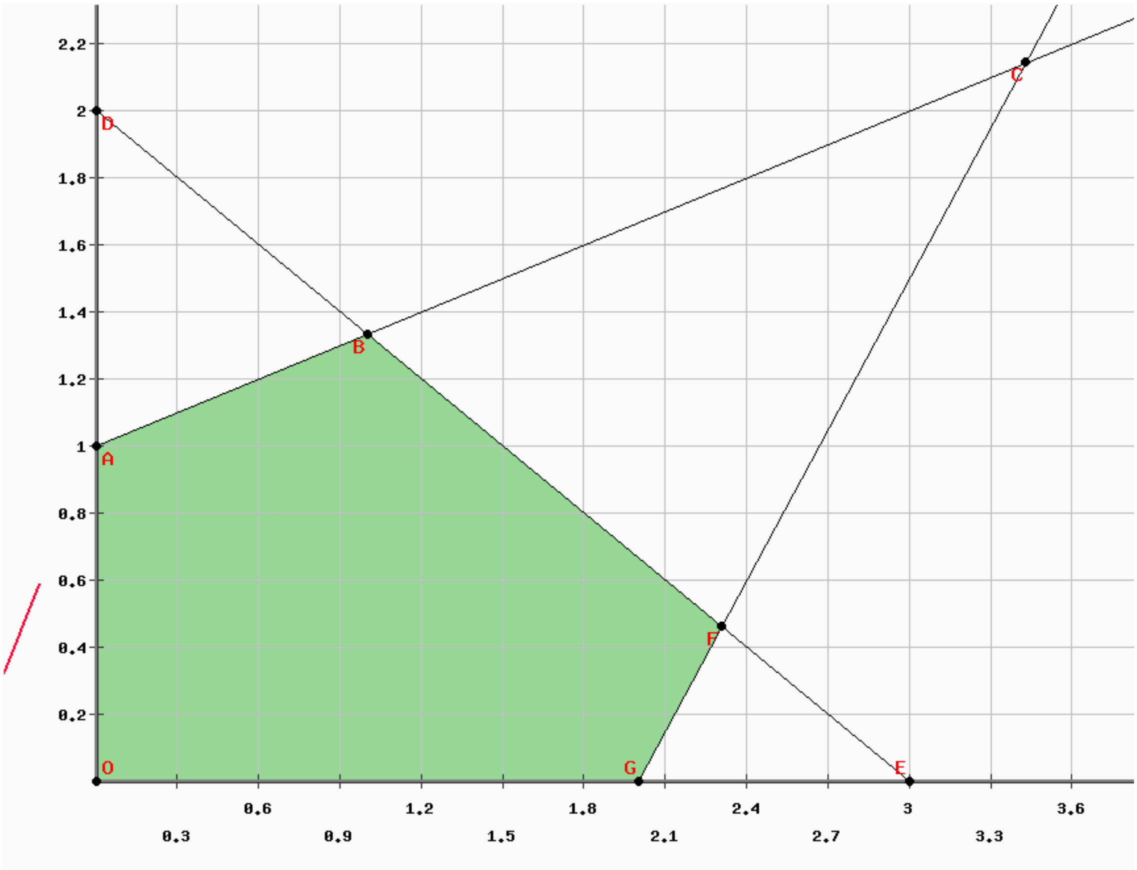
  $$c_1 - z_1 = 2 - [-1,0,0,0]. \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 - [-1,0,0,0]. \begin{bmatrix} -1/3 \\ -7/3 \\ 3 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \frac{5}{3}$$

  $$c_4 - z_4 = 0 - [-1,0,0,0]. \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - [-1,0,0,0]. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

  La solution de base actuelle est optimale et multiple car le critère d'optimalité est vérifié $\left(\forall j \in E_N : c_j - z_j \leq 0\right)$ et $(c_4 - z_4 = 0)$.

  Donc la solution optimale unique est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)^t = = (0,1,0,3,3,8)^t$ et la valeur de la fonction objectif $Z=-1$.

B) Illustration graphique du PL



Point	Coordonée X (X_1)	Coordonée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	1	-1
B	1	1.3333333333333	0.66666666666667
C	3.4285714285714	2.1428571428571	4.7142857142857
D	0	2	-2
E	3	0	6
F	2.3076923076923	0.46153846153846	4.1538461538462
G	2	0	4

NOTE:

En vert, les points dont on trouve la solution.

En rouge, les points qui ne satisfont pas les contraintes.

Exercice 2

1)

$$\begin{array}{lllllll} \max & 5x_1 & +x_2 & +6x_3 & +2x_4 & & \\ & 4x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq 44 \\ & 8x_1 & +6x_2 & +4x_3 & +3x_4 & \leq 36 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4$
Sujet à:
$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 44$
$8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 36$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tableau 0

C_B	c_j / Variable de base	5 x_1	1 x_2	6 x_3	2 x_4	0 x_5	0 x_6	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
0	x_5	4	4	4	1	1	0	44	44/4=11	
0	x_6	8	6	4	3	0	1	36	36/4=9	←Min
	c_j-z_j	5	1	6	2	0	0	Z=0		

x_6: var sortante

x_3: variable entrante

Tableau 1

C_B	c_j / Variable de base	5 x_1	1 x_2	6 x_3	2 x_4	0 x_5	0 x_6	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$
0	x_5	-4	-2	0	-2	1	-1	8
6	x_3	2	1.5	1	0.75	0	0.25	9
	c_j-z_j	-7	-8	0	-2.5	0	-1.5	Z=54

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^t = (0,0,9,0^t)$ et la fonction $Z=54$.

2)

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +x_4 & \\ & x_1 & +3x_2 & & +x_4 & \leq 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & & & \leq 3 \\ & & x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

Sujet à :
$x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 4$
$2x_1 + x_2 + x_6 = 3$
$x_2 + 4x_3 + x_7 = 3$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

x_5: var sortante

Tableau 0										
C_B	c_j	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base X_B=B^{-1}.b**	**Quotients**
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	x_5	1	3	0	1	1	0	0	4	4/3=1.33 ←Min
0	x_6	2	1	0	0	0	1	0	3	3/1=3
0	x_7	0	1	4	0	0	0	1	3	3/1=3
	c_j-z_j	2	4	1	1	0	0	0	Z=0	

x_2: variable entrante

x_7: var sortante

Tableau 1										
C_B	c_j	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base X_B=B^{-1}.b**	**Quotients**
	Var de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
4	x_2	1/3	1	0	1/3	1/3	0	0	4/3	--
0	x_6	5/3	0	0	-1/3	-1/3	1	0	5/3	--
0	x_7	-1/3	0	4	2/3	-1/3	0	1	5/3	5/3÷4=5/12 ←Min
	c_j-z_j	2/3	0	1	-1/3	-4/3	0	0	Z=16/3	

x_3: variable entrante

x_6: var sortante

Tableau 2										
C_B	c_j	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base X_B=B^{-1}.b**	**Quotients**
	Var de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
4	x_2	1/3	1	0	1/3	1/3	0	0	4/3	4/3÷1/3=4
0	x_6	5/3	0	0	-1/3	-1/3	1	0	5/3	5/3÷5/3=1 ←Min
1	x_3	-1/12	0	1	1/6	-1/12	0	1/4	5/12	--
	c_j-z_j	3/4	0	0	-1/2	-5/4	0	1/4	Z=23/4	

x_1: variable entrante

Tableau 3									
C_B	c_j	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base X_B=B^{-1}.b**
	Var de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
4	x_2	0	1	0	2/5	2/5	-1/5	0	1
2	x_1	1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0	1
1	x_3	0	0	1	3/20	-1/10	1/20	1/4	1/2
	c_j-z_j	0	0	0	-7/20	-11/10	-9/10	-1/4	Z=13/2

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^t = (1,1,\frac{1}{2},0)^t$ et la fonction $Z=13/2$.

3)

$$\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & -2x_2 & +x_3 & \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 12 \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & +3x_2 & & \leq 9 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 6$

$x_1 + 3x_2 + x_6 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tableau 0									
C_B	c_j	1	-2	1	0	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	1	2	3	1	0	0	12	12/1=12
0	x_5	2	1	-1	0	1	0	6	6/2=3 ←Min
0	x_6	-1	3	0	0	0	1	3	--
	c_j-z_j	1	-2	1	0	0	0	Z=0	

x_5: var sortante

x_1: variable entrante

Tableau 1									
C_B	c_j	1	-2	1	0	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	0	3/3	7/2	1	-1/2	0	9	9÷7/2=18/7 ←Min
1	x_1	1	1/2	-1/2	0	1/2	0	3	--
0	x_6	0	7/2	-1/2	0	1/2	1	12	--
	c_j-z_j	0	-5/2	3/2	0	-1/2	0	Z=3	

x_4: var sortante

x_3: variable entrante

Tableau 2								
C_B	c_j	2	4	1	1	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$
	Var de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	0	3/7	1	2/7	-1/7	0	18/7
1	x_1	1	5/7	0	1/7	3/7	0	30/7
0	x_6	0	26/7	0	1/7	3/7	1	93/7
	c_j-z_j	0	-22/7	0	-3/7	-2/7	0	Z=48/7

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^t = (\frac{30}{7}, 0, \frac{18}{7})^t$ et la fonction *Z=48/7*.

4)

$$\begin{array}{lllll} \max & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ & x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq 10 \\ & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leq 10 \\ & x_1 & -3x_2 & +x_3 & \leq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = 2x_1 + 3\,x_2 - x_3$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10$

$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 10$

$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_6 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

x_4: var sortante

Tableau 0										
C_B	c_j	2	3	-1	0	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_4	1	2	-1	1	0	0	10	10/2=5	←Min
0	x_5	3	-2	1	0	1	0	10	--	
0	x_6	1	-3	1	0	0	1	10	--	
	c_j-z_j	2	3	-1	0	0	0	Z=0		

x_2: variable entrante

x_5: var sortante

Tableau 1										
C_B	c_j	2	3	-1	0	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
3	x_2	1/2	1	-1/2	1/2	0	0	5	5÷1/2=10	
0	x_5	4	0	0	1	1	0	20	20/4=5	←Min
0	x_6	5/2	0	-1/2	3/2	0	1	25	25÷5/2=10	
	c_j-z_j	1/2	0	1/2	-3/2	0	0	Z=15		

x_1: variable entrante

Tableau 1									
C_B	c_j	2	3	-1	0	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
3	x_2	0	1	-1/2	3/8	-1/8	0	5/2	--
2	x_1	1	0	0	1/4	1/4	0	5	--
0	x_6	0	0	-1/2	7/8	-5/8	1	25/2	--
	c_j-z_j	0	0	1/2	-13/8	-1/8	0	Z=35/2	

- La solution n'est pas bornée.

5)

$$
\begin{array}{llll}
\min & 2x_1 & -x_2 & \\
 & x_1 & -3x_2 & \geq -3 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \geq -2 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\
 & 3x_1 & -2x_2 & \leq 6
\end{array}
$$

$x_1, x_2 \geq 0$

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Min}\; Z = 2x_1 - x_2$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

$-2x_1 - x_2 + x_4 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6$

$3x_1 - 2x_2 + x_6 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tableau 0										
C_B	c_j	2	-1	0	0	0	0	Solution de base X_B=B^{-1}.b	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_3	-1	3	1	0	0	0	3	3/3=1	←Min
0	x_4	-2	-1	0	1	0	0	2	--	
0	x_5	2	3	0	0	1	0	6	6/3=2	
0	x_6	3	-2	0	0	0	1	6	--	
	c_j-z_j	2	-1	0	0	0	0	Z=0		

x_3: *var sortante*

x_2: *variable entrante*

Tableau 1								
C_B	c_j	2	-1	0	0	0	0	Solution de base X_B=B^{-1}.b
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_2	-1/3	1	1/3	0	0	0	1
0	x_4	-7/3	0	1/3	1	0	0	3
-1	x_5	3	0	-1	0	1	0	3
0	x_6	7/3	0	2/3	0	0	1	8
	c_j-z_j	5/3	0	1/3	0	0	0	Z=-1

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*)^t = (0,1)^t$ et la fonction Z=-*1*.

Exercice 3

$$\begin{array}{llllll}
\max & 2x_1 & +x_2 & +6x_3 & -4x_4 & \\
& x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -x_4 & \leq 6 \\
& 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 12 \\
& x_1 & & +x_3 & +x_4 & \leq 2 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

1)

- Mise du PL sous forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 + -4x_4$
$\boldsymbol{Sujet}$ à :
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 6$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 12$
$x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

- Solution de base réalisable avec comme variables de base x_1, x_2, x_4:

$$X_B = (x_1, x_2, x_4)^t, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow X_B = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, c_B = [2,1,-4],$$
$$X_N = (x_3, x_5, x_6, x_7)^t = 0, N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_N = [6,0,0,0], E_N = \{3,5,6,7\}$$

Donc la solution de base réalisable est : $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^t = (1,3,0,1,0,0,0)^t$

2)

- On teste l'optimalité de cette solution, i;e. $(\forall j \in E_N: c_j - z_j \leq 0\ | z_j = c_B.\mu_j, \mu_j = B^{-1}.a_j)$

$$c_3 - z_3 = 6 - [2,1,-4].\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 - \frac{89}{4} = -\frac{65}{4}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - [2,1,-4].\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - \frac{17}{4} = -\frac{17}{4}$$

$$c_6 - z_6 = 0 - [2,1,-4].\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$c_7 - z_7 = 0 - [2,1,-4].\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 5/4 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - \frac{11}{4} = -\frac{11}{4}$$

$c_6 - z_6 > 0$, donc, non, cette solution n'est pas optimale.

- Recherche de solution optimale avec la méthode du simplexe tableaux:

$$B^{-1}.N = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/4 & 3/4 & -1/2 & 5/4 \\ -9/4 & -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -15/4 & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Tableau 0

C_B	c_j / **Variable de base**	**2**	**1**	**6**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base**	**Quotients**	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$X_B=B^{-1}.b$		
2	x_1	1	0	19/4	0	3/4	-1/2	5/4	1	--	
1	x_2	0	1	-9/4	0	-1/4	1/2	-3/4	3	3÷1/2=6	
-4	x_4	0	0	-15/4	1	-3/4	1/2	-1/4	1	1÷1/2=2	←Min
	c_j-z_j	0	0	-65/4	0	-17/4	5/2	-11/4	Z=1		

x_4: var sortante

x_6: variable entrante

Tableau 1

C_B	c_j / **Variable de base**	**2**	**1**	**6**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base**	**Quotients**	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$X_B=B^{-1}.b$		
2	x_1	1	0	1	1	0	0	1	2	2/1=2	
1	x_2	0	1	3/2	-1	1/2	0	-1/2	2	2÷3/2=4/2	←Min
0	x_6	0	0	-15/2	2	-3/2	1	-1/2	2	--	
	c_j-z_j	0	0	5/2	-5	-1/2	0	-3/2	Z=6		

x_2: var sortante

x_3: variable entrante

Tableau 2

C_B	c_j / **Variable de base**	**2**	**1**	**6**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**Solution de base**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$X_B=B^{-1}.b$
2	x_1	1	-2/3	0	5/3	-1/3	0	4/3	2/3
6	x_3	0	2/3	1	-2/3	1/3	0	-1/3	4/3
0	x_6	0	5	0	-3	1	1	-3	12
	c_j-z_j	0	-5/3	0	-10/3	-4/3	0	-2/3	Z=28/3

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^t = (\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)^t$ et la fonction *Z=28/3*.

Exercice 4

$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & -x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & =6 \\ & x_1 & -2x_2 & \leq 0 \\ & x_1, & x_2, & \geq 0 \end{array}$$

- Mise du PL sous forme standard:

$\boldsymbol{Max}\ Z = 2x_1 - x_2$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$2x_1 + 3x_2 = 6$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Tableau 0							
C_B	**c_j** / **Variable de base**	**2** / x_1	**-1** / x_2	**0** / x_3	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**	**Quotients**	
-1	x_2	2/3	1	0	2	2÷2/3=3	
0	x_3	7/3	0	1	4	4÷7/3=12/7	←Min
	c_j-z_j	8/3	0	0	Z=-2		

x_3: var sortante

x_1: variable entrante

Tableau 1					
C_B	**c_j** / **Variable de base**	**2** / x_1	**-1** / x_2	**0** / x_3	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**
-1	x_2	0	0	-2/7	6/7
2	x_1	1	1	3/7	12/7
	c_j-z_j	0	0	-8/7	Z=18/7

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*)^t = (\frac{12}{7}, \frac{6}{7})^t$ et la fonction $Z=18/7$.

Exercice 5

$$\begin{array}{lllllll} \max z = & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +10x_4 & +3x_5 & \\ & 7x_1 & +3x_2 & +10x_3 & +5x_4 & +8x_5 & =37 \\ & 7x_1 & +4x_2 & +7x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =26 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

- La matrice $B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ est inversible car $det(B) = -21 \neq 0$ et son inverse est $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 10/21 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$. Cette base est réalisable car $B^{-1}.b = \begin{bmatrix} -1/3 & 10/21 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 37 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/21 \\ 11/3 \end{bmatrix} \geq 0$.
- Écriture du PL par rapport à la base $B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$:

Soit la matrice hors-base $N = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ associée à B, on peut écrire:

$$\begin{cases} B.X_B + N.X_N = b, X_B = (x_1, x_3)^t, X_N = (x_2, x_4, x_5)^t \\ c_B^t.X_B + c_N^t.X_N = Z(X), c_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

D'où pour un $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathbb{R}^m$ on a:

$(c_B^t - Y^t.B).X_B + (c_N^t - Y^t.N).X_N = Z(X) - Y^t.b$

En choisissant Y tel que:

$c_B^t - Y^t.B = 0 \Leftrightarrow Y^t = c_B^t.B^{-1}$

On obtient alors:

$$\begin{cases} X_B + B^{-1}.N.X_N = B^{-1}.b \\ (c_N^t - c_B^t.B^{-1}.N).X_N = Z(X) - c_B^t.B^{-1}.b \end{cases}$$

Qui est *l'écriture canonique* du PL par rapport à la base B.

Cette écriture peut être représentée sous la forme suivante:

$$\left(\begin{array}{ccc:c|c} 1 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \overline{N} = B^{-1}.N & \overline{b} = B^{-1}.b \\ 0 & \cdots & 1 & & \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \overline{c_N} = c_N - c_B^t.B^{-1}.N & Z(X) - c_B^t.B^{-1}.b \end{array}\right)$$

Donc, l'écriture canonique du PL par rapport à la matrice de base $B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ est:

$$\left(\begin{array}{cc:ccc|c} 1 & 0 & 19/21 & 15/7 & 4/21 & 1/21 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1 & 2/3 & 11/3 \\ \hline 0 & 0 & 55/21 & 53/7 & -5/21 & Z(X) - 311/21 \end{array}\right)$$

Ainsi pour $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, on obtient la solution de base $x_1 = \frac{1}{21}, x_3 = \frac{11}{3}$ et $Z = \frac{311}{21}$. La base (x_1, x_1) n'est optimale.

Exercice 6

Min z = 4x1 + x2

$$\text{Sc} \begin{cases} 3x1 + x2 = 3 \\ 4x1 + 3x2 \geq 6 \\ x1 + 2x2 \leq 4 \\ x1 \geq 0 , x2 \geq 0 \end{cases}$$

- Mise du PL sous forme standard en ajoutant des variables d'excès, d'écart, et artificielles, selon qu'il convient:
    - Comme la contrainte fonctionnelle 1 est de type '=' il est nécessaire d'ajouter la variable artificielle x_5.
    - Comme la contrainte fonctionnelle 2 est de type '≥' il est nécessaire d'ajouter la variable d'excès x_3 et la variable artificielle x_6.
    - Comme la contrainte fonctionnelle 3 est de type '≤' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart x_4.

$\boldsymbol{Min}\, Z = 4x_1 + x_2$

Sujet à :

$3x_1 + x_2 + x_5 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6$

$x_1 \mp 2x_2 + x_4 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Phase I:

La fonction objective à minimiser est la somme des variables artificielles et qui est:

$\boldsymbol{Min}\, Z' = x_5 + x_6$

Tableau 0										
C_B	c_j	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**	**Quotients**	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
1	x_5	3	1	0	0	1	0	3	3/3=1	←Min
1	x_6	4	3	-1	0	0	1	6	6/4=3/2	
0	x_4	1	2	0	1	0	0	4	4/1=4	
	c_j-z_j	-7	-4	1	0	0	0	Z'=9		

x_5: var sortante

x_1: variable entrante

Tableau 1										
C_B	c_j	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**	**Quotients**	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	1÷1/3=3	
1	x_6	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	2÷5/3=6/5	←Min
0	x_4	0	5/3	0	1	-1/3	0	3	3÷5/3=9/5	
	c_j-z_j	0	-5/3	1	0	4/3	0	Z'=2		

x_6: var sortante

x_2: variable entrante

Tableau 2								
C_B	c_j	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5
0	x_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
0	x_4	0	0	1	1	1	-1	1
	c_j-z_j	0	0	0	0	1	1	Z'=0

Bien que Z'=0 et le critère d'optimalité est satisfait, alors la phase I est terminée et le PL original admet des solutions réalisables.

Débutons la phase II en optimisant cette fois la fonction objectif du modèle original et en éliminant du dernier tableau Phase I, les deux colonnes associées aux variables artificielles x_5 et x_6.

Phase II:

la fonction à optimiser est celle du programme linéaire original qui est :

$\boldsymbol{Min}\, Z = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$

Tableau 0								
C_B	c_j	**4**	**1**	**0**	**0**	**Solution de base $X_B=B^{-1}.b$**	**Quotients**	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4			
4	x_1	1	0	1/5	0	3/5	3/5÷1/5=3	
1	x_2	0	1	-3/5	0	6/5	--	
0	x_4	0	0	1	1	1	1/1=1	←Min
	c_j-z_j	0	0	-1/5	0	Z=18/5		

x_4: var sortante

x_3: variable entrante

Tableau 1						
C_B	c_j	4	1	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_1	1	0	0	-1/5	2/5
1	x_2	0	1	0	3/5	9/5
0	x_3	0	0	1	1	1
c_j-z_j		0	0	0	1/5	Z=17/5

- La solution optimale est $X^* = (x_1^*, x_2^*)^t = (\frac{2}{5}, \frac{9}{5})^t$ et la fonction $Z=17/5$.

Exercice 7

Max Z = 3x1 + 5x2

Sc
$$\begin{cases} -x1 + x2 \geq -1 \\ 2x1 + x2 \geq 5 \\ X1 - 3x2 \geq 2 \\ X1 \geq 0 \quad , \quad x2 \geq 0 \end{cases}$$

- Mise du PL sous forme standard en ajoutant des variables d'excès, d'écart, et artificielles, selon qu'il convient:
  - Comme la contrainte 1 est de type '≥', et le terme indépendant est négatif ou nulle (la contrainte est multipliée par -1), il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart x_3.
  - Comme la contrainte 2 est de type '≥' il est nécessaire d'ajouter la variable d'excès x_4 et la variable artificielle x_6.
  - Comme la contrainte 3 est de type '≥' il est nécessaire d'ajouter la variable d'excès x_5 et la variable artificielle x_7.
  -

$\boldsymbol{Max}\ Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 5$

$x_1 - 3x_2 - x_5 + x_7 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Où : $M>0$ et arbitrairement grand.

Tableau 0											
C_B	c_j	3	5	0	0	0	-M	-M	Sol de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
0	x_3	1	-1	1	0	0	0	0	1	1/1=1	←Min
-M	x_6	2	1	0	-1	-1	1	0	5	5/2	
-M	x_7	1	-3	0	0	0	0	1	2	2/1=2	
c_j-z_j		3+3M	5-2M	0	-M	-M	0	0	Z=-7M		

x_3: var sortante

x_1: variable entrante

Tableau 1									
C_B	c_j	3	5	0	0	0	-M	-M	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_1	1	-1	1	0	0	0	0	1
-M	x_6	0	3	-2	-1	0	1	0	3
-M	x_7	0	-2	-1	0	-1	0	1	1
c_j-z_j		0	8-M	-3-3M	-M	-M	0	0	Z=3-4M

- Puisque le critère d'optimalité est satisfait et ∃ des variables artificielles dans la base>0, i.e. x_6 =3 et x_7=1, donc le PL n'admet pas de solutions réalisables.

Exercice 8

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +4x_4 & \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq 5 \\
 & x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

- Mise du PL en forme standard

$\boldsymbol{Max}\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4$

$\boldsymbol{Sujet}$ à :

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tableau 0										
C_B	c_j	2	3	5	4	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_5	1	2	3	1	1	0	5	5/3	
0	x_6	1	1	2	3	0	1	3	3/2	←Min
c_j-z_j		2	3	5	4	0	0	Z'=0		

x_6: var sortante

x_3: variable entrante

Tableau 1										
C_B	c_j	2	3	5	4	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$	Quotients	
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_5	-1/2	1/2	0	-7/2	1	-3/2	1/2	1/2÷1/2=1	←Min
5	x_3	3/2	1/2	1	3/2	0	1/2	3/2	3/2÷1/2=3	
c_j-z_j		-1/2	1/2	0	-7/2	0	-5/2	Z=15/2		

x_5: var sortante

x_2: variable entrante

Tableau 2								
C_B	c_j	2	3	5	4	0	0	Solution de base $X_B=B^{-1}.b$
	Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	-1	1	0	-7	2	-3	1
5	x_3	1	0	1	5	-1	2	1
c_j-z_j		0	0	0	0	-1	-1	Z=8

- La critère d'optimalité est vérifié et ($\exists\, j \in \{1,4\}$ $|c_j$-z_j=0), donc il y a une infinité des valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 pour la valeur optimale $Z = 8$, qui sont contenues dans la région de l'espace $2x_1 +$

$3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 8$ qui répond aux contraintes du problème. Une d'elles est: $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^t = (0,1,1,0)^t$. Une autre est: $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^t = (1,2,0,0)^t$