6. Dualité

À chaque PL, appelé primal, est associé un autre PL, appelé dual. Dans ce chapitre, on étudie les relations entre les deux PL et la théorie basique qui en découle.

6.1. Motivation

Reconsidérons le problème du fermier et rappelons son modèle mathématique :

$$\begin{array}{rllll} \max z = & 10x_1 & +12x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 13 \\ & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 42 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{array} \tag{6.1}$$

Pour les besoins de l'exposé, supposons que, comme la terre cultivable, les autres ressources, que sont l'engrais et les semaines de travail, sont non périssables et peuvent être louées. Le fermier a donc une alternative à l'exploitation de sa terre. Au lieu de cultiver sa parcelle, il peut en effet décider de louer ses ressources (les 13 hectares de terre, les 24 quintaux d'engrais et les 42 semaines de travail) à l'année.

La question qui se pose alors à lui est de savoir quels sont les prix locatifs par unité de ressource qu'il faut associer à chacune des ressources afin que le programme de location soit rentable ?

Appelons y_1, y_2, y_3 ces prix de location. Tout naturellement on doit avoir :

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \tag{6.2}$$

Le fermier se dit ensuite qu'il faut qu'il gagne à louer au moins autant qu'à cultiver, et donc :

$$10x_1 + 12x_2 \leq 13y_1 + 42y_2 + 24y_3 \tag{6.3}$$

pour tous x_1, x_2 réalisables en (6.1).

En vertu de (6.2), en multipliant chacun des deux membres de la première inégalité en (6.1) par y_1, puis en multipliant chacun des deux membres de la seconde inégalité en (6.1) par y_2, enfin en multipliant chacun des deux membres de la troisième inégalité en (6.1) par y_3, on obtient

$$\begin{array}{llll} x_1y_1 & +x_2y_1 & \leq & 13y_1 \\ 3x_1y_2 & +4x_2y_2 & \leq & 42y_2 \\ x_1y_3 & +3x_2y_3 & \leq & 24y_3 \end{array} \tag{6.4}$$

En additionnant les trois inégalités en (6.4) membre à membre on obtient :

$$(y_1 + 3y_2 + y_3)x_1 \quad +(y_1 + 4y_2 + 3y_3)x_2 \quad \leq \quad 13y_1 + 42y_2 + 24y_3 \tag{6.5}$$

À partir de (6.5), on voit que pour satisfaire (6.3) il suffit que :

$$\begin{array}{llll} y_1 & +3y_2 & +y_3 & \geq 10 \\ y_1 & +4y_2 & +3y_3 & \geq 12 \end{array} \tag{6.6}$$

En définitive, pour gagner plus à louer qu'à cultiver, les prix de location doivent satisfaire (6.2), (6.3) et (6.6) pour tous x_1, x_2 réalisables.

Enfin, pour être sûr de louer, il faut que les prix locatifs soient attrayants, et donc le fermier se contentera d'un revenu locatif minimum compte tenu de (6.2), (6.3) et (6.6). Autrement dit, les prix locatifs y_1, y_2, y_3 doivent satisfaire :

$$\begin{array}{lllll} \min & 13y_1 & +42y_2 & +24y_3 & \\ & y_1 & +3y_2 & +y_3 & \geq 10 \\ & y_1 & +4y_2 & +3y_3 & \geq 12 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array} \tag{6.7}$$

Comme on le voit ce dernier problème est un PL. Il est appelé programme dual (ou concurrentiel) du PL en (6.1) qui, par opposition, est appelé programme primal.

6.2. Définition et règles d'écriture du dual

Considérons un PL de forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \max \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{6.8}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

DÉFINITION 6.1.– Le PL dual du PL (P) est le PL :

$$(D)\begin{cases} \min \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ A^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{6.9}$$

(le PL (P) est alors appelé PL primal.)

Comme conséquence immédiate de cette définition, on a :

PROPOSITION 6.1.– Le dual de (D) est le primal (P).

Preuve. Mettons (D) sous forme canonique :

$$(D)\begin{cases} \max -\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ -A^t\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Par définition, le dual de (D) est le PL :

$$\begin{aligned}&\min -\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}\\&(-A^t)^t\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b}\\&\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

que l'on met sous forme canonique :

$$\begin{aligned}&\max \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}\\&A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\\&\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

■

REMARQUE 6.1.– La définition précédente n'est pas restrictive puisque tout PL peut être mis sous forme canonique. Le choix de la forme canonique est dicté par la « symétrie » des deux modèles en (6.8) et (6.9) (voir tableau 6.1).

	Primal (P)	Dual (D)
Nombre de variables	n	m
Nombre de contraintes	m	n
Objectif	max	min
Matrice des contraintes	A	A^t
Coefficients de la fonction objectif	$c_j, j = 1, \cdots, n$	$b_i, i = 1, \cdots, m$
Coefficients à droite des contraintes	$b_i, i = 1, \cdots, m$	$c_j, j = 1, \cdots, n$
Type des contraintes	$\leq$	$\geq$
Signe des variables	non négatif	non négatif

TABLEAU 6.1. Symétrie des modèles des PL (P) et (D)

PROPOSITION 6.2.– Le dual du PL de forme standard

$$(PS)\begin{cases}\max \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}\\A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\end{cases}$$

est le PL

$$(DS)\begin{cases}\min \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}\\A^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}\end{cases} \tag{6.10}$$

Preuve. Mettons (PS) sous forme canonique :

$$(PS)\begin{cases}\max \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}\\A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\\-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\end{cases}$$

Par définition, son dual est le PL :

$$(DS)\begin{cases}\min \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}^+ - \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}^- \\ A^t\boldsymbol{y}^+ - A^t\boldsymbol{y}^- \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^- \geq \boldsymbol{0}\end{cases}$$

En posant $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^+ - \boldsymbol{y}^-$, le PL (DS) revient à ce qui a été exprimé en (6.10).■

EXEMPLE 6.1.– Soit à écrire le dual du PL :

$$\begin{array}{lllll}\min & -x_1 & +3x_2 & \\ & 2x_1 & -3x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & +x_2 & = 1 \\ & 3x_1 & -2x_2 & \geq -1 \\ & & x_2 & \geq 0\end{array} \tag{6.11}$$

Notons que la variable x_1 est libre en signe et commençons par mettre le PL sous forme canonique :

$$\begin{array}{llllll}\max & x_1^+ & -x_1^- & -3x_2 & \\ & 2x_1^+ & -2x_1^- & -3x_2 & \leq 2 \\ & x_1^+ & -x_1^- & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1^+ & +x_1^- & -x_2 & \leq -1 \\ & -3x_1^+ & +3x_1^- & +2x_2 & \leq 1 \\ & x_1^+, & x_1^-, & x_2 & \geq 0\end{array}$$

Conformément à la définition, le dual de ce dernier est :

$$\begin{array}{lllllll}\min & 2y_1 & +y_2 & -y_3 & +y_4 & \\ & 2y_1 & +y_2 & -y_3 & -3y_4 & \geq 1 \\ & -2y_1 & -y_2 & +y_3 & +3y_4 & \geq -1 \\ & -3y_1 & +y_2 & -y_3 & +2y_4 & \geq -3 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq 0\end{array}$$

Il reste à donner à ce PL une forme plus compacte en observant que l'on peut poser $y = y_2 - y_3$, étant entendu que y est une variable libre en signe. Le PL précédent se réécrit :

$$\begin{array}{llllll}\min & 2y_1 & +y & +y_4 & \\ & 2y_1 & +y & -3y_4 & \geq 1 \\ & -2y_1 & -y & +3y_4 & \geq -1 \\ & -3y_1 & +y & +2y_4 & \geq -3 \\ & y_1, & & y_4 & \geq 0\end{array}$$

Enfin, observons que les deux premières inégalités sont équivalentes à une seule équation

$$\begin{array}{lllll} \min & 2y_1 & +y & +y_4 & \\ & 2y_1 & +y & -3y_4 & = 1 \\ & -3y_1 & +y & +2y_4 & \geq -3 \\ & y_1, & & y_4 & \geq 0 \end{array}$$

Pour finir, en renommant certaines variables, on peut donner une forme plus agréable au dernier PL :

$$\begin{array}{lllll} \min & 2y_1 & +y_2 & +y_3 & \\ & 2y_1 & +y_2 & -3y_3 & = 1 \\ & -3y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq -3 \\ & y_1, & & y_3 & \geq 0 \end{array} \tag{6.12}$$

REMARQUE 6.2.– On peut obtenir directement l'expression du dual de n'importe quel PL en appliquant les règles consignées au tableau 6.2. Le lecteur est invité à utiliser le tableau indiqué pour obtenir directement le dual en (6.12) du primal en (6.11).

	Primal (P)		Dual (D)
	Fonction objectif à maximiser		Fonction objectif à minimiser
	$i^{\text{ème}}$ contrainte du type $\leq$		$i^{\text{ème}}$ variable de signe ≥ 0
	$i^{\text{ème}}$ contrainte du type $=$		$i^{\text{ème}}$ variable libre en signe
Si	$i^{\text{ème}}$ contrainte du type $\geq$	alors	$i^{\text{ème}}$ variable de signe ≤ 0
	$j^{\text{ème}}$ variable de signe ≥ 0		$j^{\text{ème}}$ contrainte du type $\geq$
	$j^{\text{ème}}$ variable libre en signe		$j^{\text{ème}}$ contrainte du type $=$
	$j^{\text{ème}}$ variable de signe ≤ 0		$j^{\text{ème}}$ contrainte du type $\leq$

TABLEAU 6.2. Règles d'écriture du dual

6.3. Théorème fondamental de la dualité

D'abord un résultat dit de dualité faible.

PROPOSITION 6.3.– Si $\boldsymbol{x}$ est une solution réalisable du PL (P) défini en (6.8) et si $\boldsymbol{y}$ est une solution réalisable du PL (D) défini en (6.9) alors $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$.

Preuve. Puisque $\boldsymbol{x}$ est réalisable pour (P) alors :

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \tag{6.13}$$

Comme $\boldsymbol{y}$ est réalisable pour (D) on a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. En pré-multipliant par $\boldsymbol{y}^t$ chacun des deux membres de (6.13) on obtient :

$$\boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b} (= \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}) \tag{6.14}$$

De la même manière, la réalisabilité de $\boldsymbol{y}$ donne $A^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, ou ce qui revient au même par transposition :

$$\boldsymbol{y}^t A \geq \boldsymbol{c}^t \tag{6.15}$$

En post-multipliant par $\boldsymbol{x}(\geq \boldsymbol{0})$ chaque terme de (6.15) on aura :

$$\boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \tag{6.16}$$

En combinant (6.14) et (6.16), on obtient le résultat souhaité. ■

COROLLAIRE 6.1.– (i) Si (P) défini en (6.8) a une fonction objectif non majorée alors (D) défini en (6.9) n'a aucune solution réalisable. (ii) Si (D) a une fonction objectif non minorée alors (P) n'a aucune solution réalisable.

Preuve. Il suffit de prouver (i). Si (D) avait une solution réalisable $\boldsymbol{y}$ alors la valeur $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$ constituerait un majorant pour la valeur de la fonction objectif de (P). Une contradiction. ■

COROLLAIRE 6.2.– Si $\boldsymbol{x}$ est une solution réalisable de (P) défini en (6.8), si $\boldsymbol{y}$ est une solution réalisable de (D) défini en (6.9) et si $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$ alors $\boldsymbol{x}$ est optimale pour (P) et $\boldsymbol{y}$ est optimale pour (D).

Preuve. Supposons que $\boldsymbol{x}$ n'est pas optimale. Alors il existe une solution réalisable $\boldsymbol{x}'$ telle que $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} < \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}'$. Ce qui contredit la proposition 6.3.■

REMARQUE 6.3.– Dans le cas où chacun des deux PL (P) et (D) possède une solution réalisable, respectivement $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, la valeur $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$ constitue un majorant de la fonction objectif de (P) et la valeur $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$ constitue un minorant de la fonction objectif duale. Il s'en suit que chacun des deux PL possède une solution optimale. La question qui se pose alors est la suivante : dans le cas où $\boldsymbol{x}^*$ et $\boldsymbol{y}^*$ sont optimales, est-il possible d'avoir un saut de dualité ? Autrement dit, est-il possible d'avoir $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}^*$?

THÉORÈME 6.1.– (i) Si le PL (P) a une solution optimale $\boldsymbol{x}$ alors son dual (D) a une solution optimale $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$. (ii) Si le PL (D) a une solution optimale $\boldsymbol{y}$ alors son dual (P) a une solution optimale $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$.

Preuve. Il suffit de prouver l'énoncé (i). Commençons par mettre chacun des deux PL (P) et (D) sous forme standard :

$$(P)\begin{cases} \max & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} & +\boldsymbol{0}^t\boldsymbol{x}_e & \\ & A\boldsymbol{x} & +I\boldsymbol{x}_e & = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}_e \geq \boldsymbol{0} & \end{cases} \tag{6.17}$$

et

$$(D)\left\{\begin{matrix} \min & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} & +\boldsymbol{0}^t\boldsymbol{y}_e & \\ & A^t\boldsymbol{y} & -I\boldsymbol{y}_e & = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} & \boldsymbol{y}_e \geq \boldsymbol{0} & \end{matrix}\right\} \tag{6.18}$$

où $\boldsymbol{x}_e$ et $\boldsymbol{y}_e$ sont les vecteurs des variables d'écart de dimensions respectives m et n. Les dimensions de la matrice identité I et du vecteur nul $\mathbf{0}$ se déduisent du contexte.

En vertu du corollaire 6.2, il nous suffit de montrer que si $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est une solution optimale de (P) alors on est en mesure d'exhiber une solution réalisable $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ de (D) telle que :

$$(\boldsymbol{c}^t, \mathbf{0}^t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_e\end{pmatrix} = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b}^t, \mathbf{0}^t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}_e\end{pmatrix}$$

Ce qui prouvera par la même occasion que $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ est une solution optimale de (D).

Supposons donc que $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est une solution optimale de (P). On peut supposer, sans perte de généralité, que $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est une solution de base réalisable et optimale de (P), obtenue relativement à une base B, avec (après une éventuelle renumérotation des variables) :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^{-1}\boldsymbol{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Construisons le vecteur $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ en posant

$$(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t) = \boldsymbol{c}_B^t B^{-1}(I, A) - (\mathbf{0}^t, \boldsymbol{c}^t) = (\boldsymbol{c}_B^t B^{-1}, \boldsymbol{c}_B^t B^{-1}A - \boldsymbol{c}^t)$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{c}_B^t B^{-1}$ sont appelés multiplicateurs du simplexe associés à la base B. Le fait que $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ soit réalisable pour (D) provient du critère d'optimalité de $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$. En effet, puisque cette dernière est une solution de base réalisable et optimale, obtenue relativement à la base B, alors tous les coûts marginaux sont non négatifs, autrement dit :

$$(\boldsymbol{c}_B^t B^{-1}, \boldsymbol{c}_B^t B^{-1}A - \boldsymbol{c}^t) \geq \mathbf{0}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}_B^t B^{-1})^t = (B^{-1})^t \boldsymbol{c}_B \geq \mathbf{0}$$

et :

$$\boldsymbol{y}_e = (\boldsymbol{c}_B^t B^{-1}A - \boldsymbol{c}^t)^t = A^t (B^{-1})^t \boldsymbol{c}_B - \boldsymbol{c} = A^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$$

Ce qui prouve la réalisabilité de $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$.

Il ne reste plus à montrer que les deux solutions duales $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ et $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ donnent la même valeur aux fonctions objectifs de (P) et (D). Pour le voir :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}^t, \mathbf{0}^t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_e\end{pmatrix} &= \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \mathbf{0}^t\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{c}_B^t\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^t\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B^t B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_N^t\mathbf{0} = (\boldsymbol{c}_B^t B^{-1}\boldsymbol{b})^t\\ &= \boldsymbol{b}^t(B^{-1})^t\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} + \mathbf{0}^t\boldsymbol{y}_e = (\boldsymbol{b}^t, \mathbf{0}^t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}_e\end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

COROLLAIRE 6.3.– (i) Si (P) n'a aucune solution réalisable alors soit (1) (D) a une fonction objectif non minorée, soit (2) (D) n'a aucune solution réalisable. (ii) Si (D) n'a aucune solution réalisable alors soit (1) (P) a une fonction objectif non majorée, soit (2) (P) n'a aucune solution réalisable.

Preuve. Il suffit de prouver l'énoncé (i). Si (P) n'a pas de solution réalisable alors (D) ne peut pas avoir de solution optimale car cela contredirait le théorème précédent. Il ne reste plus à (D) que les deux autres alternatives de la remarque 1.7. Le corollaire 6.1 montre que l'alternative (1) est possible et l'exemple qui suit montre que l'alternative (2) est également possible. En effet, chacun des deux PL duaux

$$
\begin{array}{llll}
\max & x_1 & & \\
& x_1 & -x_2 & \leq 0 \\
& -x_1 & +x_2 & \leq -1 \\
& x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
\min & & -y_2 & \\
& y_1 & -y_2 & \geq 1 \\
& -y_1 & +y_2 & \geq 0 \\
& y_1, & y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

n'a pas de solution réalisable (puisque la somme terme à terme des deux inégalités du primal donne $0 \leq -1$ et celle du dual donne $0 \geq 1$). ■

Les résultats obtenus sont résumés au tableau 6.3.

		Primal		
		Optimal	Vide	Non majoré
Dual	Optimal	Possible	Impossible	Impossible
	Vide	Impossible	Possible	Possible
	Non minoré	Impossible	Possible	Impossible

TABLEAU 6.3. Relation primal/dual : toutes les éventualités.

REMARQUE 6.4.– La preuve du théorème 6.1 nous enseigne qu'en résolvant le primal (P) à l'aide de la méthode du simplexe, on résout simultanément le dual (D), et le tableau final comporte dans sa ligne numéro zéro les composantes de la solution duale. Voyons cela sur un exemple :

EXEMPLE 6.2.– Considérons le PL du fermier de forme standard :

$$
\begin{array}{lllllll}
\max z = & 10x_1 & +12x_2 & & & & \\
& x_1 & +x_2 & +x_{e1} & & & = 13 \\
& 3x_1 & +4x_2 & & +x_{e2} & & = 42 \\
& x_1 & +3x_2 & & & +x_{e3} & = 24 \\
& x_1, & x_2, & x_{e1}, & x_{e2}, & x_{e3} & \geq 0
\end{array}
$$

et le tableau final de la méthode du simplexe (voir exemple 4.4)

		x_1	x_2	x_{e1}	x_{e2}	x_{e3}
$z =$	136	0	0	4	2	0
$x_{e3} =$	5	0	0	5	-2	1
$x_1 =$	10	1	0	4	-1	0
$x_2 =$	3	0	1	-3	1	0

montrant la solution (de base réalisable et) optimale avec

$$\boldsymbol{x}^t = (x_1 = 10, x_2 = 3) \text{ et } \boldsymbol{x}_e^t = (x_{e1} = 0, x_{e2} = 0, x_{e3} = 5) \quad (6.19)$$

donnant une valeur maximum $z = 136$ à la fonction objectif.

Le dual du PL du fermier de forme standard est :

$$\begin{array}{llllll} \min w = & 13y_1 & +42y_2 & +24y_3 & & & \\ & y_1 & +3y_2 & +y_3 & -y_{e1} & & = 10 \\ & y_1 & +4y_2 & +3y_3 & & -y_{e2} & = 12 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_{e1}, & y_{e2} & \geq 0 \end{array} \quad (6.20)$$

La preuve du théorème fondamental de la dualité suggère de prendre (voir la ligne numéro 0 du tableau) :

$$\boldsymbol{y}^t = (y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 0) \text{ et } \boldsymbol{y}_e^t = (y_{e1} = 0, y_{e2} = 0) \quad (6.21)$$

avec $w = 136$.

Il est laissé le soin au lecteur de vérifier que la solution ainsi construite est réalisable pour le dual en (6.20) et qu'elle donne bien la valeur 136 à la fonction objectif.

Observons bien les correspondances : la $j^{\text{ème}}$ variable du primal (P) correspond à la $j^{\text{ème}}$ variable d'écart du dual (D), et la $i^{\text{ème}}$ variable d'écart de (P) correspond à la $i^{\text{ème}}$ variable de (D) :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & & x_{e1} & x_{e2} & x_{e3} \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{e1} & y_{e2} & & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \quad (6.22)$$

REMARQUE 6.5.– En fait, la construction des vecteurs $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{y}_e$ de la preuve du théorème fondamental de la dualité est valable à chaque itération de la méthode du simplexe. En effet, à chaque itération, en disposant d'une solution réalisable $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ du primal (P), on dispose simultanément d'une solution $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ du dual (D). Les composantes du vecteur $\boldsymbol{y}$ sont les coûts marginaux associés aux variables d'écart primales $\boldsymbol{x}_e$ et les composantes du vecteur $\boldsymbol{y}_e$ sont les coûts marginaux associés aux variables primales $\boldsymbol{x}$. Le critère d'optimalité de la solution réalisable $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est que la solution duale correspondante $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ vérifie :

$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}_e \geq \boldsymbol{0} \quad (6.23)$$

La non négativité de $\boldsymbol{y}_e$ signifie que $\boldsymbol{y}_e = A^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ ou encore que :

$$A^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \tag{6.24}$$

Finalement, (6.23) et (6.24) indiquent que $\boldsymbol{y}$ est une solution réalisable du dual (D) de forme canonique.

Le lecteur peut voir que la solution duale

$$(y_1 = 8, y_2 = 18/5, y_3 = -4/5, y_{e1} = 0, y_{e2} = 0)$$

correspondant à la solution primale du tableau en (4.5) de l'itération 2 de l'exemple 4.4 n'est pas réalisable pour le dual du PL du fermier. Par conséquent, la solution primale $(x_1 = 6, x_2 = 6, x_{e1} = 1, x_{e2} = 0, x_{e3} = 0)$ n'est pas optimale.

REMARQUE 6.6.– On est en mesure de réécrire le critère d'optimalité d'une solution réalisable $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ de (P) : si la solution $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ du dual (D), correspondant à $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$, est réalisable pour (D), alors $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est optimale pour (P).

À chaque itération de l'algorithme du simplexe, on maintient la réalisabilité de la solution primale en même temps que l'égalité des valeurs des fonctions objectifs primale et duale, tout en essayant de parvenir à la réalisabilité de la solution duale correspondante. Dès que la solution duale, correspondant à la solution réalisable primale actuelle, est réalisable, l'algorithme s'arrête en déclarant optimale chacune des deux solutions en vertu du théorème 6.1.

REMARQUE 6.7.– La solution duale en (6.21) constitue un certificat pour la solution primale en (6.19). En vertu de ce qui a été vu à la section 4.5, sa taille est majorée par un polynôme en la taille de l'instance du PL. Pour le moment, son obtention nécessite d'utiliser la méthode du simplexe dont on ne sait pas si elle est polynomiale ou non. On va voir dans ce qui suit que les relations entre les variables primales et duales sont plus étroites que ce qui a été décrit en (6.22) et vont fournir un moyen polynomial d'obtention du certificat d'optimalité.

6.4. Écarts complémentaires

Soient $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ une solution réalisable de (P) défini en (6.17) et $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ une solution réalisable de (D) défini en (6.18).

THÉORÈME 6.2.– Une condition nécessaire et suffisante pour que $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ soit optimale pour (P) et que $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ soit optimale pour (D) est que :

$$(A^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^t\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^tA - \boldsymbol{c}^t)\boldsymbol{x} = 0 \tag{6.25}$$

et

$$\boldsymbol{y}^t(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0 \tag{6.26}$$

Preuve. Observons que la réalisabilité des deux solutions de l'énoncé du théorème implique :

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{b} \geq A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{y}^t A \geq \boldsymbol{c}^t$$

En prémultipliant les deux termes de la seconde inégalité par $\boldsymbol{y}^t$, en post-multipliant les deux termes de la dernière inégalité par $\boldsymbol{x}$, et en combinant les deux résultats on aura :

$$\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b}(= \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}) \tag{6.27}$$

Si les conditions (6.25) et (6.26) sont satisfaites alors toutes les inégalités en (6.27) deviennent des égalités, et donc chacune des deux solutions de l'énoncé est optimale en vertu du corollaire 6.2.

Réciproquement, si chacune des deux solutions est optimale, alors en vertu du théorème 6.1 on a $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y}$, ce qui assure les égalités en (6.27) et, par la même occasion, la satisfaction des conditions (6.25) et (6.26). ■

REMARQUE 6.8.– La forme équivalente suivante des conditions en (6.25) et (6.26) est plus expressive :

$$\boldsymbol{y}_e^t\boldsymbol{x} = 0, \qquad \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{x}_e = 0 \tag{6.28}$$

Elle est encore plus explicite ainsi (puisque $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_e \geq \mathbf{0}$) :

$$y_{ej}x_j = 0, j = 1, \cdots, n \ \text{ et } \ y_i x_{ei} = 0, i = 1, \cdots, m \tag{6.29}$$

À titre d'exemple, on voit bien que les solutions primale en (6.19) et duale en (6.21) satisfont 6.29.

6.5. Certificat d'optimalité

Supposons donné un vecteur $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ supposé être une solution réalisable du PL (P) défini en (6.17). Pour se convaincre que c'est vraiment une solution réalisable, il suffit de vérifier les contraintes, ce qui se fait en $O\big(m(m+n)\big)$. Le vecteur $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$, dont la taille est majorée par un polynôme en la taille des données du PL, est donc lui-même un certificat de réalisabilité, puisque son existence prouve facilement (polynomialement) sa propre réalisabilité.

Posons-nous maintenant une question dont la réponse est moins évidente : y a-t-il un moyen facile (polynomial) de vérifier si le vecteur $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ donné est une solution optimale ? Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit d'une solution de base réalisable.

L'idée est de construire la solution duale correspondante $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ (sans utiliser la méthode du simplexe) et vérifier qu'elle est réalisable pour le dual (D) défini en (6.18), en vertu de la remarque 6.6.

Pour obtenir le vecteur $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$, on utilise les contraintes du PL (D) défini en (6.18) et les équations des écarts complémentaires en (6.28). Ce qui donne le système d'équations linéaires (ne perdons pas de vue que le vecteur $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est donné)

$$\begin{cases} A^t\boldsymbol{y} & -I\boldsymbol{y}_e & = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}_e^t\boldsymbol{y} & & = 0 \\ & \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}_e & = 0 \end{cases}$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} A^t\boldsymbol{y} & -I\boldsymbol{y}_e & = \boldsymbol{c} & \\ x_{ei}y_i & & = 0 & i = 1,\cdots,m \\ & x_jy_{ej} & = 0 & j = 1,\cdots,n \end{cases} \tag{6.30}$$

Ce système a $n + m$ inconnues que sont les composantes du vecteur $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ et $2n + m$ équations. Est-il soluble (pour trouver la solution $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$) ?

PROPOSITION 6.4.– Si la solution de base réalisable $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est non dégénérée alors le système en (6.30) a une solution unique.

Preuve. Considérons les $m + n$ dernières équations de (6.30) qui vont toutes être éliminées. Puisque le vecteur $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ a exactement m composantes positives, il est facile de voir qu'elles vont servir à éliminer m inconnues (en les annulant). Les n autres équations des écarts complémentaires sont redondantes de la forme $0 = 0$ et peuvent être éliminées. Il ne reste donc plus que le bloc $A^t\boldsymbol{y} - I_n\boldsymbol{y}_e = \boldsymbol{c}$ avec m inconnues en moins. Autrement dit, il ne reste plus qu'un système de n équations et n inconnues dont il faut prouver qu'il est non singulier (laissé au lecteur au titre de l'exercice 6.10 en observant que le rang de $(A|-I)$ est n). ■

REMARQUE 6.9.– Trouver le vecteur $(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}_e^t)$ et vérifier sa réalisabilité pour le PL (D) coûte donc $O(n^3)$ opérations.

EXEMPLE 6.3.– Considérons le PL du fermier de l'exemple 6.2. Soit donné le vecteur $(x_1 = 10, x_2 = 3, x_{e1} = 0, x_{e2} = 0, x_{e3} = 5)$ qui est une solution de base réalisable non dégénérée. Comment prouver que c'est une solution optimale en temps polynomial. Il suffit de trouver la solution duale correspondante et vérifier qu'elle est réalisable pour le dual défini en (6.20).

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} y_1 & +3y_2 & +y_3 & -y_{e1} & & = 10 \\ y_1 & +4y_2 & +3y_3 & & -y_{e2} & = 12 \\ 0y_1 & & & & & = 0 \\ & 0y_2 & & & & = 0 \\ & & 5y_3 & & & = 0 \\ & & & 10y_{e1} & & = 0 \\ & & & & 3y_{e2} & = 0 \end{cases}$$

qui se réduit à $y_3 = y_{e1} = y_{e2} = 0$ et

$$\begin{cases} y_1 & +3y_2 & = 10 \\ y_1 & +4y_2 & = 12 \end{cases}$$

dont la solution unique est $y_1 = 4, y_2 = 2$. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est réalisable pour le dual.

REMARQUE 6.10.– Si la solution de base réalisable $(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}_e^t)$ est dégénérée, elle a moins de m composantes positives (disons $p < m$). Il nous faut identifier les colonnes linéairement indépendantes relativement auxquelles elle a été obtenue. Commençons avec les p colonnes linéairement indépendantes. Puisque le rang de la matrice des contraintes $(A|I)$ est m, il est toujours possible d'adjoindre $m - p$ colonnes aux p colonnes déjà prises de sorte que les m colonnes ainsi obtenues soient linéairement indépendantes (il y a plusieurs choix possibles à cause de la dégénérescence). Il ne reste plus qu'à annuler les variables duales associées aux colonnes choisies et suivre la même démarche que précédemment.

EXEMPLE 6.4.– Considérons le PL

$$\begin{array}{rlll} \max z = & x_1 & +x_2 & \\ & 4x_1 & +2x_2 & \leq 9 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & 6x_1 & +5x_2 & \leq 15 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

que l'on met sous forme standard

$$\begin{array}{rllllll} \max z = & x_1 & +x_2 & & & & \\ & 4x_1 & +2x_2 & +x_{e1} & & & = 9 \\ & 2x_1 & +3x_2 & & +x_{e2} & & = 6 \\ & 6x_1 & +5x_2 & & & x_{e3} & = 15 \\ & x_1, & x_2, & x_{e1}, & x_{e2}, & x_{e3} & \geq 0 \end{array}$$

Le dual du PL donné est :

$$\begin{array}{rllll} \min w = & 9y_1 & +6y_2 & +15y_3 & \\ & 4y_1 & +2y_2 & +6y_3 & \geq 1 \\ & 2y_1 & +3y_2 & +5y_3 & \geq 1 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

que l'on met sous forme standard

$$\begin{array}{rllllll} \min w = & 9y_1 & +6y_2 & +15y_3 & & & \\ & 4y_1 & +2y_2 & +6y_3 & -y_{e1} & & = 1 \\ & 2y_1 & +3y_2 & +5y_3 & & -y_{e2} & = 1 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_{e1}, & y_{e2} & \geq 0 \end{array}$$

Soit donné le vecteur $(x_1 = 15/8, x_2 = 3/4, x_{e1} = 0, x_{e2} = 0, x_{e3} = 0)$, qui est une solution de base réalisable dégénérée, dont on veut valider l'optimalité. En adjoignant la colonne numéro 3 aux deux premières on vérifie qu'on obtient trois colonnes linéairement indépendantes

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes associées aux variables x_1 et x_2 vont permettre d'annuler y_{e1} et y_{e2}, et la colonne associée à x_{e1} va permettre d'annuler y_1. Le système qui reste à résoudre est :

$$\begin{cases} 2y_2 & +6y_3 & = 1 \\ 3y_2 & +5y_3 & = 1 \end{cases}$$

dont la solution est $y_2 = y_3 = 1/8$. Il est alors facile de voir que le vecteur $(y_1 = 0, y_2 = 1/8, y_3 = 1/8, y_{e1} = 0, y_{e2} = 0)$ est réalisable pour le dual et constitue un certificat d'optimalité pour le vecteur proposé.

6.6. Exercices

EXERCICE 6.1.– Construire le dual du PL

$$\begin{array}{llllll} \max & -2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & & \\ & -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & \geq 5 \\ & 2x_1 & & +x_3 & & = 4 \\ & & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 6 \\ & x_1 & & & & \leq 0 \\ & & x_2, & x_3 & & \geq 0 \end{array}$$

EXERCICE 6.2.– Construire le dual du PL

$$\begin{array}{llll} \max & z & & \\ & z \quad -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i & \leq 0 & j = 1, \cdots, n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i & = 1 & \\ & x_i & \geq 0 & i = 1, \cdots, m \end{array}$$