DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.000196

第3卷第4期 1988年12月
高校应用数学学报
Applied Mathematics
A Journal of Chinese Universities
№4, Vol.3 Dec. 1988

关于epi-收敛性理论的一些结果

王金德

(南京大学)

摘　要

本文研究了epi-收敛性理论在数学规划问题中的应用，给出epi-收敛性作为极值收敛性的某种意义下的充分和必要条件，并将最优化中其它收敛性理论与之相比较。

I 引　言

*epigraph*收敛性（简称*epi*-收敛性）理论是最优化中的一个重要逼近理论。它的基本定义和作用可简述如下。

定义1. 函数$f(x)(x\in R^n)$的*epigraph*定义为下述集合

$$epi f=\{(x,\ \alpha)\mid \alpha\geqslant f(x),\ x\in R^n\}$$

定义2. 集合序列$\{S_i\}$收敛于S(在*kuratowski*意义下)，如果

$$\lim\ Sup S_i\subset S\subset \lim\ inf\ S_i \tag{2}$$

此时，记为$\lim\limits_{i\to\infty}\overset{K}{S_i=S}$，其中

$$\lim\ inf S_i=\{u;\ \exists\{u_i\},\ s.t.\ u_i\to u,\ \text{除了有限个 } i \text{ 外},\ u_i\in S_i\} \tag{3}$$

$$\lim\ sup S_i=\{u;\ \exists\{u_{i_k}\}\ \ s.t.\ u_{i_k}\in S_{i_k},\ u_{i_k}\to u\} \tag{4}$$

定义3. 称函数序列$\{f_i(x)\}$ *epi*-收敛于$f(x)$，如果$\lim\limits_{i\to\infty} epi f_i\overset{K}{=}epi f$，这时，记为$f_i\xrightarrow{e}f$。

这一定义也等价于下列

定义4. 称$f_i(x)$在某一x_0处*epi*-收敛于$f(x)$，如果下述二个条件满足

(*a*). 对任一趋向于x_0的序列$\{x_i\}$，有

本文1986年11月29日收到，1988年4月22日收到修改稿。

$$\lim\ inf\ f_i(x_i) \geqslant f(x_0)$$

(b). 至少存在一个趋向于x_0的点到$\{x_i\}$，使

$$\lim\ sup\ f_i(x_i) \leqslant f(x_0)$$

若$f_i(x)$在每一x_0处epi-收敛于$f(x)$，则称$f_i(x)$ epi-收敛于$f(x)$。

epi-收敛性在最优化逼近理论中的应用为：设有一系列极小化问题：

$$z = inf\ f(x), \qquad z_i = inf\ f_i(x)$$

令$Arg\ min\ f = \{x: f(x) = z\}$，$Arg\ min\ f_i = \{x: f_i(x) = z_i\}$

定理1. 若f_i，f为下半连续函数，$f_i \xrightarrow{e} f$，则

$$\lim\ sup\ Arg\min f_i \subset Arg\min f$$

即f_i的极小值点$\bar{x}_i$组成的序列若收敛，则其极限点$\bar{x}$必定的f的极小值点，若确实存在这样一个收敛序列$\{\bar{x}_i\}$，则

$$\lim z_i = z$$

关于epi-收敛性理论的详细讨论可参看[1]、[2]、[3]，这一理论在最优化中的应用（特别是在随机规划中的应用）可参看[4]、[5]、[6]。这里我们给出进一步的一些结果。

Ⅱ　epi-收敛性理论在数学规划问题中的应用

在[1],[4]中有许多检验$f_i \xrightarrow{e} f$的方法，这里我们给出数学规划中epi-收敛性判定定理，数学规划中经常碰到的逼近问题有以下两组：

$$\begin{array}{l} z = inf\ f(x) \\ \quad s.t.\ x \in D \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{l} z_i = inf\ f_i(x) \\ \quad s.t.\ x \in D \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} z = inf\ f(x) \\ \quad s.t.\ x \in D \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{l} z_i = inf\ f(x) \\ \quad s.t.\ x \in D_i \end{array} \tag{6}$$

任何一个有约束极值问题都可用下述方式化为等价的无约束极值问题，即

$$\begin{cases} z = inf\ f(x) \\ s.t.\ x \in D \end{cases} \quad 与 \quad z = \inf_{x \in R^n} F(x)$$

等价，其中$F(x) = f(x) + \phi_D(x)$，而$\phi_D(x)$定义为

$$\phi_D(x) \begin{cases} 0 & 若 x \in D \\ +\infty & 若 x \notin D \end{cases}$$

定理2. 设f为连续函数，集合序列$\{D_i\} \xrightarrow{K} D$，$D$为一闭集，则$F_i \xrightarrow{e} F$，其中

$$F_i(x) = f(x) + \phi_{D_i}(x), \quad F(x) = f(x) + \phi_D(x)$$

证明 我们验证，对每一点x定义4中的二个条件成立。

对于$x\in D$和任一$\{x_i\}$，$x_i\to x$，有$F(x)=f(x)$，且

$$\lim\ inf\ F_i(x_i)\geqslant \lim\ inf\ f(x_i)=\lim f(x_i)=f(x)=F(x)$$

设$x\notin D$，$x_i\to x$，则$F(x)=+\infty$，因为D为闭集，$D_i\xrightarrow{K}D$，因此，收敛于x的序列$\{x_i\}$中只有有限个$x_i\in D_i$，故当i充分大以后，有$F_i(x_i)=+\infty$，所以总有

$$\lim\ inf\ F_i(x_i)=+\infty=F(x)$$

所以，定义4中的条件(a)成立。

现验证条件(b)成立，对于任一$x\in D$，由于$D_i\xrightarrow{K}D$，故存在$x_i\in D_i$，$x_i\to x$，因此

$$\lim\ sup\ F_i(x_i)=\lim\ sup\ f(x_i)=f(x)=F(x)$$

其中最后第二个等式成立是由于$f(x)$的连续性。对于任一$x\notin D$，由于$F(x)=+\infty$，总有

$$\lim\ sup\ F_i(x_i)\leqslant F(x)$$

故条件(b)亦成立，定理得证。

对于(5)中的逼近问题则有

定理3. 设$f_i\xrightarrow{e}f$，D为丰满闭集，f为连续函数，则$F_i\xrightarrow{e}F$，其中$F_i(x)=f_i(x)+\phi_D(x)$，$F(x)=f(x)+\phi_D(x)$。

证明 对于D中任一点x和任$x_i\to x$，由于$f_i\xrightarrow{e}f$，故有

$$\lim\ inf\ F_i(x_i)\geqslant \lim\ inf\ f_i(x_i)\geqslant f(x)=F(x)$$

对于不属于D的任一点x，$F(x)=+\infty$，由于$\bar{D}$为开集，任一收敛于x的序列$\{x_i\}$中至多只有有限个x_i属于D，所以当i充分大后有

$$\lim\ inf\ F_i(x_i)=+\infty=F(x)$$

于是，定义4中条件(a)成立。

另一方面，若$x\in intD$，则由$f_i\xrightarrow{e}f$，必存在$x_i\to x$，使$x_i\in D$，且

$$\lim\ sup\ F_i(x_i)=\lim\ sup\ f_i(x_i)\geqslant f(x)=F(x)$$

若$x\notin D$，$\bar{D}$为开集，对任一$x_i\to x$，有（i充分大）$F_i(x_i)=+\infty$，于是

$$\lim\ sup\ F_i(x_i)=+\infty=F(x)$$

设x是D的边界点，由于D为丰满集，故存在序列$\{x^{(k)}\}$，使得$x^{(k)}\in intD$，$x^{(k)}\to x$，由f的连续性，有$\lim\limits_{k}f(x^{(k)})=f(x)$，对于每一$x^{(k)}$，由于$f_i\xrightarrow{e}f$，存在$x_i^{(k)}\in intD$，$x_i^{(k)}\to x^{(k)}$，且

$$\lim\ \sup_{i}\ f_i(x_i^{(k)})\leqslant f(x^{(k)})$$

再由 $f_i \xrightarrow{e} f$，对这一序列有

$$\lim\ sup\ f_i(x_i^{(k)}) \leqslant f(x^{(k)}) \leqslant \lim\ inf\ f_i(x_i^{(k)})$$

即

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x_i^{(k)}) = f(x^{(k)})$$

构造下列二重数偶列：

$$\begin{array}{llll}
(x_1^{(1)}, f_1(x_1^{(1)})), (x_2^{(1)}, f_2(x_2^{(1)})), & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \to (x^{(1)}, f(x^{(1)})) \\
(x_1^{(2)}, f_1(x_1^{(2)})), (x_2^{(2)}, f_2(x_2^{(2)})), (x_3^{(2)}, f_3(x_3^{(2)})), & & \cdots\to & (x^{(2)}, f(x^{(2)})) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & & \downarrow \\
& & & (x, f(x))
\end{array}$$

根据对角线化过程定理，存在 $i\to k(i)$ 的映射，使得

$$(x_i^{(k_i)}, f_i(x_i^{(k_i)})) \longrightarrow (x, f(x))$$

于是，对序列 $\{x_i^{(k_i)}\}$，有 $x_i^{(k_i)} \to x$ 且

$$\lim\ sup\ f_i(x_i^{(k_i)}) = f(x)$$

这样，对任一点，定义4中条件(b)满足，定理得证。

Ⅲ 关于epi-收敛性作为极小值收敛的“充分”与“必要”条件

定理1指出，对于无约束极小化问题，若 $f_i \xrightarrow{e} f$，则 $\lim\ sup\ Arg\ min f_i \subset Arg\ min f$，但不一定有 $\lim z_i = z$，，只有在一些附加条件下才有这一结果，遗憾的是，这一条件不容易验证，下面的定理给出使 $\lim z_i = z$ 成立的充分条件。

定理4．设 f_i, f 为下半连续函数，$f_i \xrightarrow{e} f$，D 为紧致丰满集，$D \subset \{Dom f_i \cap Dom f\}$，$i=1, 2\cdots$，则必有

$$\lim_{i\to\infty} z_i = z,\ \text{即} \lim_{i\to\infty} (\inf_{x\in D} f_i(x)) = \inf_{x\in D} f(x)。$$

证明 由 f_i，f 和 D 的性质知，f_i 和 f 都在 D 上能达到其相应的最小值，设 f_i 的极小值点分别为 $\bar{x}_i$，由 D 的紧致性，$\{\bar{x}_i\}$ 可写为许多个收敛子序列 $\{\bar{x}_{ki}\}$ 与至多有限多个离散点之和集。对应的序列 $\{f_i(\bar{x}_i)\}$ 可写为对应的许多个小序列 $\{f_{k_i}(\bar{x}_{k_i})\}$ 和至多有限多个离散值之和集。

对于每一收敛子序列 $\{\bar{x}_{k_i}\}$，我们考虑 $\{f_{k_i}(\bar{x}_{k_i})\}$ 的收敛性。根根定理3，

$$f_i + \phi_D \xrightarrow{e} f + \phi_D$$

由 epi-极限的子序列收敛性，有

$$f_{k_i}+\phi_D \xrightarrow{e} f+\phi_D$$

从定理1的后半部分可得(设$\bar{x}_{k_i}\to\bar{x}$)

$$\lim_{k_i\to\infty} z_{k_i}=\lim_{k_i\to\infty} f_{k_i}(\bar{x}_{k_i})=f(\bar{x})=z$$

所以，$\{f_i(\bar{x}_i)\}$中的每一子序列都收敛于 z，因此，$\lim\limits_{i\to\infty} f_i(\bar{x}_i)$存在，且

$$\lim_{i\to\infty} f_i(\bar{x}_i)=z$$

证毕。

这一定理比[4]中的有关结果(*corollary* 2.5)有用得多。

最优化问题中的各种收敛性几乎都不是最优值和最优点收敛的必要条件。下面的定理说明，*epi*-收敛性恰恰具有某种程度的必要性。从这一意义上来说，*epi*- 收敛性是最优值和最优点收敛的最弱条件。

定理5． 设对一系列极小化问题：

$$z=inf\ f(x),\qquad z_i=inf\ f_i(x)$$

有$\bar{x}_i\to\bar{x}$，$z_i\to z$。其中$\bar{x}_i\in Arg\min f_i$，$\bar{x}\in Arg\min f$，则在$\bar{x}$处$f_i\xrightarrow{e}f$。

证明 对任一$x_i\to\bar{x}$，有

$$\lim\ inf\ f_i(x_i)\geqslant \lim\ inf\ f_i(\bar{x}_i)=\lim\ inf\ z_i=z=f(\bar{x})$$

另一方面，有$\bar{x}_i\to\bar{x}$，且

$$\lim sup\ f_i(\bar{x}_i)=f(\bar{x})$$

故在$\bar{x}$ 处 $f_i\xrightarrow{e}f$。

Ⅳ 最优化中各种逼近理论的比较

最优化中引用了函数序列的各种收敛性来保证极小值或极小值点序列的收敛性，今列举逐点收敛性，一致收敛性，点到集合映射理论和*epi*—收敛性作一比较。

(1)． 逐点收敛性

逐点收敛性一般既不能保证极小值的收敛性，也不能保证极小值点的收敛性，这方面已有的结果是（参看[7]）：

设 f_i，f 为凸函数且对所有x，$\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)=f(x)$。

若$Arg\ min f$为紧致集，则

$$\lim\ sup\ Arg\min f_i\subset Arg\min f,\ \lim_{i\to\infty}(\min f_i)=\min f.$$

注 很明显，这一结果的适用范围比 *epi*—收敛性的适用范围小得多。

(2). 一致收敛性

在这种收敛性条件下的结果是（参看[8]）：

设有一系列极小化问题

$$z = \inf f(x) \quad \text{s.t. } x \in C \qquad \text{和} \qquad z_i = \inf f_i(x) \quad \text{s.t. } x \in C$$

若对于 C 中的任一序列 $\{x_i\}$ 有

$$\lim_{i\to\infty}\{f_i(x_i) - f(x_i)\} = 0$$

则 $\lim\limits_{i\to\infty} z_i = z$。

注 在[9]中证明了，这一结果中的要求等价于 $f_i \to f$ 的一致收敛性，而一致收敛性包含了 *epi*—收敛性（参看[1]，*epi*-收敛性只要求半一致收敛性即可），而用 *epi*-收敛性理论可得出比以上更强的结果。

另一较强的结果（当然条件也更多）出现在 Bank 等人的书[10]中（第四章第二节）它的叙述是（符号同上）：

设 C 为一紧致集，f 为连续函数，对所有 $x \in C$、$x_i \in C$，$x_i \to x$ 的序列 $\{x_i\}$ 有

$$\lim f_i(x_i) = f(x)$$

则

$$\lim_{i\to\infty} z_i = z, \qquad \lim\sup \operatorname{Arg\,min} f_i \subset \operatorname{Arg\,min} f.$$

注 同样，这些条件包含了 *epi*—收敛性的条件。

(3). 点到集合映射理论(*point-to-set map*)

这一理论总结在 Hogan 的文章[11]中，它与 *epi*-收敛性理论很相近，我们用无约束极值问题和有约束极值问题分别比较它们的效力。

设有一系列极值问题

$$z = \inf f(x) \quad \text{和} \quad z_i = \inf f_i(x)$$

[11] 中的定理 8 在这种情况下可改写为：若对任何 $x_i \to x$，$i \to \infty$，有 $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_i) = f(x)$，则

$$\lim\sup \operatorname{Arg\,min} f_i \subset \operatorname{Arg\,min} f$$

注 在所给条件下，我们可得 $f_i \xrightarrow{e} f$，且可得出比之更多的结论。

对于有约束极值问题序列

$$z = \inf f(x) \quad \text{s.t. } x \in D \qquad \text{和} \qquad z_i = \inf f_i(x) \quad \text{s.t. } x \in D$$

[11]中的定理 7 断言：若对任何 $x_i \to x$，有

$$\lim f_i(x_i) = f(x)$$

f，f_i均为连续函数，且D为紧致集，则$\lim\limits_{i\to\infty} z_i = z$，

对于极值问题序列

$$z = \inf\ f(x) \quad \text{s.t.}\ x \in D \qquad \text{和} \qquad z_i = \inf\ f(x) \quad \text{s.t.}\ x \in D$$

[11]中的定理又可叙述为：设$f(x)$为连续函数，$\lim\limits_{i\to\infty} D_i \overset{K}{=} D$，$D$为紧致集，则$\lim z_i = z$。

注 同样这些结果都可包含在epi-收敛性理论之中。

结论：因此，可以认为，epi-收敛性是最优化逼近理论中要求的条件最少而所给的结果最强的一种收敛性理论。

参考文献

[1] R. Wets, "Convergence of convex Functions,Variational Inequalities and Convex Optimization Problems", in Variational Inequalities and Complementality Problems,eds,R.Cottle,Chap.25,John Wiley,1980.

[2] H.Attouch,R.Wets,"Approximation and Convergence in Nonlinear Optimization", in Nonlinear Programming 4,pp.367-394,eds.O.L.Mangasarian,1981.

[3] R.Wets,"Stochastic Programming:Solution Techniques of Stochastic Programming",in Mathematical Programming,The-state-of-the Art,eds.A.Bachem,Springer Verlag,1982.

[4] J.Birge,R.Wets,"Designing Approximation Schemes for Stochastic Optimization Problems,in Particular for Programs With Recourse",Math.Prog.Study 27,1986.

[5] J.Wang (王金德),"Lipschitz Continuity of Objective Functions in Stochastic Programs with Fixed Recourse and Its Applications",Math.Prog.Study 27,1986.

[6] J.Wang (王金德),"Stability of Probabilistic Constrained Programs",南京大学数学半年刊，1986年第2期.

[7] P.Kosmol,"Algorithmen Zur Konvexen Optimierung",O.R.Verfahren,Band XVIII 1974.

[8] O.Karma,"Об Аппроксимации и Задачах Оптимизации",Уче.Зап. Тартуск.Ун 448,1978.

[9] K.Marti,"Approximation der Entscheidungsprobleme mit Linearer Ergibnisfunction und Positive Homogener,Subadditiver Verlustfunction",Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Geb.31,1975.

[10] B.Bank,J.Guddat,D.Klatte,B.Kummer, K.Tammer, Nonlinear Parametic Programming,Birkhäuser Verlag,1983.

[11] W.Hogan, "Point-to-Set Maps in Mathematical Programming", SIAM Review, Vol.15,No.3,1973.

SOME RESULTS ON EPIGRAPH CONVERGENCE

Wang Jinde

(Nanjing University)

Abstract

In this paper we show the application of epigraph convergence in mathematical programming. Moreover we give a sufticient and necessary condition for the convergence of the optima of approximation programs. At last we compare the power of epigraph convergence with that of some other types of approximation theories.