# 2021 考研数学真题试卷(数学一)

## 数学（一）

**一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）**

(1)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值. (B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0. (D)可导且导数不为 0.

(2)设函数 $f\left(x,y\right)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$， $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ ，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$ . (B) $dx-dy$ . (C) $dy$ . (D) $-dy$ .

(3)设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$. (B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$. (D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

(4) 设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，则 $\int_0^1 f\left(x\right)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$. (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$. (D) $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$.

(5)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$ . (B) $1,1$ . (C) $2,1$ . (D) $1,2$ .

(6)已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$ ，若 $\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$ 两两正交，则 $l_1$，$l_2$ 依次为

(A) $\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.

(7)设 $A,B$ 为 $n$ 阶实矩阵，下列不成立的是

(A) $r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=2r\left(A\right)$ (B) $r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r\left(A\right)$

(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$　　　　(D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

(8)设 $A$，$B$ 为随机事件，且 $0 < P(B) < 1$，下列命题中不成立的是

(A)若 $P(A|B) = P(A)$，则 $P(A|\overline{B}) = P(A)$.

(B)若 $P(A|B) > P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B}) > P(\overline{A})$

(C)若 $P(A|B) > P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B) > P(A)$.

(D)若 $P(A|A\cup B) > P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A) > P(B)$.

(9)设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \hat{\theta} = \overline{X} - \overline{Y}$，则

(A) $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

(B) $\hat{\theta}$ 不是 $\theta$ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

(C) $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D) $\hat{\theta}$ 不是 $\theta$ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(10)设 $X_1, X_2 \ldots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0: \mu \le 10, H_1: \mu > 10.$ $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\overline{X} \ge 11\}$，其中 $\overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$，则 $\mu = 11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1 - \Phi(0.5)$　　　　(B) $1 - \Phi(1)$

(C) $1 - \Phi(1.5)$　　　　(D) $1 - \Phi(2)$

**二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）**

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$______.

(12)设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, x < 0 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2, x \ge 0 \end{cases}$ 确定,则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} =$__________.

(13)欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 得解为 $y =$________.

(14)设 $\Sigma$ 为空间曲线区域 $\{(x,y,z) | x^2 + 4y^2 \le 4, 0 \le z \le 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + zdxdy =$_________.

(15)设 $A = a_{ij}$ 为 3 阶矩阵，$A_{ij}$ 为代数余子式，若 $A$ 的每行元素之和均为 2，且 $|A| = 3$，$A_{11} + A_{21} + A_{31} =$________.

(16)甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 $X$，$Y$ 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 $X$ 与 $Y$ 的相关系

数________.

**三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）**

(17)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

(18)(本题满分 12 分)

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}(n=1,2,\ldots)$ ，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$ ，求 $C$ 上的点到 $xoy$ 坐标面距离的最大值.

(20)(本题满分 12 分)

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 $D_1$.

(1)求 $I(D_1)$ 的值.

(2)计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$ ，其中 $\partial D_1$ 是 $D_1$ 的正向边界.

(21)(本题满分 12 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$.

(1)求正交矩阵 $P$ ,使得 $P^TAP$ 为对角矩阵;

(2)求正定矩阵 $C$ ,使得 $C^2=(a+3)E-A$.

(22)(本题满分 12 分)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 $X$ ,较长的一段长度记为 $Y$ ,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1)求 $X$ 的概率密度;

(2)求 $Z$ 的概率密度.

(3)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.