

2022 年全国硕士研究生招生考试数学(一) 试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则()

(A) $f(1) = 0$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

(C) $f'(1) = 1$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$.

(2) 设 $f(u)$ 可导, $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 若 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y^2(\ln y - \ln x)$, 则()

(A) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 0$.

(B) $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$.

(C) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 1$.

(D) $f(1) = 0, f'(1) = 1$.

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.

(4) 若 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_2 < I_1 < I_3$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

(5) 下列 4 个条件中, 3 阶矩阵 A 可相似对角化的一个充分非必要条件是()

(A) A 有 3 个不同的特征值.

(B) A 有 3 个线性无关的特征向量.

(C) A 有 3 个两两线性无关的特征向量.

(D) A 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则()

(A) $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.

(B) $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.

(C) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

(D) $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

(7) 设 $\alpha_1 = (\lambda, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, \lambda, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, \lambda)^T, \alpha_4 = (1, \lambda, \lambda^2)^T$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是()

(A) $\{0, 1\}$.

(B) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$.

(C) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.

(D) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$.

(8) 设随机变量 X 服从区间 $(0, 3)$ 上的均匀分布, 随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 的协方差为 -1 , 则 $D(2X - Y + 1) = ()$

(A) 1.

(B) 5.

(C) 9.

(D) 12.

(9) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 X_1 的 4 阶矩存在, $E(X_1^k) = \mu_k (k = 1, 2, 3, 4)$, 则根据

切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq ()$

(A) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.

(B) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

(C) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$.

(D) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

(10) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 若在 $X = x$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim N(x, 1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为()

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 把答案填在题中横线上.)

(11) 函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的最大方向导数为_____.

(12) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____.

(13) 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x^2 + y^2 \leq ke^{x+y}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

(14) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____.

(15) 已知矩阵 A 和 $E - A$ 可逆, 其中 E 为单位矩阵, 若矩阵 B 满足 $[E - (E - A)^{-1}]B = A$, 则 $B - A =$ _____.

(16) 设 A, B, C 为随机事件, 且 A 与 B 互不相容, A 与 C 互不相容, B 与 C 相互独立, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(B \cup C \mid A \cup B \cup C) =$ _____.

三、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 的满足条件 $y(1) = 3$ 的解, 求

曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

(19) (本题满分 12 分)

已知曲线 L 是曲面 $\Sigma: 4x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界, 曲面 Σ 方向朝上, 曲线 L

的方向和曲面 Σ 的方向符合右手法则, 计算 $I = \oint_L (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz$.

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充分必要条件是对任意不同的实数 a, b , 都有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 成立.

(21) (本题满分 12 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$.

(I) 写出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(III) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(22) (本题满分 12 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta (\theta > 0)$ 是未知参数. 利用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$.