1987 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答

数 学（试卷Ⅰ）

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分. 只写答案不写解题过程）

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是 $\underline{x-y+z=0}$

(2) 当 $x=\underline{-1/\ln 2}$；时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

(3) 由 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 围成图形的面积= $\underline{\quad 3/2 \quad}$

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是 $\underline{\quad -18\pi \quad}$.

(5) 已知三维线性空间的一组基底 $\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,0,1)$，$\alpha_3=(0,1,1)$，则向量 $\alpha=(2，0，0)$ 在上述基底下的坐标是 $\underline{\quad (1,1,-1) \quad}$

二、（本题满分 8 分）

求正的常数 a 与 b，使式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

解： 假若 $b\neq 1$，则根据洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=0\neq 1$$，与题设矛盾，于是 $b=1$.

此时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$，

即 $1=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$，因此 $a=4$.

三、（本题满分 7 分）

(1) 设函数 f,g 连续可微，$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial(xy)}{\partial x}=f_1'+y\cdot f_2'$；$\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'\cdot\dfrac{\partial(x+xy)}{\partial x}=(1+y)\cdot g'$.

(2) 设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$，求矩阵 B.

解： 因 $AB=A+2B$，故 $AB-2B=A$，即 $(A-2E)B=A$，

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

四、（本题满分 8 分）

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解. 其中常数 $a>0$.

解： 由特征方程 $r^3+2r^2+(9+a^2)r=0$，知其特征根根为 $r_1=0,r_{2,3}=-3\pm ai$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y}=C_1+C_2e^{-3x}\cos x+C_3e^{-3x}\sin x$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x)=Ax$，代入原方程可得 $A=\dfrac{1}{9+a^2}$.

因此，原方程的通解为 $y(x)=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2e^{-3x}\cos x+C_3e^{-3x}\sin x+\dfrac{1}{9+a^2}\,x$.

五、选择题（每小题 3 分，满分 12 分）

(1) 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ （C）

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛与发散与 k 的值有关.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，$s>0,t>0$，则 I 的值 （D）

(A) 依赖于 s 和 t (B) 依赖于 s、t、x

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s (D) 依赖于 s，不依赖于 t

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处 (B)

(A) $f(x)$ 导数存在, $f'(a)\neq 0$ (B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值 (D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=a\neq 0$，而 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|=$ (C)

(A) a (B) $1/a$ (C) a^{n-1} (D) a^n

六、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解： 记 $u_n=\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\dfrac{n2^n}{x^n}\right|=\dfrac{|x|}{2}$，

令$\frac{|x|}{2}<1$，知原级数在开区间$(-2,2)$内每一点都收敛.

又当$x=-2$时，原级数=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，故由莱布尼兹判别法知其收敛；

而当$x=2$时，原级数=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}2^{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，显然发散，故幂级数的收敛域为$[-2,2)$.

又记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n=xS_1(x)$，其中$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$，

有$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{1-x/2}$，于是$S_1(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x/2}=2\ln(\frac{2}{2-x})$，

因此幂级数的和函数为$S(x)=2x\ln\frac{2}{2-x}$，$x\in[-2,2)$.

七、（本题满分 10 分）

计算曲面积分$I=\iint_S x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$，

其中 s 是曲线$\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 Y 轴旋转一周所形成的曲面，它的法向量与 Y 轴正向的夹角恒大于$\pi/2$.

解：S的方程为$y=x^2+z^2+1$，记S_1：$y=3,(x^2+z^2)$，知$S+S_1$为封闭曲面，设其方向取外侧，所围区域为Ω，则由高斯公式，有

$$I=\oiint_{S+S_1}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy-\iint_{S_1}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$=\iiint_\Omega 1\cdot dv-0-\iint_{S_1}2(1-y^2)dydz+0=\int_1^3 dy\iint_{D_y}dzdx-\iint_{D_{zx}}2(1-3^2)dzdx$$

$$=\int_1^3(y-1)dy+16\cdot\pi\cdot 2=34\pi.$$

八、（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微，对于$[0,1]$上的每个x，函数的值都在开区间$(0,1)$内，且$f'(x)\ne 1$.证明 在$(0,1)$内有且仅有一个x，使$f(x)=x$.

证：令$h(t)=f(t)-t$，知$h(t)$在闭区间$[0,1]$上连续，又由题设知$0<f(x)<1$，于是有$h(0)=f(0)-0>0,h(1)=f(1)-1<0$. 故由零点定理，在$(0,1)$内有$x$，使$f(x)=x$.

假若$f(x)$在开区间$(0,1)$内有两个不同的点x_1和x_2，使得$f(x_1)=x_1$，$f(x_2)=x_2$，不妨设$x_1<x_2$，则易见$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，故由拉格朗日定理知，

$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，即 $f'(\xi)=1$.此与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾！故在 $(0,1)$ 内使 $f(x)=x$ 的 x 只能有一个.

九、（本题满分 8 分）

问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解？无解？有无穷多解？并求出无穷多解时的通解.

解：对方程组的增广矩阵进行初等变换，得

$$\widetilde{A}=(A\ \ b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 当 $a\neq 1$ 时，系数行列式 $|A|=(a-1)^2\neq 0$，故由克拉姆法则，原方程组有唯一解；

② 当 $a=1$，且 $b\neq -1$ 时，$r(\widetilde{A})=3, r(A)=2$，$r(\widetilde{A})\neq r(A)$，故原方程组无解；

③ 当 $a=1$，且 $b=-1$ 时，$r(\widetilde{A})=r(A)=2<4$，故原方程组有无穷的解. 此时显然有

$$\widetilde{A}=(A\ \ b)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见其通解为：$x=(-1,1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

十、填空题（每小题 2 分，满分 6 分）

(1) 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为 $\underline{\quad 1-(1-p)^n \quad}$；而事件 A 至多发生一次的概率为 $\underline{\quad [1+(n-1)p](1-p)^{n-1} \quad}$.

(2) 三个箱子，第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个白球 3 个黑球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 五个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取一个球，这个球为白球的概率为 $\underline{\quad 53/120 \quad}$，已知取出的是白球，此球属于第二箱的概率是 $\underline{\quad 20/53 \quad}$.

(3) 已知连续随机变量 X 的密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为 __1__；X 的方差为__1/2__.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X，Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，求随机变量 Z=2X+Y 的概率密度函数 $f_z(z)$.

解：由题设，(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & 其\ 它\end{cases}$，

故 Z 的分布函数 $F_z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z}f(x,y)dxdy$，

① 当 $z<0$ 时，$F_z(z)=\iint\limits_{2x+y\le z}0dxdy=0$，此时 $f_z(z)=0'=0$；

② 当 $0\le z\le 2$ 时，$F_z(z)=\int_0^z dy\int_0^{\frac{z-y}{2}}e^{-y}dx=\dfrac{z}{2}\int_0^z e^{-y}dy-\dfrac{1}{2}\int_0^z ye^{-y}dy$，此时

$$f_z(z)=F_z'(z)=\frac{1}{2}\int_0^z e^{-y}dy=\frac{1}{2}(1-e^z)；$$

③ 当 $z>2$ 时，$F_z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^1(1-e^{2x-z})dx=1-\dfrac{1}{2}(e^{-2}-1)e^{-z}$，此时

$$f_z(z)=F_z'(z)=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$$

综上所述，Z=2X+Y 的概率密度函数为 $f_z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z\le 2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^{-2}-1) & z>2\end{cases}$