2009年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) A

解 由已知条件

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=-\frac{a^3}{6b}=1.$$

所以 $a^3=-6b$.故应选 A.

(2) A

解 令 $z=y\cos x$，则 z 关于 y 为奇函数，关于 x 为偶函数，由题意易知 D_1,D_3 均关于 y 轴对称，D_2,D_4 均关于 x 轴对称.所以由对称性

$I_2=I_4=0,$

$I_1=2\displaystyle\iint\limits_{D_1右}y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y y\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 y\sin y\,\mathrm{d}y>0,$

$I_3=2\displaystyle\iint\limits_{D_3右}y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_0^{-y}y\cos x\,\mathrm{d}x=-2\int_0^1 y\sin y\,\mathrm{d}y<0.$故应选 A.

(3) D

解 不妨设 $f(x)=g(x)\,(0\leqslant x\leqslant2)$，其中 $g(0)=-1,g(1)=0,g(2)=2$，由题干图得，

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ g(x), & 0\leqslant x\leqslant2,\\ 0, & 2<x\leqslant3.\end{cases}$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t=t\Big|_0^x=x$，由此可排除 A，C.

又当 $2<x\leqslant3$ 时，

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

又由定积分的几何意义知，$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x>0$，故 $2<x\leqslant3$ 时 $F(x)>0$.故应选 D.

(4) C

解 若令 $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，却有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛.故排除 A，D.

若取 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散，却有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛.故排除 B.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 均为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}|b_n|=0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^2 b_n^2}{|b_n|} = \lim_{n \to \infty} a n^2 \cdot \lim_{n \to \infty} |b_n| = 0,$$

由正项级数比较判别法的极限形式知：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

（5）A

解 由 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$,

得 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

（6）B

解 由 $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 3$，得 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = 2\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad \boldsymbol{B}^* = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} = 3\boldsymbol{B}^{-1}.$$

故 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = (-1)^{2 \times 2} |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

（7）C

解 $f(x) = F'(x) = 0.3\Phi'(x) + \dfrac{0.7}{2}\Phi'\left(\dfrac{x-1}{2}\right),$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)\,\mathrm{d}x + 0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{\frac{x-1}{2}=u} 2\int_{-\infty}^{+\infty} (2u+1)\Phi'(u)\,\mathrm{d}u = 2,$$

则 $EX = 0 + 0.35 \times 2 = 0.7.$

（8）B

解 $F_Z(z) = P\{xy \leqslant z\}$

$= P\{xy \leqslant z \mid y = 0\} P\{y = 0\} + P\{xy \leqslant z \mid y = 1\} P\{y = 1\}$

$= \dfrac{1}{2}\big[P\{xy \leqslant z \mid y = 0\} + P\{xy \leqslant z \mid y = 1\} \big].$

由于 x,y 相互独立,故　$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}[P\{x\cdot 0\leqslant z\}+P\{x\leqslant z\}].$

(1)若 $z<0$,则 $F_Z(z)=\dfrac{1}{2}\Phi(z)$,

(2)若 $z\geqslant 0$,则 $F_Z(z)=\dfrac{1}{2}[1+\Phi(z)]$,

所以 $z=0$ 为间断点.故有一个间断点.

二、填空题

(9) $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1+yf'_2$,　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.

(10) $x(1-e^x)+2$

解　由齐次通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,得特征根为 $r_1=r_2=1$,故 $a=-2,b=1$.

微分方程为 $y''-2y'+y=x$.

设特解为

$y^*=Ax+B,(y^*)'=A,(y^*)''=0,$

$\quad -2A+Ax+B=x,A=1,$

$\quad -2+B=0,B=2.$

所以特解为 $y^*=x+2$.

非齐次的通解为　$y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$.

把 $y(0)=2,y'(0)=0$ 代入得　$C_1=0,C_2=-1$.

故应填 $-xe^x+x+2$.

(11) $\dfrac{13}{6}$

解　由题意可知,$x=x,y=x^2,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,则 $ds=\sqrt{1+4x^2}\,dx$.

所以

$$\int_L x\,ds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

(12) $\dfrac{4}{15}\pi$

解　由对称性

$$\iiint_{\Omega} x^2\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Omega} y^2\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

所以　$\displaystyle\iiint_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4\,dr=\frac{4}{15}\pi.$

(13) 2

解　设 λ 是 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值,$\boldsymbol{\eta}$ 是属于 λ 的特征向量,从而 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$.

由于 $\lambda\neq 0,\boldsymbol{\eta}\neq 0$,故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\neq 0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\mu\neq 0$,有 $\mu\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$,所以 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}$,从而 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}=\lambda\cdot\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{\beta}$.

所以,$\lambda=2$.

(14) -1

解 因为 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计，所以

$$E(\overline{X}+kS^2)=np^2.$$

而 $\quad E(\overline{X}+kS^2)=E(\overline{X})+kE(S^2)=EX+kDx=np+knp(1-p),$

则 $k(1-p)=p-1$，即 $k=-1$.

三、解答题

(15) 解 $\quad f'_x(x,y)=2x(2+y^2),$

$$f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1.$$

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

由于

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right),$$

$$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=0,$$

$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\mathrm{e},$$

所以 $\quad B^2-AC=-2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$，且 $A>0$，

从而 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(16) 解 曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$，所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

考察幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，知其收敛域为 $(-1,1]$，和函数为 $-\ln(1+x)$.

因为 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$，令 $x=1$，得

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S(1)=1-\ln 2.$$

(17) 解 （Ⅰ）椭球面 S_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$.

设切点为 (x_0,y_0)，则 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$.

将 $x=4,y=0$ 代入切线方程得 $x_0=1$，从而 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-x_0^2}=\pm\dfrac{3}{2}$.

所以切线方程为 $\dfrac{x}{4}\pm\dfrac{y}{2}=1$，从而圆锥面 S_2 的方程为 $\left(\dfrac{x}{4}-1\right)^2=\dfrac{y^2+z^2}{4}$，

即 $\quad (x-4)^2-4y^2-4z^2=0$.

（Ⅱ） S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\dfrac{3}{2}$、高为 3 的锥体体积 $\dfrac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差，其中

$$V=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi,$$

故所求体积为 $\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{5}{4}\pi=\pi$.

(18) **解** （Ⅰ）取 $\quad F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

由题意知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（Ⅱ）对于任意的 $t\in(0,\delta)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续，在 $(0,t)$ 内可导，由右导数定义及拉格朗日中值定理可得

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)，其中\ \xi\in(0,t).$$

由于 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=A$，且当 $t\to0^+$ 时，$\xi\to0^+$，所以 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(\xi)=A$，故 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19) **解** 取 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，Ω 为 Σ 与 Σ_1 之间的部分.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

根据高斯公式，可得

$$\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\pi,$$

所以 $I=4\pi$.

(20) **解** （Ⅰ）对矩阵 $(A\ \vdots\ \xi_1)$ 施以初等行变换，得

$$(A\ \vdots\ \xi_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&-1\\-1&1&1&\vdots&1\\0&-4&-2&\vdots&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\dfrac{1}{2}&\vdots&-\dfrac{1}{2}\\0&1&\dfrac{1}{2}&\vdots&\dfrac{1}{2}\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

可求得

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2}\\[2mm]\dfrac{1}{2}-\dfrac{k}{2}\\[2mm]k\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

又

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},$$

对矩阵$(A^2 \vdots \xi_1)$施以初等行变换,得

$$(A^2 \vdots \xi_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&\vdots&-1\\-2&-2&0&\vdots&1\\4&4&0&\vdots&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&-\dfrac{1}{2}\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

可求得

$$\xi_3=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}-a\\[2mm]a\\[1mm]b\end{pmatrix},$$

其中 a,b 为任意常数.

（Ⅱ）**证法一**　由（Ⅰ）知

$$|\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3|=\begin{vmatrix}-1&-\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2}&-\dfrac{1}{2}-a\\[2mm]1&\dfrac{1}{2}-\dfrac{k}{2}&a\\[2mm]-2&k&b\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}\neq0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

证法二　由题设可得 $A\xi_1=0$.设存在数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0, \tag{①}$$

等式两端左乘 A,得

$$k_2A\xi_2+k_3A\xi_3=0,$$

即

$$k_2\xi_1+k_3A\xi_3=0, \tag{②}$$

等式两端再左乘 A,得

$$k_3A^2\xi_3=0,$$

即

$$k_3\xi_1=0,$$

于是 $k_3=0$,代入②式,得 $k_2\xi_1=0$,故 $k_2=0$,将 $k_2=k_3=0$ 代入①式,可得 $k_1=0$,从而 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（21）**解**　（Ⅰ）二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)),$$

所以 A 的特征值为

$$\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2.$$

（Ⅱ）由于 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$，所以 A 合同于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其秩为 2，故 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$，

于是 $a = 0$ 或 $a = -1$ 或 $a = 2$.

当 $a = 0$ 时，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$，此时 f 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2$，不合题意.

当 $a = -1$ 时，$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$，此时 f 的规范形为 $-y_1^2 - y_2^2$，不合题意.

当 $a = 2$ 时，$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$，此时 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$.

综上可知，$a = 2$.

(22) **解** （Ⅰ）$P\{X = 1 | Z = 0\} = \dfrac{P\{X = 1, Z = 0\}}{P\{Z = 0\}} = \dfrac{C_2^1 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{9}$.

（Ⅱ）由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 $0, 1, 2$.

(X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{9}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{9}$	0
2	$\dfrac{1}{36}$	0	0

(23) **解** （Ⅰ）$EX = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} \, dx = \dfrac{2}{\lambda}$.

令 $\overline{X} = EX$，即 $\overline{X} = \dfrac{2}{\lambda}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1 = \dfrac{2}{\overline{X}}$.

（Ⅱ）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

由 $\dfrac{d \ln L}{d\lambda} = \dfrac{2n}{\lambda} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$，得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2 = \dfrac{2}{\overline{X}}$.