第一篇 最新真题

绝密★启用前

2023年全国硕士研究生招生考试

数 学（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整，笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡、试题册和草稿纸按规定交回。

考生编号															
考生姓名															

一、选择题（1～10小题，每小题5分，共50分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的．）

(1) 曲线 $y = x\ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

(A) $y = x + e$.　　(B) $y = x + \frac{1}{e}$.

(C) $y = x$.　　(D) $y = x - \frac{1}{e}$.

(2) 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，则

(A) $a < 0, b > 0$.　　(B) $a > 0, b > 0$.

(C) $a = 0, b > 0$.　　(D) $a = 0, b < 0$.

(3) 已知 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定，则

(A) $f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在.　　(B) $f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(C) $f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在.　　(D) $f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(4) 已知 $a_n < b_n (n = 1, 2, \cdots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则“$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分不必要条件.

(C) 必要不充分条件.　　(D) 既不充分也不必要条件.

(5) 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3，则

(A) $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.　　(B) $r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$.

(C) $r_3 \leqslant r_1 \leqslant r_2$.　　(D) $r_2 \leqslant r_1 \leqslant r_3$.

(6) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$.　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(7) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma} =$

(A) $k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.　　(B) $k\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.　　(C) $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.　　(D) $k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

(8) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $E(|X-EX|)=$

(A) $\frac{1}{e}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2}{e}$. (D) 1.

(9) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本,且两样本相互独立. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$, $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$, 则

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$. (B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$.

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$. (D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$.

(10) 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数. 若 $\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$ 为 σ 的无偏估计,则 $a=$

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. (C) $\sqrt{\pi}$. (D) $\sqrt{2\pi}$.

二、填空题(11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.)

(11) 当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小,则 $ab=$ ________.

(12) 曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为________.

(13) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$. 若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$ ________.

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足:$f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$,则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(15) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$,则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$ ________.

(16) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right), Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$,则 $P\{X=Y\}=$ ________.

三、解答题(17 ~ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$,该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

(18)(本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

(19)(本题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成,Σ 为 Ω 边界面的外侧,计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3yz\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数.证明:

(Ⅰ)若 $f(0)=0$,则存在 $\xi\in(-a,a)$,使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在$(-a,a)$内取得极值,则存在 $\eta\in(-a,a)$,使得 $|f''(\eta)|\geqslant\dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21)(本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$,$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

(Ⅰ)求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$;

(Ⅱ)是否存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

(22)(本题满分 12 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 X 与 Y 的协方差;

(Ⅱ)X 与 Y 是否相互独立?

(Ⅲ)求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度.