1999年全国硕士研究生入学统一考试数一试题解析

一、填空题(本题共5个小题，每小题3分，满分15分.把正确答案填写在题中横线上.)

(1)【答案】$\frac{1}{3}$.

【分析】利用 $x \to 0$ 的等价变换和洛必达法则求函数极限.

【详解】

方法1：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}\xlongequal{\tan x\sim x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

$$\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\xlongequal{\tan x\sim x}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

方法2：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$

$$\xlongequal{\sin x\sim x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

(2)【答案】$\sin x^2$

【分析】欲求 $\frac{d}{dx}\int_a^b \varphi(x,t)dt$，唯一的办法是作变换，使含有 $\varphi(x,t)$ 中的 x“转移”到 φ 之外

【详解】令 $u=x-t$，则 $dt=-du$，所以有

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dt=\frac{d}{dx}\int_x^0\left(-\sin u^2\right)du=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2du=\sin x^2$$

(3)【答案】$y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

【分析】先求出对应齐次方程的通解，再求出原方程的一个特解.

【详解】原方程对应齐次方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-4=0$,解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，故 $y''-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x)=e^{2x}$,因此原方程的特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$,代入原方程可求得 $A=\frac{1}{4}$，故所求通解为 $y=y_1+y^*=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$

(4)【详解】因为

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{pmatrix}\text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{把第2,…，}n\text{列加到第1列}}}\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \dots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda-n & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{提取第1列的公因子}}}(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & -1\\ 1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\ 3\text{行}-1\text{行}\\ \cdots\\ n\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}}(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$$

令$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$，得$\lambda_1=n$(1重)，$\lambda_2=0$(($n-1$)重)，故矩阵$A$的$n$个特征值是$n$和0(($n$-1)重)

(5)【答案】1/4

【详解】根据加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

因为$P(A)=P(B)=P(C)$，设$P(A)=P(B)=P(C)=p$

由于A,B,C两两相互独立，所以有

$$P(AB)=P(A)P(B)=p\times p=p^2,$$

$$P(AC)=P(A)P(C)=p\times p=p^2,$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=p\times p=p^2,$$

又由于$ABC=\varnothing$，因此有$P(ABC)=P(\varnothing)=0,$

所以

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)\\&=p+p+p-p^2-p^2-p^2+0=3p-3p^2\end{aligned}$$

又$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，从而$P(A\cup B\cup C)=3p-3p^2=\frac{9}{16}$，则有$3p-3p^2-\frac{9}{16}=0$

$\Rightarrow p^2-p+\frac{3}{16}=0$，解得 $p=\frac{3}{4}$或$\mathrm{p}=\frac{1}{4}$

因 $P(A)=P(B)=P(C)=p<\frac{1}{2}$，故 $p=\frac{1}{4}$，即 $P(A)=\frac{1}{4}$

二、选择题

(1)【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C,$ 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C \overset{u=-t}{=} \int_0^{x} f(-u)d\left(-u\right)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^{x} f(u)du+C=\int_0^{x} f(t)dt+C=F(x)$$

即 $F\left(x\right)$为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数，可排除(B)；

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除(C)；

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数，可排除(D).

(2)【答案】(D)

【详解】由于可导必连续，连续则极限必存在，可以从函数可导性入手.

因为 $$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0,$$

从而，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，故正确选项为(D).

(3)【答案】(C)

【详解】由题设知，应先将 $f(x)$ 从[0,1)作偶延拓，使之成为区间[−1,1]上的偶函数，然后再作周期(周期2)延拓，进一步展开为傅里叶级数，

$$S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})$$

而 $x=\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点，按狄利克雷定理有，

$$S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}.$$

(4)【答案】B

【详解】

方法1：A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 AB 是 m 阶方阵，因

$$r(AB)\le \min\left[r(A),r(B)\right]\le \min\left(m,n\right).$$

当 $m>n$ 时，有 $r(AB)\le \min[r(A),r(B)]\le n<m$. ($(AB)x=0$ 的系数矩阵的秩小于未知数的个数)，故有行列式 $|AB|=0$，故应选(B).

方法 2：B 是 $n\times m$ 矩阵, 当 $m>n$ 时, 则 $r(B)=n$ (系数矩阵的秩小于未知数的个数) ，方程组 $Bx=0$ 必有非零解，即存在 $x_0\ne 0$，使得 $Bx_0=0$，两边左乘 A，得 $ABx_0=0$，即 $ABx=0$ 有非零解，从而 $|AB|=0$，故选(B).

方法 3：用排除法

(A) $m>n$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, B_{n\times m}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $|AB|=0$，(A)不成立

(C) $n>m$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, B_{n\times m}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $AB=0$，$|AB|=0$，(C)不成立

(D) $n>m$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, B_{n\times m}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $AB=1$，$|AB|=1$，(D)不成立，故选(B).

(5)【答案】B

【详解】 根据正态分布的性质：服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布.

因 X和Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，所以

$$T_1=X+Y\sim N(u_1,{\sigma_1}^2),\ T_2=X-Y\sim N(u_2,{\sigma_2}^2)$$

其中 $u_1=E(X+Y)$，$\sigma_1^2=D(X+Y)$，$u_2=E(X-Y)$，$\sigma_2^2=D(X-Y)$

由期望的性质：$E(T_1)=E(X+Y)=EX+EY=0+1=1$，

$$E(T_2)=E(X-Y)=EX-EY=0-1=-1$$

由独立随机变量方差的性质：$D(T_1)=D(X+Y)=DX+DY=1+1=2$

$$D(T_2)=D(X-Y)=DX+DY=1+1=2$$

所以 $T_1 = X+Y \sim N(1,2)$，$T_2 = X-Y \sim N(-1,2)$

(一般来说遇到正态分布的小题，主要就考两点，标准化和对称性，考虑问题也是从这两点出发)

A选项：$P\left\{X+Y \le 0\right\} = \dfrac{1}{2}$. 因 $T_1 = X+Y \sim N(1,2)$

由标准化的定义：若 $X \sim N(u,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

所以，$\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，将其标准化有

$$P\left\{X+Y \le 0\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le \frac{0-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

(保证变换过程中概率不变，所以不等号的左边怎么变，右边也同样的变化)

又因为标准正态分布图像是关于 y 轴对称，所以

$$P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le 0\right\} = \frac{1}{2}，而 P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} < \frac{1}{2}，所以A错.$$

B选项：$P\left\{X+Y \le 1\right\} = \dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$P\left\{\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le 0\right\} = \dfrac{1}{2}$(根据标准正态分布的对称性)

故B正确.

C选项：$P\left\{X-Y \le 0\right\} = \dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$P\left\{\dfrac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \le \dfrac{0-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\} > \dfrac{1}{2}$，故C错.

D选项：$P\left\{X-Y \le 1\right\} = \dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$\mathrm{P}\left\{\dfrac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right\} > \dfrac{1}{2}$，故D错.

三【详解】分别在 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f(x,y) + x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)f'(x,y) \\ F'_x + F_y{}'\dfrac{dy}{dx} + F_z{}'\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

整理后得 $$\begin{cases} -xf'(x,y)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f(x,y)+xf'(x,y) \\ F_y'\dfrac{dy}{dx}+F_z'\dfrac{dz}{dx}=-F_x' \end{cases}$$

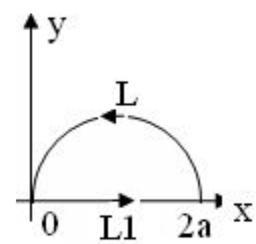
解此方程组，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y' & -F_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y' & F_z' \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y'-xf'F_z'}{F_y'+xf'F_z'},(F_y'+xf'F_z'\neq 0)$$

四【详解】

方法1：凑成闭合曲线，应用格林公式.

添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A\left(2\mathrm{a},0\right)$ 的有向直线段 L_1，如图，则



$$I=\int_{L+L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$
$$-\int_{L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$

利用格林公式，前一积分

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$$

其中D为 L_1+L所围成的半圆域，后一积分选择 x 为参数，得 L_1：

$$\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases},\left(0\le x\le 2a\right),$$

可直接积分 $I_2=\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b$，故 $I=I_1-I_2=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3.$

方法2：将曲线积分分成两部分，其中一部分与路径无关，余下的积分利用曲线的参数方程计算.

$$I=\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$
$$=\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy-\int_L b(x+y)dx+axdy$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

对后一积分，取 L 的参数方程

$\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，则 $\begin{cases} dx = -a\sin tdt \\ dy = a\cos tdt \end{cases}$，$t$ 从 0 到 π，得

$$\int_L b(x+y)dx + axdy$$

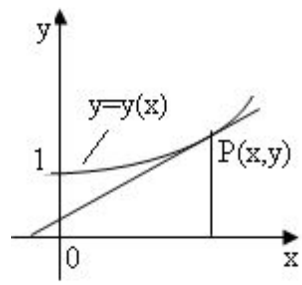
$$= \int_0^{\pi} (-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t + a^3\cos t + a^3\cos^2 t)dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3$$

从而 $\quad I = 0 - (-2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$

五【详解】如图，曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$

所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$



由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 因此 $y(x) > 0\ (x > 0)$

于是 $\quad S_1 = \frac{1}{2}y\left|x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right| = \frac{y^2}{2y'}.$

又 $S_2 = \int_0^x y(t)dt$，

根据题设 $2S_1 - S_2 = 1$, 即 $2\bullet\frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t)dt = 1$, 两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$

这是可降阶得二阶常微分方程，令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\bullet\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$，

则上述方程可化为 $yp\frac{dp}{dy} = p^2$, 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$，解得 $p = C_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y$,

从而有 $\quad y = C_1 e^x + C_2$，根据 $\quad y(0) = 1, y'(0) = 1$, 可得 $C_1 = 1, C_2 = 0$,

故所求曲线得方程为 $y = e^x$

六【详解】构造函数，利用函数的单调性，

证法1：令 $\quad f(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2$. 易知 $f(1) = 0$

又 $\quad f'(x) = 2x\ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, f''(1) = 2 > 0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

可见，当 $0<x<1$ 时，$\begin{cases} f'''(x)<0 \\ f''(x)\searrow \end{cases}$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\begin{cases} f'''(x)>0 \\ f''(x)\nearrow \end{cases}$

因此，$f''(1)=2$ 为 $f''(x)$ 的最小值，即当 $0<x<+\infty$ 时，$f''(x)\geq f''(1)=2>0$，所以 $f'(x)$ 为单调增函数. 又因为 $f'(1)=0$，所以有

$0<x<1$ 时 $f'(x)<0$ ；$1<x<+\infty$ 时 $f'(x)>0$，

所以利用函数单调性可知，$f(1)$ 为 $f(x)$ 的最小值，即 $f(x)\geq f(1)=0$

所以有 $x>0$ 时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$.

证法2：先对要证的不等式作适当变形，当 $x=1$ 时，原不等式显然成立；

当 $0<x<1$ 时，原不等式等价于 $\ln x\leq\frac{x-1}{x+1}$;

当 $1<x<+\infty$ 时，原不等式等价于 $\ln x\geq\frac{x-1}{x+1}$;

令 $$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$$

则 $$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{x^2+1}{x\left(x+1\right)^2}>0\left(x>0\right)$$

又因为 $f(1)=0,$ 利用函数单调性可知

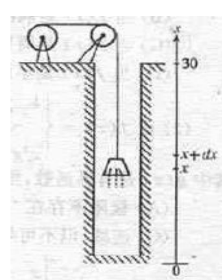
当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0,$ 即 $\ln x<\frac{x-1}{x+1}$;当 $1<x<+\infty$ 时，$f(x)>0,$ 即 $\ln x>\frac{x-1}{x+1}$;

综上所述，当 $x>0$ 时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$.

七【详解】建立坐标轴如图所示，

解法1：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$，其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功；W_2 是克服缆绳重力作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1=400N\times 30m=12000J.$$



将抓斗由 x 处提升到 $x+dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$dW_2=$ 缆绳每米重×缆绳长×提升高度

$$=50(30-x)dx,$$

从而 $$W_2=\int_0^{30}50(30-x)dx=22500J.$$

在时间间隔 $[t,t+dt]$ 内提升污泥需做功为

$$dW_3 = (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt)$$
$$= (2000 - 20t)3dt$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\dfrac{30m}{3m/s} = 10s,$

所以 $\quad W_3 = \int_0^{10} 3(2000-20t)dt = 57000J.$

因此，共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为W，当抓斗运动到x处时，作用力$f(x)$包括抓斗的自重$400N$，缆绳的重力$50(30-x)N$， 污泥的重力$(2000 - \dfrac{x}{3}\cdot 20)N,$

即 $\quad f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \dfrac{20}{3}x = 3900 - \dfrac{170}{3}x,$

于是 $\quad W = \int_0^{30}\left(3900 - \dfrac{170}{3}x\right)dx = 3900x - \dfrac{85}{3}x^2\Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$

八【分析】先写出切平面方程，然后求$\rho(x,y,z)$，最后将曲面积分化成二重积分.

【详解】点$P(x,y,z)\in S$，S在点P处的法向量为$\vec{n} = \{x, y, 2z\}$，设(X,Y,Z)为π上任意一点，则π的方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0\text{，化简得}\frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

由点到平面的公式，$O(0,0,0)$到π的距离

$$\rho(x,y,z) = \frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|\frac{x}{2}x + \frac{y}{2}y + z\cdot z\right|}{\sqrt{(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 + z^2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

从而 $\quad \iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}dS = \iint\limits_S z\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2}\,dS$

用投影法计算此第一类曲面积分，将S投影到xOy平面，其投影域为$D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$

由曲面方程知$z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}\right)}, (x,y)\in D,$ 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

因此 $$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\,d\sigma$$

故有 $$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\iint_S z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\,dS$$

$$=\frac{1}{4}\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)d\sigma\underline{\underline{\text{极坐标}}}\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3\pi}{2}.$$

九【详解】(1) 因为 $$\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x\overset{\tan x=t}{=}\frac{1}{n}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n(n+1)}$$

又由部分和数列

$$S_n=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}\left(a_i+a_{i+2}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}S_n=1,$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=1.$$

(2) 先估计 a_n 的值，因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx\text{，令 }t=\tan x\text{，则 }dt=\sec^2 xdx\text{，即 }dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

所以 $$a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由于 $\lambda+1>0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 也收敛.

十【详解】根据题设，A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，根据特征值和特征向量的概念，有 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$,

把 $|A|=-1$ 代入 $AA^*=|A|E$ 中，得 $AA^*=|A|E=-E$，则 $AA^*\alpha=-E\alpha=-\alpha$. 把 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$ 代入，于是 $AA^*\alpha=A\lambda_0\alpha=\lambda_0 A\alpha$，即 $-\alpha=\lambda_0 A\alpha$

也即 $\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow \lambda_0\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

常数 λ_0 乘以矩阵 $\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}$，需用 λ_0 乘以矩阵的每一个元素

$$\lambda_0\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_0(-a+1+c) \\ \lambda_0(-5-b+3) \\ \lambda_0[-(1-c)-a] \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵相等，则矩阵的对应元素都相同，可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

因 $|A|=-1\neq 0$， A 的特征值 $\lambda\neq 0$，A^* 的特征值 $\lambda^*=\dfrac{|A|}{\lambda}\neq 0$，故 $\lambda_0\neq 0$

由(1),(3)两式得

$$\lambda_0(-a+1+c)=-\lambda_0(-1+c-a),$$

两边同除 λ_0，得 $\quad -a+1+c=-(-1+c-a)$

整理得 $a=c$，代入(1)中，得 $\lambda_0=1$. 再把 $\lambda_0=1$ 代入(2)中得 $b=-3$

又由 $|A|=-1$， $b=-3$ 以及 $a=c$，有

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}\underline{\underline{3行+1行}}\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\underline{\underline{2列+1列}}\begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{按第3行展开}}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a-1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(其中(-1)^{3+1}的指数3，1分别是1的行数和列数)$$

$$=3(a-1)-2a=a-3=-1$$

故 $a=c=2$, 因此 $a=2,b=-3,c=2,\lambda_0=1.$

十一【详解】

“必要性”. 设 B^TAB 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^T\left(B^TAB\right)x>0,$ 即 $\left(Bx\right)^T A\left(Bx\right)>0,$ 于是，$Bx\neq 0$，即对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，都有 $Bx\neq 0$. (若 $Bx=0$，则 $A(Bx)=A0=0$ 矛盾). 因此，$Bx=0$ 只有零解，故有 $r\left(B\right)=n$ ($Bx=0$

有唯一零解的充要条件是 $r(B)=n$).

“充分性”. 因 A 为 m 阶实对称矩阵，则 $A^T=A$，故 $(B^TAB)^T=B^TA^TB=B^TAB$, 根据实对称矩阵的定义知 B^TAB 也为实对称矩阵. 若 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$. 又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^TA(Bx)=x^T(B^TAB)x>0$, 故 B^TAB 为正定矩阵(对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^T(B^TAB)x>0$).

十二【详解】离散型随机变量边缘分布律的定义：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_j p_{ij}, i=1,2,\cdots$$

$$p_j=P\{Y=y_j\}=\sum_i P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, j=1,2,\cdots$$

(通俗点说就是在求关于 X 的边缘分布时，就把对应 x 的所有 y 都加起来，同理求关于 Y 的边缘分布时，就把对应 y 的所有 x 都加起来)

故 $P\{Y=y_1\}=p_{\cdot 1}=\sum_i P\{X=x_i,Y=y_1\}=\sum_i p_{i1}$ 即

$$P\{Y=y_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_2,Y=y_1\}$$

而由表知 $P\{Y=y_1\}=\frac{1}{6}$，$P\{X=x_2,Y=y_1\}=\frac{1}{8}$，所以

$$P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{Y=y_1\}-P\{X=x_2,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

又根据 X 和 Y 相互独立，则有：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \quad 即\ p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

因 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{24}$，$P\{Y=y_1\}=\frac{1}{6}$，而 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_1\}$

所以 $P\{X=x_1\}=\dfrac{P\{X=x_1,Y=y_1\}}{P\{Y=y_1\}}=\dfrac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{4}$

再由边缘分布的定义有

$$P\{X=x_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_1,Y=y_2\}+P\{X=x_1,Y=y_3\}$$

所以 $P\{X=x_1,Y=y_3\}=P\{X=x_1\}-P\{X=x_1,Y=y_1\}-P\{X=x_1,Y=y_2\}$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

又由独立性知 $P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}=P\left\{X=x_1\right\}P\left\{Y=y_3\right\}$

所以 $$P\left\{Y=y_3\right\}=\frac{P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}}{P\left\{X=x_1\right\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

由边缘分布定义有 $P\left\{Y=y_3\right\}=P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}+P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}$

所以 $$P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}=P\left\{Y=y_3\right\}-P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

再由 $\sum_i p_{i\cdot}=1$，所以 $P\left\{X=x_2\right\}=1-P\left\{X=x_1\right\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

而 $$P\left\{X=x_2\right\}=P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}+P\left\{X=x_2,Y=y_2\right\}+P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}$$

故 $$P\left\{X=x_2,Y=y_2\right\}=P\left\{X=x_2\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

又 $\sum_j p_j=1$，所以 $P\left\{Y=y_2\right\}=1-P\left\{Y=y_1\right\}-P\left\{Y=y_3\right\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

所以有：

Y \ X	y_1	y_2	y_3	$P\left\{X=x_i\right\}=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\left\{Y=y_j\right\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

(1) 矩估计：由期望的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta x\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\int_0^\theta(\frac{6x^2}{\theta^2}-\frac{6x^3}{\theta^3})dx$$

$$=\frac{6}{\theta^2}\int_0^\theta x^2dx-\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx=\frac{6}{\theta^2}\frac{\theta^3}{3}-\frac{6}{\theta^3}\frac{\theta^4}{4}=2\theta-\frac{3\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，

即 $\frac{\theta}{2}=\overline{X}$，解得$\theta$的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$

(2) 由随机变量方差的性质：$D(cX)=c^2D(X)$，所以 $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})$

又由独立随机变量方差的性质：若 X和Y 独立，则 $D(X+Y)=DX+DY$

因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，所以 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 X 服从同一分布，即 $DX_i=DX \quad i=1,2,\cdots n$

而
$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)$$
$$=\frac{1}{n^2}D(X)\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n}{n^2}D(X)=\frac{1}{n}D(X)$$

方差的定义：$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$，所以求方差只需要求出 $E(X^2)$ 和 $E(X)$

根据二阶原点矩的定义：$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$

故
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^\theta\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx=\int_0^\theta(\frac{6x^3}{\theta^2}-\frac{6x^4}{\theta^3})dx=\frac{6\theta^2}{20}$$

而 $E(X)=\frac{\theta}{2}$，所以

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20}$$

因此 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 的方差为 $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$.