

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $-\frac{e^{x+y} - y \sin(xy)}{e^{x+y} - x \sin(xy)}$

【解析】函数 $y = y(x)$ 是一个隐函数, 即它是由一个方程确定, 写不出具体的解析式.

方程两边对 x 求导, 将 y 看做 x 的函数, 得 $e^{x+y}(1+y') + \sin(xy)(xy' + y) = 0$. 解出 y' , 即

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{e^{x+y} - y \sin(xy)}{e^{x+y} - x \sin(xy)}.$$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

2. 两函数乘积的求导公式:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(2) 【答案】 $\frac{2}{9}\{1, 2, -2\}$

【解析】对函数 u 求各个分量的偏导数, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

由函数的梯度(向量)的定义, 有

$$\text{gradu} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \{2x, 2y, 2z\},$$

所以 $\text{gradu}|_M = \frac{1}{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \{2, 4, -4\} = \frac{2}{9} \{1, 2, -2\}.$

【相关知识点】复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(3) 【答案】 $\frac{1}{2}\pi^2$

【解析】 $x = \pi$ 是 $[-\pi, \pi]$ 区间的端点, 由收敛性定理—狄利克雷充分条件知, 该傅氏级数在 $x = \pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)] = \frac{1}{2}[-1+1+\pi^2] = \frac{1}{2}\pi^2.$$

【相关知识点】收敛性定理—狄利克雷充分条件:

函数 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上满足: (i) 连续, 或只有有限个第一类间断点; (ii) 只有有限个极值点. 则 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数收敛, 而且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (-l, l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点,} \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & \text{若 } x \in (-l, l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点,} \\ \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)], & \text{若 } x = \pm l. \end{cases}$$

(4) 【答案】 $y = x \cos x + C \cos x, C$ 为任意常数

【解析】这是标准形式的一阶线性非齐次方程, 由于 $e^{\int \tan x dx} = \frac{1}{|\cos x|}$, 方程两边同乘 $\frac{1}{\cos x}$, 得

$$\left(\frac{1}{\cos x} y \right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} y = x + C.$$

故通解为 $y = x \cos x + C \cos x, C$ 为任意常数.

(5) 【答案】 1

【解析】因为矩阵 A 中任何两行都成比例 (第 i 行与第 j 行的比为 $\frac{a_i}{a_j}$), 所以 A 中的二阶子式全为 0, 又因 $a_i \neq 0, b_i \neq 0$, 知道 $a_i b_i \neq 0$, A 中有一阶子式非零. 故 $r(A) = 1$.

【相关知识点】矩阵秩的定义: 如果矩阵中存在 r 阶子式不为零, 而所有的 $r+1$ 阶子式全为零时, 则此矩阵的秩为 r .

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】对于函数在给定点 x_0 的极限是否存在需要判定左极限 $x \rightarrow x_0^-$ 和右极限 $x \rightarrow x_0^+$

是否存在且相等, 若相等, 则函数在点 x_0 的极限是存在的.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

$0 \neq \infty$, 故当 $x \rightarrow 1$ 时函数没有极限, 也不是 ∞ . 故应选 (D).

(2) 【答案】(C)

【解析】对原级数的通项取绝对值后, 再利用等价无穷小 $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2} (n \rightarrow +\infty)$,

$$\left| (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n}) \right| = 1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2} (n \rightarrow +\infty),$$

又因为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

所以有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2}$ 收敛.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n}) \right|$ 收敛. 所以原级数绝对收敛. 应选 (C).

注: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 确定无穷小 a_n 关于 $\frac{1}{n}$ 的阶 (即与 p 级数作比较) 是判断它的敛散性

的一个常用方法. 该题用的就是这个方法.

(3) 【答案】B

【解析】先求出切线的方向向量, 再利用方向向量与平面的法向量的数量积为 0 得切点对应的 t 值.

求曲线上的点, 使该点处的切向量 τ 与平面 $x + 2y + z = 4$ 的法向量 $n = \{1, 2, 1\}$ 垂直, 即可以让切线与平面平行.

曲线在任意点处的切向量 $\tau = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} = \{1, -2t, 3t^2\}$, $n \perp \tau \Leftrightarrow n \cdot \tau = 0$, 即

$1 - 4t + 3t^3 = 0$, 解得 $t = 1, t = \frac{1}{3}$. (对应于曲线上的点均不在给定的平面上)

因此, 只有两条这种切线, 应选 (B).

(4) 【答案】(C)

【解析】因 $3x^3$ 处处任意阶可导, 只需考查 $x^2|x| \triangleq \varphi(x)$, 它是分段函数, $x=0$ 是连接点. 所以, 写成分段函数的形式, 有

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0, \end{cases}$$

对分段函数在对应区间上求微分,

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ 3x^2, & x > 0, \end{cases}$$

再考查 $\varphi(x)$ 在连接点 $x=0$ 处的导数是否存在, 需要根据左导数和右导数的定义进行讨论.

$$\varphi'_+(0) = (x^3)'_{x=0} = 0, \quad \varphi'_-(0) = (-x^3)'_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0,$$

$$\text{即 } \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x \leq 0, \\ 3x^2, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } \varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0, \\ 6x, & x > 0, \end{cases} \quad \varphi''(0) = 0, \text{ 即 } \varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x \leq 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases} = 6|x|.$$

对于 $y=|x|$ 有 $y'_+(0)=1, y'_-(0)=-1$.

所以 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导, $\Rightarrow \varphi'''(0)$ 不存在, 应选(C).

(5) 【答案】(A)

【解析】 ξ_1, ξ_2 向量对应的分量不成比例, 所以 ξ_1, ξ_2 是 $Ax=0$ 两个线性无关的解, 故

$n-r(A) \geq 2$. 由 $n=3$ 知 $r(A) \leq 1$.

再看(A)选项秩为1; (B)和(C)选项秩为2; 而(D)选项秩为3. 故本题选(A).

【相关知识点】对齐次线性方程组 $Ax=0$, 有定理如下:

对矩阵 A 按列分块, 有 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $Ax=0$ 的向量形式为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0.$$

那么, $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n \quad \Leftrightarrow r(A) < n.$$

三、(本题共3小题, 每小题5分, 满分15分.)

(1) 【解析】由等价无穷小有 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sqrt{1-x^2} \sim -\frac{1}{2}(-x^2) = \frac{1}{2}x^2$,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\frac{1}{2}x^2},$$

上式为“ $\frac{0}{0}$ ”型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 所以连续应用两次洛必达法则, 有

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = \frac{1+0}{1} = 1.$$

(2) 【解析】这是带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数, 重要的是要分清函数是如何复合的.

由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 所以本题可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$.

由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) + f'_2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = f'_1 \cdot e^x \sin y + f'_2 \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_1 e^x \sin y + f'_2 2x)$$

$$= (f''_{11} e^x \cos y + f''_{12} 2y) e^x \sin y + f'_1 e^x \cos y + (f''_{21} e^x \cos y + f''_{22} 2y) 2x$$

$$= f''_{11} \cdot e^{2x} \sin y \cos y + 2f''_{12} \cdot e^x (y \sin y + x \cos y) + 4f''_{22} \cdot xy + f'_1 \cdot e^x \cos y.$$

【相关知识点】多元复合函数求导法则: 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具

有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3) 【解析】分段函数的积分应根据积分可加性分段分别求积分. 另外, 被积函数的中间变量非积分变量, 若先作变量代换, 往往会简化计算.

令 $x - 2 = t$, 则 $dx = dt$. 当 $x = 1$ 时, $t = -1$; 当 $x = 3$ 时, $t = 1$, 于是

$$\int_1^3 f(x-2)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt \xrightarrow{\text{分段}} \int_{-1}^0 (1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt = \left(t + \frac{1}{3}t^3\right) \Big|_{-1}^0 - e^{-t} \Big|_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

四、(本题满分6分.)

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程, 所对应的齐次方程的特征方程

$r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3) = 0$ 有两个根为 $r_1 = 1, r_2 = -3$, 而非齐次项 $e^{\alpha x}, \alpha = -3 = r_2$ 为单

特征根, 因而非齐次方程有如下形式的特解 $Y = x \cdot a e^{-3x}$, 代入方程可得 $a = -\frac{1}{4}$, 故所求通

解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{x}{4} e^{-3x}$, 其中 C_1, C_2 为常数.

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解

$Y(x)$, 可用特征方程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程

变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 :

分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x) e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征

方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

五、(本题满分 8 分)

【解析】将原式表成 $I = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

以考虑用高斯公式来求解, 但曲面 Σ 不是封闭的, 要添加辅助面. 如果本题采用投影法计算是比较复杂的, 故不采用.

添加辅助面 $S: z = 0(x^2 + y^2 \leq a^2)$, 法向量朝下, S 与 Σ 围成区域 Ω , S 与 Σ 取 Ω 的外法向量. 在 Ω 上用高斯公式得

$$I + \iint_S (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dx dy = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV.$$

用球坐标变换求右端的三重积分得

$$\begin{aligned} 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho \\ &= 3 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho = 3 \times 2\pi \times 1 \times \frac{1}{5} a^5 = \frac{6}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

注意 S 垂直于平面 yOz 与平面 xOz , 将积分投影到 xOy 平面上, 所以左端 S 上的曲面积分为

$$\begin{aligned} &\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= 0 + 0 + \iint_S R(x, y, 0)dx dy = \iint_{D_{xy}} ay^2 dx dy = -a \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy \\ &= -a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot \sin^2 \theta r dr \quad (\text{极坐标变换}) \\ &= -a \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = -a \times \pi \times \frac{a^4}{4} = -\frac{\pi}{4} a^5. \end{aligned}$$

因此 $I = \frac{6}{5} \pi a^5 + \frac{\pi}{4} a^5 = \frac{29}{20} \pi a^5$.

【相关知识点】1. 高斯公式: 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数

$P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy,$$

$$\text{或} \quad \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

2. 对于球面坐标与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi, \end{cases}$$

其中 φ 为向量与 z 轴正向的夹角, $0 \leq \varphi \leq \pi$; θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到向量在 xOy 平面上投影线段的角, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; r 为向量的模长, $0 \leq r < +\infty$.

球面坐标系中的体积元素为 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$, 则三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式是:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

六、(本题满分 7 分)

【解析】证法一: 用拉格朗日中值定理来证明.

不妨设 $x_2 > x_1 > 0$, 要证的不等式是 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) < f(x_1) - f(0)$.

在 $[0, x_1]$ 上用中值定理, 有 $f(x_1) - f(0) = f'(\xi)x_1, 0 < \xi < x_1$;

在 $[x_2, x_1 + x_2]$ 上用中值定理, 又有 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) = f'(\eta)x_1, x_2 < \eta < x_1 + x_2$

由 $f''(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 单调减, 而 $\xi < x_1 < x_2 < \eta$, 有 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 所以

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) < f(x_1) - f(0) = f(x_1),$$

即 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

证法二: 用函数不等式来证明. 要证 $f(x_1 + x) < f(x_1) + f(x), x > 0$, 构造辅助函数

$$\varphi(x) = f(x_1) + f(x) - f(x_1 + x),$$

则 $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_1 + x)$. 由 $f''(x) < 0, f'(x)$ 单调减, $f'(x) > f'(x_1 + x), \varphi'(x) > 0$.

由此, $\varphi(x) > \varphi(0) = f(x_1) + f(0) - f(x_1) = 0 (x > 0)$. 改 x 为 x_2 即得证.

【相关知识】拉格朗日中值定理:如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间

(a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立.

七、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 先求出在变力 F 的作用下质点由原点沿直线运动到点 $M(\xi, \eta, \zeta)$ 时所做的功

W 的表达式. 点 O 到点 M 的线段记为 L , 则

$$W = \int_L F \cdot ds = \int_L yzdx + zxdy + xydz.$$

(2) 计算曲线积分: L 的参数方程是 $x = \xi t, y = \eta t, z = \zeta t, t$ 从 0 到 1,

$$\Rightarrow W = \int_0^1 (\eta \zeta t^2 \cdot \xi + \xi \zeta t^2 \cdot \eta + \xi \eta t^2 \cdot \zeta) dt = 3\xi \eta \zeta \int_0^1 t^2 dt = \xi \eta \zeta.$$

化为最值问题并求解: 问题变成求 $W = \xi \eta \zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 (\xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0)$ 下的最大值与最大值点.

用拉格朗日乘子法求解. 拉格朗日函数为 $F(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \xi \eta \zeta + \lambda \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 \right)$,

则有

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi} = \eta \zeta + 2\lambda \frac{\xi}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi \zeta + 2\lambda \frac{\eta}{b^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \xi \eta + 2\lambda \frac{\zeta}{c^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组: 对前三个方程, 分别乘以 ξ, η, ζ 得 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2}, (\lambda \neq 0 \text{ 时})$

代入第四个方程得 $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}a, \eta = \frac{1}{\sqrt{3}}b, \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}c.$

相应的 $W = \frac{1}{3\sqrt{3}}abc = \frac{\sqrt{3}}{9}abc$. 当 $\lambda = 0$ 时相应的 ξ, η, ζ 得 $W = 0$.

因为实际问题存在最大值, 所以当 $(\xi, \eta, \gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}a, \frac{1}{\sqrt{3}}b, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 时 W 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

【相关知识点】拉格朗日乘子法:

要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中 λ 为参数. 求其对 x 与 y 的一阶偏导数, 并使之为零, 然后与附加条件联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

由这方程组解出 x, y 及 λ , 这样得到的 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

八、(本题满分 7 分)

【解析】(1) α_1 能由 α_2 、 α_3 线性表出.

因为已知向量组 α_2 、 α_3 、 α_4 线性无关, 所以 α_2 、 α_3 线性无关, 又因为 α_1 、 α_2 、 α_3 线性相关, 故 α_1 能由 α_2 、 α_3 线性表出.

(2) α_4 不能由 α_1 、 α_2 、 α_3 线性表出,

反证法: 若 α_4 能由 α_1 、 α_2 、 α_3 线性表出, 设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$.

由(1)知, α_1 能由 α_2 、 α_3 线性表出, 可设 $\alpha_1 = l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3$, 那么代入上式整理得

$$\alpha_4 = (k_1l_1 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_2 + k_3)\alpha_3.$$

即 α_4 能由 α_2 、 α_3 线性表出, 从而 α_2 、 α_3 、 α_4 线性相关, 这与已知矛盾.

因此, α_4 不能由 α_1 、 α_2 、 α_3 线性表出.

【相关知识点】向量组线性相关和线性无关的定义: 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m ,

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关; 否则, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

九、(本题满分 7 分)

【解析】(1) 设 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, 即是求此方程组的解.

对增广矩阵 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \beta)$ 作初等行变换,

第一行乘以 (-1) 分别加到第二行和第三行上, 再第二行乘以 (-3) 加到第三行上, 第三行自乘 $\frac{1}{2}$, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

第三行乘以 (-2) 、 (-1) 分别加到第二行和第一行上, 再第二行乘以 (-1) 加到第一行上, 有

$$\text{增广矩阵} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解出 $x_3 = 1$, $x_2 = -2$, $x_1 = 2$, 故 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$.

(2) 由 λ 为 A 的特征值可知, 存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, 两端左乘 A , 得

$A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 再一直这样操作下去, 有 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$.

因为 $\alpha \neq 0$, 故 $\lambda \neq 0$. 按特征值定义知 λ^n 是 A^n 的特征值, 且 α 为相应的特征向量.

所以有 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$, $A^n\xi_i = \lambda_i^n\xi_i (i=1, 2, 3)$, 据(1)结论 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$, 有

$$A\beta = A(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = 2A\xi_1 - 2A\xi_2 + A\xi_3,$$

于是 $A^n\beta = A^n(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = 2A^n\xi_1 - 2A^n\xi_2 + A^n\xi_3 = 2\lambda_1^n\xi_1 - 2\lambda_2^n\xi_2 + \lambda_3^n\xi_3$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} + 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{bmatrix}.$$

【相关知识点】矩阵特征值与特征向量的定义: 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX = \lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

【解析】由条件概率和乘法公式: 从 $P(AB) = 0$, 可知 $P(ABC) = P(AB)P(AB|C) = 0$,

由加法公式:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 0 = \frac{5}{8},$$

$$\text{故 } P(\overline{ABC}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{8}.$$

(2) 【解析】依题意, 随机变量 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布, 故 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

根据连续型随机变量函数的数学期望的求法, 得出

$$\begin{aligned} E(X + e^{-2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x + e^{-2x}) f(x) dx = \int_0^{+\infty} (x + e^{-2x}) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】方法一: 利用分布函数求密度函数:

$$\text{首先, 因 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 所以 } X \text{ 的密度函数为 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

$$\text{因 } Y \text{ 服从 } [-\pi, \pi] \text{ 上的均匀分布, 故 } Y \text{ 的密度函数为 } f_Y(y) = \frac{1}{\pi - (-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

因为随机变量 X 与 Y 相互独立, 所以二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. 要求 Z 的密度函数, 先求 Z 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \iint_{x+y \leq z} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx dy. \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) dy \quad (\text{由标准正态分布来表示一般正态分布}) \end{aligned}$$

求出 Z 的分布函数, 因此, 对分布函数求导得密度函数, Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) dy$$

其中 $\varphi(x)$ 是标准正态分布的概率分布密度. 由于 $\varphi(x)$ 是偶函数, 故有

$$\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)$$

$$\text{于是 } f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right) dy = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right) \right].$$

最终用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示出来 $Z = X + Y$ 的概率分布密度.

方法二： 用卷积公式直接计算：

直接应用相互独立随机变量之和密度的卷积公式, 求 $f_Z(z)$ 更为简单.

因为随机变量 X 与 Y 相互独立, 由卷积公式

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned}$$

最终用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示出来 $Z = X + Y$ 的概率分布密度.