第一篇 最新真题

2023年全国硕士研究生招生考试

数学(一)参考答案

一、选择题

(1)【答案】 B.

【解析】(方法一)

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则所求斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(方法二) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=x+x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]$

$$=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+\left\{x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]-\frac{1}{\mathrm{e}}\right\},$$

其中$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]-\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}=0$,则所求斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)【答案】 C.

【解析】 微分方程的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

若 $a^2-4b>0$,则特征方程有两个实根且 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

微分方程的解为 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$,在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若 $a^2-4b=0$,则 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2}$.

微分方程的解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$,在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若 $a^2-4b<0$,则 $\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,\mathrm{i}}{2}$.

微分方程的解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$.

如果此解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则 $a=0$，进而 $b>0$.

因此答案选(C).

【评注】 本题还可从选项出发，验证只有(C)符合条件.

(3)【答案】 C.

【解析】 当 $t\geqslant 0$ 时，$\begin{cases}x=3t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ $y=\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$.

当 $t<0$ 时，$\begin{cases}x=t,\\ y=-t\sin t,\end{cases}$ $y=-x\sin x$. 则 $y=\begin{cases}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}, & x\geqslant 0,\\ -x\sin x, & x<0.\end{cases}$

则由 $y'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}-0}{x}=0$，$y'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\sin x-0}{x}=0$，得 $y'(0)=0$.

$$y'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\sin x-x\cos x, & x<0.\end{cases}$$

由此可知 $y'(x)$ 连续，又由

$$y''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}-0}{x}=\frac{2}{9},$$

$$y''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x-x\cos x}{x}=-2,$$

可知 $y''(0)$ 不存在.

【评注】 泰勒公式判断导数存在性.

$$y=\begin{cases}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}+\cdots\right)=\frac{x^2}{9}+\cdots, x\geqslant 0,\\ -x\sin x=-x(x-\cdots)=-x^2+\cdots, x<0.\end{cases}$$

又 $y''_+(0)=\frac{2}{9}$，$y''_-(0)=-2$，故 $y''(0)$ 不存在.

(4)【答案】 A.

【解析】 由题意知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛，当然绝对收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n),$$

两个绝对收敛的级数之和绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n),$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也绝对收敛.

答案选(A).

(5)【答案】 B.

【解析】 (方法一) 记 $\boldsymbol{I}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},r(\boldsymbol{I}_1)=r_1$.

$\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},r(\boldsymbol{I}_2)=r_2$.

$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{ABC}\end{bmatrix},r(\boldsymbol{I}_3)=r_3$.

因为$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\boldsymbol{I}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$,

所以 $r(\boldsymbol{I}_1)=r_1=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=n$.

因为$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$,

所以 $r(\boldsymbol{I}_2)=r_2=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{AB})+n\geqslant r_1$,

$$r_2\geqslant r_1,(r_1=n).$$

因为$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{ABAB}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-(\boldsymbol{AB})^2\end{bmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{I}_3)=r_3=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-(\boldsymbol{AB})^2\end{bmatrix}=n+r[(\boldsymbol{AB})^2]\geqslant r_1$

$$r_3\geqslant r_1,(r_1=n).$$

又 $r[(\boldsymbol{AB})^2]\leqslant r(\boldsymbol{AB})$,故

$$r_3=n+r[(\boldsymbol{AB})^2]\leqslant n+r(\boldsymbol{AB})=r_2.$$

$$r_3\leqslant r_2.$$

总之:$r_1\leqslant r_3\leqslant r_2$,正确答案为(B).

(方法二) 广义初等变换

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},r_1=n$,

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},r_2=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E})=n+r(\boldsymbol{AB})$,

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{O}&-(\boldsymbol{AB})^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-(\boldsymbol{AB})^2\end{bmatrix},r_3=r((\boldsymbol{AB})^2)+r(\boldsymbol{E})=n+r((\boldsymbol{AB})^2)$,

故 $r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$.

（方法三） 特值法 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$,则

$r_1=n, r_2=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{E})=n+r(\boldsymbol{AB}), r_3=r((\boldsymbol{AB})^2)+r(\boldsymbol{E})=n+r((\boldsymbol{AB})^2)$,

得 $r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$.

(6)【答案】 D.

【解析】 选项 A 的矩阵有特征值 1,2,3,所以必相似于对角形.

选项 B 的矩阵是对称矩阵,必相似于对角形.

选项 C 的矩阵有二重特征值 2.

$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&1&a\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,秩为 1,故可以相似于对角形.

选项 D 的矩阵有 2 重特征值 2.

$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&1&a\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$,秩为 2,不能相似于对角形.

正确答案为(D).

(7)【答案】 D.

【解析】 设 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_2$,即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-x_3\boldsymbol{\beta}_1-x_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

下面求解该方程组:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{bmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}(\text{行最简形}),$$

方程组(*)同解于$\begin{cases}x_1=-3x_4,\\x_2=x_4,\\x_3=-x_4.\end{cases}$

通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, x_4\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2&=-3x_4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\\&=x_4\begin{pmatrix}-3\\-6\\-9\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}, k=-x_4\in\mathbf{R}.\end{aligned}$$

正确答案为(D).

(8)【答案】 C.

【解析】 由 $X \sim P(1)$，$P\{X=k\}=\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}(k=0,1,2,\cdots)$，$EX=1$.

$$
\begin{aligned}
E(|X-EX|)=E(|X-1|)&=|0-1|P\{X=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}|k-1|P\{X=k\}\\
&=\frac{1}{\mathrm{e}}+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}\\
&=\frac{1}{\mathrm{e}}+\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}-(0-1)P\{X=0\}\\
&=\frac{1}{\mathrm{e}}+E(X-1)+\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{2}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}
$$

答案选(C).

(9)【答案】 D.

【解析】 由$\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\dfrac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，且相互独立，得

$$
\frac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/n-1}{\dfrac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\Big/m-1}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1).
$$

答案选(D).

(10)【答案】 A.

【解析】 X_1 与 X_2 独立，服从的分布均为 $N(\mu,\sigma^2)$，记 $Y=X_1-X_2$，则 $Y\sim N(0,2\sigma^2)$，$\hat{\sigma}=a|Y|$. 由无偏估计的定义知 $E\hat{\sigma}=\sigma$，即

$$
\begin{aligned}
E(a|Y|)&=\int_{-\infty}^{+\infty}a|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2ay\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}y\\
&=a\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma,
\end{aligned}
$$

解得 $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. 答案选(A).

二、填空题

(11)【答案】 -2.

【解析】 由题设知

$$
1=\lim_{x\to0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{ax+bx^2+x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{[1+x^2+o(x^2)]-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{(a+1)x+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)}{\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)},
$$

则 $a=-1$，$b=2$. 故 $ab=-2$.

(12)【答案】 $x+2y-z=0$.

【解析】 令 $F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z$,则在点(0,0,0) 处切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}\Big|_{(0,0,0)}=\left\{1+\frac{2x}{1+x^2+y^2},2+\frac{2y}{1+x^2+y^2},-1\right\}\Big|_{(0,0,0)}=\{1,2,-1\},$$

因而所求切平面方程为 $x+2y-z=0$.

(13)【答案】 0.

【解析】 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$a_n=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=-2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\mathrm{d}\sin n\pi x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1].$$

因而 $a_{2n}=0,(n=1,2,\cdots)$.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$.

(14)【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=t+2}\int_0^1 f(t+2)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1[f(x)+x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2},$$

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(15)【答案】 $\frac{11}{9}$.

【解析】 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=3k_1=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)=1,k_1=\frac{1}{3},$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=3k_2=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)=-3,k_2=-1,$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=3k_3=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3)=-1,k_3=-\frac{1}{3},$$

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\frac{1}{9}+1+\frac{1}{9}=\frac{11}{9}.$$

(16)【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】
$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}\\&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{2}{3}\cdot\mathrm{C}_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\mathrm{C}_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

答案应为$\frac{1}{3}$.

三、解答题

(17)**【解】** (Ⅰ)设曲线 $y=y(x)$ 在点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，则在 y 轴上的截距为 $y-xy'$，从而有 $x=y-xy'$，$y'-\frac{1}{x}y=-1$，解此方程得

$$y(x)=x(C-\ln x).$$

由曲线过点 $(1,2)$，即 $y(1)=2$ 可知，$C=2$，则 $y(x)=x(2-\ln x)$.

(Ⅱ)由 $f(x)=\int_1^x t(2-\ln t)\mathrm{d}t\ (x>0)$ 可知

$$f'(x)=x(2-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\mathrm{e}^2$，当 $0<x<\mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增，当 $\mathrm{e}^2<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减，则 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}^2$ 处取得最大值. 最大值为

$$f(\mathrm{e}^2)=\int_1^{\mathrm{e}^2}x(2-\ln x)\mathrm{d}x=x^2\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x^2$$

$$=\mathrm{e}^4-1-\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}+\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^4-\frac{5}{4}.$$

【评注】 关于 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}^2$ 处取极大值的判定可利用 $f''(\mathrm{e}^2)<0$.

(18)**【解】** 由 $\begin{cases}f'_x=x(-2y-3xy+5x^3)=0,\\ f'_y=2y-x^3-x^2=0,\end{cases}$ 得

$x=0$ 时，$y=0$；

$x\neq 0$ 时，$\begin{cases}-2y-3xy+5x^3=0,\\ 2y-x^3-x^2=0,\end{cases}$ 进而 $3x^2-5x+2=0$，$x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=1$.

二元函数 $f(x,y)$ 有三个驻点为 $(0,0)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$，$(1,1)$.

可计算，$A=f''_{xx}=-2y-6xy+20x^3$，$B=f''_{xy}=-2x-3x^2$，$C=f''_{yy}=2$.

在点 $(0,0)$ 处，$\Delta=B^2-AC=0$，此时用极值的定义判定.

取 $y=0$，$f(x,y)=x^5$，显然

当 $x<0$ 时，$f(x,0)<f(0,0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f(x,0)>f(0,0)=0$，

$(0,0)$ 不是极值点.

在点 $(1,1)$ 处，$\Delta=B^2-AC=1>0$，$(1,1)$ 不是极值点.

在点 $\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$ 处，$\Delta=B^2-AC=-\frac{8}{27}<0$，且 $A=\frac{100}{27}>0$，取极小值

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}.$$

【评注】 本题中在驻点 $(0,0)$ 处，二元函数取得极值的充分条件失效，此时要用极值的定义来判定.

(19)**【解】** 由高斯公式可得：

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由于 Ω 关于 xOz 面对称，且 $\iiint\limits_{\Omega}(-xz\sin y+3y\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x}z\mathrm{d}z\\
&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r\cos\theta)^2r\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{5}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

(20)【证明】（Ⅰ）由泰勒公式可知

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\eta)}{2!}x^2$，其中 η 介于 0 与 x 之间.

则
$$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2,(0<\eta_1<a),\tag{①}$$

$$f(-a)=-f'(0)a+\frac{f''(\eta_2)}{2!}(-a)^2,(-a<\eta_2<0),\tag{②}$$

①＋②得
$$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)].\tag{③}$$

又 $f''(x)$ 在$[\eta_2,\eta_1]$上连续，则必有最小值 m 和最大值 M. 而
$$m\leqslant\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]\leqslant M.$$

由介值定理知，存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$.

代入③式得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $x_0\in(-a,a)$ 取得极值，则 $f'(x_0)=0$，由泰勒公式可知

$$
\begin{aligned}
f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\\
&=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间},
\end{aligned}
$$

则 $f(-a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(-a-x_0)^2,(-a<\xi_1<x_0)$,

$$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(a-x_0)^2,(x_0<\xi_2<a),$$

$$
\begin{aligned}
|f(a)-f(-a)|&=\left|\frac{f''(\xi_2)}{2!}(a-x_0)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a+x_0)^2\right|\\
&\leqslant\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(a-x_0)^2+\frac{|f''(\xi_1)|}{2}(a+x_0)^2.
\end{aligned}
$$

又 $|f''(x)|$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，则必有最大值 M.
故存在 $\eta\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-a,a)$，使得 $|f''(\eta)|=M$.

$$|f(a)-f(-a)|\leqslant \frac{M}{2}[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2]$$

$$\leqslant \frac{M}{2}(4a^2)=2a^2|f''(\eta)|,$$

$$|f''(\eta)|\geqslant \frac{1}{2a^2}\,|\,f(a)-f(-a)\,|.$$

(21)【解析】 记 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$,

$$g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)先用初等变换化二次型为规范形：

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3\\&=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\\&=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2\\&=z_1^2+z_2^2,\end{aligned}$$

其中$\begin{cases}z_1=x_1+x_2-x_3,\\z_2=x_2+x_3,\\z_3=x_3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=z_1-z_2+2z_3,\\x_2=z_2-x_3=z_2-z_3,\\x_3=z_3.\end{cases}$

$g=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3=y_1^2+(y_2+y_3)^2=z_1^2+z_2^2$,

其中$\begin{cases}z_1=y_1,\\z_2=y_2+y_3,\\z_3=y_3,\end{cases}$

总之：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，在可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$.

(Ⅱ)不存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$.

原因如下：若存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，从而特征值相同.

令 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)=0$,

求得 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

而 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，这说明 $\lambda_2=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似.

(22)【解】（Ⅰ）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x\cdot\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因被积函数是 x 的奇函数.

同理，$E(Y)=0,E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}xy\,\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 总之，$X$ 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

（Ⅱ）（方法一）　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3\pi}(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}$；

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$.

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{3\pi}(1+2y^2)\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由于 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X 与 Y 不相互独立.

（方法二）　如果 X 与 Y 相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 成立，$\begin{cases}f(0,y)=f_X(0)f_Y(y)\\ f\left(\frac{1}{2},y\right)=f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y(y)\end{cases}$ 也成立，即 $\dfrac{f(0,y)}{f\left(\frac{1}{2},y\right)}=\dfrac{f_X(0)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)}$ 为常数.

但现在 $\dfrac{f(0,y)}{f\left(\frac{1}{2},y\right)}=\dfrac{\frac{2}{\pi}y^2}{\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4}+y^2\right)}$ 显然不为常数，X 与 Y 不独立.

【评注】　如果 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 成立，则 $f(x,y)\neq 0$ 的定义域必为 $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ 矩形. 本题 $f(x,y)\neq 0$ 的定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，圆形，不可能独立.

（Ⅲ）$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X^2+Y^2\leqslant z\}$.

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^3\mathrm{d}r=z^2$；

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=1$.

故 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0\leqslant z\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$