2021 考研数学真题及答案解析

数学（一）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

(1)函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, x \neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值.　　(B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0.　　(D)可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，正确答案为 D.

(2)设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$.　　(B) $dx-dy$.　　(C) dy.　　(D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】 $f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$　　①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$　　②

分别将 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 带入①②式有

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1，\quad f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故正确答案为 C.

(3)设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$.　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

【答案】A.

【解析】根据麦克劳林公式有

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\cdot[1-x^2+o(x^3)]=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$$

故$a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$，本题选 A.

(4) 设函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上连续，则$\int_0^1 f\left(x\right)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$.

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知，将$\left(0,1\right)$分成n份，取中间点的函数值，则$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$, 即选 B.

(5)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$.　　(B) $1,1$.　　(C) $2,1$.　　(D) $1,2$.

【答案】B.

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2{x_2}^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为-1，3，0，故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.故应选 B.

(6)已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$两两正交，则$l_1$，$l_2$依次为

(A) $\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.　　(D) $-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.

【答案】A.

【解析】利用斯密特正交化方法知

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$

故$l_1=\dfrac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}=\dfrac{5}{2}$，$l_2=\dfrac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}=\dfrac{1}{2}$，故选 A.

(7)设A,B为n阶实矩阵，下列不成立的是

(A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$ (B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix}=2r(A)$ (D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

【答案】C.

【解析】(A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^TA \end{pmatrix}=r(A)+r(A^TA)=2r(A)$. 故 A 正确.

(B) AB 的列向量可由 A 的列线性表示，故 $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A)$.

(C) BA 的列向量不一定能由 A 的列线性表示.

(D) BA 的行向量可由 A 的行线性表示，$r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A)$.

本题选 C.

(8)设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A)若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

(B)若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

(C)若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

(D)若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】D.

【解析】$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$$P(\overline{A}|A\cup B)=\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

因为 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，固有 $P(A)>P(B)-P(AB)$，故正确答案为 D.

(9)设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$, 则

(A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】C.

【解析】因为 X,Y 是二维正态分布，所以 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 也服从二维正态分布，则 $\overline{X}-\overline{Y}$ 也服从二维正态分布，即 $E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$D(\hat{\theta})=D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})-\operatorname{cov}(\bar{X},\bar{Y})=\dfrac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，故正确答案为 C.

(10) 设 $X_1,X_2\dots,X_{16}$ 是来自总体 $N\left(\mu,4\right)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10.$ $\Phi\left(x\right)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\left\{\bar{X}\ge 11\right\}$，其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1-\Phi\left(0.5\right)$　　(B) $1-\Phi\left(1\right)$

(C) $1-\Phi\left(1.5\right)$　　(D) $1-\Phi\left(2\right)$

【答案】B.

【解析】所求概率为 $P\{\bar{X}<11\}$　$\bar{X}\sim N(11.5,\dfrac{1}{4})$，

$$P\{\bar{X}<11\}=P\left\{\frac{\bar{X}-11.5}{\frac{1}{2}}\le\frac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1)$$

故本题选 B.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$______.

【答案】 $\dfrac{\pi}{4}$

【解析】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

(12)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1,x<0\\ y=4(t-1)e^t+t^2,x\ge 0\end{cases}$ 确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$________.

【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【解析】 由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4te^t+2t}{2e^t+1}$，得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3}$，

将 $t=0$ 带入得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.

(13)欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 得解为 $y=$______.

【答案】 x^2.

【解析】 令 $x=e^t$，则 $xy'=\dfrac{dy}{dt},x^2y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}$，原方程化为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0$，特征方程为 $\lambda^2-4=0$，特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2}$，将初始条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 带入得 $C_1=1,C_2=0$，故满足初始条件的解为 $y=x^2$.

(14) 设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$______.

【答案】 4π.

【解析】由高斯公式得原式$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dV=\int_0^2 dz\iint\limits_{D}dxdy=4\pi$.

(15)设 $A=a_{ij}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3$，$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$_________.

【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$A\alpha=\lambda\alpha,\lambda=2,\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$ 而 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$，$A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}+A_{21}+A_{31}\\A_{12}+A_{22}+A_{32}\\A_{13}+A_{23}+A_{33}\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}.$$

(16)甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X ,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数________.

【答案】$\frac{1}{5}$.

【解答】联合分布率 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)&(1,1)\\\frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$, $X\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{20}$，$DX=\frac{1}{4},DY=\frac{1}{4}$,即 $\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-1-\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x(1+t^2+o(t^2))dt=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，故

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))(1+x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

(18)(本题满分 12 分)

设$u_n(x)=e^{-nx}+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}(n=1,2,\ldots)$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域及和函数.

【答案】$S(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1)\\ \frac{e}{e-1}\quad,x=1\end{cases}$.

【解析】

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx}+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]$, 收敛域$(0,1]$, $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}},x\in(0,1]$

$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x\ln(1-x)-[-\ln(1-x)-x]$

$=(1-x)\ln(1-x)+x,\quad x\in(0,1)$

$S_2(1)=\lim_{x\to1^-}S_2(x)=1$

$S(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1)\\ \frac{e}{e-1}\quad,x=1\end{cases}$

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求$C$上的点到$xoy$坐标面距离的最大值.

【答案】66

【解析】设拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$

$L_x'=2x\lambda+4u=0$

$L'y=4y\lambda+2u=0$

$L_z'=2z-\lambda+u=0$

$x^2+2y^2-z=6$

$4x+2y+z=30$

解得驻点：$(4,1,12),(-8,-2,66)$

C 上的点$(-8,-2,66)$到 xoy 面距离最大为 66.

(20)(本题满分 12 分)

设$D\subset R^2$是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$取得最大值的积分区域记为$D_1$.

(1)求$I(D_1)$的值.

(2)计算$\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中$\partial D_1$是$D_1$的正向边界.

【答案】$-\pi$.

【解析】(1) 由二重积分的几何意义知：$I(\mathrm{D})=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)d\sigma$，当且仅当$4-x^2-y^2$在$D$上大于 0 时，$I(\mathrm{D})$达到最大，故$D_1$：$x^2+y^2\le4$且$I(\mathrm{D}_1)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr=8\pi$.

(2) 补$D_2:x^2+4y^2=r^2$（r很小），取D_2的方向为顺时针方向，

$\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$ =

$$= \int_{\partial D_1+\partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2} - \int_{\partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$= -\frac{1}{r^2}e^{r^2}\int_{\partial D_2} xdx+4ydy - \frac{1}{r^2}e^{r^2}\int_{\partial D_2} ydx-xdy = \frac{1}{r^2}\iint_{D_2} -2d\sigma = -\pi .$$

(21)(本题满分 12 分)

已知 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1)求正交矩阵 P ,使得 $P^T AP$ 为对角矩阵；

(2)求正定矩阵 C ,使得 $C^2=(a+3)E-A$.

【答案】(1) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$；(2) $C=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

【解析】

(1)由 $\left|\lambda E-A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)=0$

得 $\lambda_1=a+2, \lambda_2=\lambda_3=a-1$

当 $\lambda_1=a+2$ 时

$((a+2)E-A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2=\lambda_3=a-1$ 所

$((a-1)E-A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

令 $P=\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，则 $P^T AP=\Lambda=\begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix}$,

(2) $P^T C^2 P = P^T(a+3)E-A)P = ((a+3)E-\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^T CPP^T CP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T CP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

故 $C = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

(22)(本题满分 12 分)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X ,较长的一段长度记为 Y ,令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度；

(2)求 Z 的概率密度.

(3)求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$；(2) $f_Z(z) = (F_Z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$.(3) $-1 + 2\ln 2$.

【解析】(1)由题知：$X \sim f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$；

(2)由 $Y = 2 - X$，即 $Z = \frac{2-X}{X}$，先求 Z 的分布函数：

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$$

当 $z < 1$ 时，$F_Z(z) = 0$；

当 $z \geq 1$ 时，

$$F_Z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$f_Z(z) = (F_Z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, 其他 \end{cases};$$

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1dx = -1 + 2\ln 2$.