1998年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1)【答案】$-\dfrac{1}{4}$

【解析】**方法1**：用四则运算将分子化简,再用等价无穷小替换,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{4x^2}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2}}\ \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

方法2：采用洛必达法则.

$$原式\ \underline{\underline{洛}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}\ \underline{\underline{洛}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)}{4}=-\frac{1}{4}.$$

方法3：将分子按佩亚诺余项泰勒公式展开至x^2项,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_1\left(x^2\right),\ \sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_2\left(x^2\right),$$

从而

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_1\left(x^2\right)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_2\left(x^2\right)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o_1\left(x^2\right)+o_2\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2)【答案】$yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$

【分析】因为 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y), f,\varphi$ 具有二阶连续导数, 利用混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关, 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 均可, 但不同的选择可能影响计算的繁简.

方法1：先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)\right]=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)\right)\\&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)x+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

方法2：先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)\right]=\frac{1}{x}f'(xy)x+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)\\&=f'(xy)+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(xy)+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)\right]\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

方法3：对两项分别采取不同的顺序更简单些：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}f(xy)\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y\varphi(x+y)\right)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}f'(xy)x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\varphi'(x+y)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(xy)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\varphi'(x+y)\right]\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

评注：本题中, f,φ 中的中间变量均为一元, 因此本题实质上是一元复合函数的求导, 只要注意到对 x 求导时, y 视为常数；对 y 求导时, x 视为常数就可以了.

(3)【答案】$12a$

【解析】L 关于 x 轴(y 轴)对称, $2xy$ 关于 y (关于 x)为奇函数 $\Rightarrow \int_L 2xyds=0$.

又在 L 上,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow 3x^2+4y^2=12 \Rightarrow \int_L (3x^2+4y^2)ds=\int_L 12ds=12a.$$

因此, 原式 $=\int_L 2xyds+\int_L (3x^2+4y^2)ds=12a$.

【相关知识点】对称性：平面第一型曲线积分 $\int_l f(x,y)ds$, 设 $f(x,y)$ 在 l 上连续, 如果 l 关于 y 轴对称, l_1 为 l 上 $x\geq 0$ 的部分, 则有结论：

$$\int_l f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{l_1} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数},\\ 0, & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数}.\end{cases}$$

类似地, 如果 l 关于 x 轴对称, l_2 为 l 上 $y\geq 0$ 的部分, 则有结论：

$$\int_l f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{l_2} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数},\\ 0, & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}.\end{cases}$$

(4)【答案】 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$

【解析】**方法1**：设 A 的对应于特征值 λ 的特征向量为 ξ, 由特征向量的定义有

$$A\xi=\lambda\xi, \qquad (\xi\neq 0).$$

由 $|A|\neq 0$, 知 $\lambda\neq 0$ (如果0是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A|=0$), 将上式两端左乘 A^* , 得

$$A^*A\xi=|A|\xi=A^*\lambda\xi=\lambda A^*\xi ,$$

从而有 $A^*\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi$, (即 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$).

将此式两端左乘 A^* , 得

$$\left(A^*\right)^2\xi=\frac{|A|}{\lambda}A^*\xi=\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2\xi .$$

又 $E\xi=\xi$, 所以 $\left(\left(A^*\right)^2+E\right)\xi=\left(\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1\right)\xi$, 故 $(A^*)^2+E$ 的特征值为 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

方法2：由 $|A|\neq 0$, A 的特征值 $\lambda\neq 0$ (如果0是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A|=0$), 则 A^{-1} 有特征值

$\frac{1}{\lambda}$，A^* 的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$；$(A^*)^2+E$ 的特征值为$\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

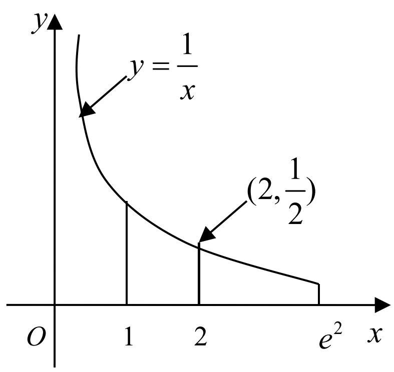
【相关知识点】1. 矩阵特征值与特征向量的定义：设 A 是 n 阶矩阵，若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX=\lambda X$ 成立，则称 λ 是矩阵 A 的特征值，称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$，两端左乘 A^{-1}，得 $\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$. 因为 $\alpha\neq 0$，故 $\lambda\neq 0$，于是有 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$. 按特征值定义知 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

若 $AX=\lambda X$，则 $(A+kE)X=AX+kX=(\lambda+k)X$. 即若 λ 是 A 的特征值，则 $A+kE$ 的特征值是 $\lambda+k$.

2. 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

(5)【答案】$\frac{1}{4}$



【解析】首先求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$.

$$D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x\le e^2, 0\le y\le\frac{1}{x}\right\},$$

区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{e^2}=2.$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其次求关于 X 的边缘概率密度.

当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $1\le x\le e^2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}$.

故 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,共15分.)

(1)【答案】(A)

【解析】为变限所定义的函数求导数，作积分变量代换 $u=x^2-t^2$，

$$t:0\to x\Rightarrow u:x^2\to 0,\ du=d\left(x^2-t^2\right)=-2tdt\ \Rightarrow dt=-\frac{1}{2t}du,$$

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt \underline{\underline{u=x^2-t^2}} \int_{x^2}^0 tf(u)\left(-\frac{1}{2t}\right)dt$$

$$=\int_{x^2}^0 -\frac{1}{2}f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du,$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du$$

$$=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot\left(x^2\right)'=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2),$$

选(A).

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式：若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 均一阶可导，则 $F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right]$.

(2)【答案】(B)

【解析】当函数中出现绝对值号时，就有可能出现不可导的“尖点”，因为这时的函数是分段函数. $f(x)=(x^2-x-2)\left|x\right|\left|x^2-1\right|$，当 $x\neq 0,\pm 1$ 时 $f(x)$ 可导，因而只需在 $x=0,\pm 1$ 处考察 $f(x)$ 是否可导. 在这些点我们分别考察其左、右导数.

由
$$f(x)=\begin{cases}(x^2-x-2)x(1-x^2), & x<-1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & -1\le x<0,\\ (x^2-x-2)x(1-x^2), & 0\le x<1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & 1\le x,\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0\ ,$$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0\ ,$$

即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导. 又

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x}=2\ ,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x}=-2\ ,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

类似，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处亦不可导. 因此 $f(x)$ 只有2个不可导点，故应选(B).

评注：本题也可利用下列结论进行判断：

设函数 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$.

(3)【答案】(D)

【解析】由 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y}{1+x^2}+\dfrac{\alpha}{\Delta x}$.

令 $\Delta x\to 0$，得 α 是 Δx 的高阶无穷小，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y}{1+x^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}.$$

分离变量，得 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{1+x^2}$，

两边积分，得 $\ln|y|=\arctan x+C$，即 $y=C_1e^{\arctan x}$.

代入初始条件 $y(0)=\pi$，得 $y(0)=C_1e^{\arctan 0}=C_1=\pi$. 所以，$y=\pi e^{\arctan x}$.

故 $$y(1)=\pi e^{\arctan x}\Big|_{x=1}=\pi e^{\arctan 1}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

【相关知识点】无穷小的比较：

设在同一个极限过程中，$\alpha(x),\beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，

(1) 若 $l\neq 0$，称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若 $l=1$，称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若 $l=0$，称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞)，称 $\alpha(x),\beta(x)$ 不可比较.

(4)【答案】(A)

【解析】设 $L_1:\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$，$L_2:\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$，题设矩阵

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$是满秩的, 则由行列式的性质, 可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{1行减2行,2行减3行} \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故向量组$(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$与$(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$线性无关, 否则由线性相关的定义知, 一定存在$k_1,k_2$, 使得$k_1(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)+k_2(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)=0$, 这样上面行列式经过初等行变换值应为零, 产生矛盾.

$(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$与$(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$分别为$L_1,L_2$的方向向量, 由方向向量线性相关, 两直线平行, 可知L_1,L_2不平行.

又由$\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$得

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}-1=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}-1=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}-1,$$

即
$$\frac{x-a_3-(a_1-a_2)}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3-(b_1-b_2)}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3-(c_1-c_2)}{c_1-c_2}.$$

同样由$\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$, 得

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}+1=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}+1=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}+1,$$

即
$$\frac{x-a_1+(a_2-a_3)}{a_2-a_3}=\frac{y-b_3+(b_2-b_3)}{b_2-b_3}=\frac{z-c_3+(c_2-c_3)}{c_2-c_3},$$

可见L_1,L_2均过点$\left(a_2-a_1-a_3,b_2-b_1-b_3,c_2-c_1-c_3\right)$, 故两直线相交于一点, 选(A).

(5)【答案】C

【分析】由题设条件$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$, 知$A$发生与$A$不发生条件下$B$发生的条件概率相等, 即$A$发生不发生不影响$B$的发生概率, 故$A,B$相互独立. 而本题选项(A)和(B)是考虑$P(A\mid B)$与$P(\overline{A}\mid B)$是否相等, 选项(C)和(D)才是事件$A$与B是否独立.

【解析】由条件概率公式及条件 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$, 知

$$\frac{P\{AB\}}{P\{A\}}=\frac{P\{\overline{A}B\}}{P\{\overline{A}\}}=\frac{P\{B\}-P\{AB\}}{1-P\{A\}},$$

于是有 $$P\{AB\}\left[1-P\{A\}\right]=P\{A\}\cdot\left[P\{B\}-P\{AB\}\right],$$

可见 $$P\{AB\}=P\{A\}P\{B\}.$$

应选(C).

【相关知识点】条件概率公式: $P\{B\mid A\}=\dfrac{P\{AB\}}{P\{A\}}$.

三、(本题满分5分)

【解析】**方法1**:求直线 L 在平面 Π 上的投影 L_0:

方法1:先求 L 与 Π 的交点 N_1. 以 $L:\begin{cases}x=1+t,\\y=t,\\z=1-t\end{cases}$ 代入平面 Π 的方程, 得

$$(1+t)-t+2(1-t)-1=0\Rightarrow t=1.$$

从而交点为 $N_1(2,1,0)$;再过直线 L 上点 $M_0(1,0,1)$ 作平面 Π 的垂线 $L':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$,

即 $\begin{cases}x=1+t,\\y=-t,\\z=1+2t.\end{cases}$

并求 L' 与平面 Π 的交点 N_2:

$$(1+t)-(-t)+2(1+2t)-1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3},$$

交点为 $N_2(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

N_1 与 N_2 的连接线即为所求 $L_0:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

方法2:求 L 在平面 Π 上的投影线的最简方法是过 L 作垂直于平面 Π 的平面 Π_0, 所求投影线就是平面 Π 与 Π_0 的交线. 平面 Π_0 过直线 L 上的点 $(1,0,1)$ 与不共线的向量 $l=(1,1,-1)$ (直线 L 的方向向量)及 $n=(1,-1,2)$ (平面 Π 的法向量)平行, 于是 Π_0 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\text{, 即 } x-3y-2z+1=0 .$$

投影线为 $L_0:\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

下面求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面 S 的方程. 为此, 将 L_0 写成参数 y 的方程：

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

按参数式表示的旋转面方程得 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{(2y)^2+(\dfrac{1}{2}(1-y))^2}\cos\theta, \\ y=y, \\ z=\sqrt{(2y)^2+(\dfrac{1}{2}(1-y))^2}\sin\theta. \end{cases}$$

消去 θ 得 S 的方程为 $x^2+z^2=\left(2y\right)^2+\left[-\dfrac{1}{2}(y-1)\right]^2$, 即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$

四、(本题满分6分)

【解析】令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$, $Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$, 则 $A(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

在单联通区域右半平面 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度 $\Leftrightarrow Pdx+Qdy$ 在 $x>0$ 上 $\exists$ 原

函数 $u(x,y)\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}, x>0.$

其中, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y .$$

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 即满足

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y ,$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0\Leftrightarrow \lambda=-1 .$$

可见, 当$\lambda=-1$时, 所给向量场为某二元函数的梯度场.

为求$u(x,y)$, 采用折线法, 在$x>0$半平面内任取一点, 比如点$(1,0)$作为积分路径的起点, 则根据积分与路径无关, 有

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}+C$$

$$=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0}dx+\int_0^y\frac{-x^2}{x^4+y^2}dy+C \text{（折线法）}$$

$$=\int_0^y\frac{-x^2}{x^4+y^2}dy+C$$

$$=\int_0^y\frac{-x^2}{x^4(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2)}dy+C \text{（第一类换元法）}$$

$$=-\int_0^y\frac{x^2\cdot x^2}{x^4(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2)}d\left(\frac{y}{x^2}\right)+C=-\int_0^y\frac{1}{(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2)}d\left(\frac{y}{x^2}\right)+C$$

$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C \text{（基本积分公式）}$$

其中C为任意常数.

【相关知识点】1. 二元可微函数$u(x,y)$的梯度公式: $gradu=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j$.

2. **定理**: 设D为平面上的单连通区域, 函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在D内连续且有连续的一阶偏导数, 则下列六个命题等价:

（1）$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$;

（2）$\oint_L Pdx+Qdy=0, L$为D内任意一条逐项光滑的封闭曲线;

（3）$\int\limits_{LAB}Pdx+Qdy$仅与点A,B有关, 与连接A,B什么样的分段光滑曲线无关;

（4）存在二元单值可微函数$u(x,y)$, 使

$$du=Pdx+Qdy$$

(即$Pdx+Qdy$为某二元单值可微函数$u(x,y)$的全微分;

（5）微分方程$Pdx+Qdy=0$为全微分方程;

（6）向量场$P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度$\boldsymbol{grad}u=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$.

换言之, 其中任一组条件成立时, 其它五组条件皆成立. 当条件成立时, 可用试图法或折线法求函数$u(x,y)$.

五、（本题满分6分）

【解析】先建立坐标系, 取沉放点为原点O, 铅直向下作为Oy轴正向, 探测器在下沉过程中受重力、浮力和阻力的作用, 其中重力大小：mg, 浮力的大小：$F_{浮}=-\rho B$；阻力：$-kv$, 则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho g-kv, y\big|_{t=0}=0, v\big|_{t=0}=0. \qquad (*)$$

由$\dfrac{dy}{dt}=v, \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}=v\Big/\dfrac{dy}{dv}$, 代入$(*)$得$y$与$v$之间的微分方程

$$mv\left(\frac{dy}{dv}\right)^{-1}=mg-B\rho-kv, \qquad v\big|_{y=0}=0.$$

分离变量得 $dy=\dfrac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$,

两边积分得 $\int dy=\int\dfrac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$,

$$y=\int\frac{mv+\frac{Bm\rho}{k}-\frac{m^2g}{k}-\frac{Bm\rho}{k}+\frac{m^2g}{k}}{mg-B\rho-kv}dv$$

$$=\int\frac{-\frac{m}{k}(mg-B\rho-kv)-\frac{Bm\rho}{k}+\frac{m^2g}{k}}{mg-B\rho-kv}dv$$

$$=\int\left(-\frac{m}{k}+\frac{\frac{m^2g-Bm\rho}{k}}{mg-B\rho-kv}\right)dv$$

$$=\int-\frac{m}{k}dv+\int\frac{m(mg-B\rho)}{k(mg-B\rho-kv)}dv$$

$$=-\frac{m}{k}v+\int\frac{m(mg-B\rho)\cdot(-\frac{1}{k})}{k(mg-B\rho-kv)}d(mg-B\rho-kv) \qquad \text{（第一类换元法）}$$

$$=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

再根据初始条件 $v|_{y=0}=0$, 即

$$-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)+C=0\Rightarrow C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho).$$

故所求 y 与 v 函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m\left(mg-B\rho\right)}{k^2}\ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right).$$

六、(本题满分7分)

【解析】**方法 1**：本题属于求第二类区面积分, 且不属于封闭区面, 则考虑添加一平面使被积区域封闭后用高斯公式进行计算, 但由于被积函数分母中包含 $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, 因此不能立即加、减辅助面 $\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$, 宜先将曲面方程代入被积表达式先化简：

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy.$$

添加辅助面 $\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$, 其侧向下(由于 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, 而高斯公式要求是整个边界区面的外侧, 这里我们取辅助面的下侧, 和 Σ 的上侧组成整个边界区面的内侧, 前面取负号即可), 由高斯公式, 有

$$I=\frac{1}{a}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}axdydz+(z+a)^2dxdy-\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_1}axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial(ax)}{\partial x}+\frac{\partial\left[(z+a)^2\right]}{\partial z}\right)dV-\left(-\iint_{D}a^2dxdy\right)\right).$$

第一个积分前面加负号是由于我们取边界区面的内侧, 第二个积分前面加负号是由于 Σ_1 的方向向下；另外由曲面片 Σ_1 在 yoz 平面投影面积为零, 则 $\iint_{\Sigma_1}axdydz=0$, 而 Σ_1 上 $z=0$, 则 $\left(z+a\right)^2=a^2$.

$$I=\frac{1}{a}\left(-\iiint_{\Omega}(a+2(z+a))dV+\iint_{D}a^2dxdy\right),$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的有界闭区域, D 为 Σ_1 在 xoy 面上的投影 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$.

从而,

$$I=\frac{1}{a}\left(-3a\iiint_{\Omega}dv-2\iiint_{\Omega}zdv+a^2\iint_{D}dxdy\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 zdz+a^2\cdot\pi a^2\right).$$

第一个积分用球体体积公式；第二个用柱面坐标求三重积分；第三个用圆的面积公式.

$$I=\frac{1}{a}\left(-2\pi a^4-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\left(\frac{1}{2}z^2\Big|_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0\right)dr+\pi a^4\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\left(-\frac{1}{2}(a^2-r^2)\right)dr\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(a^2r-r^3)dr\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+2\pi\cdot\left(\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a\right)=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+2\pi\cdot\left(\frac{a^2a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}a^3$$

方法2：逐项计算：

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}xdydz+\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2dxdy=I_1+I_2.$$

其中,

$$I_1=\iint_{\Sigma}xdydz=-\iint_{Dyz}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydz+\iint_{Dyz}-\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydz$$

$$=-2\iint_{Dyz}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydz,$$

第一个负号是由于在 x 轴的正半空间区域 Σ 的上侧方向与 x 轴反向；第二个负号是由于被积函数在 x 取负数.

D_{yz} 为 Σ 在 yoz 平面上的投影域 $D_{yz}=\{(y,z)\mid y^2+z^2\le a^2,z\le 0\}$, 用极坐标, 得

$$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}rdr$$

$$=-2\pi\cdot-\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}d(a^2-r^2)$$

$$=\pi\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}\pi(0-a^3)=-\frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2dxdy=\frac{1}{a}\iint_{Dxy}\left(a--\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^2dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2)rdr$$

$$=\frac{2\pi}{a}\int_0^a(2a^2r-2ar\sqrt{a^2-r^2}-r^3)dr$$

$$=\frac{2\pi}{a}\left[\int_0^a2a^2rdr-2a\int_0^ar\sqrt{a^2-r^2}dr-\int_0^ar^3dr\right]$$

$$=\frac{2\pi}{a}\left[a^2r^2\Big|_0^a-2a\cdot\left(\frac{1}{3}a^3\right)-\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a\right]$$

$$=\frac{2\pi}{a}(a^4-\frac{2}{3}a^4-\frac{a^4}{4})=\frac{\pi}{6}a^3,$$

其中 D_{yz} 为 Σ 在 yoz 平面上的投影域 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le a^2\}$. 故 $I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3$.

【相关知识点】高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

或 $$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

七、(本题满分6分)

【分析】这是 n 项和式的极限, 和式极限通常的方法就两种：一、把和式放缩, 利用夹逼准则求极限；二、把和式转换成定积分的定义形式, 利用定积分求极限. 这道题, 把两种方法结合到一起来求极限.

当各项分母均相同是 n 时, n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和. 于是可由定积分 $\int_0^1\sin\pi xdx$ 求得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】由于 $\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\le\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\le\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},i=1,2,\cdots,n$,

于是，$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}$$

根据夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}$.

【相关知识点】夹逼准则：若存在 N，当 $n>N$ 时，$y_n\le x_n\le z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

八、（本题满分5分）

【解析】**方法1**：因正项数列$\{a_n\}$单调减少有下界0，知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 a，则 $a_n\ge a$ 且 $a\ge 0$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，根据莱布尼茨判别法知，必有 $a>0$（否则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）.

又正项级数$\{a_n\}$单调减少，有 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\le\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而 $0<\frac{1}{a+1}<1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$ 收敛. 根据正项级数的比较判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 也收敛.

方法2：同方法1，可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. 令 $b_n=\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1,$$

根据根值判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 也收敛.

【相关知识点】1. 交错级数的莱布尼茨判别法：

设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足：

(1) $u_n \ge u_{n+1}, n=1,2,\cdots;$ (2) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0.$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛, 且其和满足$0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n<u_1$, 余项$|r_n|<u_{n+1}$.

反之, 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$发散, 只是满足条件(1), 则可以反证说明此级数一定不满足

条件(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 所以有$\lim_{n\to\infty}u_n>0$. (否则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛)

2. 正项级数的比较判别法：

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数, 且$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=A$, 则

(1) 当$0<A<+\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散；

(2) 当$A=0$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(3) 当$A=+\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散, 则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

3. 根值判别法：

$$\text{设} u_n>0 \text{, 则当} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases} <1\text{时}, & \sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}, \\ >1\text{时}, & \sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散，且}\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0, \\ =1\text{时}, & \text{此判别法无效.} \end{cases}$$

九、(本题满分6分)

【解析】(1) 要证$\exists x_0\in(0,1)$, 使$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(x)dx$；令$\varphi(x)=xf(x)-\int_{x}^{1}f(t)dt$, 要证

$\exists x_0\in(0,1)$, 使$\varphi(x_0)=0$. 可以对$\varphi(x)$的原函数$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$使用罗尔定理：

$\Phi(0)=0$,

$$\Phi(1)=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx-\int_0^1(\int_x^1 f(t)dt)dx$$
$$\overset{\text{分部}}{=}\int_0^1 xf(x)dx-\left[x\int_x^1 f(t)dt\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 xf(x)dx\right]=0,$$

又由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导. 根据罗尔定理, $\exists x_0\in(0,1)$, 使 $\Phi'(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

(2) 由 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=xf'(x)+2f(x)>0$, 知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增, 故(1)中的 x_0 是唯一的.

评注：若直接对 $\varphi(x)$ 使用零点定理, 会遇到麻烦：

$$\varphi(0)=-\int_0^1 f(t)dt\le 0,\varphi(1)=f(1)\ge 0 .$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时, 对任何的 $x_0\in(0,1)$ 结论都成立；

当 $f(x)\not\equiv 0$ 时, $\varphi(0)<0$, 但 $\varphi(1)\ge 0$, 若 $\varphi(1)=0$, 则难以说明在 $(0,1)$ 内存在 x_0. 当直接对 $\varphi(x)$ 用零点定理遇到麻烦时, 不妨对 $\varphi(x)$ 的原函数使用罗尔定理.

【相关知识点】1. 罗尔定理：如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ ($a<\xi<b$), 使得 $f'(\xi)=0$.

十、(本题满分6分)

【解析】经正交变换化二次型为标准形, 二次型矩阵与标准形矩阵既合同又相似. 由题设知, 二次曲面方程左端二次型对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, 则存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}B,$$

即 A与B 相似.

由相似矩阵有相同的特征值, 知矩阵 A 有特征值 $0,1,4$. 从而,

$$\begin{cases} 1+a+1=0+1+4, \\ |A|=-(b-1)^2=|B|=0. \end{cases} \Rightarrow a=3,b=1.$$

从而, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_1=0$ 时,

$$(0E-A)=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\times(-1)\text{分别加到}2,3\text{行}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是得方程组 $(0E-A)x=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} -x_1-x_2-x_3=0, \\ -2x_2=0. \end{cases}$

$r(0E-A)=2$, 可知基础解系的个数为 $n-r(0E-A)=3-2=1$, 故有1个自由未知量,

选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1=1$, 解得基础解系为 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$.

当 $\lambda_2=1$ 时,

$$(E-A)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\times(-1)\text{加到}2\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}\times(-1)\text{加到}2\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2,3\text{行互换}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是得方程组 $(E-A)x=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} -x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_2=0. \end{cases}$

$r(E-A)=2$, 可知基础解系的个数为 $n-r(E-A)=3-2=1$, 故有1个自由未知量,

选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1=1$, 解得基础解系为 $\alpha_2=(1,-1,1)^T$.

当 $\lambda_3=4$ 时,

$$(4E-A)=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{1,2\text{行互换}}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\3&-1&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行的}3,(-1)\text{倍分别加到}2,3\text{行}}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&2&-4\\0&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{2\text{行加到}3\text{行}}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&2&-4\\0&0&0\end{bmatrix},$$

于是得方程组 $(4E-A)x=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=0,\\2x_2-4x_3=0.\end{cases}$

$r(4E-A)=2$, 可知基础解系的个数为 $n-r(4E-A)=3-2=1$, 故有1个自由未知量,

选 x_2 为自由未知量, 取 $x_2=2$, 解得基础解系为 $\alpha_3=(1,2,1)^T$.

由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交, 可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相互正交.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化, 得

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2})^T,$$
$$\eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T,$$
$$\eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T.$$

因此所求正交矩阵为 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$.

评注：利用相似的必要条件求参数时, $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 是比较好用的一个关系式. 亦可用 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ 比较 λ 同次方的系数来求参数.

【相关知识点】1. 特征值的性质：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

2. 相似矩阵的性质：若矩阵 A 与 B 相似, 则 $|A|=|B|$.

十一、(本题满分4分)

【解析】用线性无关的定义证明.

设有常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$, 使得

$$\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0. \qquad (*)$$

两边左乘 A^{k-1}, 则有

$$A^{k-1}\left(\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha\right)=0,$$

即 $$\lambda_0 A^{k-1}\alpha+\lambda_1 A^k\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2(k-1)}\alpha=0.$$

上式中因 $A^k\alpha=0$, 可知 $A^{k+1}\alpha=\cdots=A^{2(k-1)}\alpha=0$, 代入上式可得 $\lambda_0 A^{k-1}\alpha=0.$

由题设 $A^{k-1}\alpha\neq 0$, 所以 $\lambda_0=0.$

将 $\lambda_0=0$ 代入 $(*)$, 有 $\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$.

两边左乘 A^{k-2}, 则有 $A^{k-2}\left(\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha\right)=0$,

即 $\lambda_1 A^{k-1}\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2k-3}\alpha=0$.

同样, 由 $A^k\alpha=0$, $A^{k+1}\alpha=\cdots A^{2(k-1)}\alpha=0$, 可得 $\lambda_1 A^{k-1}\alpha=0.$

由题设 $A^{k-1}\alpha\neq 0$, 所以 $\lambda_1=0.$

类似地可证明 $\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$, 因此向量组 $\alpha, A\alpha,\cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

【相关知识点】向量组线性相关和线性无关的定义：存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；否则, 称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

十二、(本题满分5分)

【解析】(II) 的通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n,$$

其中, $\xi_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^T$, $\xi_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^T,\cdots$, $\xi_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^T$,

$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数.

理由：可记方程组 $(I)A_{n\times 2n}X=0$, $(II)B_{n\times 2n}Y=0$, (I), (II) 的系数矩阵分别记为 A,B, 由于 B 的每一行都是 $A_{n\times 2n}X=0$ 的解,故 $AB^T=0$. B^T 的列是 (I) 的基础解系, 故由基础解系

的定义知, B^T 的列向量是线性无关的, 因此 $r(B)=n$. 故基础解系所含向量的个数

$n=2n-r(A)$, 得 $r(A)=2n-n=n$. 因此, A 的行向量线性无关.

对 $AB^T=0$ 两边取转置, 有 $\left(AB^T\right)^T=BA^T=0$, 则有 A^T 的列向量, 即 A 的行向量是 $BY=0$ 的线性无关的解.

又 $r(B)=n$, 故 $BY=0$ 基础解系所含向量的个数应为 $2n-r(B)=2n-n=n$, 恰好等于 A 的行向量个数. 故 A 的行向量组是 $BY=0$ 的基础解系, 其通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n,$$

其中, $\xi_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^T$, $\xi_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^T$, $\cdots$, $\xi_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^T$,

$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数.

十三、(本题满分6分)

【分析】把 $X-Y$ 看成一个随机变量, 根据独立正态随机变量的线性组合必然为正态分布的性质, 可以知道 $X-Y\sim \mathrm{N}(0,1)$, 这样可以简化整题的计算.

【解析】令 $Z=X-Y$, 由于 X,Y 相互独立, 且都服从正态分布, 因此 Z 也服从正态分布, 且

$$E(Z)=E(X)-E(Y)=0,\ D(Z)=D(X)+D(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

于是, $Z=X-Y\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}D|X-Y|&=D\left(|Z|\right)=E\left(|Z|^2\right)-\left(E|Z|\right)^2\\&=D(Z)+\left(E(Z)\right)^2-\left(E|Z|\right)^2=1-\left(E|Z|\right)^2.\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}E|Z|&=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{z^2}{2}}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\end{aligned}$$

故 $D|X-Y|=1-\dfrac{2}{\pi}.$

【相关知识点】1. 对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y),$$

其中 a,b,c 为常数.

2. 方差的定义：$DX=EX^2-(EX)^2$.

3. 随机变量函数期望的定义：若 $Y=g(X)$, 则 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$.

十四、(本题满分4分)

【解析】由题知：$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(3.4,6^2)$, $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 各样本相互独立, 根据独立正态随机变量的性质, $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其中 $\mu=E\overline{X}_n=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$,

$\sigma^2=D\overline{X}_n=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$.

根据期望和方差的性质,

$$\mu=E\overline{X}_n=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{3.4n}{n}=3.4,$$

$$\sigma^2=D\overline{X}_n=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{6^2n}{n^2}=\frac{6^2}{n}.$$

所以, $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(3.4,\frac{6^2}{n})$. 把 $\overline{X}_n$ 标准化, $U=\frac{\overline{X}_n-3.4}{6/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

从而,

$$\begin{aligned}P\left\{1.4<\overline{X}<5.4\right\}&=P\left\{1.4-3.4<\overline{X}-3.4<5.4-3.4\right\}\\&=P\left\{-2<\overline{X}-3.4<2\right\}=P\left\{\left|\overline{X}-3.4\right|<2\right\}\\&=P\left\{\frac{\left|\overline{X}-3.4\right|}{6}\sqrt{n}<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geq 0.95,\end{aligned}$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geq 0.975$, 查表得到 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geq 1.96$, 即 $n\geq(1.96\times 3)^2\approx 34.57$, 所以 n 至少应取35.

【相关知识点】1. 对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)\ ,$$

其中a,b,c为常数.

2. 若$Z\sim N(u,\sigma^2)$, 则$\dfrac{Z-u}{\sigma}\sim N(0,1)$

十五、(本题满分4分)

【解析】设该次考试的考生成绩为X, 则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 设$\overline{X}$为从总体X抽取的样本容量为n的样本均值, S为样本标准差, 则在显著性水平$\alpha=0.05$下建立检验假设:

$$H_0:\mu=\mu_0=70, H_1:\mu\neq 70,$$

由于σ^2未知, 故用t检验.

选取检验统计量,

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}=\frac{\overline{X}-70}{S}\sqrt{36}$$

在$\mu=\mu_0=70$时, $X\sim N(70,\sigma^2),T\sim t(35)$.

选择拒绝域为$R=\left\{|T|\geq\lambda\right\}$,其中$\lambda$满足:

$$P\left\{|T|\geq\lambda\right\}=0.05\text{,即}P\left\{|T|\leq\lambda\right\}=0.975,\lambda=t_{0.975}(35)=2.0301.$$

由$n\ =36,\overline{x}=66.5,\mu_0=70,s=15,$ 可算得统计量T的值:

$$|t|=\frac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36}=1.4<2.0301\ .$$

所以接受假设$H_0:\mu=70$, 即在显著性水平0.05下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分.