2008年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) B

解　$f'(x)=\ln(2+x^2)\cdot 2x=2x\ln(2+x^2)$，

又因为 $\ln(2+x^2)\neq 0$，

所以 $f'(x)$只有一个零点.

(2) A

解　由 $f'_x=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，　得　$f'_x(0,1)=\dfrac{1}{1}=1$.

由 $f'_y=\dfrac{\frac{-x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，　得　$f'_y(0,1)=0$.

所以 $\mathbf{grad}f(0,1)=1\times\boldsymbol{i}+0\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$.

(3) D

解　由 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 可知其特征根为$\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2i$.

故对应的特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4),$$

即 $\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$，

所以所求微分方程为

$$y'''-y''+4y'-4y=0.$$

(4) B

解　若$\{x_n\}$单调，则由 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界知，$\{f(x_n)\}$单调有界，因此$\{f(x_n)\}$收敛.

(5) C

解　$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，

所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 均可逆.

(6) B

解　此二次曲面为旋转双叶双曲面，此曲面的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 1.

(7) A

解　设 Z 的分布函数为$F_Z(x)$，则

$F_Z(x)=P(Z\leqslant x)=P\{\max\{X,Y\}\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}$.

由于 X 与 Y 独立同分布，于是有

$F_Z(x)=P(X\leqslant x)P(Y\leqslant x)=F^2(x)$.

(8) D

解 用排除法.

设 $Y=aX+b$，由 $\rho_{XY}=1$ 知 X,Y 相关，得 $a>0$，排除 A、C；

由 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 得

$EX=0,EY=1$，

$E(Y)=E(aX+b)=aEX+b$，

$1=a\times 0+b$，$b=1$. 排除 B. 故应选 D.

二、填空题

(9) $\dfrac{1}{x}$

解 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-y}{x}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

积分得 $-\ln|y|=\ln|x|+C_1$，

所以 $\dfrac{1}{|y|}=|x|+C$.

又 $y(1)=1$，所以 $y=\dfrac{1}{x}$.

(10) $y=x+1$

解 设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，斜率

$$k=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y\cos(xy)+\dfrac{-1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}},$$

在 $(0,1)$ 处，$k=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$.

(11) $(1,5]$

解 由题意知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 的收敛域为 $(-4,0]$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$.

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$.

(12) 4π

解

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+D}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{上}}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{上}}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=0+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{上}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2 r\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi.$$

(13) 1

解 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2]=[0,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$.

记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$，$\boldsymbol{P}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{B}$ 相同的特征值

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1),$$

$\lambda_{1,2}=0,1$，

所以非零的特征值为 1.

(14) $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

解 因为 $DX=EX^2-(EX)^2$，所以 $EX^2=2$，X 服从参数为 1 的泊松分布，

所以 $P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

三、解答题

(15) **解** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

(16) **解法一** $\displaystyle\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi}[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

解法二 取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域.

$$\int_L \sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy$$

$$=\int_{L+L_1}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy-\int_{L_1}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy$$

$$=-\iint_D 4xy\,dx\,dy-\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}4xy\,dy-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\int_0^{\pi}2x\sin^2 x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

(17) **解** 点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面最远点和最近点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$，

由

$$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+\mu=0,\\ L'_y=2\lambda y+\mu=0,\\ L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\ x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$$

得 $x=y$，从而

$$\begin{cases}2x^2-2z^2=0,\\ 2x+3z=5,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-5,\\ y=-5,\\ z=5,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=1.\end{cases}$$

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

(18)（Ⅰ）**证**　对任意的 x，由于 f 是连续函数，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi),\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$，可知函数 $F(x)$ 在 x 处可导，且 $F'(x)=f(x)$.

（Ⅱ）**证法一**　要证明 $G(x)$ 以 2 为周期，即要证明对任意的 x，都有 $G(x+2)=G(x)$.

记 $H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$\begin{aligned}H'(x)&=\left(2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'-\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'\\&=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2f(x)+\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\&=0,\end{aligned}$$

又因为

$$H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)-0=0,$$

所以
$$H(x)=0\text{，即 }G(x+2)=G(x).$$

证法二　由于 f 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意的 x，有

$$\begin{aligned}G(x+2)-G(x)&=2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\&=2\left[\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=2\left[\int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=2\int_0^x[f(t+2)-f(t)]\mathrm{d}t\\&=0,\end{aligned}$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

(19) **解**　由于

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2-\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}, n=1,2,\cdots,$$

所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$
$$=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

令 $x=0$,有

$$f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

又 $f(0)=1$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(20) **证** (Ⅰ) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$

$$\leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$$
$$\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})$$
$$\leqslant 2.$$

(Ⅱ) 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,不妨设 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$,于是

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$$
$$=r((1+k^2)\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$$
$$\leqslant r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1<2.$$

(21) (Ⅰ) **证** 记

$$D_n=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n,$$

以下用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时,$D_1=2a$,结论成立.

当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$,结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立.将 D_n 按第 1 行展开,得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}\\
&=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}\\
&=(n+1)a^n,
\end{aligned}
$$

故$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

（Ⅱ）**解**　当 $a\neq 0$ 时，方程组系数行列式 $D_n\neq 0$，故方程组有唯一解. 由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & & & & \\
0 & 2a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a^2 & 2a & 1\\
 & & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}_n
=
\begin{vmatrix}
2a & 1 & & & \\
a^2 & 2a & 1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & a^2 & 2a & 1\\
 & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}_{n-1}
=D_{n-1}=na^{n-1},
$$

所以　　$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

（Ⅲ）**解**　当 $a=0$ 时，方程组为

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & \\
 & 0 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & 1\\
 & & & & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},
$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为

$$\boldsymbol{x}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

(22) **解**　（Ⅰ）$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=\dfrac{P\left\{X=0,Z\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{P\left\{X=0,Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}\\
&=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

（Ⅱ）
$$
\begin{aligned}
F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\
&=P\{X+Y\leqslant z,X=-1\}+P\{X+Y\leqslant z,X=0\}+P\{X+Y\leqslant z,X=1\}\\
&=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}\\
&=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}\\
&=\frac{1}{3}[P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\}]\\
&=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F\ (z)+F_Y(z-1)],
\end{aligned}
$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$
$$=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(23)（Ⅰ）**证**　因为

$$ET=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)$$
$$=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}ES^2$$
$$=(E\overline{X})^2+D\overline{X}-\frac{1}{n}ES^2$$
$$=\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}$$
$=\mu^2$,所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

（Ⅱ）**解**　当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,有

$$DT=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)（注意\ \overline{X}\ 与\ S^2\ 独立）$$
$$=D\overline{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2$$
$$=\frac{1}{n^2}D(\sqrt{n}\ \overline{X})^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]$$
$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)$$
$$=\frac{2}{n^2}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}.$$